学院（部）________ 修读类别（学位/进修）________ 姓名________ 学号（编号）________

（密封线内请勿答题）

密 封 线

《高等工程数学》试题

（国防科技大学　2016 年 12 月）

注意：1. 考试时间 2.5 小时，**答案一律写在本试题纸上，写在草稿纸上的一律无效**；

2. 请先填好密封线左边的各项内容，不得在其它任何地方作标记；

3. 可能需要的常数：$u_{0.90}=1.282, u_{0.95}=1.645, u_{0.995}=2.576$

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
应得分	30	10	10	10	10	10	10	10	100
实得分									
评卷人									

得　分

一、填空题(本题共 10 空，每空 3 分，满分 30 分. 把答案填在题中的横线上)

1. 给定线性空间 $R^{2\times 2}$ 的基：

$$\mathscr{B}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

及线性变换 $Tx=Px$，其中 $P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$x\in R^{2\times 2}$. 则 T 在基 $\mathscr{B}$ 下的矩阵为

$A=$ ________________.

2. 设 $\mathscr{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$ 是欧氏空间 V^3 的标准正交基，令 $y_1=e_1+e_2$，$y_2=e_1-e_3$. 则由 $\mathscr{B}$ 出发，通过 Schmidt 标准正交化方法可求得 $\mathrm{span}\{y_1, y_2\}$ 的标准正交基为 ________________________________(用 e_1，e_2，e_3 表示).

3．设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&0\\0&2&1+\mathrm{i}\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$． 则 $\|A\|_\infty\cdot\|Ax\|_2=$ ________.

4．当实常数 c 满足条件 ________________ 时，幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{6^k}\begin{bmatrix}1&c\\-c&1\end{bmatrix}^k$ 收敛.

5. 对称阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ 的 Cholesky 分解为 $A=$ ________________________.

6．设 $(X_1, X_2,\cdots, X_{10}),(Y_1, Y_2,\cdots, Y_{10})$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ 的两个独立样本，则当常数 $c=$ ____________ 时，统计量 $c\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-Y_i)^2}{\sum\limits_{i=5}^{10}(X_i-Y_i)^2}$ 服从 F 分布.

7．袋中装有编号为 $1\sim N$ 的 N 个球（N 未知)，现从袋中有放回地任取 n 个球，依次记录下球的编号为 X_1，$X_2,\cdots$，X_n. 则袋中球的个数 N 的矩估计量为 $\hat{N}=$ ____________.

8．设 X_1，$X_2,\cdots$，X_n 为来自总体 $X\sim N(\mu, 1)$ 的样本. 为得到未知参数 μ 的长度不超过 0.2 、置信度为 0.99 的双侧置信区间，其样本容量至少应满足 $n\geq$ ____________.

9. 某城市在一项有关医疗保健的社会调查中，为了了解喜欢吃甜食的人群是否与性别有关，随机访问了 1179 位人，调查结果如下表所示

Y \ X	喜欢吃甜食	不喜欢吃甜食	总和
男	188	369	557
女	245	377	622
总和	433	746	1178

若检验假设

H_0: 喜欢吃甜食与性别无关，　　H_1: 喜欢吃甜食与性别有关

则依据所给数据，算得皮尔逊 χ^2 统计检验量观察值 $\hat{\chi}^2 =$ ____________________ .

10. 为了分析学生的学习情况，考察了某班级全部学生数学 x_1 与英语 x_2 两门课程的考试成绩，算得样本相关矩阵为

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.36 \\ 0.36 & 1 \end{bmatrix}.$$

则第一样本主成分 y_1 的贡献率为 ____________________ .

得　分

二、(10 分) 利用 Householder 变换求方阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

解

学院（部）　修读类别（学位/进修）　姓名　学号（编号）

（密封线内请勿答题）

密　封　线

得　分

三、(10 分) 设 ξ_0，η_0 是欧氏空间 V^n 的两个非零向量，c_1，c_2 是两个常数. $\forall \alpha \in V^n$ 定义变换 T:

$$T\alpha = c_1\langle \alpha, \xi_0 \rangle \xi_0 + c_2 \langle \alpha, \eta_0 \rangle \eta_0.$$

(1) 证明 T 是线性变换;

(2) 设 $\mathscr{B}_{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是 V^n 的标准正交基，且 ξ_0，η_0 在 $\mathscr{B}_{\varepsilon}$ 下的坐标分别为 x_0，y_0，即有

$$\xi_0 = \mathscr{B}_{\varepsilon} x_0, \quad \eta_0 = \mathscr{B}_{\varepsilon} y_0 \quad \left(\text{其中 } x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix} \in R^n \right).$$

试求 T 在基 $\mathscr{B}_{\varepsilon}$ 下的矩阵 A;

(3) 证明 T 是对称变换.

解

得　分

四、(10 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ & 2 & 0 & 1\\ & & 2 & 0\\ & & & 2\end{bmatrix}$.

(1)求 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 和 Jordan 标准形；

(2)计算方阵函数 e^{At}　$(t\in(-\infty,+\infty))$.

解

学院（部）____ 修读类别（学位/进修）____ 姓名____ 学号（编号）____

（密封线内请勿答题）

密 封 线

得　分

五、(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$， $x\in R^4$．

(1) 求 A 的极大线性无关列及 A 的满秩分解；

(2) 证明方程组 $Ax=b$ 不相容，并求 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解.

解

得　分

六、(10 分) 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$ $(-\infty<x<\infty)$，其中 $\sigma>0$ 为未知参数. X_1，$X_2,\cdots$，X_n 是来自总体 X 的样本.

(1) 试求 σ 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$ ；

(2) 证明 $\hat{\sigma}$ 为 σ 的最小方差无偏估计量.

解

学院（部）________ 修读类别（学位/进修）________ 姓名________ 学号（编号）________

（密封线内请勿答题）

密 封 线

得 分

七、(10 分)) 研究所从某厂定购了一批原料, 已知该原料每瓶的杂质含量 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$（单位：毫克），已知 $\sigma_0 = 2$（毫克）. 若整批原料每瓶杂质的平均含量低于 20(毫克) 则视为合格，现从该批原料中随机抽取了 25 瓶进行检测，计算得 $\overline{x} = 18.8$（毫克）.

(1) 问在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下，能否认为该批原料是合格的？

(2) 若厂方要求：当每瓶杂质平均含量低于 19(毫克)时，II 类风险不超过 $\beta = 0.1$，试问至少要抽样多少瓶？

解

得　分

八、(10 分) 设有线性线性回归模型

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + x_i\beta_1 + (x_i^2 - 2)\beta_2 + \varepsilon_i \\ i = 1,2,3,4,5 \\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_5 \text{独立同分布}，\varepsilon_1 \sim N(0,\ \sigma^2). \end{cases}$$

其中 $x_1 = -2$，$x_2 = -1$，$x_3 = 0$，$x_4 = 1$，$x_5 = 2$ 是已知的观测值.

1）求参数 β_0，β_1，β_2 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$；

2）并判别 $\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$ 是否独立，为什么？