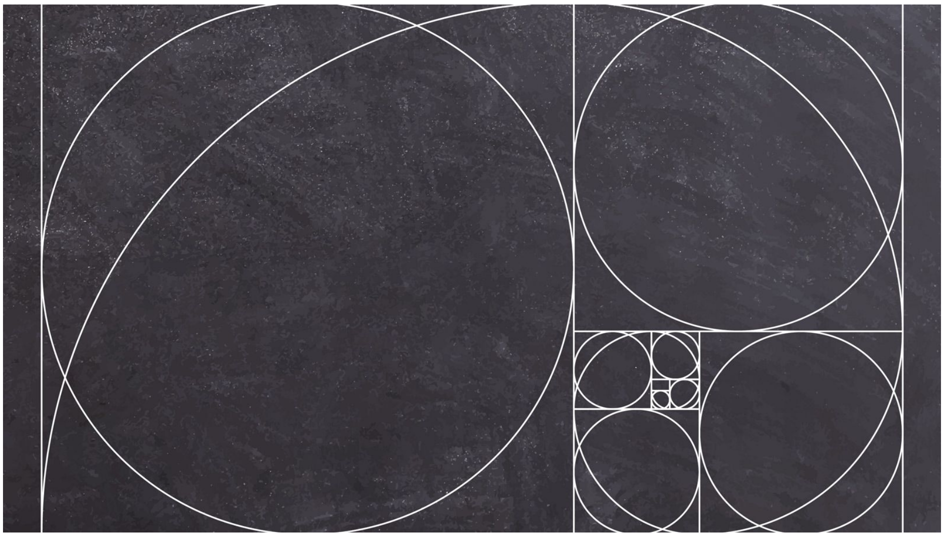
footer: 高等工程数学, NUDT, Autumn 2020 slidenumbers: true build-lists: true autoscale: true

第一章 线性空间和线性变换

1.1 线性空间



空间与集合

- **空间**：在数学上通常指具有特定`结构`的集合
  - 结构：代数或几何特性
- **线性空间**
  - 具有`可线性扩张的特征`的空间
  - 对直线、平面等的抽象推广

1.1.1 线性空间的概念

设 F 是一个数集，且 $0, 1 \in F$ ，若对 F 中任意元素 a, b，有

$$a + b \in F,\ \ a - b \in F,\ \ a \cdot b \in F,\ \ a/b \in F\ (b \neq 0)$$

则称 F 为 **数域** (Field).

- 定义了加、减、乘、除运算，且对以上四种运算封闭

- *例：* 在常见的四则运算下
    - 有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$ 可以构成数域
    - 整数集 $\mathbf{Z}$ 和自然数集 $\mathbf{N}$ 不能构成数域

线性空间的定义

设 F 是一个数域， V 是一非空集合

- $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，定义了**加法** (Addition) 运算 $(+)$，且 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$
- $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, k \in F$，定义了**数乘**(Scalar Multiplication) 运算 $(\cdot)$，且 $k \cdot \boldsymbol{\alpha} \in V$
- 且加法运算和数乘运算满足如下性质：

加法满足的性质

- **交换律** (Commutative Law)
    - $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$， $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
- **结合律** (Associative Law)
    - $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$， $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
- **存在零元** (Zero Element)
    - $\exists \mathbf{0} \in V$， $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$， $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$
- **存在负元** (Inverse Element)
    - $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$， $\exists \boldsymbol{\beta} \in V$， $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，记： $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$

数乘满足的性质

- **分配律 I** (Distributive Law)
    - $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k \in F$， $k \cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k \cdot \boldsymbol{\alpha}+k \cdot \boldsymbol{\beta}$
- **分配律 II**
    - $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall k, l \in F$， $(k+l) \cdot \boldsymbol{\alpha}=k \cdot \boldsymbol{\alpha}+l \cdot \boldsymbol{\alpha}$
- **结合律**
    - $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall k, l \in F$， $(k l) \cdot \boldsymbol{\alpha}=k(l \cdot \boldsymbol{\alpha})$
- **存在单位元** (Unit Element)
    - $\exists 1 \in F$， $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$， $1 \cdot \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

满足以上性质的 $(V, F,+, \cdot)$，称为数域 F 上的 **线性空间** 或 **向量空间** (Linear/Vector Space over Field F)，记为 $V(F)$.

- 简称： V 是线性空间
- V 中的元素称为 **向量** (Vector)
- $V(\mathbf{R})$ ： **实线性空间** (Real Vector Space)
- $V(\mathbf{C})$ ： **复线性空间** (Complex Vector Space)

常见的线性空间

1. $\mathbf{R}^n$ 在数域 $\mathbf{R}$ 上是线性空间
2. $\mathbf{C}^n$ 在数域 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 上都是线性空间
3. $P_n(t)=\{$ 次数不超过 n 的实系数多项式 $\}$ 在数域 $\mathbf{R}$ 上按照多项式的加法和数乘是线性空间
4. $\mathbf{R}^{m\times n}=\left\{[a_{ij}]_{m\times n}\middle|a_{ij}\in\mathbf{R};i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n\right\}$ 按照矩阵加法和数乘构成实线性空间
5. $\mathbf{C}^{m\times n}$ 按照矩阵加法和数乘既可以构成实线性空间，又可以构成复线性空间

例 记

$$\mathbf{R}_+=\{t\in\mathbf{R}|t>0\}$$

- 按照实数的加法和数乘， $\mathbf{R}_+$ 是否构成实线性空间？
  - 不是！因为无法定义负元.
- **思考** 定义新的加法和乘法
  - $\oplus:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}_+,\ \boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$
  - $\circ:\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}_+,k\in\mathbf{R},\ k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^k$
  - $(\mathbf{R}_+,\mathbf{R},\oplus,\circ)$ 能构成线性空间吗？ 可以，零元为1
    但是如果t>=0则不可以，因为0没有负元

线性空间的性质

设 V 是线性空间，则：

- V 中的零元是唯一的；
- 任一个向量对应的负元是唯一的；
- $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$， $0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$， $(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.
- $\forall k\in F$， $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

1.1.2 线性表示、线性相关与线性无关

设 $\boldsymbol{\beta} \in V$，若存在 V 中的一组向量 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 及一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$，使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ **线性表示(出)**（Linear Represented/Expressed）

- 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示为向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的 **线性组合** (Linear Combination)

线性相关

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 中的一组向量，若存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ **线性相关** (Linear Dependent)

- 线性相关的向量组中至少有一个向量可以被其他向量线性表出.
- 在线性相关的向量组中增加一个新的向量，扩充后的向量组仍然线性相关.

线性无关

若

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ **线性无关** (Linear Independent)

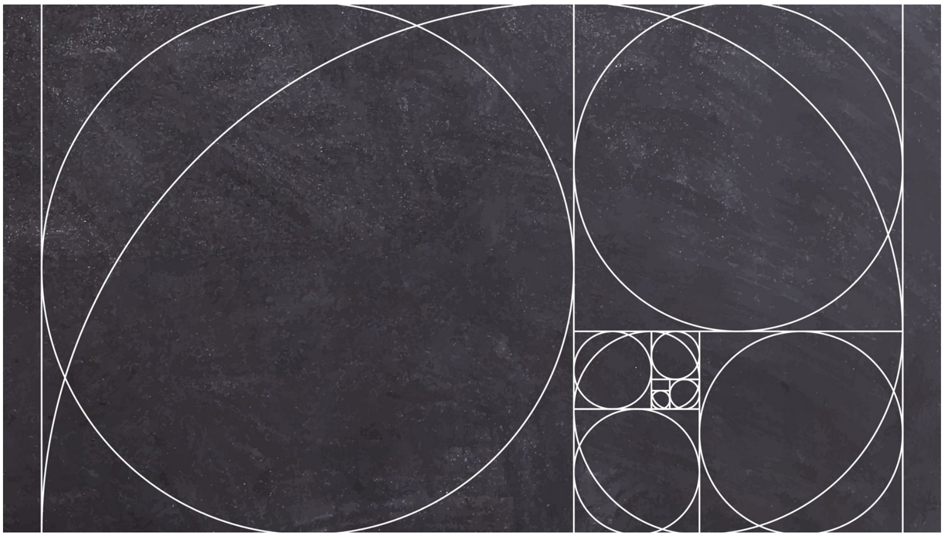
- 线性无关的向量组中任何一个向量都不能被其他的向量线性表出.
- 从线性无关的向量组中去除任何一个向量，剩余的向量组仍然线性无关.

性质

1. $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中存在某个向量可以被其他向量线性表出.
2. $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中任取一部分向量仍然是线性无关的.
3. $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性相关 $\Rightarrow$ 任何包含 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的向量组也是线性相关的.

4. 向量组 $\{\mathbf{0}\}$ 线性相关.

1.1.3 线性空间的基与维数



设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 中的线性无关向量组，若任意 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 都可以被 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表出，则

- 称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的 **基** (Basis)
- 称 V 的**维数** (Dimension) 为 n ，记为 $\dim(V) = n$
- 称 V 是一个 **n 维线性空间**，通常记为 V^n
- **注**： $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$

定理 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的基，则 $\forall \boldsymbol{\beta} \in V$ 可被 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 唯一地线性表示，也即：存在唯一确定的一组 $x_1, \cdots, x_n \in F$ ，使得

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

- $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^{\mathrm{T}}$ 称为 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的**坐标向量**，简称**坐标** (Coordinate, Component)
- 记 $A = [\boldsymbol{\alpha}_1 \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\alpha}_n]$ ，则 $\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{x}$
- 任意 n 维线性空间 V^n **同构** (Isomorphic) 于 F^n ，记为 $V^n \simeq F^n$

例 取 $P_2(t)$ 的基

$$A = \left\{t+1, t+2, t^2\right\},$$

求

$$p(t) = 2t^2 - t + 1$$

在 A 下的坐标.

解 设

$$x_1(t+1) + x_2(t+2) + x_3 t^2 = 2t^2 - t + 1,$$

也即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{x} = [-3\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$ ，即为所求。

过渡矩阵

设 $A = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ ， $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 V^n 的两组(个)基，则存在 $P \in F^{n\times n}$ ，使得

$$[\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \ldots \boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ldots \boldsymbol{\alpha}_n] P$$

称 P 为基 A 到基 B 的**变换矩阵**（**过渡矩阵**，Transition Matrix）

- P 是满秩矩阵.
- 设 $\boldsymbol{\xi} \in V^n$ 在 A 和 B 下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ，则 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$.

例 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两组基

$$A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

求 A_1 到 A_2 的过渡矩阵 P .

提示

- $A_2 = A_1 P$，故 $A_1^{-1}[A_1\ A_2] = [I\ P]$
  - 左乘一个矩阵相当于对于右侧的矩阵施以初等行变换
  - 利用初等行变换将增广矩阵 $[A_1\ A_2]$ 的左侧化为单位阵，则右侧得到的就是 P
- $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

例 $P_2(t)$ 的两组基

$A_1 = \left\{1, t, t^2\right\}$，

$A_2 = \left\{t+1, t+2, t^2\right\}$

求 A_1 到 A_2 的变换矩阵 P，以及

$$p(t) = 2t^2 - t + 1$$

在两组基下的坐标.

[.build-lists: false]

提示

- $A_2 = A_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1 P$
- $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x}_1 = [1\ \ -1\ \ 2]^{\mathrm{T}}$
- $\boldsymbol{x}_2 = P^{-1}\boldsymbol{x}_1 = [-3\ \ 2\ \ 2]^{\mathrm{T}}$

[.build-lists: false]

例 线性空间 V^4 的基 $A_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$, $A_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 满足如下关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_4 \\ \boldsymbol{\beta}_1 + 2\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2 + 2\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4 \end{cases}$$

(1) 求 A_1 到 A_2 的变换矩阵 P ; (2) 求 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在 A_1 下的坐标; (3) 求 V^4 在两组基下具有相同坐标的所有向量.

提示

- (1) 已知条件可改写为形如 $A_1A=A_2B$
  - $A_1\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=A_2\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&2&1\\1&0&0&2\\0&1&0&0\end{bmatrix}$
- 于是 $P=AB^{-1}=\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{bmatrix}$

注

右乘一个矩阵相当于与对左侧矩阵进行初等列表换，因此在计算 AB^{-1} 时，可以利用如下的公式

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}B^{-1}=\begin{bmatrix}AB^{-1}\\I\end{bmatrix}$$

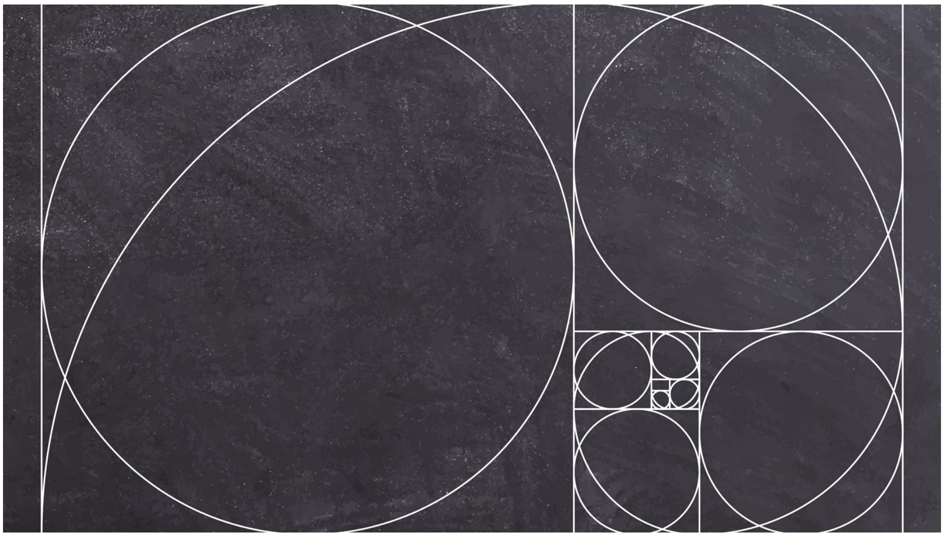
- 也即，通过初等列变换，将下方的矩阵化为单位阵，则上方的矩阵即为所求

- (2) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在 $A_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标：
  - $\boldsymbol{y}=[2\ \ -1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$
- 故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 A_1 下的坐标：
  - $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=[11\ \ 23\ \ 4\ \ -5]^{\mathrm{T}}$

- (3) 设某个向量在两组基下的坐标同为 $\boldsymbol{z}$，则
  - $A_1z=A_2z$，即$A_1\boldsymbol{z}=A_1P\boldsymbol{z}$
  - $A_1(P-I_4)\boldsymbol{z}=0$
  - A_1 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，故由上式必有 $(P-I_4)\boldsymbol{z}=0$
- 解线性方程组 $(P-I_4)\boldsymbol{z}=0$

- $z = c_1[-2 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 1]^{\mathrm{T}} + c_2[1 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 0]^{\mathrm{T}}$
- $(c_1, c_2 \in \mathbf{R})$

1.1.4 线性子空间



设 V 为线性空间， W 是 V 的非空子集，如果 W 按 V 中的运算也构成线性空间，则称 W 为 V 的 **线性子空间**（简称 **子空间**，Subspace），记为 $W \subset V$.

- $W \subset V \Leftrightarrow W$ 关于加法和数乘封闭
- $\dim W \leq \dim V$
- $\{\mathbf{0}\} \subset V$ 称为 V 的 **平凡子空间** (Trivial Subspace)

例 给定 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ ，且 $\operatorname{rank} A = r > 0$

- 称 $N(A) \triangleq \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}$ 为 A 的 **零空间（核空间，核，** Null/Kernal Space)
  - $N(A) \subset \mathbf{C}^n$
  - 由线性方程组解的性质: $\dim N(A) = n - \operatorname{rank}(A) = n - r$
- 称 $R(A) \triangleq \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}$ 为 A 的 **列空间（值空间，值域，** Column/Value Space)
  - $R(A) \subset \mathbf{C}^m$

张成的子空间

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 是线性空间 V 中的一组向量，记

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i \middle| k_1, \cdots, k_r \in F \right\}$$

则 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 是 V 的子空间，称之为由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ **张(生)成的子空间** (Generated Subspace).

性质

- 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是空间 W 的基
    - 则 $W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$
- 设 $A = [\boldsymbol{A}_1 \ \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_n] \in \mathbf{C}^{m \times n}$,
    - $\boldsymbol{A}_i \in \mathbf{C}^m (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 A 的列向量
    - 则 $R(A) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n\}$
        - 列(值)空间就是 A 的列向量的全部的线性组合所构成的空间
    - $\dim R(A) = \operatorname{rank}(A) = r$

基扩张定理

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 是 n 维线性空间 V 中的一组线性无关向量，则存在 V 中的 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ ，使得

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$$

构成 V 的一组基.

`证明思路`

- 设 $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 V 的基
- 若 $r < n$，则 B 中至少有一个向量 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}$ 无法被 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示，记 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1} = \boldsymbol{\beta}_{i_1}$
- `证明向量组` $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}\}$ `线性无关`
- 重复以上的前两个步骤，向新的向量组中不断增加向量，直到向量组的容量为 n
- 最后得到的向量组是线性无关的，且包含 n 个向量，故为空间 V 的基

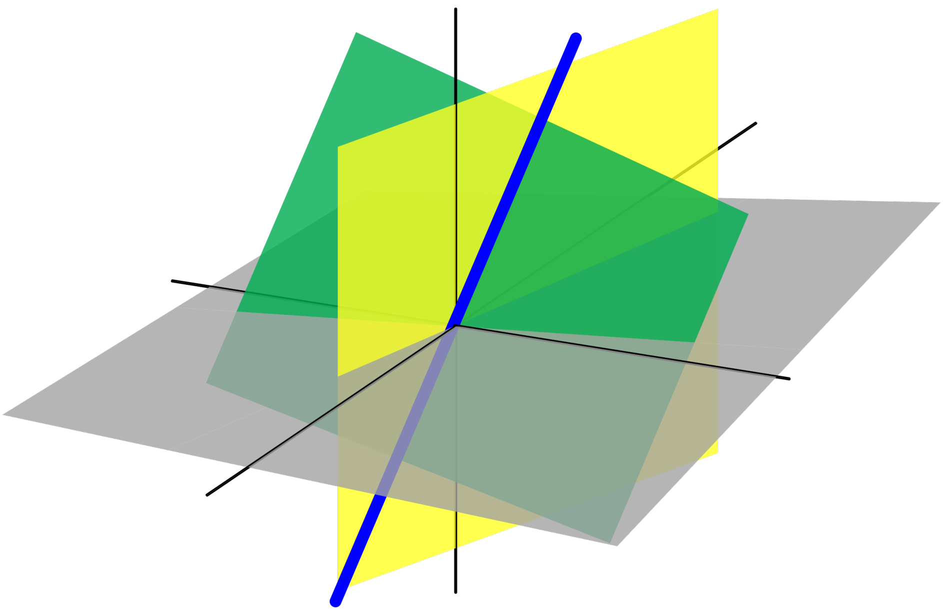
子空间的交与和

设 $W_1, W_2 \subset V$

- 称 $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{\xi} \in V | \boldsymbol{\xi} \in W_1, \boldsymbol{\xi} \in W_2\}$ 为 W_1 和 W_2 的**交(空间)** (Intersection)
- 称 $W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{\xi} \in V | \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1 \in W_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in W_2\}$ 为 W_1 和 W_2 的**和(空间)** (Sum Space)
- `两个子空间的交与和仍然是线性空间`
- 设 $W_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}, W_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$
  - 则 $W_1 + W_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$

例 $\mathbf{R}^3$ `的子空间的和与交`

- 取 W_1 和 W_2 分别为两个不相重合且都包含原点的平面，则 W_1, W_2 均为 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，且维度均为 2
- 记 $L = W_1 \cap W_2$ ，则 L 为一条过原点的直线，是 $\mathbf{R}^3$ 的一维子空间
- 可以验证 $\mathbf{R}^3 = W_1 + W_2$



$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

维数公式

设 $W_1 \subset V, W_2 \subset V$，则

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

[.build-lists: false]

`证明思路`

- 取 $W_1 \cap W_2$ 的基分别扩张为 W_1 和 W_2 的基
- 两组基合并再进行扩张可以得到 $W_1 + W_2$
- `证明第一步中新增加的所有向量是线性无关的`

例 考虑 $\mathbf{R}^4$ 的两个子空间

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}\right\} \\ W_2 &= \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{\alpha}_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}\right\} \end{aligned}$$

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基和维数。

`提示`

- 显然，$\dim(W_1) = \dim(W_2) = 2$，$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 $\{\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 分别为 W_1, W_2 的基
- 记 $A = [\boldsymbol{\alpha}_1 \ \boldsymbol{\alpha}_2], B = [\boldsymbol{\alpha}_3 \ \boldsymbol{\alpha}_4]$，设 $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{y}$
  - 也即 $[A \quad -B]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix} = 0$
  - $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = 0$

- 解得基础解系 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix} = [1 \ -1 \ -1 \ 1]^{\mathrm{T}}$
  - 从而可知 $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
- 进而 $\dim(W_1 + W_2) = 3$
- `利用初等列变换对` $[A \ B]$ `进行化简，最后到的三个非零列对应的向量即为` $W_1 + W_2$ `的基`

- 例如：$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$

另一种解法

- 不难看出，$\dim(W_1) = \dim(W_2) = 2$
- 又 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 无法由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出
  - 故 $\dim(W_1 + W_2) = 3$
  - $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
- $W_1 \cap W_2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- $W_1 + W_2$ 的基在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 中任选三个即可

注： $\forall \boldsymbol{\xi} \in W_1 + W_2$，有 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$, 其中$\boldsymbol{\xi}_i \in W_i(i = 1, 2)$，这样的分解方法可能不唯一！

- *例：* 设 $W_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad W_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$ 可分解为 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$
  - 或 $\mathbf{0} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \left(-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

1.1.5 空间的直和分解

若对任意 $\boldsymbol{\xi} \in W_1 + W_2$，只有唯一分解式

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, \quad \boldsymbol{\xi}_i \in W_i \quad (i = 1, 2)$$

则称 $W_1 + W_2$ 为**直和** (Direct Sum)，记为 $W_1 \oplus W_2$.

- 多个空间的直和：$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s \triangleq \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$
  - $\forall \boldsymbol{\xi} \in \sum_{i=1}^{s} W_i$ 都有唯一的分解式
    - $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + \boldsymbol{\xi}_s \quad (\boldsymbol{\xi}_i \in W_i, i = 1, 2, \cdots, s)$

定理 如下条件等价

1. $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

2. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$
3. $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$
4. 若 $\mathbf{0} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$， $\boldsymbol{\xi}_i \in W_i, i = 1, 2$，则 $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{0}$

证明

- (1 $\Rightarrow$ 2) 反证法。假设 $W_1 \cap W_2$ 中存在 $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$
- 则 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}, \frac{1}{3}\boldsymbol{\xi}, \frac{2}{3}\boldsymbol{\xi} \in W_1 \cap W_2$
- 从而 $\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\xi} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{\xi}$ 的两个不同的分解
- 从而与 $W_1 + W_2$ 为直和矛盾。
- 假设错误，即证。

- (2 $\Leftrightarrow$ 3) 由维数公式，显然成立。
- (2 $\Rightarrow$ 4) 反证法。设存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}_1 \in W_1$，使得 $\mathbf{0} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$，其中 $\boldsymbol{\xi}_2 \in W_2$
- 于是 $\boldsymbol{\xi}_1 = -\boldsymbol{\xi}_2$
- 从而可知 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in W_1 \cap W_2$
- 故 $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$，与 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 矛盾。

- (4 $\Rightarrow$ 1) 反证法。设存在向量 $\boldsymbol{\xi} \in W_1 + W_2$，具有两个不同的分解
  - 即：$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1^* + \boldsymbol{\xi}_2^*$
  - $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1^* \in W_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2^* \in W_2$，且不妨设 $\boldsymbol{\xi}_1 \neq \boldsymbol{\xi}_1^*$
- 于是 $\mathbf{0} = (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_1^*) + (\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_2^*)$
  - 也即 $\mathbf{0}$ 存在 $\mathbf{0} + \mathbf{0}$ 以外的分解方式
- 这与已知矛盾，故假设错误。

例 设 V_1, V_2 分别是齐次线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0 \\ x_1 = x_2 = \ldots &= x_n \end{aligned}$$

的解空间，证明

$$\mathbf{R}^n = V_1 \oplus V_2$$

提示

- 两组方程联立，解空间为 $\{\mathbf{0}\}$

    - 也即两组方程的解空间的交集为 $\{\mathbf{0}\}$
    - 从而可知 $V_1 + V_2$ 为直和
- 第一个方程组的解空间维度为 $n-1$
- 第二个方程组的解空间维度为 1
- 于是 $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) = n$
- 进而可知 $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^n$

空间的直和分解

定理 对任意的 $V_1 \subset V$ ，存在 $V_2 \subset V$ ，使得

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

证明思路

- 选定 V_1 的一组基，将其扩充为 V 的基
- 将扩充的新向量张成一个新的子空间 V_2
- 证明 $V_1 + V_2$ 为直和
    - V_1 中的向量无法用 V_2 的基线性表示
    - V_2 中的向量无法用 V_1 的基线性表示
    - 故 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$

小结

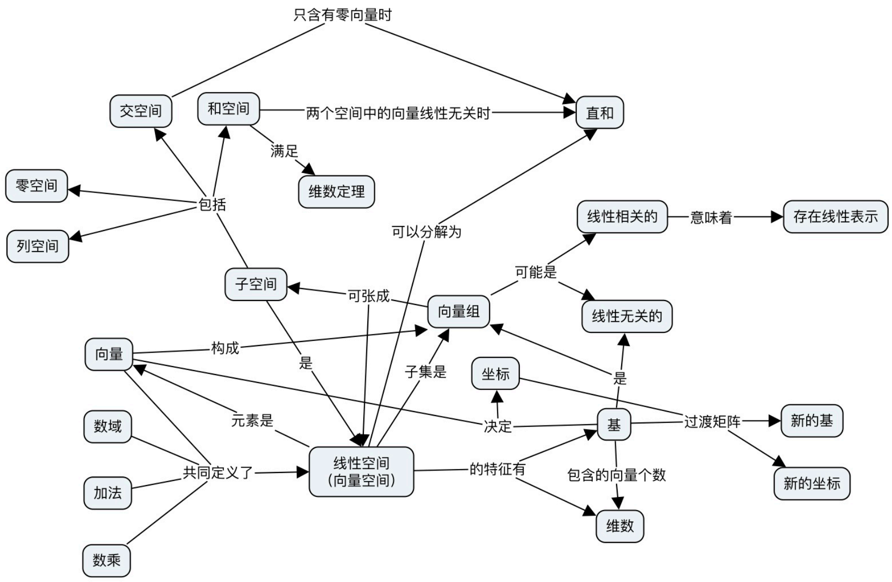
- 基本概念
    - 元素 - 集合 - 子集
    - 向量 - 线性(向量)空间 - 子空间
    - 坐标 - 基、维数 - 交、和 - 直和
- 分析方法
    - 线性相关、线性无关、线性表出
    - 线性方程组、基础解系、矩阵的初等变换

重要（常用）的子空间

- `平凡子空间`：$\{\mathbf{0}\}$
- `生成子空间`：$\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$
- `零(核)空间`：$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in F^n | A\boldsymbol{x} = 0\}$
- `列(值)空间`：$R(A) = \{A\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in F^n\}$
- `特征子空间`：$\{\boldsymbol{x} \in F^n | A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$

---

cmap.ihmc.us



例 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times k}$，$B \in \mathbf{C}^{k \times n}$，证明：$R(A) = R(AB)$ 当且仅当存在 $C \in \mathbf{C}^{n \times k}$，使得 $A = ABC$.

- (`必要性`) 设 $R(A) = R(AB)$
- 由列空间的意义，可知 A 的列向量 $\boldsymbol{A}_i (i = 1, \ldots, k)$ 均可被 AB 的列向量线性表出
- 即：$\boldsymbol{A}_i = AB\boldsymbol{C}_i$，$i = 1, \ldots, k$

  - 其中 $\boldsymbol{C}_i \in \mathbf{C}^n$
- 于是 $A = [\boldsymbol{A}_1\ \dots\ \boldsymbol{A}_k] = AB[\boldsymbol{C}_1\ \dots\ \boldsymbol{C}_k]$
- 令 $C = [\boldsymbol{C}_1\ \dots\ \boldsymbol{C}_k]$，$C \in \mathbf{C}^{n\times k}$，即证。

- (`充分性`) 设存在 $C \in \mathbf{C}^{n\times k}$，使得 $A = ABC$.
- 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^k$，令 $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$
- 由假设 $A\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{y}$
- 从而可知 $R(A) \subset R(AB)$.
- 另一方面，对任意 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$，令 $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{y}$
- 则 $BA\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
- 从而可知 $R(AB) \subset R(A)$.
- 综上，$R(A) = R(AB)$.