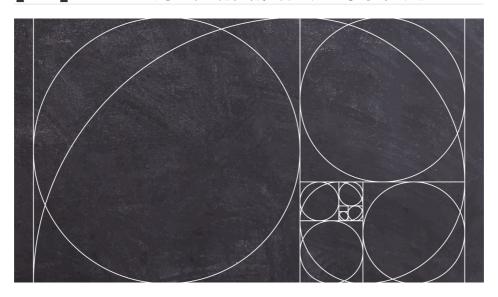
footer: 高等工程数学, NUDT, Autumn 2020 slidenumbers: true build-lists: true autoscale: true

[fit] 1.2 线性变换及其矩阵表示



[.build-lists: false]

1.2.1 线性变换的定义

设 V_1,V_2 同为数域 F 上的线性空间, T 是 V_1 到 V_2 的映射,若对 $\forall {m lpha},{m eta} \in V_1$ 和 $\forall k \in F$

- $T(\alpha + \beta) = T\alpha + T\beta$
- $T(k\alpha) = kT\alpha$

则称 T 为线性空间到 V_1 到 V_2 的 **线性变换**(或 **线性算子**,Linear Transformation/Map/Operator)

性质 设 $T \in V_1 \rightarrow V_2$ 的线性变换

- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V_1$ 线性相关
 - \circ 则 $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$ 必线性相关
- 若 $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$ 线性无关
 - \circ 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关
- **思考** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V_1$ 线性无关, $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$ 是否必线性无关?

例在线性空间 $P_n(t)$ 上定义

$$Tp(t) = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t), \quad orall p(t) \in P_n(t)$$

则 $T \in P_n(t)$ 到 $P_{n-1}(t)$ 的线性算子.

• $P_n(t)$ 表示次数不超过 n 的实系数多项式全体.

 $extit{例设} A \in \mathbf{C}^{m imes n}$, $\forall m{x} \in \mathbf{C}^n$, 定义映射 T 为

$$T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

则 $T \in \mathbb{C}^n$ 到 \mathbb{C}^m 的线性变换。

● 一个矩阵就定义了(对应于)一个线性变换

[.build-lists: false]

 $extit{ 例 设 } B = \{m{lpha}_1, m{lpha}_2, m{lpha}_3\}$ 是线性空间 V 的一个基,定义映射 T 为: $\forall x_1, x_2, x_3 \in F$

$$T(x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \, \boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + x_3) \, \boldsymbol{\alpha}_2 + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3$$

- 1. 证明: $T \in V \to V$ 的线性变换;
- 2. 设 $oldsymbol{eta}_0 = oldsymbol{lpha}_1 + 2oldsymbol{lpha}_2 + 3oldsymbol{lpha}_3$, 试求 $Toldsymbol{eta}_0$.

提示: 1. 证明 T 是线性变换

• $\exists \mathbf{x} \alpha, \beta \in V$, $\exists \alpha = B\mathbf{x}, \beta = B\mathbf{y}$

。 其中
$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^{\mathrm{T}}$$

•
$$Toldsymbol{lpha} = Begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \ 0 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \end{bmatrix}$$
, $\mathbb{E}TBoldsymbol{x} = BAoldsymbol{x}$

•
$$T(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = T(B\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{y}) = T(B(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}))$$

$$\circ = BA(x + y) = BAx + BAy = T\alpha + T\beta$$

•
$$T(k\alpha) = T(Bkx) = BA(kx) = kBAx = kT\alpha$$

提示: 2.求 $T\boldsymbol{\beta}_0$

•
$$Teta_0 = T(lpha_1 + 2lpha_2 + 3lpha_3)$$

• $= (1+2+3)lpha_1 + (2+3)lpha_2 + 3lpha_3$
• $= 6lpha_1 + 5lpha_2 + 3lpha_3$
• 或 $Teta_0 = B egin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6lpha_1 + 5lpha_2 + 3lpha_3$

1.2.2 线性变换的矩阵表示

设 $T \in V^n \to V^m$ 的线性变换, $B_{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 与 $B_{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 分别是 V^n 与 V^m 的基。

• 设
$$Toldsymbol{lpha}_i = B_{oldsymbol{eta}}oldsymbol{A}_i, \ i=1,2,\ldots,n$$
• $oldsymbol{A}_i = [a_{1i} \ a_{2i} \ \ldots a_{mi}]^{\mathrm{T}}$ 为 $Toldsymbol{lpha}_i$ 在基 $B_{oldsymbol{eta}}$ 下的坐标

•
$$i \exists A = [\boldsymbol{A}_1 \ \boldsymbol{A}_2 \ \dots \ \boldsymbol{A}_n]$$

• 则
$$TB_{m{lpha}}=\{Tm{lpha}_1,Tm{lpha}_2,\ldots,Tm{lpha}_n\}=B_{m{eta}}\{m{A}_1,m{A}_2,\ldots,m{A}_n\}=B_{m{eta}}A$$

• $\Re A$ 为线性变换 T 在 基偶 $\{B_{\alpha}, B_{\beta}\}$ 下的矩阵

特别地,

若 $T \in V^n \to V^n$ 的线性变换,且取

$$B_{\beta} = B_{\alpha}$$

• 则 A 是方阵, 称为 T 在基 B_{α} 下的 **矩阵**

例定义 \mathbb{R}^3 上的线性算子

$$Tm{x} = egin{bmatrix} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad m{x} = egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

求
$$T$$
在基 $B=\left\{ egin{bmatrix} 2\\2\\1 \end{bmatrix}, egin{bmatrix} -1\\1\\0 \end{bmatrix}, egin{bmatrix} -1\\0\\2 \end{bmatrix}
ight\}$ 下的矩阵.

• 记
$$B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$
, 计算可得

•
$$Teta_1=10eta_1=Begin{bmatrix} 10 \ 0 \ 0 \ \end{bmatrix}$$
• $Teta_2=eta_2=Begin{bmatrix} 0 \ 1 \ 0 \ \end{bmatrix}, Teta_3=eta_3=Begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 1 \ \end{bmatrix}$
• 故 T 在基 B 下的矩阵为 $A=egin{bmatrix} 10 \ 1 \ 1 \ \end{bmatrix}$

$$ullet \ Toldsymbol{eta}_2=oldsymbol{eta}_2=Begin{bmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}, Toldsymbol{eta}_3=oldsymbol{eta}_3=Begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$$

• 故
$$T$$
在基 B 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}10&&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

 $extit{ extit{M}}$ 设 $B_{m{lpha}}=\{m{lpha}_1,m{lpha}_2,m{lpha}_3\}$ 和 $B_{m{eta}}=\{m{eta}_1,m{eta}_2,m{eta}_3\}$ 都是线性空间 V^3 的 基,从 B_{α} 到 B_{β} 的过渡矩阵为

$$P = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

设 V^3 上的线性变换T满足

$$egin{aligned} T\left(oldsymbol{lpha}_1+2oldsymbol{lpha}_2+3oldsymbol{lpha}_3
ight) &=oldsymbol{eta}_1+oldsymbol{eta}_2\ T\left(2oldsymbol{lpha}_1+oldsymbol{lpha}_2+2oldsymbol{lpha}_3
ight) &=oldsymbol{eta}_2+oldsymbol{eta}_3\ T\left(oldsymbol{lpha}_1+3oldsymbol{lpha}_2+4oldsymbol{lpha}_3
ight) &=oldsymbol{eta}_1+oldsymbol{eta}_3\end{aligned}$$

(1) 求 T 在 B_{β} 下的矩阵; (2) 求 $T\beta_1$ 在基 B_{α} 下的坐标.

提示 (1) 求 T 在 B_{β} 下的矩阵

• 由已知
$$TB_{\alpha}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = B_{\beta}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
• $TB_{\beta} = TB_{\alpha}P = B_{\beta}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}P = B_{\beta}A$
• $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

- (2) 求 $T\beta_1$ 在基 B_{α} 下的坐标
- 先求 $T\beta_1$ 在基 B_{β} 下的坐标

$$ullet \ oldsymbol{y} = A egin{bmatrix} 1 \ 0 \ 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} -3 \ -5 \ 6 \end{bmatrix}$$

• $\mathrm{th} T \boldsymbol{\beta}_1$ 在基 B_{α} 下的坐标

$$\boldsymbol{\circ} \quad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

1.2.3 零空间与值空间

设 $T \in V^n \rightarrow V^m$ 的线性变换

- T 的 零空间(核、核空间)
 - $\circ \ N(T) = \{ oldsymbol{\xi} \mid T oldsymbol{\xi} = oldsymbol{0}, oldsymbol{\xi} \in V^n \}$
 - $\operatorname{null}(T) = \dim(N(T))$ 称为 T 的 零度 (Nullity)
- *T* 的 **值空间**(**值域**、列空间)
 - $\circ \ \ R(T) = \{oldsymbol{eta} \mid oldsymbol{eta} = Toldsymbol{lpha}, oldsymbol{lpha} \in V^n\}$
 - \circ rank $(T) = \dim(R(T))$ 称为 T 的 **秩** (Rank)

[.build-lists: false]

定理 设 $T \in V^n \to V^m$ 的线性变换,则

$$rank(T) + null(T) = n.$$

证明:

- 设 $\operatorname{null}(T) = s$,取 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 为 N(T) 的一组基
- 将 $\{m{lpha}_1,\ldots,m{lpha}_s\}$ 扩充为 V^n 的基 $\{m{lpha}_1,\ldots,m{lpha}_s,m{lpha}_{s+1},\ldots,m{lpha}_n\}$
- 下证 R(T) 中的任意向量均可由 $\{T\alpha_{s+1},\ldots,T\alpha_n\}$ 线性表示
 - 。 任意 $\eta \in R(T)$,存在 $\boldsymbol{\xi} \in V^n$,使得 $\boldsymbol{\eta} = T\boldsymbol{\xi}$
 - \circ 设 $oldsymbol{\xi} = \sum\limits_{k=1}^n x_k oldsymbol{lpha}_k$
 - 。 注意到 $T\boldsymbol{\alpha}_k=0,\ k=1,2,\ldots,s$

$$oldsymbol{\gamma} = T oldsymbol{\xi} = T \sum_{k=1}^n x_k oldsymbol{lpha}_k = \sum_{k=1}^n x_k T oldsymbol{lpha}_k = \sum_{k=s+1}^n x_k T oldsymbol{lpha}_k$$

• 再证 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{s+1}, T\boldsymbol{\alpha}_{s+2}, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关

。 设
$$\sum\limits_{k=s+1}^n x_k Toldsymbol{lpha}_k = 0$$

。 即
$$T\sum\limits_{k=s+1}^{n}x_{k}oldsymbol{lpha}_{k}=0$$
,故 $\sum\limits_{k=s+1}^{n}x_{k}oldsymbol{lpha}_{k}\in N(T)$

。 存在
$$x_k,\ k=1,2,\ldots,s$$
,使得 $\sum\limits_{k=1}^s x_koldsymbol{lpha}_k=\sum\limits_{k=s+1}^n x_koldsymbol{lpha}_k$

$$lacksquare \mathbb{E}\sum_{k=1}^s x_k oldsymbol{lpha}_k - \sum_{k=s+1}^n x_k oldsymbol{lpha}_k = 0$$

。
$$\{oldsymbol{lpha}_1,\ldots,oldsymbol{lpha}_n\}$$
 线性无关,故必有 $x_k=0,\ k=1,2,\ldots,n$

• 综上可知 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{s+1}, T\boldsymbol{\alpha}_{s+2}, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 R(T) 的基

$$\circ$$
 rank $(T) = n - s$

[.build-lists: false]

定理 设 $T \in V^n \to V^m$ 的线性变换,

$$B_{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, B_{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$$

分别是 V^n 与 V^m 的基, T 在基偶 $\{B_{\alpha}, B_{\beta}\}$ 下的矩阵为 A ,则

- 1. rank(T) = rank(A)
- 2. $\operatorname{null}(T) = n \operatorname{rank}(A)$
- 3. rank(T) + null(T) = n

[.build-lists: false]

$$TX = CX - XC, \quad X \in \mathbf{R}^{2 \times 2},$$

其中
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
.

- 1. 求T的零度和零空间的基;
- 2. 求T的秩和值空间的基.

[.build-lists: false]

提示

取 R^{2×2} 的基

$$E_1=egin{bmatrix}1&0\0&0\end{bmatrix}, E_2=egin{bmatrix}0&1\0&0\end{bmatrix}, E_3=egin{bmatrix}0&0\1&0\end{bmatrix}, E_4=egin{bmatrix}0&0\0&1\end{bmatrix}$$

•
$$T$$
 在基 $B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 下的矩阵 $A=egin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & -1 \ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\operatorname{null}(T) = 4 \operatorname{rank}(A) = 2$
- $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(A) = 2$

[.build-lists: false]

- 解出 $Aoldsymbol{x}=0$ 的基础解系: $oldsymbol{x}_1=egin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad oldsymbol{x}_2=egin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- 相应地, N(T) 的基

$$\circ \ \boldsymbol{\alpha}_1 = B\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = B\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 利用除列交换之外的初等列变换,将 A 化为最简列阶梯型,最后剩余的 非零列对应于 $\{T(E_1), T(E_2), T(E_3), T(E_4)\}$ 的极大无关组

$$\circ$$
 $R(T)$ 的基: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

求零空间的基的一般步骤

设 $T \in V^n \to V^m$ 的线性变换, $V^n \to V^m$ 的基分别是

$$B_{\alpha} = \{ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \}, B_{\beta} = \{ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \}$$

- 1. 求出 T 在基偶 $\{B_{\alpha}, B_{\beta}\}$ 下的矩阵 A;
- 2. 求 $Aoldsymbol{x}=0$ 的 基础解系: $oldsymbol{x}_1,oldsymbol{x}_2,\ldots,oldsymbol{x}_{n-r}$;
- 3. $B_{\alpha} \mathbf{x}_1, B_{\alpha} \mathbf{x}_2, \dots, B_{\alpha} \mathbf{x}_{n-r}$ 即为 N(T) 的基.

求值空间的基的一般步骤

设 $T \in V^n \to V^m$ 的线性变换, $V^n \to V^m$ 的基分别是

$$B_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \right\}, B_{\boldsymbol{\beta}} = \left\{ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \right\}$$

- 1. 求出 T 在基偶 $\{B_{\alpha}, B_{\beta}\}$ 下的矩阵 A;
- 2. 利用除列交换外的初等列变换将 A 化为 最简列阶梯型;
- 3. A 的最简列阶梯型中,设非零列对应的列号为 i_1,\ldots,i_r ,则 $\{Toldsymbol{lpha}_{i_1},\ldots,Toldsymbol{lpha}_{i_r}\}$ 即为 R(T) 的基.

[.build-lists: false]

M 定义 \mathbf{R}^n 上的线性变换 T

$$Toldsymbol{lpha} = egin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \ dots & dots & \ddots & dots & dots \ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} oldsymbol{lpha}, \quad (oldsymbol{lpha} \in \mathbf{R}^n)$$

- (1) 证明对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $T^n \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;
- (2) 求 T 的零空间和值空间的基与维数.

[.build-lists: false]

提示: (1) 证明 $T^n=0$

- 任取 $oldsymbol{lpha} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ $Toldsymbol{lpha} = [0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}]^{\mathrm{T}}$
- 类推可知, $T^n \alpha = \mathbf{0}$
- 注: 此时通常记 $T^n=0$

[.build-lists: false]

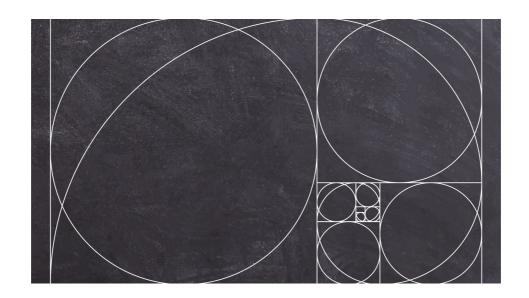
提示: (2) 求 T 的零空间和值空间的基与维数

取 Rⁿ 的基

$$\circ \ \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $T\alpha_1 = \alpha_2, T\alpha_2 = \alpha_3, T\alpha_3 = \alpha_4, \cdots, T\alpha_{n-1} = \alpha_n, T\alpha_n = 0$
- $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ 线性无关,故是 R(T) 的基
 - \circ 进而 $\operatorname{rank}(T) = n 1$
- $\operatorname{null}(T)=1$, $\operatorname{\overline{n}} T \boldsymbol{\alpha}_n = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_n \not \in N(T)$ 的基

补充例题



 $extit{ extit{M}}$ 设T是 V^4 上的线性变换,T在基 $oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,oldsymbol{lpha}_3,oldsymbol{lpha}_4$ 下的矩阵为

$$A = egin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \ 1 & 0 & 2 & 1 \ 1 & 2 & 5 & 5 \ 2 & -2 & 1 & -2 \ \end{bmatrix}$$

- 1. 求T在 $oldsymbol{eta}_1=oldsymbol{lpha}_1-2oldsymbol{lpha}_2+oldsymbol{lpha}_4,oldsymbol{eta}_2=3oldsymbol{lpha}_2-oldsymbol{lpha}_3-oldsymbol{lpha}_4,oldsymbol{eta}_4=2oldsymbol{lpha}_4$ 下的矩阵;
- 2. 求T的零空间和值空间的基与维数.

提示

•
$$B_{\beta} = B_{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B_{\alpha}B$$

 $\bullet TB_{\beta} = TB_{\alpha}B = B_{\alpha}AB = B_{\beta}B^{-1}AB$

 MW_1, W_2 是线性空间 V^n 的两个子空间,且

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(W_1) + \dim(W_2) = n,$$

证明存在线性变换T,使得

$$R(T) = W_1, N(T) = W_2.$$

提示

• 设 $\dim(W_1) = r$

• 取 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$, $\{\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n\}$ 分别为 W_1,W_2 的基,则 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 是 V^n 的基

 $B=\{m{lpha}_1,\dots,m{lpha}_n\}$ 是 V^n 的基ullet 令 $A=egin{bmatrix} I_n \ 0_{n-r} \end{bmatrix}$

• $\Diamond TB = BA$, 即为所求

M 设 T_1, T_2 均为线性空间 V 上的线性变换,满足

$$T_1^2 = T_1, \quad T_2^2 = T_2.$$

证明: $R(T_1) = R(T_2)$ 当且仅当

$$T_1T_2 = T_2, \quad T_2T_1 = T_1.$$

提示: 必要性(⇒)

• 已知 $R = R(T_1) = R(T_2)$, 设 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ 是 R 的基

• $\ \, \mathrm{id} \ T_1oldsymbol{lpha}_i=oldsymbol{eta}_i, \ i=1,2,\ldots,r$,由 $T_1^2=T_1$, $T_1oldsymbol{eta}_i=T_1T_1oldsymbol{lpha}_i=T_1oldsymbol{lpha}_i=oldsymbol{eta}_i$,从而 $(T_1-I)oldsymbol{eta}_i=0$, $i=1,2,\ldots,r$

• 同理可证 $T_2oldsymbol{eta}_i=oldsymbol{eta}_i,\;i=1,2,\ldots,r$

ullet $orall oldsymbol{\xi} \in V$,可记 $T_2 oldsymbol{\xi} = \sum\limits_{i=1}^r k_i oldsymbol{eta}_i$, $(T_1-I)T_2 oldsymbol{\xi} = \sum\limits_{i=1}^r k_i (T_1-I) oldsymbol{eta}_i = 0$

• 从而必有 $(T_1-I)T_2=0$,也即 $T_1T_2=T_2$

提示: 充分性(←)

- 设 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\ldots,oldsymbol{eta}_r$ 是 $R(T_1)$ 的基,记 $T_1oldsymbol{lpha}_i=oldsymbol{eta}_i,\;i=1,2,\ldots,r$
- ullet $ext{th} T_1^2 = T_1$, $T_1 oldsymbol{eta}_i = T_1 T_1 oldsymbol{lpha}_i = T_1 oldsymbol{lpha}_i = oldsymbol{eta}_i$
- ullet eta $T_1 = T_2T_1$, $oldsymbol{eta}_i = T_1oldsymbol{eta}_i = T_2T_1oldsymbol{eta}_i = T_2oldsymbol{eta}_i$
- ullet $orall oldsymbol{\xi} \in V$,因 $T_1T_2oldsymbol{\xi} \in R(T_1)$,故可设 $T_1T_2oldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^r k_ioldsymbol{eta}_i$
- $T_2m{\xi}=T_1T_2m{\xi}=\sum_{i=1}^rk_im{eta}_i$,由此即知 $m{eta}_1,m{eta}_2,\ldots,m{eta}_r$ 也是 $R(T_2)$ 的基