第35卷第4期
2003年8月
南京航空航天大学学报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics
Vol. 35 No. 4
Aug. 2003

基于纯策略的灰矩阵二人有限零和博弈模型研究

方志耕，刘思峰
（南京航空航天大学经济与管理学院，南京，210016）

摘要：运用灰色系统理论分析和研究了基于纯策略的灰矩阵二人有限零和最保守博弈决策问题。研究了灰博弈损益值矩阵的特性，构建了该问题的数学模型，提出并证明了该问题的局中人各单方面和整体的灰矩阵二人有限零和最保守博弈决策有解的充分必要条件，提出了该问题解的灰鞍点概念。在此基础上，用该灰矩阵博弈理论来解决某单位冬季取暖用煤的采购决策问题，取得了良好效果。

关键词：灰色系统；灰矩阵博弈；灰鞍点
中图分类号：C931；F224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-2615(2003)04-0441-05

Grey Matrix Game Model Based on Pure Strategy

FANG Zhi-geng, LIU Si-feng
(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: The classical matrix game theories can be used to solve the matrix game problems described by classical mathematics. However, in the real life, there are many problems of the game, for example some grey elements in the payoff matrix, which cannot be pictured by the classical mathematics. This paper studies the problems of grey matrix game based on pure strategy applying grey system theories. The properties of the gains and loss matrix of grey matrix game are analyzed. Then a mathematical model for the problem is built. The necessary and sufficient conditions for the solution of the mono-side and the whole-side grey matrix game are proposed and proved. The conception of the grey saddle point of the solution is put forward. Furthermore, a practical grey matrix game problem, in which some department stocks coal for warm oneself in the winter, is solved by the grey matrix game theories.

Key words: grey system; grey matrix game; grey saddle point

引　言

事实上，在二人有限零和博弈过程中，博弈双方所依据的损益值矩阵大部分都是基于局中人的事先判断[1,2]。然而，由于人的认知水平的限制、信息不完全、系统的结构性和随机性波动等因素的影响，使得人们事先无法对其博弈结果值作出十分精确的判断。

而且，从二人有限零和博弈的事后博弈结果来看，尽管其实际的博弈结果是各局中人的所得之和为零，也就是说，其事后值是清楚的。然而，现实中，由于各种随机因素和非随机因素的影响，使得这种博弈，即使在纯策略意义下，在下一次被完全重复，其实际博弈结果所表现的各局中人的损益值未必与上一次完全一致[3,4]。

基金项目：国家博士学科点科研基金(20020287001)；南京航空航天大学特聘教授科研创新基金(1009-260812)资助项目。
收稿日期：2002-10-25；修订日期：2003-03-24
作者简介：方志耕，男，副教授，1962年生，E-mail：zhigengfang@163.com；刘思峰，男，特聘教授，博士生导师，1955年生。

例如，在一个相对封闭的彩电市场上，甲、乙两家寡头垄断厂商瓜分了市场，他们为了抢占更多的市场份额而采取各种策略（降价、高质量的服务、增加产品功能、提高产品质量等）相互博弈竞争，但是由于各种原因，局中人对其各种可能的局势所产生的损益值事先无法作出精确的估计。事实上，即使在较严格的限制条件下，由于各种随机因素和非随机因素的影响，使得这种博弈的任意两次的博弈损益值也不可能完全一致[5]。也就是说，在现实中，二人有限零和博弈的损益值矩阵不可能是完全清楚和准确的，而是灰色的。

1　灰色博弈损益值矩阵分析

定义1　若某矩阵的各元素中，有区间灰数$[a,b](a<b)$，则称该矩阵为灰区间数矩阵，简称灰矩阵，用$A(\otimes)$表示[6]。

为了讨论问题的方便，本文将所讨论的灰数限定为区间灰数。这主要是因为：(1)区间灰数在所有各种类型的灰数中最具代表性；(2)对于无上、下界的灰数可根据实际情况将其上、下界设定为一个绝对值充分大的数，从而将其转换为区间灰数。

定义1说明，在一个普通的矩阵中，如果出现了某个或者某些元素为区间灰数，则该矩阵被简称为灰矩阵。

定义2　若二人有限零和博弈中，局中人所依据的事先判断的损益值矩阵为灰矩阵$A(\otimes)$，则称该博弈为二人有限零和灰博弈，可表示为$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$。其中：$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$为局中人甲的策略集；$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$为局中人乙的策略集；$A(\otimes)$为局中人事先判断的灰损益值矩阵。

考虑到博弈对各种博弈局势所产生的损益值的判断可能不一致，可将其分为两种情况来考虑。

(1)双方的认识是一致的，即他们针对同一个事先判断的灰色损益值矩阵进行博弈决策，或者说，此时的灰色博弈矩阵是共同知识，可用公式(1)来表示。

$$A(\otimes)^0=\begin{bmatrix}[a_{11}^0,b_{11}^0] & [a_{12}^0,b_{12}^0] & \cdots & [a_{1n}^0,b_{1n}^0]\\ [a_{21}^0,b_{21}^0] & [a_{22}^0,b_{22}^0] & \cdots & [a_{2n}^0,b_{2n}^0]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [a_{m1}^0,b_{m1}^0] & [a_{m2}^0,b_{m2}^0] & \cdots & [a_{mn}^0,b_{mn}^0]\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中：$a_{ij}^0\leqslant b_{ij}^0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

(2)博弈双方对各种可能博弈局势的损益值的判断不一致，而且双方关于这一博弈值的判断不能互通信息，也就是说，其灰色博弈矩阵值不是共同知识，而是博弈各方所掌握的机密，可分别用式(2，3)表示局中人甲和乙的事先判断的损益值矩阵。

$$A(\otimes)^1=\begin{bmatrix}[a_{11}^1,b_{11}^1] & [a_{12}^1,b_{12}^1] & \cdots & [a_{1n}^1,b_{1n}^1]\\ [a_{21}^1,b_{21}^1] & [a_{22}^1,b_{22}^1] & \cdots & [a_{2n}^1,b_{2n}^1]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [a_{m1}^1,b_{m1}^1] & [a_{m2}^1,b_{m2}^1] & \cdots & [a_{mn}^1,b_{mn}^1]\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中：$a_{ij}^1\leqslant b_{ij}^1(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

$$A(\otimes)^2=\begin{bmatrix}[a_{11}^2,b_{11}^2] & [a_{12}^2,b_{12}^2] & \cdots & [a_{1n}^2,b_{1n}^2]\\ [a_{21}^2,b_{21}^2] & [a_{22}^2,b_{22}^2] & \cdots & [a_{2n}^2,b_{2n}^2]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [a_{m1}^2,b_{m1}^2] & [a_{m2}^2,b_{m2}^2] & \cdots & [a_{mn}^2,b_{mn}^2]\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中：$a_{ij}^2\leqslant b_{ij}^2(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

定义3　提取灰色博弈矩阵$A(\otimes)^k,k=0,1,2$中各元素的左端点和右端点的值所构成的矩阵，分别称为局中人甲的最保守（乙的最乐观）和甲的最乐观（乙的最保守）博弈决策矩阵。

由于灰矩阵$A(\otimes)^k,k=0,1,2$中各元素都是由区间灰数构成，事实上，如果某些元素是白化数，可令其为左、右端点数值相等，从而将其转换为区间灰数；且由区间灰数$[a_{ij}^k,b_{ij}^k(k=0,1,2;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$的性质可知，$a_{ij}^k\leqslant b_{ij}^k(k=0,1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$即区间灰数左端点的值小于右端点的值[6]。

因此，提取灰色博弈矩阵$A(\otimes)^k,k=0,1,2$中各元素的左端点和右端点的值所构成的矩阵，分别称为局中人甲的最保守（乙的最乐观）和甲的最乐观（乙的最保守）博弈决策矩阵。（证毕）

限于篇幅，本文仅对矩阵(1)的情形进行讨论，而对于矩阵(2，3)的情形，作者将另文阐述。

2　模型构建

为了便于讨论，尽量地保持模型的现实意义，先作如下假定：

(1)博弈双方的博弈策略集均为有限集，且为双方的共同知识；

(2)博弈双方所依据的损益值矩阵为区间灰数矩阵，且为双方的共同知识；

(3)博弈中，各局势的实际博弈结果为零和；

(4)参加博弈的双方均为“理性人”，他们的博弈行为均为“理智行为”。

在灰矩阵博弈过程中，如果双方都不存在侥幸

心理，而是考虑到对方也是同样理性的，必然会从各自可能出现的最不利的情形中选择一种最为有利的情形作为决策的依据，这就是所谓的“理智行为”，也是博弈双方实际上都能接受的一种稳妥的方法[7~9]。因此，按照这一理智行为的假设，在灰矩阵博弈过程中，博弈双方均只会依据其最保守值矩阵进行博弈决策。

定义4　设$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$为灰矩阵博弈，其中：$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$；$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$；$A(\otimes)=\{[a_{ij},b_{ij}]\}_{m\times n}$。若博弈中的甲、乙双方均依据各自的最保守值矩阵$\tilde{A}^1=\{a_{ij}\}_{m\times n}$和$\tilde{A}^2=\{b_{ij}\}_{m\times n}$进行博弈决策，则称该博弈决策为甲、乙的单方面保守博弈决策，分别记为：$\tilde{G}^1=\{S_1,S_2;\tilde{A}^1\}$和$\tilde{G}^2=\{S_1,S_2;\tilde{A}^2\}$。

定义5　设$\tilde{G}^1=\{S_1,S_2;\tilde{A}^1\}$和$\tilde{G}^2=\{S_1,S_2;\tilde{A}^2\}$分别为甲、乙的单方面保守博弈决策，若在甲、乙的单方面保守博弈决策过程中，有下列等式(4,5)成立

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i^*j^*} \tag{4}$$

$$\max_i \min_j b_{ij} = \min_i \max_j b_{ij} = b_{i^*j^*} \tag{5}$$

分别记$V_G^1=a_{i^*j^*}$和$V_G^2=b_{i^*j^*}$则称V_G^1和V_G^2分别为博弈$\tilde{G}^1$和$\tilde{G}^2$的值，称使式(4,5)成立的纯局势$(\alpha_{i^*}^1,\beta_{j^*}^1)$和$(\alpha_{i^*}^2,\beta_{j^*}^2)$为博弈$\tilde{G}^1$和$\tilde{G}^2$在纯策略意义下的解(或平衡局势)，$\alpha_{i^*}^1,\beta_{j^*}^2$和$\alpha_{i^*}^2,\beta_{j^*}^2$分别称为博弈$\tilde{G}^1$和$\tilde{G}^2$的局中人甲和乙的最优纯策略。

定理1　设$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$为灰矩阵博弈，则对于甲和乙的单方面保守博弈决策$\tilde{G}^k$，$k=1,2$(1为局中人甲的单方面保守决策；2为局中人乙的单方面保守决策)而言，在纯策略意义下有解的充要条件是：存在纯局势$(\alpha_{i^*}^k,\beta_{j^*}^k)$，$k=1,2$；使得对一切$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$均有：$a_{ij^*}^k\leqslant a_{i^*j^*}^k\leqslant a_{i^*j}^k$，其中$k=1,2$。

定理1主要说明灰矩阵博弈$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$的各单方面保守博弈决策$\tilde{G}^k$，$k=1,2$，在纯策略意义下有解的充要条件。限于篇幅本文省略了该定理的证明，其证明过程类同于文[1]第393页定理1的证明。

定理2　灰矩阵博弈$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$在纯策略意义下有全局(整体)最优解的充要条件是：

局中人各单方面保守博弈决策$\tilde{G}^k$，$k=1,2$，，在纯策略意义下有解，或者说，在各单方面保守博弈决策$\tilde{G}^k$，$k=1,2$中，局中人甲和乙都能分别取得其灰色最优纯策略$\alpha_{i^*}^1$和$\beta_{j^*}^2$。

证明　(先证充分性)不失一般性，可设灰矩阵博弈$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$的灰色损益值矩阵如式(6)所示。

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix}[a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}]\\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [a_{m1},b_{m1}] & [a_{m2},b_{m2}] & \cdots & [a_{mn},b_{mn}]\end{bmatrix} \tag{6}$$

其中：$a_{ij}\leqslant b_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$。

由式(6)可分别得到局中人甲和乙的保守值矩阵$\tilde{B}^1$和$\tilde{B}^2$，分别见式(7,8)

$$\tilde{B}^1=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\tilde{B}^2=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix} \tag{8}$$

由已知条件可知，局中人甲根据式(7)可取得其灰色最优纯策略α_{i^*}和$\beta_{j^0}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，其博弈值为$V_G^1=a_{i^*j^0}$；局中人乙根据式(8)可取得其灰色最优纯策略$\alpha_{k^0}$和$\beta_{l^*}(k=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,n)$，其博弈值为$V_G^2=b_{k^0l^*}$。

本文分别取得局中人甲和乙的灰色最优纯策略α_{i^*}和$\beta_{l^*}(i=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,n)$。这样，针对灰色损益值矩阵(6)而言，即可得到一个灰色全局纯局势$(\alpha_{i^*},\beta_{l^*})$和该局势下的博弈值$[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]$，如表1所示。

由表1可知，在灰矩阵博弈$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$中，其灰色全局纯局势下的博弈值$[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]$中的$a_{i^*l^*}$是对甲的纯策略意义下的保守值解$a_{i^*j^0}$的一个改善，在其他博弈信息未能变得更加清楚之前，或这些信息不能对解改善之前，甲会对于解$a_{i^*l^*}$感到很满意，而不会有其他的解比$a_{i^*l^*}$更为满意。同样地，对于局中人乙而言，其灰色全局纯局势下的博弈值$\lfloor a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}\rfloor$中的$b_{i^*l^*}$是对乙的纯策略意义下的保守值解$b_{k^0l^*}$的一个改善，在其他博弈信息未能变得更加清楚之前，或这些信息不能对解改善之前，乙会对于解$b_{i^*l^*}$感到很满意，而不会有其他的解比$b_{i^*l^*}$更为满意。因此，可以认为：在灰矩阵博弈$\tilde{G}=\{S_1,S_2;A\}$中，其灰色全局纯局势下的博弈解$[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]$也相当于一个“鞍点”[1]，本文把它称为灰色全局纯局势下的灰鞍点。

表1　纯策略意义下，灰矩阵博弈$\widetilde{G}=\{S_1,S_2;\widetilde{A}\}$的单方面和全局保守最优解

甲	乙								
	β_1	β_2	⋯	β_{j^0}	⋯	β_{l^*}	⋯	β_n	Min
α_1	$[a_{11},b_{11}]$	$[a_{11},b_{11}]$	⋯	$[a_{1j^0},b_{1j^0}]$	⋯	$[a_{1l^*},b_{1l^*}]$	⋯	$[a_{1n},b_{1n}]$	· ·
α_2	$[a_{21},b_{21}]$	$[a_{22},b_{22}]$	⋯	$[a_{2j^0},b_{2j^0}]$	⋯	$[a_{2l^*},b_{1l^*}]$	⋯	$[a_{2n},b_{2n}]$	· ·
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	· ·
α_{s^0}	$[a_{s^01},b_{s^01}]$	$[a_{s^02},b_{s^02}]$	⋯	$[a_{s^0j^0},b_{s^0j^0}]$		$\underline{[a_{s^0l^*},b_{s^0l^*}]}$	⋯	$[a_{s^0n},b_{s^0n}]$	$\underline{[a_{s^0l^*},b_{s^0l^*}]}^{*}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	· ·
α_{i^*}	$[a_{i^*1},b_{i^*1}]$	$[a_{i^*2},b_{i^*2}]$	⋯	$\underline{[a_{i^*j^0},b_{i^*j^0}]}$		$\boxed{[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]}$	⋯	$[a_{i^*n},b_{i^*n}]$	$\underline{[a_{i^*j^0},b_{i^*j^0}]}^{*}$ $\boxed{[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]}^{**}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	··
α_m	$[a_{m1},b_{m1}]$	$[a_{m2},b_{m2}]$	⋯	$[a_{mj^0},b_{mj^0}]$	⋯	$[a_{ml^*},b_{ml^*}]$	⋯	$[a_{mn},b_{mn}]$	· ·
Max	· ·	· ·	· ·	$\underline{[a_{i^*j^*},b_{i^*j^0}]}^{*}$	· ·	$\underline{[a_{s^0l^*},b_{s^0l^*}]}^{*}$ $\boxed{[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]}^{**}$	· ·	· ·	· ·

注：带下划线和“*”号的灰数是局中人的单方面保守解；而带方框和“* *”号的是灰色全局纯局势下的博弈解。

（再证必要性）若灰矩阵博弈$\widetilde{G}=\{S_1,S_2;A(\otimes)\}$在纯策略意义下有全局（整体）最优解$[a_{i^*l^*},b_{i^*l^*}]$，也就是说，灰色全局纯局势下的灰鞍点存在。

那么，对于局中人甲而言，由以上分析可知，其灰色全局纯局势下的解一定不小于甲的单方面保守纯策略α_{i^*}下的解，即$\min\{a_{ij}\}=a_{i^*j^0}\leqslant a_{i^*l^*}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

同样地，对于局中人乙而言，可得乙的单方面保守纯策略β_{l^*}下的解，$\min\{b_{ij}\}=b_{s^0l^*}\leqslant b_{i^*l^*}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

这样，依据甲、乙的单方面保守值矩阵，可分别得到纯策略意义下甲、乙的单方面保守值解$[a_{i^*j^0},b_{i^*j^0}]$和$[a_{s^0l^*},b_{s^0l^*}]$。（证毕）

定理2的证明是构造性的，它说明了基于纯策略的灰矩阵二人有限零和博弈问题的求解过程。

3　案例研究

某单位采购员在秋天要决定冬季取暖用煤的贮量问题。已知在正常的冬季气温条件下最少要消耗15 t煤，最多要消耗17 t煤；在较暖与较冷的气温条件下最少要消耗10 t和20 t；最多要消耗11 t和22 t煤。假定冬季时的煤价随天气寒冷程度而有所变化，在较暖、正常、较冷的气候条件下每吨煤价分别为10～11元，15～16元和20～22元，又设秋季时煤价为10元。在没有关于当年冬季准确的气象预报的条件下，秋季贮煤多少吨能使单位的支出最少？

这一问题可以看成一个对策问题，视采购员为局中人甲，甲有三个策略（用灰数表示）：在秋天时买[10,11]t、[15,17]t和[20,22]t，分别记为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。视大自然为局中人乙，乙有三种策略：较暖（煤价为每吨[10,11]元）、正常（煤价为每吨[15,16]元）与较冷（煤价为每吨[20,22]元）的冬季，分别记为β_1,β_2,β_3。

现在把单位冬季取暖用煤实际费用（即秋季购煤时的费用、与冬季不够时再补购的费用总和）作为局中人甲的赢得，得矩阵如表2所示。

表2　某单位冬季取暖用煤灰色损益值矩阵与灰矩阵博弈

甲	乙			
	β_1	β_2	β_3	Min
α_1	[−121,−100]	[−233,−160]	[−385,−280]	[−385,−280]
α_2	[−170,−150]	[−170,−150]	[−324,−210]	[−324,−210]
α_3	[−220,−200]	[−220,−200]	[−220,−200]	$[-220^*,-200^*]^{**}$
Max	[−121,−100]	[−170,−150]	$[-220^*,-200^*]^{**}$	

注：带“*”号的灰数是局中人的单方面保守解，带“* *”号者是全局纯局势下的灰色博弈解。

表2中，某单位冬季取暖用煤灰色损益值矩阵值的计算过程如下：

在天气较暖（局中人乙选择 β_1 策略），而局中人甲选择了 α_1 策略时，局中人甲的损益值的计算过程为

$$-\{[10,11]*[10,11]\}=[-121,-100]$$

在天气正常（局中人乙选择 β_2 策略），而局中人甲选择了 α_1 策略时，局中人甲的损益值的计算过程为

$$-\{[10,11]*[10,11]+\{[15,17]-[10,11]\}*[15,16]\}=[-233,-160]$$

在天气较冷（局中人乙选择 β_3 策略），而局中人甲选择了 α_1 策略时，局中人甲的损益值的计算过程为

$$-\{[10,11]*[10,11]+\{[20,22]-[10,11]\}*[20,22]\}=[-385,-280]$$

同理可得表2中的其他数据。

根据定理2，由表2可知：该问题的灰矩阵博弈解为 (α_3,β_3)，即秋季贮煤[20,22] t合理。

参考文献：

[1] 刘德铭，黄振高编著．对策论及其应用[M]．长沙：国防科技大学出版社，1996. 1～65.

[2] Batabyal A A. Grames govements play: an analysis of natronal environmental poliey in an open economy [J]. Ann Reg Sci, 1998, (32): 237～251.

[3] Kifer Y. Game options[J]. Finance and Stochastics, 2000, (4): 443～463.

[4] Hwng Y A. Axiomatizations of the core on the universal domain and other natural domains [J]. International Journal of Game Theory, Int J Game Theory, 2001, (29): 597～623.

[5] Cho I K, LI Hao. How complex are networks playing repeated games?[J]. Economic Theory, 1999, (13): 93～123.

[6] 刘思峰，郭天榜，党耀国，等著．灰色系统理论及其应用[M]．北京：科学出版社，1999. 270.

[7] 《运筹学》教材编写组编．运筹学[M]．北京：清华大学出版社，1990. 388～420.

[8] 汪应洛主编．系统工程理论、方法与应用[M]．北京：高等教育出版社，1992. 410.

[9] List J A. Mason C F. Spatial aspects of pollution control when pollutants have synergistic effects: evidence from adifferential game with asymmetric information[J]. Ann Reg Sci, 1999, (33): 439～452.