הסתברות לדו-חוגי

נופר שמאי
205500846

תרגיל בית 4

(1)

$\Omega = \{ \omega=(a_1,a_2) \mid a_1 = \text{המטבע שיצא} ,\ a_2 = \text{התוצאה בהטלתו} \}$

א. A - לקבל "ראש" בהטלת המטבע שיצא באקראי

$A = \{ \omega \in \Omega \mid a_2 = \text{"ראש"} \}$

$P\left(\text{ראש בהטלת מטבע k}\right) = \frac{k-1}{4}$

לכן, ע"פ נוסחאת ההסתברות השלמה:

$P(A) = \cancel{\frac{1-1}{4}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2-1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3-1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4-1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16}$

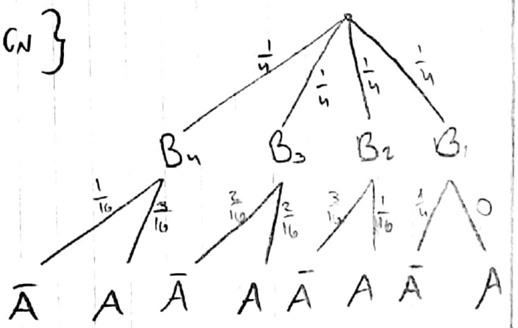
$P(A) = \frac{3}{8}$ ✓

ב. B_i - מטבע i התקבל באקראי.

$B_i = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = \text{מטבע } i \}$

צ"ל: $P(B_3 \mid A) = ?$

$B_3 \mid A = \{ \omega \in A \mid a_1 = \text{מטבע } 3 \}$



$P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{3-1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{6}$ ✓

ג. D_i = בהטלה ה-i התקבל ראש

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 = \text{המטבע שיצא},\ a_2 = \text{תוצאת הטלה 1},\ a_3 = \text{תוצאת הטלה 2}\}$$

$$D_1 = \{\omega \in \Omega \mid a_2 = \text{ראש}\}$$

$$D_2 = \{\omega \in \Omega \mid a_3 = \text{ראש}\}$$

$$P(D_1) = \frac{0}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(D_2) = \cancel{\frac{1}{4}\cdot\frac{0}{4}\cdot\frac{0}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{0}{4}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{4}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = \cancel{\frac{1}{4}\cdot\frac{0}{4}\cdot\frac{0}{4}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} = \frac{14}{64}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{14}{64} \neq \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{64} = P(D_1)\cdot P(D_2)$$

$\Leftarrow$ המאורעות D_1 ו-D_2 תלויים. ✓

2

$\Omega = \{ \omega = (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 = \text{תוצאת קוביה I},\ a_2 = \text{תוצאת קוביה II},\ a_3 = \text{תוצאת קוביה III} \}$

A= תוצאת הקוביה ה-I זהה לתוצאת הקוביה ה-II.

$A = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = a_2 \}$

B= תוצאת הקוביה ה-I זהה לתוצאת הקוביה ה-III

$B = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = a_3 \}$

C= תוצאת הקוביה ה-II זהה לתוצאת הקוביה ה-III

$C = \{ \omega \in \Omega \mid a_2 = a_3 \}$

א.

$P(A) = \frac{\cancel{6} \cdot 1 \cdot \cancel{6}}{6 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6}} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 1}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 6} = \frac{1}{6}$

$P(C) = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 1}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 6} = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{\cancel{6} \cdot 1 \cdot 1}{\cancel{6} \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ ב"ת

$A \cap B = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = a_2 = a_3 \}$

$B \cap C = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = a_3 = a_2 \}$

$A \cap C = \{ \omega \in \Omega \mid a_1 = a_2 = a_3 \}$

$P(A \cap C) = \frac{\cancel{6} \cdot 1 \cdot 1}{\cancel{6} \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C) \Rightarrow$ ב"ת

$P(B \cap C) = \frac{\cancel{6} \cdot 1 \cdot 1}{\cancel{6} \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(C) \Rightarrow$ ב"ת

$\Leftarrow$ המאורעות A,B,C ב"ת בזוגות!

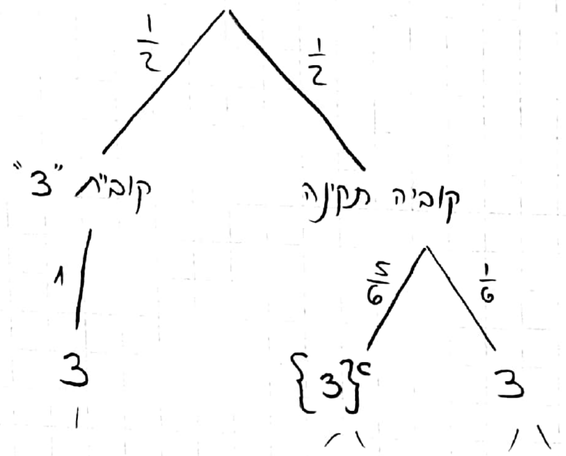
ב.

$$A\cap B\cap C=\{\omega\in\Omega \mid a_1=a_2=a_3\}$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{\cancel{6}\cdot 1\cdot 1}{\cancel{6}6\cdot 6}=\frac{1}{36}\neq \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

$\Leftarrow$ המאורעות A,B,C תלויים.

3



$$\Omega=\{\omega=(a_1,a_2,a_3,a_4) \mid a_1=\text{סוג הקוביה הטלה I},\ a_2=\text{תוצאת ההטלה I},\ a_3=\text{סוג קוביה הטלה II},\ a_4=\text{תוצאת הטלה II}\}$$

$A=$ תוצאת ההטלה ה-I היא 3.

$$A=\{\omega\in\Omega \mid a_2=3\} \qquad P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{12}$$

$$B=\{\omega\in\Omega \mid a_1=a_3,\ a_2=a_4=3\}$$

$B=$ תוצאת הטלה II עם אותה קוביה $=3$.

$C=$ תוצאת הטלה II עם קוביה שונה $=3$.

$$C=\{\omega\in\Omega \mid a_1\neq a_3,\ a_2=a_4=3\}$$

$$B|A=\{\omega\in A \mid a_1=a_3,\ a_2=a_4\}$$

$$P(B|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}=\frac{\frac{37}{72}}{\frac{42}{72}}=\frac{37}{42}=0.88$$

$$C|A=\{\omega\in A \mid a_1\neq a_3,\ a_2=a_4\}$$

$$P(C|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{2}{7}=0.28$$

$\Leftarrow$ ההסתברות לקבל שוב 3 בהטלת הקוביה שנבחרה גבוה יותר!

4

$P(B)>0\ ,\ P(A)>0$

א. זוג מאורעות זרים יהיו ב"ת.

הטענה שגויה תמיד! הוכחה:

← נתון A,B מאורעות זרים: $A\cap B=\emptyset$

← ע"פ הגדרת מידת הסתברות: $P(\emptyset)=P(A\cap B)=0$

← לפי הנתון הסתברויות A,B חיוביות ולכן: $P(A)\cdot P(B)>0$

← ולכן: $P(A\cap B)=0\neq P(A)\cdot P(B)$

← ע"פ הגדרת תלות בין מאורעות: A,B תלויים. ■

ב. זוג מאורעות ב"ת יהיו זרים.

הטענה שגויה תמיד! הוכחה:

← לפי הגדרת תלות והנתון ש- A,B ב"ת: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

← לפי הנתון שהסתברויות A,B חיוביות: $P(A)\cdot P(B)>0$

← ולכן: $P(A\cap B)>0$

← כלומר: $P(A\cap B)\neq 0$

← לפי הגדרת מאורעות זרים: A,B אינם מאורעות זרים. ■

ג. זוג מאורעות שווי הסתברות יהיו זרים.

נתון: $P(A)=P(B)$ $\Leftarrow$ $P(A\cap B)=0$

הטענה נכונה רק בחלק מהמקרים.

נבדוק באיזה מקרים זה מתקיים:

← מהנתון $P(A)=P(B)$

← מהגדרת מאורעות זרים: $A\cap B=\emptyset$

← לפי הגדרת מידת הסתברות: $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$

← לפי תכונות פונקצית ההסתברות: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{0}$

← קיבלנו כי: $P(A\cup B)=2P(A)=2P(B)$

⇐ כלומר הטענה: זוג מאורעות שווי הסתברות יהיו זרים, רק כאשר:

$P(A)=P(B)\leq\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\underline{P(A\cup B)=2P(A)=2P(B)}$

3. זוג מאורעות שווי הסתברות יהיו ב"ת.

נתון: $P(A)=P(B)$ $\Leftarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

הטענה נכונה בחלק מהמקרים בלבד.

← נתון: $P(A)=P(B)$

← מהגדרת אי-תלות בין מאורעות: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap B)=(P(A))^2=(P(B))^2$

⇐ כלומר, הטענה מתקיימת רק כאשר מתקיים:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=(P(A))^2=(P(B))^2$