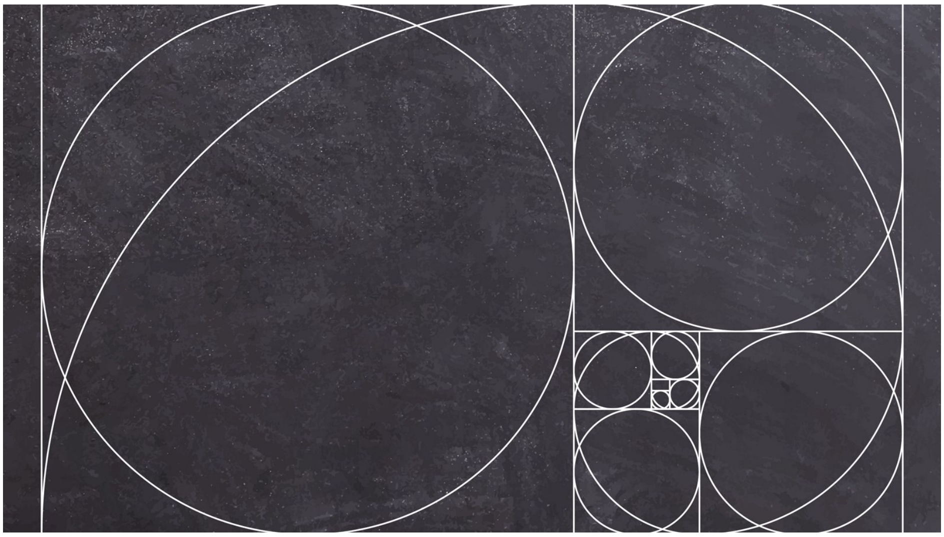
footer: 高等工程数学, NUDT, Autumn 2020 slidenumbers: true build-lists: true autoscale: true

[fit] 1.2 线性变换及其矩阵表示



[.build-lists: false]

1.2.1 线性变换的定义

设 V_1, V_2 同为数域 F 上的线性空间， T 是 V_1 到 V_2 的映射，若对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_1$ 和 $\forall k \in F$

- $T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = T\boldsymbol{\alpha} + T\boldsymbol{\beta}$
- $T(k\boldsymbol{\alpha}) = kT\boldsymbol{\alpha}$

则称 T 为线性空间到 V_1 到 V_2 的 **线性变换**（或 **线性算子**，Linear Transformation/Map/Operator）

性质 设 T 是 $V_1 \to V_2$ 的线性变换

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V_1$ 线性相关
  - 则 $T\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性相关
- 若 $T\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
  - 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
- **思考** $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V_1$ 线性无关， $T\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否必线性无关?

- 若 $T\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,T\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 一定线性相关吗?

例 在线性空间 $P_n(t)$ 上定义

$$Tp(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t),\quad \forall p(t)\in P_n(t)$$

则 T 是 $P_n(t)$ 到 $P_{n-1}(t)$ 的线性算子.

- $P_n(t)$ 表示次数不超过 n 的实系数多项式全体.

例 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ ， $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ ，定义映射 T 为

$$T\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$$

则 T 是 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^m$ 的线性变换。

- **一个矩阵就定义了(对应于)一个线性变换**

[.build-lists: false]

例 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是线性空间 V 的一个基，定义映射 T 为：
$\forall x_1,x_2,x_3\in F$

$$\begin{aligned}&T\left(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3\right)\\&\quad=\left(x_1+x_2+x_3\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(x_2+x_3\right)\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3\end{aligned}$$

1. 证明： T 是 $V\to V$ 的线性变换;
2. 设 $\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$, 试求 $T\boldsymbol{\beta}_0$.

`提示`：1. 证明 T 是线性变换

- 任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，记 $\boldsymbol{\alpha}=B\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\beta}=B\boldsymbol{y}$
  - 其中 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=[y_1\ \ y_2\ \ y_3]^{\mathrm{T}}$
- $T\boldsymbol{\alpha}=B\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，即 $TB\boldsymbol{x}=BA\boldsymbol{x}$
- $T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T(B\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{y})=T(B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))$
  - $=BA(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=BA\boldsymbol{x}+BA\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{\alpha}+T\boldsymbol{\beta}$
- $T(k\boldsymbol{\alpha})=T(Bk\boldsymbol{x})=BA(k\boldsymbol{x})=kBA\boldsymbol{x}=kT\boldsymbol{\alpha}$

提示：2.求 $T\boldsymbol{\beta}_0$

- $T\boldsymbol{\beta}_0 = T(\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3)$
    - $= (1+2+3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2+3)\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$
    - $= 6\boldsymbol{\alpha}_1 + 5\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$
- 或 $T\boldsymbol{\beta}_0 = B\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = 6\boldsymbol{\alpha}_1 + 5\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$

1.2.2 线性变换的矩阵表示

设 T 是 $V^n \to V^m$ 的线性变换， $B_{\boldsymbol{\alpha}} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与
$B_{\boldsymbol{\beta}} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 分别是 V^n 与 V^m 的基。

- 设 $T\boldsymbol{\alpha}_i = B_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{A}_i$， $i = 1, 2, \ldots, n$
    - $\boldsymbol{A}_i = [a_{1i}\ a_{2i}\ \ \ldots a_{mi}]^{\mathrm{T}}$ 为 $T\boldsymbol{\alpha}_i$ 在基 $B_{\boldsymbol{\beta}}$ 下的坐标
- 记 $A = [\boldsymbol{A}_1\ \ \boldsymbol{A}_2\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{A}_n]$
- 则
  $TB_{\boldsymbol{\alpha}} = \{T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n\} = B_{\boldsymbol{\beta}}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n\} = B_{\boldsymbol{\beta}}A$
- 称 A 为线性变换 T 在 **基偶** $\{B_{\boldsymbol{\alpha}}, B_{\boldsymbol{\beta}}\}$ 下的**矩阵**

特别地，

若 T 是 $V^n \to V^n$ 的线性变换，且取

$$B_{\boldsymbol{\beta}} = B_{\boldsymbol{\alpha}}$$

- 则 A 是方阵，称为 T 在基 $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ 下的 **矩阵**

例 定义 $\mathbf{R}^3$ 上的线性算子

$$T\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}5x_1 + 4x_2 + 2x_3\\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

求 T 在基 $B = \left\{\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵.

提示

- 记 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，计算可得
- $T\boldsymbol{\beta}_1=10\boldsymbol{\beta}_1=B\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}$
- $T\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2=B\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},T\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_3=B\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
- 故 T 在基 B 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}10&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

例 设 $B_{\boldsymbol{\alpha}}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_{\boldsymbol{\beta}}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 都是线性空间 V^3 的基，从 $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ 到 $B_{\boldsymbol{\beta}}$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

设 V^3 上的线性变换 T 满足

$$\begin{aligned}T\left(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3\right)&=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\\T\left(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\right)&=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3\\T\left(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\right)&=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3\end{aligned}$$

(1) 求 T 在 $B_{\boldsymbol{\beta}}$ 下的矩阵; (2) 求 $T\boldsymbol{\beta}_1$ 在基 $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ 下的坐标.

提示 （1）求 T 在 $B_{\boldsymbol{\beta}}$ 下的矩阵

- 由已知 $TB_{\boldsymbol{\alpha}}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{bmatrix}=B_{\boldsymbol{\beta}}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$
- $TB_{\boldsymbol{\beta}}=TB_{\boldsymbol{\alpha}}P=B_{\boldsymbol{\beta}}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{bmatrix}^{-1}P=B_{\boldsymbol{\beta}}A$
- $A=\begin{bmatrix}-3&2&1\\-5&5&3\\6&-5&-2\end{bmatrix}$

（2）求 $T\boldsymbol{\beta}_1$ 在基 $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ 下的坐标

- 先求 $T\boldsymbol{\beta}_1$ 在基 $B_{\boldsymbol{\beta}}$ 下的坐标

    - $\boldsymbol{y} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$
- 故 $T\boldsymbol{\beta}_1$ 在基 $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ 下的坐标
    - $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

1.2.3 零空间与值空间

设 T 是 $V^n \to V^m$ 的线性变换

- T 的 **零空间（核、核空间）**
    - $N(T) = \{\boldsymbol{\xi} \mid T\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \in V^n\}$
    - $\text{null}(T) = \dim(N(T))$ 称为 T 的 **零度**（Nullity）
- T 的 **值空间（值域、列空间）**
    - $R(T) = \{\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\beta} = T\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \in V^n\}$
    - $\text{rank}(T) = \dim(R(T))$ 称为 T 的 **秩**（Rank）

[.build-lists: false]

定理 设 T 是 $V^n \to V^m$ 的线性变换，则

$$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = n.$$

`证明`：

- 设 $\text{null}(T) = s$，取 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 为 $N(T)$ 的一组基
- 将 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 扩充为 V^n 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$

- 下证 $R(T)$ 中的任意向量均可由 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{s+1}, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示
    - 任意 $\boldsymbol{\eta} \in R(T)$，存在 $\boldsymbol{\xi} \in V^n$，使得 $\boldsymbol{\eta} = T\boldsymbol{\xi}$
    - 设 $\boldsymbol{\xi} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\alpha}_k$
    - 注意到 $T\boldsymbol{\alpha}_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, s$
    - $\boldsymbol{\eta} = T\boldsymbol{\xi} = T\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\alpha}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k T\boldsymbol{\alpha}_k = \sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k T\boldsymbol{\alpha}_k$

- 再证 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{s+1}, T\boldsymbol{\alpha}_{s+2}, \ldots, T\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关
    - 设 $\sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k T\boldsymbol{\alpha}_k = 0$

- 即 $T\sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k=0$，故 $\sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k\in N(T)$
- 存在 x_k，$k=1,2,\ldots,s$，使得 $\sum\limits_{k=1}^{s} x_k\boldsymbol{\alpha}_k=\sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k$
  - 即 $\sum\limits_{k=1}^{s} x_k\boldsymbol{\alpha}_k-\sum\limits_{k=s+1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k=0$
- $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关，故必有 $x_k=0$，$k=1,2,\ldots,n$

- 综上可知 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{s+1},T\boldsymbol{\alpha}_{s+2},\ldots,T\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $R(T)$ 的基
  - $\operatorname{rank}(T)=n-s$

[.build-lists: false]

定理 设 T 是 $V^n\to V^m$ 的线性变换,

$$B_{\boldsymbol{\alpha}}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\},B_{\boldsymbol{\beta}}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$$

分别是 V^n 与 V^m 的基， T 在基偶 $\{B_{\boldsymbol{\alpha}},B_{\boldsymbol{\beta}}\}$ 下的矩阵为 A，则

1. $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(A)$
2. $\operatorname{null}(T)=n-\operatorname{rank}(A)$
3. $\operatorname{rank}(T)+\operatorname{null}(T)=n$

[.build-lists: false]

例 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换 T 定义为

$$TX=CX-XC,\quad X\in\mathbf{R}^{2\times 2},$$

其中 $C=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.

1. 求 T 的零度和零空间的基;
2. 求 T 的秩和值空间的基.

[.build-lists: false]

提示

- 取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的基
  $E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

- T 在基 $B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$
- $\operatorname{null}(T)=4-\operatorname{rank}(A)=2$
- $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(A)=2$

[.build-lists: false]

- 解出 $A\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系：
  $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- 相应地，$N(T)$ 的基
  - $\boldsymbol{\alpha}_1=B\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=B\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
- 利用除列交换之外的初等列变换，将 A 化为最简列阶梯型，最后剩余的非零列对应于 $\{T(E_1),T(E_2),T(E_3),T(E_4)\}$ 的极大无关组
  - $R(T)$ 的基：$\left\{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

求零空间的基的一般步骤

设 T 是 $V^n\to V^m$ 的线性变换，V^n 与 V^m 的基分别是

$$B_{\boldsymbol{\alpha}}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\},B_{\boldsymbol{\beta}}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$$

1. 求出 T 在基偶 $\{B_{\boldsymbol{\alpha}},B_{\boldsymbol{\beta}}\}$ 下的矩阵 A;
2. 求 $A\boldsymbol{x}=0$ 的`基础解系`：$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-r}$;
3. $B_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}_1,B_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}_2,\ldots,B_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}_{n-r}$ 即为 $N(T)$ 的基.

求值空间的基的一般步骤

设 T 是 $V^n\to V^m$ 的线性变换，V^n 与 V^m 的基分别是

$$B_{\boldsymbol{\alpha}}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\},B_{\boldsymbol{\beta}}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$$

1. 求出 T 在基偶 $\{B_{\boldsymbol{\alpha}},B_{\boldsymbol{\beta}}\}$ 下的矩阵 A;
2. 利用除列交换外的初等列变换将 A 化为`最简列阶梯型`;
3. A 的最简列阶梯型中，设非零列对应的列号为 $i_1,\ldots,i_r$，则 $\{T\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\ldots,T\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$ 即为 $R(T)$ 的基.

[.build-lists: false]

例 定义 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换 T

$$T\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha},\quad(\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n)$$

(1) 证明对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$， $T^n\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

(2) 求 T 的零空间和值空间的基与维数.

[.build-lists: false]

`提示`：(1) 证明 $T^n=0$

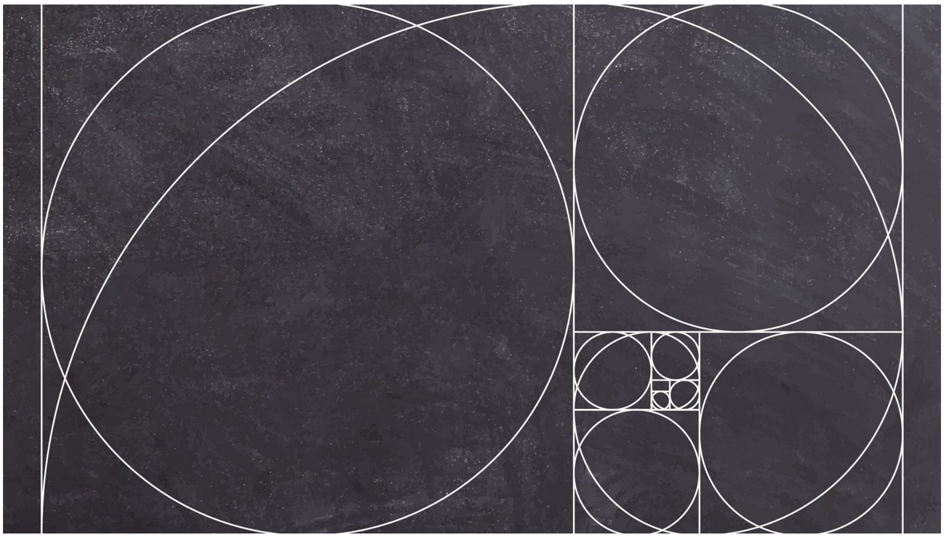
- 任取 $\boldsymbol{\alpha}=[x_1\ x_2\ \ \ldots\ x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$
  - $T\boldsymbol{\alpha}=[0\ x_1\ \ \ldots\ x_{n-1}]^{\mathrm{T}}$
- 类推可知， $T^n\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
- *注：* 此时通常记 $T^n=0$

[.build-lists: false]

`提示`：(2) 求 T 的零空间和值空间的基与维数

- 取 $\mathbf{R}^n$ 的基
  - $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$
- $T\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,T\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,T\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4,\cdots,T\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,T\boldsymbol{\alpha}_n=0$
- $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，故是 $R(T)$ 的基
  - 进而 $\operatorname{rank}(T)=n-1$
- $\operatorname{null}(T)=1$，而 $T\boldsymbol{\alpha}_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $N(T)$ 的基

补充例题



例 设 T 是 V^4 上的线性变换， T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

1. 求 T 在 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,$ $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}_4=2\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵;
2. 求 T 的零空间和值空间的基与维数.

提示

- $B_{\boldsymbol{\beta}}=B_{\boldsymbol{\alpha}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=B_{\boldsymbol{\alpha}}B$
- $TB_{\boldsymbol{\beta}}=TB_{\boldsymbol{\alpha}}B=B_{\boldsymbol{\alpha}}AB=B_{\boldsymbol{\beta}}B^{-1}AB$

例 W_1, W_2 是线性空间 V^n 的两个子空间，且

$$W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\},\quad \dim(W_1)+\dim(W_2)=n,$$

证明存在线性变换 T ，使得

$$R(T)=W_1, N(T)=W_2.$$

提示

- 设 $\dim(W_1)=r$
- 取 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 分别为 W_1, W_2 的基，则 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V^n 的基
- 令 $A=\begin{bmatrix} I_n & \\ & 0_{n-r} \end{bmatrix}$
- 令 $TB=BA$，即为所求

例 设 T_1, T_2 均为线性空间 V 上的线性变换，满足

$$T_1^2=T_1,\quad T_2^2=T_2.$$

证明： $R(T_1)=R(T_2)$ 当且仅当

$$T_1T_2=T_2,\quad T_2T_1=T_1.$$

提示：必要性($\Rightarrow$)

- 已知 $R=R(T_1)=R(T_2)$，设 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r\}$ 是 R 的基
- 记 $T_1\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,\dots,r$，由 $T_1^2=T_1$，$T_1\boldsymbol{\beta}_i=T_1T_1\boldsymbol{\alpha}_i=T_1\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，从而 $(T_1-I)\boldsymbol{\beta}_i=0$，$i=1,2,\dots,r$
- 同理可证 $T_2\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,\dots,r$
- $\forall\boldsymbol{\xi}\in V$，可记 $T_2\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\beta}_i$，

  $(T_1-I)T_2\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i(T_1-I)\boldsymbol{\beta}_i=0$
- 从而必有 $(T_1-I)T_2=0$，也即 $T_1T_2=T_2$

提示：充分性($\Leftarrow$)

- 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是 $R(T_1)$ 的基，记 $T_1\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,\dots,r$
- 由 $T_1^2=T_1$， $T_1\boldsymbol{\beta}_i=T_1T_1\boldsymbol{\alpha}_i=T_1\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$
- 由 $T_1=T_2T_1$， $\boldsymbol{\beta}_i=T_1\boldsymbol{\beta}_i=T_2T_1\boldsymbol{\beta}_i=T_2\boldsymbol{\beta}_i$
- $\forall\boldsymbol{\xi}\in V$，因 $T_1T_2\boldsymbol{\xi}\in R(T_1)$，故可设 $T_1T_2\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\beta}_i$
- $T_2\boldsymbol{\xi}=T_1T_2\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\beta}_i$，由此即知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r$ 也是 $R(T_2)$ 的基
