1.3 设$(\mathcal{H},\mathcal{B},\mathcal{P})$是一个统计结构，证明：

(1) 若$\mathcal{H}$只含有不多于可数个元素，则此结构是可控的；

(2) 若$\mathcal{P}$只含有不多于可数个分布，则此结构是可控的。

解：（1）对于任何的$B\in\mathcal{B}$，在$(\mathcal{H},\mathcal{B})$上定义：

$$m(B)=\{B\text{中元素的个数}\}$$

① 这样定义的m是有意义的，因为对于任何的$B\in\mathcal{B}$，B是可数集。

② 这样定义的m满足非负性、规范性和完全可加性，所以是一个测度。

③ 这样定义的m是一个σ有限测度，因为全集$\mathcal{H}$可以看作是至多可数个单点集的并，而在每个单点集上，m测得的测度为1。

对于任何的$N\in\mathcal{B}$，如果$m(N)=0$，则$N=\Phi$，所以对于任何的$P\in\mathcal{P}$，由于概率测度的正规性，所以$P(N)=0$，所以该结构可控。

（2）对于任何的$B\in\mathcal{B}$，在$(\mathcal{H},\mathcal{B})$上定义：

$$n(B)=\sup\{P_k(B),\ P_k\in\mathcal{P}\}$$

① 这样定义的n是有意义的，因为对于任何的$B\in\mathcal{B}$，B是可数集。

② 这样定义的m满足非负性、规范性和完全可加性，所以是一个测度。

③ 这样定义的m是一个σ有限测度，因为$\mathcal{P}$只含有不多于可数个分布。

对于任何的$N\in\mathcal{B}$，如果$n(N)=0$，则$\sup\{P_k(N),\ P_k\in\mathcal{P}\}=0$，所以对于任何的$P_k\in\mathcal{P}$，$P_k(N)=0$，所以该结构可控。

1.4 设随机变量 X~Ga(a,λ) ,若 c 为正实数,证明 cX~Ga(a, $\frac{\lambda}{c}$),若 X~Ga(5,0.01), 计算概率 P（X>200）

解：（1）因为 c>0,y=cx.所以 $x=\frac{y}{c}\ (y>0)$

$$P_Y(y)=P_X\left(\frac{y}{c}\right)\frac{1}{c}=\frac{\lambda^a}{c\Gamma(a)}\left(\frac{y}{c}\right)^{a-1}\exp\left\{-\lambda\frac{y}{c}\right\}$$

$$=\frac{\left(\lambda/c\right)^a}{\Gamma(a)}y^{a-1}\exp\left\{-\lambda\frac{y}{c}\right\}$$

为 Ga(a,λ)的密度函数。所以得证

（2）由已证结论；X~Ga(5,0.01),则 Y=0.01X~Ga(5,1)

P(X>200)=P(Y>2)

$=1-P(Y \le 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{\Gamma(5)} x^4 e^{-x} dX$

$= 1 - \frac{1}{24}\int_0^2 x^4 e^{-x} dX$

$= 7e^{-2}$

1.5

解：$p(y;\alpha,\lambda,\mu)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(y-u)^{\alpha-1}e^{-\lambda(y-u)}$

由于 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$,故 $E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$,$Var(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

$E(Y)=E(X+\mu)=E(X)+\mu=\frac{\alpha}{\lambda}+\mu$

$Var(Y)=Var(X+\mu)=Var(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

1.9 χ^2**分布函数表和**χ^2**分布的分位数表往往只对自由度**$n\le 30$**给出，当**$n>30$**时可用正态分布近似，计算**

（1）自由度为 35 的χ^2**变量大于 45 的概率**

（2）自由度为 40 的χ^2**分布的 0.05 分位数**

解：（1）设 $X\sim\chi^2(35)$，则 $E(X)=n=35$，$Var(X)=2n=70$

$$P(X>45)=1-P(X\le 45)$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{45-35}{\sqrt{70}})$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{10}{\sqrt{70}})$$

$$\approx 1-0.8830$$

$$\approx 0.117$$

（2）设 $Y\sim\chi^2(40)$，则 $E(Y)=n=40$，$Var(Y)=2n=80$

$P=1-0.05=0.95$，则 $P(Y\le Y_P)=0.95$

则 $\Phi(\frac{Y_P-40}{\sqrt{80}})=0.95$

$\frac{Y_P-40}{\sqrt{80}}=1.645$

则 $Y_P=54.713$

1.10 设随机变量*X~Ga*（α,λ），则 *Y=X^-1^* 服从倒 Gamma 分布，请写出 Y 的密度函数，并计算 E(Y)和 Var(Y)。

解：∵ *X~Ga* (α,λ) ∴*X*的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

由 $Y=X^{-1}$ 得

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\frac{1}{X}\leq y)=P(X\geq\frac{1}{y})=1-P(X<\frac{1}{y})$$

$$=\begin{cases}1-\int_0^{\frac{1}{y}}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx, \frac{1}{y}\geq 0\\ 1, \frac{1}{y}<0\end{cases}$$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{y})^{\alpha+1}e^{-\frac{\lambda}{y}}, y\geq 0\\ 0, y<0\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_0^{+\infty}y.\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{y})^{\alpha+1}e^{-\frac{\lambda}{y}}dy=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{y})^{\alpha}e^{-\frac{\lambda}{y}}dy$$

$$=\frac{\lambda\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\lambda}{\alpha-1}(\alpha>1)$$

$$E(Y^2)=\int_0^{+\infty}y^2.\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{y})^{\alpha+1}e^{-\frac{\lambda}{y}}dy=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{y})^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{y}}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^2\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\lambda^{\alpha-2}(\frac{1}{y})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-2)}e^{-\frac{\lambda}{y}}dy=\frac{\lambda^2\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$=\frac{\lambda^2\Gamma(\alpha-2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)}=\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\ (\alpha>2)$$

$$\therefore Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}-\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2}=\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}(\alpha>2)$$

1.11 若随机变量 *X+c* 和-*X+c* 有相同的分布，则称随机变量的分布关于点 *c* 对称。如果 *X* 有密度函数 *p(x)*,则其关于点 *c* 对称的充要条件是 *p(x-c)=p(c-x),* $\forall x\in R$ **。**

证明：必要性：随机变量 X 关于点 c 对称

$$\Rightarrow F(X+c)=F(-X+c)\Rightarrow P(X+c\le t)=P(-X+c\le t)\Rightarrow P(X\le t-c)=P(X\ge c-t)=1-P(X<c-t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t-c}p(t)dt=1-\int_{-\infty}^{c-t}p(t)dt$$

对上面等式左边换元，令 $t=x-c$，则左边= $\int_{-\infty}^{x}p(x-c)dx$

对上面等式右边换元，令 $t=c-x$，则右边= $1+\int_{+\infty}^{x}p(c-x)dx$

所以得出 $\int_{-\infty}^{x}p(x-c)dx=\int_{-\infty}^{x}p(c-x)$，所以 *p(x-c)=p(c-x)*

充分性：将上述过程逆推即可证得。

1.11 若随机变量 X-c 和-X+c 有相同的分布，则称随机变量的分布关于点 c 对称. 如果 X 有密度函数 p(x),则其关于点 c 对称的充要条件是 p(x+c)=p(c-x),∀x∈ R.

证明：

必要性：∵X 的密度函数为 p(x),其关于点 c 对称，从而 X-c 与 X+c 有相同的分布，故概率密度函数相同，即 p(X-c)=p(X+c).

∴对∀x∈ R 有 p(x+c)=p(c-x).

充分性：令 Y=X-c，Z=-X+c.∵X 的密度函数为 p(x),则 Y 的密度函数为 p(Y+c),Z 的密度函数为 p(c-Z).由已知，对∀x∈ R，都有 p(x+c)=p(c-x).故对随机变量的一切取值，都有 p(z+c)=p(c-z).即是 p(Z+c）=p(c-Z),其中 p(Z+c)就为 Y 的密度函数（只是替换了变量）

从而，Y 与 Z 有相同的密度函数.即 X-c 和-X+c 有相同的分布.

∴随机变量的分布关于点 c 对称.

1.15 证明下述结论.

（1）设 F（x）为连续随机变量 X 的分布函数，则 Y=F（X）~U(0,1)

（2）设 Y~U（0,1)，则 u=-2lnY~ χ^2 **(2)**

（3）设 $X_1,\cdots,X_n$ **是连续随机变量 X 的 n 次观察值，F（x）是 X 的分布函数，则-2**$\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i)\sim\chi^2(2n)$

证明：（1）因为 $0\le F_x(x)\le 1$，所以

①当 y<0 时，$F_Y(y)$=p{Y$\le$y}=p{$F_X(x)\le$y}=0

②当$0\le y\le 1$，$F_Y(y)$=p{Y$\le$y}=p{$F_X(x)\le$y}=y

③当$y>1$，$F_Y(y)$=p{Y$\le$y}=p{$F_X(x)\le$y}=1

所以 Y~U(0,1)，即证

（2）设 x=U=-2lnY~χ^2(2)

$F_X(x)$=p{X$\le$x}

=p{-2lnY$\le$x}

=p{Y$\le e^{-\frac{1}{2}x}$}

=1-$e^{-\frac{1}{2}x}$

所以$F_X{}'(x)=f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\sim\chi^2(2)$，即证

（3）因为 -2$\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i)$

=$\sum_{i=1}^{n}-2\ln F(X_i)$

由刚刚证得的（2）中结论可得$-2\ln F(x_i)\sim\chi^2(2)$

又由证得的（1）中结论 Y=F（X）~U(0,1)可得$\sum_{i=1}^{n}-2\ln F(X_i)\sim\chi^2(2n)$

所以-2$\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i)=\sum_{i=1}^{n}-2\ln F(X_i)\sim\chi^2(2n)$，即证

1.21.设X～N_n(μ，Σ),C 为任一 r×n 阶阵，证明

$$CX\sim N_r(C\mu，C\Sigma C')$$

证明：由**X～N_n(μ，Σ)**，知 **X_i～N(μ，σ_{ii}^2)**，记

$$Y_j=c_{ji}X_i，j=1,2,\ldots,r$$

则 **Y_i**服从正态分布，**Y=CX** 服从多元正态分布，且

$$EY_j=c_{ji}\mu_i\quad j=1,2,\ldots,r$$

$$DY_j=c_{ji}^2\sigma_{jj}^2\quad j=1,2,\ldots,r$$

$$COV(Y_i，Y_j)=c_{is}c_{jk}COV(X_s，X_k)$$

$$=c_{is}c_{jk}\sigma_{sk}$$

故 **Y=CX** 的协方差矩阵为 **CΣC'**

综上所述：**Y=CX～N_r(Cμ，CΣC')**

1.22 设

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N_n\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\right)$$

其中 X_1 与 μ_1 都是 k 维向量，Σ_{11} 为 k 阶方阵，Σ_{12}，Σ_{21}，Σ_{22} 为相应矩阵，且 $\left|\Sigma_{22}\right|\neq 0$，证明

（1）$X_1\sim N_k(\mu_1,\Sigma_{11})$；

（2）X_1 与 X_2 相互独立的充分必要条件是 $\Sigma_{12}=0$；

（3）在给定 $X_2=x_2$ 下，X_1 的条件分布是

$$N_k\left(\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2),\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12}\right)$$

证明：

（1）设

$$X\sim N_n(\mu,\Sigma)，其中，\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}，\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}，t=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$$

X 的特征函数为

$$\begin{aligned}f_X(t)&=E\left(e^{it'X}\right)\\&=\exp\left\{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t\right\}\\&=\exp\left\{it'_1\mu_1+it'_2\mu_2-\tfrac{1}{2}(t'_1\Sigma_{11}t_1+t'_1\Sigma_{12}t_2+t'_2\Sigma_{21}t_1+t'_2\Sigma_{22}t_2)\right\}\end{aligned}$$

令 $t_2=0$，则可以得到 X_1 的特征函数为

$$f_1(t_1)=\exp\left\{it'_1\mu_1-\tfrac{1}{2}t'_1\Sigma_{11}t_1\right\}$$

$\therefore X_1\sim N_k(\mu_1,\Sigma_{11})$

（2）

$$\begin{aligned}(\Rightarrow)\quad f(t_1,t_2)&=\exp\left\{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t\right\}\\&=\exp\left\{it'_1\mu_1+it'_2\mu_2-\tfrac{1}{2}(t'_1\Sigma_{11}t_1+t'_1\Sigma_{12}t_2+t'_2\Sigma_{21}t_1+t'_2\Sigma_{22}t_2)\right\}\end{aligned}$$

$\because$ X_1 与 X_2 相互独立

$\therefore$ $$f(t_1,t_2) = f(t_1)\cdot f(t_2)$$

$$= \exp\left\{i t'_1 \mu_1 + i t'_2 \mu_2 - \tfrac{1}{2}(t'_1 \Sigma_{11} t_1 + t'_2 \Sigma_{22} t_2)\right\}$$

对比上述两式可得

$$t'_1 \Sigma_{12} t_2 + t'_2 \Sigma_{21} t_1 = 0$$

又 $\because$ $\left(t'_1 \Sigma_{12} t_2\right)' = t'_2 \Sigma_{21} t_1$

$\therefore$ $t'_1 \Sigma_{12} t_2 = 0$

$\therefore$ $\Sigma_{12} = 0$

$(\Leftarrow)$ $\because$ $\Sigma_{12} = 0$

$$\therefore\ f(t_1,t_2) = \exp\left\{it'\mu - \frac{1}{2} t' \Sigma t\right\}$$

$$= \exp\left\{i t'_1 \mu_1 + i t'_2 \mu_2 - \tfrac{1}{2}(t'_1 \Sigma_{11} t_1 + t'_1 \Sigma_{12} t_2 + t'_2 \Sigma_{21} t_1 + t'_2 \Sigma_{22} t_2)\right\}$$

$$= \exp\left\{i t'_1 \mu_1 - \tfrac{1}{2} t'_1 \Sigma_{11} t_1\right\}\cdot \exp\left\{i t'_2 \mu_2 - \frac{1}{2} t'_2 \Sigma_{22} t_2\right\}$$

$$= f_{X_1}(t_1)\cdot f_{X_2}(t_2)$$

$\therefore$ X_1 与 X_2 相互独立

（3）令 $\begin{cases} Y_1 = X_1 + A X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$，令 Y_1 与 Y_2 相互独立

则 Y_1 与 Y_2 服从联合正太分布，且 $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = 0$

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y'_2) - E(Y_1)\cdot E(Y'_2)$$

$$= E[(X_1 + A X_2) X'_2] - (\mu_1 + A\mu_2)\mu'_2$$

$$= [E(X_1 X'_2) - \mu_1 \mu'_2] + A[E(X_2 X'_2) - \mu_2 \mu'_2]$$

$$= \Sigma_{12} + A\Sigma_{22}$$

$$=0$$

$$\therefore A = -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \quad , \quad Y_1 = X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} X_2$$

$\therefore$

$$p(X_1, X_2) = p(Y_1, Y_2) \cdot |J| = p(Y_1, Y_2) = p(Y_1) \cdot p(Y_2)$$

则

$$p(X_1 \mid X_2) = \frac{p(X_1, X_2)}{p(X_2)} = \frac{p(Y_1) p(Y_2)}{P(Y_2)} = p(Y_1) = p\left(X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} X_2\right)$$

$\therefore$

$$E\left(X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} X_2\right) = E(X_1) - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} E(X_2)$$

$$= \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2$$

$$\operatorname{var}\left(X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} X_2\right) = \operatorname{var}(X_1) + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \operatorname{var}(X_2)\left(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\right)' - 2\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

$$= \Sigma_{11} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12} - 2\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12}$$

$$= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12}$$

$\therefore$在给定 $X_2 = x_2$ 下， X_1 的条件分布是

$$N_k\left(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12}\right)$$

1.26 设 $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left[\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right]$**，证明**

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

为相互独立的标准正态变量。

证明：因为 $X_i : N(m_i, s_i^2)$, $i = 1,2$ ， $r = \operatorname{cov}(X_1, X_2)/(s_1 s_2)$, $s_1 s_2$ ¹ 0 ，所以

$\frac{X_i - m_i}{s_i} : N(0,1)$ $i = 1,2$，从而 $Y_1 = \frac{X_1 - m_1}{s_1} : N(0,1)$。

又因为 Y_2 是正态变量的线性变换仍是正态变量且

$$EY_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(E\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho E\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right),$$
$$= 0$$

$$
\begin{aligned}
DY_2 &= D\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 D\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left(D\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho^2 D\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)。 \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left(1-\rho^2\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

所以 $Y_2=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\sim N(0,1)$。

Y_1,Y_2 是标准正态变量，则 Y_1 与 Y_2 独立的充要条件是 Y_1 与 Y_2 不相关，即 $r(Y_1,Y_2)=0$。则只需证 $Cov(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-EY_1EY_2=0$，即 $E(Y_1Y_2)=EY_1EY_2$。

$$
\begin{aligned}
E(Y_1Y_2) &= E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right),
\end{aligned}
$$

由于 X_1 与 X_2 不相互独立，因而 $\frac{X_1-m_1}{s_1}$ 与 $\frac{X_2-m_2}{s_2}$ 也不相互独立，所以有

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) &= \operatorname{cov}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)-E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)E\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(\frac{X_1}{\sigma_1}-\frac{\mu_1}{\sigma_1},\frac{X_2}{\sigma_2}-\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(\frac{X_1}{\sigma_1},\frac{X_2}{\sigma_2}\right), \\
&= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\operatorname{cov}(X_1,X_2) \\
&= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\rho\sigma_1\sigma_2 \\
&= \rho
\end{aligned}
$$

又

$$E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)=\rho E\left(\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right)$$
$$=\rho\left(D\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\left(E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)^2\right),$$
$$=\rho$$

所以

$$E\left(Y_1Y_2\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\rho-\rho\right)=0$$
。

因而有 $E\left(Y_1Y_2\right)=EY_1EY_2$，所以 Y_1 与 Y_2 相互独立，从而 Y_1 与 Y_2 是相互独立的标准正态变量。

1.31 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 Weibull 分布的一个样本，其分布函数为：当 $x\leqslant 0$ 时 $F(x)=0$，当 $x>0$ 时，$F(x)=1-\exp\{-(x/\eta)^m\}$，其中 $m>0$ 为形状参数，$\eta>0$为尺度参数，证明：$Y=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$仍服从 Weibull 分布。

解：设 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的次序统计量.

由题意可得：$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim Weibull(m,\eta)$，i.i.d.

$P\{Y>y\}=P\{min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>y\}=P\{X_{(1)}>y\}$

$=P\{X_1>y, X_2>y,\cdots,X_n>y\}$

$=P\{X_1>y\}P\{X_2>y\}P\{X_n>y\}$

$=[1-F(y)]^n$.

其中，当 $y\leqslant 0$ 时 $F(y)=0$，当 $y>0$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1-\exp\{-(y/\eta)^m\}$.

因此，当 $y\leqslant 0$ 时，$P\{Y\leqslant y\}=P\{X_{(1)}\leqslant y\}=0$ ；

当 $y>0$ 时，$P\{Y\leqslant y\}=P\{X_{(1)}\leqslant y\}=1-P\{Y>y\}$

$=1-[1-F(y)]^n$

$=1-[1-(1-\exp\{-(y/\eta)^m\})]^n$

$=1-[\exp\{-(y/\eta)^m\}]^n$

$=1-\exp\{-(y/\eta)^{m\,n}\}$

综上，$Y=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$仍服从 Weibull 分布，即 $Y\sim Weibull(mn,\eta)$.

1.35

错误！未找到引用源。=**错误！未找到引用源。** **错误！未找到引用源。**

错误！未找到引用源。期望方差的存在条件只需要**错误！未找到引用源。**的期望与方差存在即可。

由定理 1.2 可知，**错误！未找到引用源。**,i=k+1,k+2,….,n-k.

错误！未找到引用源。, **错误！未找到引用源。**

错误！未找到引用源。

错误！未找到引用源。,**错误！未找到引用源。**

错误！未找到引用源。

错误！未找到引用源。,**错误！未找到引用源。**

1.36 **设** $X_1,\cdots,X_n$ **是来自总体分布函数** $F(x)$ **的一个样本，** $F_n(x)$ **为其经验分布函数**

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{|X_i\le x|}$$

证明：

$$\sqrt{n}\left[F_n(x)-F(x)\right] \quad \xrightarrow{L} \quad N\left(0,F(x)\left[1-F(x)\right]\right)$$

证明：

令 $G_n=\sqrt{n}\left[F_n(x)-F(x)\right]$，则

由 $E\left(I_{|X_i\le x|}\right)=F(x)$，$E\left(I_{|X_i\le x|}\right)^2=F(x)\left(1-F(x)\right)$，得

$$\begin{aligned}E(G_n)&=E\left(\sqrt{n}\left[F_n(x)-F(x)\right]\right)\\&=\sqrt{n}E\left(\left[F_n(x)-F(x)\right]\right)=\sqrt{n}\left(E\left(F_n(x)\right)-E\left(F(x)\right)\right)\\&=\sqrt{n}\left(E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{|X_i\le x|}\right)-F(x)\right)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(I_{|X_i\le x|}\right)-F(x)\right)\\&=\sqrt{n}\left(F(x)-F(x)\right)=0\end{aligned}$$

$$Var\left(G_n\right)=Var\left(\sqrt{n}\left[F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\right]\right)$$

$$=nVar\left[F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\right]=nVar\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{|X_i\le x|}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Var\left(I_{|X_i\le x|}\right)=F\left(x\right)\left(1-F\left(x\right)\right)$$

因此由中心极限定理可得

$$\sqrt{n}\left[F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\right]\quad \xrightarrow{L}\quad N\left(0,F\left(x\right)\left[1-F\left(x\right)\right]\right)$$

1.41. 设$X_1,\cdots,X_n$**是来自二点分布**$b\left(1,\theta\right)$**的一个样本，证明**

$$T_k=\left(X_1+\cdots+X_k,X_{k+1},\cdots,X_n\right),k=1,2,\cdots,n$$

都是θ**的充分统计量。若对**T_k **给定**$\left(t,t_{k+1},,t_n\right)$**，请设计一个随机试验，它能产生与原样本同分布的新样本。**

解：

$$p\left(X_1,X_2\cdots,X_n\right)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(1-\theta\right)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$=\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(1-\theta\right)^n$$

$$=\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x_{k+1}}\cdots\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x_n}\left(1-\theta\right)^n$$

则根据因子分解定理$T_k=\left(X_1+\cdots+X_k,X_{k+1},\cdots,X_n\right)$是$\theta$的充分统计量。

设计如下随机试验:现有 n-k+1 个位置进行试验，第 1 个位置做 k 次试验，其他位置$\left(2,3,\cdots,n-k+1\right)$各做一次试验，记录成功的次数，这个随机试验产生的样本与原样本同分布。

1.41 设$X_1,\cdots,X_n$**是来自二点分布**$b\left(1,\theta\right)$**的一个样本，证明**

$$T_k=\left(X_1+\cdots+X_k,X_{k+1},\cdots,X_n\right),\quad k=1,2,\cdots,n$$

都是θ**的充分统计量. 若对**T_k**给定**$\left(t,t_{k+1},\cdots,t_n\right)$**，请设计一个随机试验，它能产生与原样本同分布的新样本.**

证明：

令$W_k = X_1 + \cdots + X_k$，显然W_k的分布为二项分布$b(k,\theta)$，即

$$P(W_k = t) = C_k^t \theta^t (1-\theta)^{k-t}$$

所以当$T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)$时，样本的条件分布为

$$\begin{aligned}
&P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n \middle| T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)\right) \\
&= \frac{P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n, T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)\right)}{P\left(T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)\right)} \\
&= \frac{P(X_{k+1} = t_{k+1}) \cdots P(X_n = t_n) P(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k, W_k = t)}{P\left(T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)\right)} \\
&= \frac{\theta^t (1-\theta)^{k-t} \theta^{\sum_{i=k+1}^{n} t_i} (1-\theta)^{n-k-\sum_{i=k+1}^{n} t_i}}{C_k^t \theta^t (1-\theta)^{k-t} \theta^{\sum_{i=k+1}^{n} t_i} (1-\theta)^{n-k-\sum_{i=k+1}^{n} t_i}} = \left(C_k^t\right)^{-1}
\end{aligned}$$

计算结果表明，条件分布$P\left(X = x \middle| T_k = (t, t_{k+1}, \cdots, t_n)\right)$对任意样本点$x$都不依赖于$\theta$，所以$T_k = (X_1 + \cdots + X_k, X_{k+1}, \cdots, X_n)$，$k = 1, 2, \cdots, n$都是$\theta$的充分统计量.

42. 设$X_1, \cdots, X_n$是来自二项分布$b(m,\theta)$的一个样本，证明：$T_n = \sum_{i-1}^{n} X_i$是θ的充分统计量。

解：该样本的联合分布列为：

$$p(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \frac{(m!)^n}{x_1!x_2!\cdots x_n!(m-x_1)!\cdots(m-x_n)!} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{nm-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

取$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$，$h(x) = \frac{(m!)^n}{x_1!x_2!\cdots x_n!(m-x_1)!\cdots(m-x_n)!}$，则

$$p(X = x) = h(x) \cdot \theta^{T(x)} (1-\theta)^{nm-T(x)}$$

由因子分解定理知，$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 是θ的充分统计量。

1.42 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自二项分布 $b(m,\theta)$ 的一个样本，证明：$T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 θ 的充分统计量.

证明：

由题意得样本的联合分布列为

$$P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)=C_m^{x_1}\theta^{x_1}\left(1-\theta\right)^{m-x_1}\cdots C_m^{x_n}\theta^{x_n}\left(1-\theta\right)^{m-x_n}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}\times\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(1-\theta\right)^{nm-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

其中 $x_i=0,1,\cdots,m$， $i=1,\cdots,n$

取 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i$， $h(x)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}$ ，就有

$$P_\theta\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)=\theta^{T(x)}\left(1-\theta\right)^{nm-T(x)}h(x)$$

由因子分解定理可得，$T(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 θ 的充分统计量

1.51 设 $\begin{pmatrix}X_i\\Y_i\end{pmatrix}$ ，i=1,....n 是来自正态分布族 $\left\{N\left(\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\theta_1,\theta_2<+\infty,\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|\le 1\right\}$ 的一个二维样本，寻求该分布族的充分统计量。

解：设 X=$(X_1,\ X_2)$~$N(\mu,\Sigma)$ ，则 X 有概率密度

f(x)=$\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^{T}\right]$

令 A=$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ ，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ ，$U=\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix}$ ，经计算

$$\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2} & \frac{\rho}{(\rho^2-1)\sigma_1\sigma_2}\\ \frac{\rho}{(\rho^2-1)\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_2^2}\end{pmatrix}$$ 令 $\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}$

则有 $(A-U)^{T}\Sigma^{-1}(A-U)=(X-\theta_1 \quad Y-\theta_2)\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X-\theta_1\\ Y-\theta_2\end{pmatrix}$

$= aX^2-2X(a\theta_1-b\theta_2)+dY^2-2Y(b\theta_1+d\theta_2)+2bXY+a\theta_1^2+2b\theta_1\theta_2+$

$\theta_2^2 d$

$\begin{pmatrix}X_i\\ Y_i\end{pmatrix}$的联合密度函数为

$$P\begin{pmatrix}X_i\\ Y_i\end{pmatrix}=(2\pi)^{-n}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(A_i-u)(A_i-u)^{T}\right\}$$

$$=(2\pi)^{-n}|\Sigma|^{\frac{-n}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(a\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2(a\theta_1-b\theta_2)\sum_{i=1}^{n}X_i+d\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2(b\theta_1+d\theta_2)\sum_{i=1}^{n}Y_i+2b\sum_{i=1}^{n}X_iY_i+\left(a\theta_1^2+2b\theta_1\theta_2+d\theta_2^2\right)\right)\right\}$$

令 $T_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$， $T_2=\sum_{i=1}^{n}X_i$,$T_3=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$, $T_4=\sum_{i=1}^{n}Y_i$,$T_5=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$

由因子分解定理知 T=（T_1 ，T_2， T_3 ，T_4， T_5）是它的充分统计量。

1.51 设$\begin{pmatrix}X_i\\ Y_i\end{pmatrix}$， $i=1,\cdots,n$是来自正态分布族

$$\left\{N\left(\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\theta_1,\theta_2<\infty,\sigma_1,\sigma_1>0,|\rho|\le 1\right\}$$

的一个二维样本，寻求该分布族的充分统计量.

解：

令 $Z_i=\begin{pmatrix}X_i\\ Y_i\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,n$ ，则

$$P\left(z_i\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x_1-\theta_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x_1-\theta_1\right)\left(y_1-\theta_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y_1-\theta_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

所以$\left(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n\right)$的联合密度函数为

$$P\left(z\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^n\sigma_1{}^n\sigma_2{}^n\left(1-\rho^2\right)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\theta_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\theta_1\right)\left(y_i-\theta_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-\theta_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^n\sigma_1{}^n\sigma_2{}^n\left(1-\rho^2\right)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1{}^2\right)\right]\right\}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1\theta_2\right)\right]\right\}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-2\theta_2\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_2{}^2\right)\right]\right\}$$

故由因子分解定理可得，

$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}y_i,\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2,\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2,\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)$是$\left(\theta_1,\theta_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$的充分统计量

2.2 设X_1，X_2独立同分布，其共同密度函数为

$$\rho\left(x;\theta\right)=k\theta^k x^{-(k+1)},x>\theta,\theta>0,k>2\text{已知}$$

（1）证明$T_1=\frac{k-1}{2k}(x_1+x_2)$和$T_2=\frac{2k-1}{2k}\min(x_1,x_2)$都是$\theta$的无偏估计；

（2）计算 T_1 和 T_2 的均方误差并进行比较；

（3）证明：在均方误差意义下，在形如 $T_c = c\min(x_1, x_2)$ 的估计中，$c = \dfrac{2k-2}{2k-1}$ 时最优。

解:

（1）证明：

$$
\begin{aligned}
E\left(T_1\right) &= E\left(\frac{k-1}{2k}(x_1+x_2)\right) = \frac{k-1}{2k} \bullet 2E\left(X\right) \\
&= \frac{k-1}{2k} \bullet 2\int_{\theta}^{+\infty} x\rho\left(x;\theta\right)dx = \frac{k-1}{2k} \bullet 2\int_{\theta}^{+\infty} xk\theta^k x^{-(k+1)}dx = \theta
\end{aligned}
$$

故 $T_1 = \dfrac{k-1}{2k}(x_1+x_2)$ 是 θ 的无偏估计

$$E\left(T_2\right) = E\left(\frac{2k-1}{2k}\min(x_1,x_2)\right) = \frac{2k-1}{2k}E\left(X_{(1)}\right)，\text{其中 } X_{(1)} = \min(x_1,x_2)$$

$X_{(1)}$ 的密度函数用 $\rho\left(y;\theta\right)$ 表示，总体分布函数为

$$F\left(x;\theta\right) = \int_{-\infty}^{x} \rho\left(t;\theta\right)dt = \int_{\theta}^{x} k\theta^k x^{-(k+1)}dt = -\theta^k x^{-k} + 1$$

因此可得 $X_{(1)}$ 的密度函数为

$$
\begin{aligned}
\rho\left(y;\theta\right) &= 2\left[1-F\left(y;\theta\right)\right]\rho\left(y;\theta\right) = 2\left[1-\left(-\theta^k y^{-k}+1\right)\right]k\theta^k y^{-(k+1)} \\
&= 2k\theta^{2k} y^{-2k-1}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E\left(T_2\right) &= \frac{2k-1}{2k}E\left(X_{(1)}\right) = \frac{2k-1}{2k}\int_{\theta}^{+\infty} y\rho\left(y;\theta\right)dy \\
&= \frac{2k-1}{2k}\int_{\theta}^{+\infty} y2k\theta^{2k} y^{-2k-1}dy = \theta
\end{aligned}
$$

故 $T_2 = \dfrac{2k-1}{2k}\min(x_1,x_2)$ 是 θ 的无偏估计

（2）因为 $T_i(i=1,2)$ 都是 θ 的无偏估计，所以均方误差为

$$MSE_{\theta}\left(T_i\right) = Var\left(T_i\right)(i=1,2)$$

因此

$$MSE_\theta(T_1)=VarT_1=Var\left(\frac{k-1}{2k}(x_1+x_2)\right)=\left(\frac{k-1}{2k}\right)^2\bullet 2VarX_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}VarX_1&=EX_1{}^2-(EX_1)^2=\int_\theta^{+\infty}x^2\rho(x;\theta)dx-\left(\int_\theta^{+\infty}x\rho(x;\theta)dx\right)^2\\&=\int_\theta^{+\infty}x^2k\theta^kx^{-(k+1)}dx-\left(\int_\theta^{+\infty}xk\theta^kx^{-(k+1)}dx\right)^2\\&=\frac{k}{k-2}\theta^2-\left(\frac{k}{k-1}\theta\right)^2=\frac{k}{(k-1)^2(k-2)}\theta^2\end{aligned}\tag{2}$$

将（2）式代入（1）式得到 $MSE_\theta(T_1)=\dfrac{\theta^2}{2k(k-2)}$ （5）

同理可得

$$MSE_\theta(T_2)=VarT_2=Var\left(\frac{2k-1}{2k}\min(x_1,x_2)\right)=\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2VarX_{(1)} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}VarX_{(1)}&=EX_{(1)}{}^2-\left(EX_{(1)}\right)^2=\int_\theta^{+\infty}y^2\rho(y;\theta)dy-\left(\int_\theta^{+\infty}y\rho(y;\theta)dy\right)^2\\&=\int_\theta^{+\infty}y^2 2k\theta^{2k}y^{-2k-1}dy-\left(\int_\theta^{+\infty}yk\theta^ky^{-(k+1)}dy\right)^2\\&=\frac{2k}{2k-2}\theta^2-\left(\frac{2k}{2k-1}\theta\right)^2=\frac{k}{(k-1)(2k-1)^2}\theta^2\end{aligned}\tag{4}$$

将（4）式代入（3）式得 $MSE_\theta(T_2)=\dfrac{\theta^2}{4k(k-1)}$ （6）

比较（5）式和（6）式可得

$$MSE_\theta(T_2)<MSE_\theta(T_1)$$

（3）由均方误差的定义可得

$$MSE_\theta(T_c)=VarT_c+(ET_c-\theta)^2 \tag{7}$$

$$VarT_c=Var\left(c\min(x_1,x_2)\right)=c^2VarX_{(1)} \tag{8}$$

将（4）式代入（8）式得 $VarT_c=c^2\dfrac{k}{(k-1)(2k-1)^2}\theta^2$ （9）

$$ET_c = E\left(c\min(x_1,x_2)\right) = cEX_{(1)} = c\int_{\theta}^{+\infty} yk\theta^k y^{-(k+1)}dy = c\frac{2k}{2k-1}\theta \quad （10）$$

将（9）、（10）式代入（7）式得

$$MSE_\theta\left(T_c\right) = c^2\frac{k}{(k-1)(2k-1)^2}\theta^2 + \left(c\frac{2k}{2k-1}\theta - \theta\right)^2$$
$$= \frac{\left(4k^3-4k^2+k\right)c^2 + \left(-8k^3+16k^2-8k\right)c + 4k^3-8k^2+5k-1}{(k-1)(2k-1)^2}\theta^2$$

因为 $4k^3-4k^2+k>0$，所以 $MSE_\theta\left(T_c\right)$ 可达到最小值，此时 $c=\left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^2$

2.3

⑴证明：

由于密度函数为 $p(x;\theta)=k\theta^k x^{-(k+1)}$ ，

所以可求得：

$$E(X)=\int_{\theta}^{\infty} xp(x;\theta)dx=\frac{k}{(k-1)}\theta$$

$$E(X^2)=\int_{\theta}^{\infty} x^2 p(x;\theta)dx=\frac{k}{(k-2)}\theta^2$$

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{k}{(k-2)(k-1)^2}\theta^2$$

因为

$$T_1=\frac{k}{k-1}\frac{x_1+x_2}{2}$$

则

$$E(T_1)=\frac{k-1}{k}E\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\theta$$

由于 T_2 为次序统计量，则 T_2 的密度函数为

$$g(y;\theta)=(2k-1)\theta^{2k}y^{-(2k+1)}$$

因此

$$E(T_2)=\int_{\theta}^{\infty} yg(y;\theta)dy=\theta$$

故得证。

(2)由于T_1，T_2为无偏估计，

所以

$$MSE_\theta(T_i)=\mathrm{Var}(T_i)\quad i=1,2$$

可求得

$$\mathrm{Var}(T_1)=Var(\frac{k-1}{k}\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{(k-1)^2}{k^2}\frac{\mathrm{VarX}}{4}=\frac{\theta^2}{4k(k-2)}$$

$$\mathrm{Var}(T_2)=E(T_2{}^2)-(E(T_2))^2=\frac{2(k-1)}{2(k-2)}\theta^2-\theta^2=\frac{\theta^2}{2(k-1)}$$

(3)

证明：

对于θ的估计$\hat{\theta}$，$a>0$为常数，

考虑：

$$MSE_\theta(a\hat{\theta})=E(a\hat{\theta}-\theta)^2=a^2E(\hat{\theta}-\theta)^2+(1-a^2)\theta^2$$

由简单求导可得

$$a=\theta^2/（\theta^2+Var\hat{\theta})$$

均方误差最小，

由上题可知

$$\mathrm{Var}(T_2)=E(T_2{}^2)-(E(T_2))^2=\frac{2(k-1)}{2(k-2)}\theta^2-\theta^2=\frac{\theta^2}{2(k-1)}$$

代入上式可求

$$a=\frac{2k-2}{2k-1}$$

得证。

2.3 设$\theta\in(a,b)$，$T(X)$是θ的无偏估计，令

$$S(x)=\begin{cases}T(x), a\le T(x)\le b\\ a,\quad T(x)<a\\ b,\quad T(x)>b\end{cases}$$

证明：$E(S(x)-\theta)^2\le E(T(x)-\theta)^2$.

证明：

(1)当$a \le T(x) \le b$时，$S(x) = T(x)$. 结论显然成立

(2)当$T(x) < a$时，

$$E(S(x)-\theta)^2 = E\left(S(x)-E(S(x))+E(S(x))-\theta\right)^2 = E\left(S(x)-E(S(x))\right)^2 + \left(E(S(x))-\theta\right)^2$$
$$= (a-\theta)^2$$

$$E(T(x)-\theta)^2 = E\left(T(x)-E(T(x))+E(T(x))-\theta\right)^2 = E\left(T(x)-E(T(x))\right)^2 + \left(E(T(x))-\theta\right)^2$$
$$= E(T(x)-\theta)^2 = \int (T(x)-\theta)^2 p(x)\,dx \ge \int (a-\theta)^2 p(x)\,dx$$
$$= (a-\theta)^2 \int p(x)\,dx = (a-\theta)^2$$

(3)当$T(x) > b$时，

$$E(S(x)-\theta)^2 = E\left(S(x)-E(S(x))+E(S(x))-\theta\right)^2 = E\left(S(x)-E(S(x))\right)^2 + \left(E(S(x))-\theta\right)^2$$
$$= (b-\theta)^2$$

$$E(T(x)-\theta)^2 = E\left(T(x)-E(T(x))+E(T(x))-\theta\right)^2 = E\left(T(x)-E(T(x))\right)^2 + \left(E(T(x))-\theta\right)^2$$
$$= E(T(x)-\theta)^2 = \int (T(x)-\theta)^2 p(x)\,dx \ge \int (b-\theta)^2 p(x)\,dx$$
$$= (b-\theta)^2 \int p(x)\,dx = (b-\theta)^2$$

综上，结论得证。

2.6

解：对任意的ε，由切比雪夫不等式，有

$$p\left(\left|\widehat{\theta}_n - E\widehat{\theta}_n\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \frac{4}{\varepsilon^2} Var\left(\widehat{\theta}_n\right)$$

由题意，

$E\widehat{\theta}_n \to \theta$, 对任意的$\varepsilon$，当充分大时，有$\left|E\widehat{\theta}_n - \theta\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le \left|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right| + \left|E\hat{\theta}_n - \theta\right|$$

若$\left|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 有$\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon$

若$\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \ge \varepsilon$，则$\left|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right| \ge \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \ge \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right| \ge \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$，故

$$P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \ge \varepsilon\right) \le P\left(\left|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \frac{4}{\varepsilon^2} Var\left(\hat{\theta}_n\right) \to 0$$

(当$n \to \infty$)

2.7

证明：

由题意，

$$E(\hat{\mu}) = \frac{2}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} iE(X_i)\right) = \frac{2}{n(n+1)}\frac{(1+n)n}{2}E(X_1) = \mu$$

$$: \quad Var(\hat{\mu}) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 Var(X_i)\right) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}Var(X_1)$$

$$= \frac{4(2n+1)}{6n(n+1)}Var(X_1)$$

由上题结论，得证

2.7

证明：**错误！未找到引用源。**是μ的相合估计，即证**错误！未找到引用源。**

记**错误！未找到引用源。**,则有E(**错误！未找到引用源。**)=μ，Var(**错误！未找到引用源。**)=**错误！未找到引用源。**

由切比雪夫定理可知，对任意ε>0,有

$$P\{|\mu_n - \mu| \ge \varepsilon\} \le \frac{Var\mu_n}{\varepsilon^2}$$

令 n 趋于无穷时，**错误！未找到引用源。**趋于 0，所以**错误！未找到引用源。**是μ的相合估计。

2.8 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $U(0,n\lambda)$ 的一个样本，

（1）证明 $n\lambda - X_{(n)}$ 的分布收敛于 $Exp(\frac{1}{\lambda})$；

（2）用（1）中结果给出 λ 的一个相合估计。

（1）证明：由次序统计量 $X_{(n)}$ 的密度函数公式可得

$$p(X_{(n)})=n\cdot(\frac{x}{n\lambda})^{n-1}\cdot\frac{1}{n\lambda}=n\cdot\frac{x^{n-1}}{(n\lambda)^n}$$

令 $Y=n\lambda-X_{(n)}$，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(n\lambda-X_{(n)}\le y)=P(X_{(n)}\ge n\lambda-y)$

$$=1-P(X_{(n)}<n\lambda-y)=1-\int_0^{n\lambda-y}\frac{nx^{n-1}}{(n\lambda)^n}dx$$

$$=\begin{cases}1-(\frac{n\lambda-y}{n\lambda})^n, y\ge 0\\ 0, y<0\end{cases}$$

当 $y\ge 0$ 时， $\lim_{n\to\infty}F_Y(y)=\lim_{n\to\infty}1-(1-\frac{y}{n\lambda})^n=\lim_{n\to\infty}1-[(1-\frac{y}{n\lambda})^{-\frac{n\lambda}{y}}]^{-\frac{y}{\lambda}}=1-e^{-\frac{y}{\lambda}}$

$Exp(\frac{1}{\lambda})$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\lambda}}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$

$\therefore n\lambda-X_{(n)}\xrightarrow{L}Exp(\frac{1}{\lambda})$

（2） $\forall\varepsilon>0, P(\left|\frac{X_{(n)}}{n}-\lambda\right|\ge\varepsilon)=P(X_{(n)}\le n\lambda-n\varepsilon)=\int_0^{n\lambda-n\varepsilon}\frac{nx^{n-1}}{(n\lambda)^n}dx=(\frac{n\lambda-n\varepsilon}{n\lambda})^n$

$$=(\frac{\lambda-\varepsilon}{\lambda})^n\to 0(n\to\infty)$$

$\therefore\frac{X_{(n)}}{n}$ 是 λ 的一个相合估计。

2.9 设 $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为独立同分布的二元正态变量，

$EX_1=EY_1=0$，$VarX_1=VarY_1=1$，$Cov(X_1,Y_1)=\rho$。记

$$S_{xx}=\frac{1}{n}\sum X_i^2，\quad S_{xy}=\frac{1}{n}\sum X_iY_i，\quad S_{yy}=\frac{1}{n}\sum Y_i^2$$

（1）证明 $\sqrt{n}(S_{xx}-1, S_{xy}-\rho, S_{yy}-1)\xrightarrow{L}N_3(0,\Sigma)$，其中

$$\Sigma=\begin{pmatrix}2 & 2\rho & 2\rho^2\\ 2\rho & 1+\rho^2 & 2\rho\\ 2\rho^2 & 2\rho & 2\end{pmatrix}$$

（2）令 $r=S_{xy}\big/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$，求 $\sqrt{n}(r-\rho)$ 的渐近分布。

证明：（1）因为(X_i,Y_i)服从二元正态分布且

$EX_1=EY_1=0$, $VarX_1=VarY_1=1$, $Cov(X_1,Y_1)=\rho$。所以$X_i\sim N(0,1)$，$Y_i\sim N(0,1)$，

$E(X_i^2)=1$， $E(Y_i^2)=1$。又因为(X_i,Y_i)之间是相互独立的，所以$\sum X_i^2\sim\chi^2(n)$，

$\sum Y_i^2\sim\chi^2(n)$。

$$E(S_{xx})=E\left(\frac{1}{n}\sum X_i^2\right)=\frac{1}{n}\cdot n=1，\quad E(S_{yy})=E\left(\frac{1}{n}\sum Y_i^2\right)=\frac{1}{n}\cdot n=1。$$

又因为$Cov(X_i,Y_i)=E(X_iY_i)-EX_iEY_i=\rho$，所以$E(X_iY_i)=\rho$，从而

$$E(S_{xy})=\frac{n\rho}{n}=\rho。$$

令$Z=\sqrt{n}(S_{xx}-1, S_{xy}-\rho, S_{yy}-1)^T$, 所以$E(Z)=(0,0,0)^T$。

$$Var(S_{xx})=Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum X_i^2\right)=\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n},$$

$$Var(S_{yy})=Var\left(\frac{1}{n}\sum Y_i^2\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum Y_i^2\right)=\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n},$$

$$\begin{aligned}
Var(S_{xy})&=E\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum X_iY_i\right)^2\right]-\left[E\left(\frac{1}{n}\sum X_iY_i\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{n^2}E\left(\sum X_iY_i\right)^2-\left[\frac{1}{n}nE(X_iY_i)\right]^2\\
&=\frac{1}{n^2}E\left(\sum X_i^2Y_i^2+2\sum_{i\neq j}X_iY_iX_jY_j\right)-\left[E(X_iY_i)\right]^2\\
&=\frac{1}{n^2}\left[nE(X_i^2Y_i^2)+n(n-1)E(X_iY_i)E(X_jY_j)\right]-\rho^2\\
&=\frac{1}{n}E(X_i^2Y_i^2)+\frac{n-1}{n}\rho^2-\rho^2\\
&=\frac{1}{n}E(X_i^2Y_i^2)-\frac{\rho^2}{n}
\end{aligned}$$

因为$X_i|Y_i\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$，所以$X_i|Y_i\sim N(\rho y,(1-\rho^2))$。

所以$E(X_i^2|Y_i)=\left[E(X_i|Y_i)\right]^2+Var(X_iY_i)=\rho^2y^2+1-\rho^2$，所以

$$E\left(X_i^2Y_i^2\right)=E\left[E\left(X_i^2Y_i^2|Y_i\right)\right]=E\left[Y_i^2E\left(X_i^2|Y_i\right)\right]=E\left[Y_i^2\left(\rho^2Y_i^2+1-\rho^2\right)\right]$$
$$=E\left[\rho^2Y_i^4+\left(1-\rho^2\right)Y_i^2\right]=\rho^2E\left(Y_i^4\right)+\left(1-\rho^2\right)$$

又因为 $E\left(Y_i^4\right)=E\left(Y_i^2\right)^2+Var\left(Y_i^2\right)=1+2=3$，所以

$$E\left(X_i^2Y_i^2\right)=3\rho^2+\left(1-\rho^2\right)=1+2\rho^2$$

所以 $Var\left(S_{xy}\right)=\dfrac{1+2\rho^2}{n}-\dfrac{\rho^2}{n}=\dfrac{1+\rho^2}{n}$。

$$Cov\left(S_{xx},S_{yy}\right)=Cov\left(\frac{1}{n}\sum X_i^2,\frac{1}{n}\sum Y_i^2\right)=\frac{1}{n^2}Cov\left(\sum X_i^2,\sum Y_i^2\right)=\frac{1}{n}Cov\left(X_i^2,Y_i^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left[E\left(X_i^2Y_i^2\right)-EX_i^2EY_i^2\right]=\frac{1}{n}\left(1+2\rho^2-1\right)=\frac{2\rho^2}{n}$$

$$Cov\left(S_{xx},S_{xy}\right)=Cov\left(\frac{1}{n}\sum X_i^2,\frac{1}{n}\sum X_iY_i\right)=\frac{1}{n^2}Cov\left(\sum X_i^2,\sum X_iY_i\right)=\frac{1}{n}Cov\left(X_i^2,X_iY_i\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left[E\left(X_i^3Y_i\right)-E\left(X_i^2\right)E\left(X_iY_i\right)\right]$$

因为 $Y_i|X_i\sim N\left(\rho x,\left(1-\rho^2\right)\right)$，所以

$$E\left(X_i^3Y_i\right)=E\left[E\left(X_i^3Y_i|X_i\right)\right]=E\left[X_i^3E\left(Y_i|X_i\right)\right]=E\left(X_i^3\rho X_i\right)$$
$$=\rho E\left(X_i^4\right)=\rho\left[\left(EX_i^2\right)^2+Var\left(X_i^2\right)\right]=3\rho$$

所以 $Cov\left(S_{xx},S_{xy}\right)=\dfrac{1}{n}\left(3\rho-\rho\right)=\dfrac{2\rho}{n}$。

同理可得 $Cov\left(S_{yy},S_{xy}\right)=\dfrac{2\rho}{n}$，所以

$$Var(Z)=Var\left[\sqrt{n}\left(S_{xx}-1\right),\sqrt{n}\left(S_{xy}-\rho\right),\sqrt{n}\left(S_{yy}-1\right)\right]=\Sigma$$

由中心极限定理可知：$\sqrt{n}\left(S_{xx}-1,\ S_{xy}-\rho,\ S_{yy}-1\right)\xrightarrow{L}N_3(0,\Sigma)$。

（2）令 $T=\left(S_{xx},S_{xy},S_{yy}\right)^T$， $\theta=\left(1,\rho,1\right)^T$，由（1）可得

$$\sqrt{n}\left(T-\theta\right)^T\xrightarrow{L}N_3(0,\Sigma)$$

因为 $r=S_{xy}\big/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$，所以 设 $g(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{xz}}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{-y}{2x\sqrt{xz}},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{-1}{\sqrt{xz}},\quad \frac{\partial g}{\partial z}=\frac{-y}{2z\sqrt{xz}}$$

记 $\Delta=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(x,y,z)=(1,\rho,1)}=\left(-\frac{\rho}{2},1,-\frac{\rho}{2}\right)^T$，

又因为 $\sqrt{n}(T-\theta)^T\xrightarrow{L}N_3(0,\Sigma)$，所以 $\sqrt{n}(g(T)-g(\theta))\xrightarrow{L}N_3(0,\Sigma')$，其中 $\Sigma'=\Delta^T\Sigma\Delta$。

$$\Sigma'=\left(-\frac{\rho}{2},1,-\frac{\rho}{2}\right)\begin{pmatrix}2 & 2\rho & 2\rho^2\\ 2\rho & 1+\rho^2 & 2\rho\\ 2\rho^2 & 2\rho & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\rho}{2}\\ 1\\ -\frac{\rho}{2}\end{pmatrix}=\left(1-\rho^2\right)^2$$

所以 $\sqrt{n}(g(T)-g(\theta))^T\xrightarrow{L}N_3\left(0,\left(1-\rho^2\right)^2\right)$，即 $\sqrt{n}(r-\rho)\xrightarrow{L}N_3\left(0,\left(1-\rho^2\right)^2\right)$。

2.12

(1)证明：若$\phi(x)$满足 $E_\theta\phi(x)=0$，即$\sum_{x=1}^{\theta}\frac{\phi(x)}{\theta}=0$ 对$\forall\theta=1$，2，…恒成立, 则

当$\theta=1$时，$\phi(1)=0$，

当$\theta=2$时，$\frac{1}{2}(\phi(1)+\phi(2))=0$,即$\phi(2)=0$,

…

则当 $x=1,2$，…时，$\phi(x)=0$,即$\phi(x)=0$,a.s.P_θ,故$\wp$是完备的。

(2)由题意，$P_\theta(X=i)=\frac{1}{\theta}.I_{(X=1,2\cdots\theta)}=g_\theta(T).h(X)$，其中 T= X,$h(X)=1$,故 X 是θ的充分统计量，又$\wp$是完备的，且 E $X=\sum_{i=1}^{\theta}i/\theta=\frac{1+\theta}{2}$，故 2 X-1 是θ的 UMVUE。

(3)假设$\wp_k$完备，由(1)的过程，可知当 $x<k$ 时，$\phi(x)=0$，现在对于$\phi(x)$，当 $x=k$ 时，令$\phi(x)=1$，当 $x=k+1$ 时，令$\phi(x)=-1$，当 $x>k+1$ 时，令$\phi(x)=0$，即此时找到一个函数$\phi(x)$ 满足 $E_\theta\phi(x)=0$ 时，$\phi(x)$不是几乎处处为零，即$\wp_k$是不完备的。

(4)不妨设$\theta^*=\hat{\theta}+\phi(x)$, $\phi(x)$满足(3)中的条件，且 Eθ^*= E$\hat{\theta}=\theta$,则 Var(θ^*)=E($\theta^*-\hat{\theta}+\hat{\theta}-\theta)^2$=E$(\theta^*-\hat{\theta})^2$

+ 2E$(\theta^*-\hat{\theta})(\hat{\theta}-\theta)$+Var($\hat{\theta}$)$=\frac{1}{\theta}[\sum_{i=1}^{\theta}\phi^2(i)+2\phi(i)(2i-1-\theta)]$+Var($\hat{\theta}$)=Var($\hat{\theta}$)$-\frac{2}{\theta}$ < Var($\hat{\theta}$),故

对$\wp_k$，$\hat{\theta}$不是θ的 UMVUE 。

2.13

考虑幂级数分布的参数估计问题，设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自

$$\Pr(X=x)=\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x，\quad x=c,c+1,\cdots,\infty \qquad （2.73）$$

的一个样本，令 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$

（1）证明：T 是 θ 的完备充分统计量，且 T 的分布仍具（2.73）形式

$$\Pr(T=t)=\frac{b_t}{f^n(\theta)}\theta^t，\text{ t=nc , nc+1,..., }\infty$$

(2)证明 θ^r 的 UMVUE 是

$$\hat{\theta}^r=\begin{cases}0, & t<r+nc\\ b_{t-r}/b_t， & t\ge r+nc\end{cases}$$

（3）证明：若 X 的取值范围有限，则（1），（2）中的结论不再正确。

证明：（1） $\Pr(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_n=x_n)=\dfrac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots\cdot a_{x_n}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$

$$=\frac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots\cdot a_{x_n}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^t$$

令 $h(x)=a_{x_1}\cdot a_{x_2}\cdots a_{x_n}$， $g(\theta,T(x))=\dfrac{\theta^t}{\left(f(\theta)\right)^n}$

所以 T 是 θ 的充分统计量

$$\Pr(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_{n-1}=x_{n-1}，\ T=t)=\frac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots\cdot a_{x_{n-1}}\cdot a_{t-x_1-\cdots-x_{n-1}}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^t$$

$$\Pr(T=t)=(x_1+x_2+\cdots x_{n-1})\frac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots\cdot a_{x_{n-1}}\cdot a_{t-x_1-\cdots-x_{n-1}}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^t$$

$$=\frac{b_t}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^t，\text{ t=nc,nc+1,..., }\infty$$

$$\Pr(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_n=x_n)=\frac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots\cdot a_{x_n}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{x_1+x_2+\cdots x_n}$$

$$=\frac{a_{x_1}\cdot a_{x_2},\cdots a_{x_n}}{\left[f\left(e^{\ln\theta}\right)\right]^n}e^{(x_1+x_2+\cdots x_n)\ln\theta}$$

所以 T 是θ的完备统计量

所以 T 是θ的完备充分统计量

（2） $E\left(\hat{\theta}^r\right)=E\left(\frac{b_{\text{t-r}}}{b_t}\right)$

$$=\sum_{t=nc+r}^{\infty}\Pr\left(T=t\right)$$

$$=\sum_{t=nc+r}^{\infty}\frac{b_{t-r}}{b_t}\cdot\frac{b_t}{\left[f\left(\theta\right)\right]^n}\cdot\theta^t$$

$$\underline{\underline{m=t-r}}\sum_{m=t-r}^{\infty}\frac{b_m}{\left[f\left(\theta\right)\right]^n}\cdot\theta^m\cdot\theta^r$$

$$=\theta^r$$

所以$\hat{\theta}^r$是θ^r的 UMVUE

（3）

先说明（1）不成立

$$\Pr\left(X=x\right)=\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x\text{，}\quad x=c,c+1,...k(k\geq c)$$

$$\Pr\left(T=t\right)=\frac{b_t}{\left[f\left(\theta\right)\right]^n}\theta^t,t=nc,nc+1,...nk(k\geq c)$$

$$E\left(\varphi(t)\right)=\sum_{t=nc}^{nk}\varphi\left(t\right)\Pr\left(T=t\right)$$

$$=\sum_{t=nc}^{nk}\varphi\left(t\right)\frac{b_t}{\left[f\left(\theta\right)\right]^n}\theta^t$$

令上式只有有限项且值为 0，且令$\varphi\left(t\right)\neq 0$，所以可以推出（1）不成立

再说明（2）不成立

若$\hat{\theta}^r$是θ^r的 UMVUE

$$E\left(\hat{\theta}^r\right)=\sum_{t=nc+r}^{nk}\frac{b_{t-r}}{b_t}\cdot\frac{b_t}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^t$$

$$=\ \theta^r$$

$$\sum_{t=nc+r}^{nk}\theta^{t-r}\cdot\frac{b_t}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^r=\theta^r$$

所以有 $\sum_{t=nc+r}^{nk}\theta^{t-r}\cdot\frac{b_{t-r}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{t-r}=1$

又因为 $\sum_{t=nc}^{nk}\Pr(T=t)=1$

所以有 $\sum_{t=nc+r}^{nk+r}\theta^{t-r}\cdot\frac{b_{t-r}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{t-r}=1$

$$\sum_{t=nc+r}^{nk}\theta^{t-r}\cdot\frac{b_{t-r}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{t-r}=1<\sum_{t=nc+r}^{nk+r}\theta^{t-r}\cdot\frac{b_{t-r}}{\left[f(\theta)\right]^n}\theta^{t-r}=1$$

矛盾，所以（2）不成立

所以当 X 的取值范围有限，则（1），（2）中的结论不再成立

2.14 设 X_1,X_2，•••，X_n是来自 N（q，1）的一个样本，令 g（q）=Pr(X_1≤0)，试求 g（q）的 UMVUE.

解：由$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$，则：

$$\mathrm{P}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\}$$

$$\mathrm{P}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta^2-2\theta x_i)\}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\}$$

$$=\mathrm{h}_\theta(T)h(x)$$

其中$\mathrm{T}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, 则 T 为充分统计量，且$\mathrm{T}\sim\mathrm{N}(\theta,\frac{1}{n})$, 易证 T 为完备统计量

另一方面：　　$\mathrm{g}(\theta)=\Pr(X_1\le 0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2\}dx_1$

$$=\int_{-\infty}^{-\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}dy=\Phi(-\theta)\quad（令 y=x_1-\theta）$$

取$\varphi(X)=I_{\{x_1\le 0\}}$，则$E(\varphi(X))=g(\theta)$

在$T=t$的条件下，

$E(\varphi(X)|T=t)=P(x_1\le 0|T=t)=P(x_1-t\le -t|T=t)$

由于$COV(X_1-T,T)=0$，因此：X_1-T与 T 相互独立，且$X_1-T\sim N(0,\frac{n-1}{n})$

故：

$$E(\varphi(X)|T=t)=\int_{-\infty}^{-t}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(n-1)}}\exp\{-\frac{n}{2(n-1)}u^2\}du=\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}t)$$

为$g(\theta)$的 UMVUE。

2.16

证明：（1）$ET(X)=\int_\theta^b\frac{T(x)f(x)}{h(\theta)dx}=g(\theta)$即$\int_\theta^b T(x)f(x)dx=g(\theta)h(\theta)$

对θ求导：$-T(x)f(x)dx=g'(\theta)h(\theta)+h'(\theta)g(\theta)$

将θ换为 x：$-T(x)=[g'(\theta)h(\theta)+h'(\theta)g(\theta)]/f(x)$

(2) 由$\int_\theta^b\frac{f(x)}{h(\theta)dx}=1$即$\int_\theta^b f(x)dx=h(\theta)$对$\theta$求导$-f(\theta)=h'(\theta)$

$T(X)=g(x_{(1)})-\frac{g'(x_{(1)})h(x_{(1)})}{nf(x_{(1)})}$=-$[g'(x_{(1)})h(x_{(1)})+nh'(x_{(1)})g(x_{(1)})]/nf(x_{(1)})$

样本$X_1,X_2,\dots,X_n$的联合密度函数为:

$P(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{f(x_1)\dots f(x_n)}{h^n(\theta)}I_{(0,+\infty)}(x_{(1)})I_{(-\infty,b)}(x_{(n)})$

由因子分解定理知$X_{(1)}$为分布族的充分统计量

下证$X_{(1)}$是完备的，先求$X_{(1)}$的密度函数。

$P\left(X_{(1)}\le x\right)=1-P(X_{(1)}>x)=1-\left[\int_\theta^b\frac{f(t)}{h(\theta)}dt\right]^n\quad(x\ge\theta)$

$\therefore X_{(1)}$的密度函数：

$P(\theta)=-n\left[\int_\theta^b\frac{f(t)}{h(\theta)}dt\right]^{n-1}(-1)\frac{f(\theta)}{h(\theta)}=\frac{n}{h(\theta)^2}\left[\int_\theta^b f(t)dt\right]^{n-1}f(x)\quad(x\ge\theta)$

对$\forall\emptyset(t),E\emptyset(t)=\int_\theta^b\emptyset(t)\frac{n}{h(\theta)^2}\left[\int_x^b f(t)dt\right]^{n-1}f(x)dx$　因为$f(x)>0,h(\theta)>0$

若$E\emptyset(t)=0$则$\emptyset(t)=0$，故$X_{(1)}$为完备的。

T(X)为$X_{(1)}$的函数，只需证T(X)为无偏估计即可。

$$\int_{\theta}^{b}\left(g(x)-\frac{g'(x)h(x)}{nf(x)}\right)\frac{n}{h(\theta)^2}\left[\int_x^b f(t)dt\right]^{n-1}f(x)dx$$

$$=\int_{\theta}^{b}(-g'(x)h(x)-nh'(x)g(x))/h(\theta)^2\left[\int_x^b f(t)dt\right]^{n-1}dx$$

$$E(-g'(\theta)h(\theta)-h'(\theta)g(\theta))/f(x))$$

$$=\int_{\theta}^{b}(-g'(x)h(x)-h'(x)g(x))/f(x)*\frac{f(x)}{h(\theta)}dx=g(\theta)$$

$ET(X)=g(\theta)$

即T(X)为完备充分统计量的函数且为$g(\theta)$的无偏估计

$g(\theta)$的唯一 UMVUE 为

$$T(X)=g(x_{(1)})-\frac{g'(x_{(1)})h(x_{(1)})}{nf(x_{(1)})}$$

(此题稍微有点问题，大家可自己思考一下)

2.21 求证：若$T_1(X)$，$T_2(X)$分别是$g_1(\theta)$，$g_2(\theta)$的 UMVUE，则$T_1(X)+T_2(X)$是$g_1(\theta)+g_2(\theta)$的 UMVUE。

证明：为证明此结论，我们先来证明$T(X)\in U_g$是$g_1(\theta)$的 UMVUE 的充要条件是$Cov(T(X),U)=0$，其中$U\in U_0$，U_0为 0 的无偏估计类。

必要性：

设 $T(X)$ 是 $g_1(\theta)$ 的 UMVUE，则 $U\in U_0$ 和 $a\in R$ 可以表示 $g(\theta)$ 的无偏估计

$g(X)=T(X)+aU$，有

$$Var(g(X))=Var(T(X)+aU)=Var(T(X))+a^2Var(U)+2aCov(T(X),U)\geq Var(T(X))$$

则有 $a^2Var(U)+2aCov(T(X),U)\geq 0$，

易知，$4Cov^2(T(X),U)\leq 0$，故只有$Cov(T(X),U)=0$。

充分性：

设$T(X)$对任一个$U\in U_0$都有$Cov(T(X),U)=0$，则对$g(\theta)$的任何一个无偏估计

$g(X)$，

令$U=T(X)-g(X)$，有$E(U)=0$，

$Var(g(X))=E(\hat{g}-g(\theta))^2=E(\hat{g}-T(X)+T(X)-g(\theta))^2=Var(U)+Var(T(X))+2Cov(U,T(X))\geq Var(T(X))$

，

故$T(X)$是$g(\theta)$的UMVUE。

下面我们来证明本题：$T_1(X)$，$T_2(X)$分别是$g_1(\theta)$，$g_2(\theta)$的UMVUE，

则$E(T_1(X))=g_1(\theta)$，$E(T_2(X))=g_2(\theta)$，

且有$Cov(T_1(X),U)=0$，$Cov(T_2(X),U)=0$，

所以$E(T_1(X)+T_2(X))=g_1(\theta)+g_2(\theta)$，$Cov(T_1(X)+T_2(X),U)=0$，其中$U\in U_0$，

综上可得，$T_1(X)+T_2(X)$是$g_1(\theta)+g_2(\theta)$的UMVUE

2.24 对 Possion 分布 P(θ)

1)求 I(θ);

2)求 I($\frac{1}{\theta}$);

3)找一个函数 g(.) ,使 g（θ)的 Fisher 信息与无关.

Possion 分布的分布列为 $P_\theta(x)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta},x\in N^*$.

1） $S_\theta(x)=\frac{\partial\ln P_\theta(x)}{\partial\theta}=\frac{x}{\theta}-1$；

故 $I(\theta)=E_\theta(S_\theta(x))^2=Var(S_\theta(x))=Var(\frac{x}{\theta}-1)=\frac{1}{\theta}$；

2)令 $t=\frac{1}{\theta}$，则. $P_t(x)=\frac{(\frac{1}{t})^x}{x!}e^{(-\frac{1}{t})},x\in N^*$

$S_t(x)=\frac{\partial\ln P_t(x)}{\partial t}=-\frac{x}{t}+t^{-2}$，

故 $I(\frac{1}{\theta})=I(t)=E_t(S_t(x))^2=Var(S_t(x))=Var(-\frac{x}{t}+\frac{1}{t^2})=t^{-3}=\theta^3$.

3) $S_g(x)=\frac{\partial \ln P_\theta(x)}{\partial g}=\frac{\partial(x\ln\theta-\theta)}{\partial g}=\frac{x(\partial\ln\theta-\partial\theta)}{\partial g}$;

$$I(g(\theta))=E_g(S_g(x))^2=Var(S_g(x))=Var(\frac{x(\partial\ln\theta-\partial\theta)}{\partial g})=(\frac{\partial\ln\theta}{\partial g})^2\theta=Const.$$

不妨设 Const=1；

则有 $\frac{\partial\ln\theta}{\partial g}=\theta^{-\frac{1}{2}}$ ，故 $\frac{\partial\theta}{\partial g}=\theta^{\frac{1}{2}}$ ，解得 $g=2\theta^{\frac{1}{2}}$ ，此时 I(g(θ))=1.

所以可找函数 $g(\theta)=2\theta^{\frac{1}{2}}$ ，使其 Fisher 信息与θ无关.

2.24 对 Poisson 分布 $P(\theta)$,

（1）求 $I(\theta)$；

（2）求 $I\left(\frac{1}{\theta}\right)$

（3）找一个函数 $g(\bullet)$，使 $g(\theta)$ 的 Fisher 信息与 θ 无关。

解： $p(x;\theta)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$

（1）

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]=-E\left[\frac{\partial^2(x\ln\theta-\theta-\ln x!)}{\partial\theta^2}\right]$$

$$=-E\left[\frac{\partial\left(\frac{x}{\theta}-1\right)}{\partial\theta}\right]=-E\left[-\frac{x}{\theta^2}\right]=\frac{EX}{\theta^2}=\frac{1}{\theta}$$

（2）

$$I\left(\frac{1}{\theta}\right)=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\left(\frac{1}{\theta}\right)^2}\right]=-E\left\{\frac{\partial^2\left[-x\ln\frac{1}{\theta}-\left(\frac{1}{\theta}\right)^{-1}-\ln x!\right]}{\partial\left(\frac{1}{\theta}\right)^2}\right\}$$

$$=-E\left\{\frac{\partial\left[-x\left(\frac{1}{\theta}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\theta}\right)^{-2}\right]}{\partial\left(\frac{1}{\theta}\right)}\right\}=-E\left[x\left(\frac{1}{\theta}\right)^{-2}-2\left(\frac{1}{\theta}\right)^{-3}\right]=-\theta^2 EX+2\theta^3=\theta^3$$

（3）令 $g(\theta)=\theta^a$

$$I(\theta^a)=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial(\theta^a)^2}\right]=-E\left\{\frac{\partial^2\left[\frac{x}{a}\ln\theta^a-(\theta^a)^{\frac{1}{a}}-\ln x!\right]}{\partial(\theta^a)^2}\right\}$$

$$=-E\left\{\frac{\partial\left[\frac{x}{a}(\theta^a)^{-1}-\frac{1}{a}(\theta^a)^{\frac{1}{a}-1}\right]}{\partial(\theta^a)}\right\}=-E\left[-\frac{x}{a}(\theta^a)^{-2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}\right)(\theta^a)^{\frac{1}{a}-2}\right]$$

$$=\frac{EX}{a}\theta^{-2a}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}\right)\theta^{1-2a}=\frac{1}{a^2}\theta^{1-2a}$$

$1-2a=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，当 $g(\theta)=\theta^{\frac{1}{2}}$ 时，$I\left(\theta^{\frac{1}{2}}\right)=4$。

2.34 设 $X_1,\cdots X_n$ 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本.

（1）利用二阶矩构造 σ^2 的矩估计，进而给出 σ 的矩估计 $\hat{\sigma}_1$；

（2）证明 $E_\sigma|X_1|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.由此给出 σ 的另一矩估计 $\hat{\sigma}_2$；

（3）比较 $\hat{\sigma}_1$ 和 $\hat{\sigma}_2$ 的 MSE，解释比较结果.

解：(1) $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$，　$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

从而有 $\mathrm{E}_{\sigma}\left|\mathrm{X}_1\right| = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

$\therefore \quad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left|\mathrm{X}_1\right|.$

（3）

$$\mathrm{MSE}(\hat{\sigma}_1) = \mathrm{E}(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} - \sigma)^2 = \mathrm{E}(\mathrm{S}_n^2 - 2\mathrm{S}_\mathrm{n}\sigma + \sigma^2)$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\sigma}_2) = \mathrm{E}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|X_1\right| - \sigma)^2 = \mathrm{E}(\frac{\pi}{2} X_1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|X_1\right| + \sigma^2) = \text{-}2\sigma + \sigma^2$$

2.35

（1）由于 $P(x_1 = -1) = \dfrac{1-\theta}{2}; P(x_1 = 0) = \dfrac{1}{2}; P(x_1 = 1) = \dfrac{\theta}{2}.$

有似然函数：

$$L = \prod_{x_i=-1}\frac{1-\theta}{2}\prod_{x_i=0}\frac{1}{2}\prod_{x_i=1}\frac{\theta}{2}$$

对数似然：

$$l = \ln L = [\sum 1(x_i = -1)]\ln(1-\theta) + [\sum 1(x_i = 1)]\ln(\theta) - n\ln 2$$

对对数似然函数求导得：

$$-[\sum 1(x_i = -1)]/(1-\theta) + [\sum 1(x_i = 1)]/\theta = 0$$

对上式求解为：

$$\overset{\wedge}{\theta}_1 = \frac{[\sum 1(x_i = 1)]}{[\sum 1(x_i = -1\text{或}1)]}$$

对 $\overset{\wedge}{\theta}_1$ 的无偏性，令 $\sum 1(x_i = 0) = a$

当$a < n$时，$E(\overset{\wedge}{\theta}_1 \mid a) = \theta;$

当$a = n$时，$E(\overset{\wedge}{\theta}_1 \mid a) = 0;$

因此，$\overset{\wedge}{\theta}_1$ 是有偏的

（2）

$$E(X) = \frac{1-\theta}{2} \times (-1) + \frac{\theta}{2} = \theta - \frac{1}{2} = \bar{x}$$

$$\overset{\wedge}{\theta}_2 = \frac{1}{2} + \bar{x}$$

（3）

构造 $P(x_i)=-\frac{1}{4}x_i^{\ 2}+(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4})x_i+\frac{1}{4}$ 满足题设

则有 $S_\theta(X)=\frac{2X}{-X^2+(2\theta-1)X+2}$

$$I_1(\theta)=E(S_\theta(X))^2=(\frac{-2}{-1+1-\theta+2})^2\times P(X=-1)+(\frac{2}{-1+2\theta-1+2})^2\times P(X=1)=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}$$

$$I(\theta)=nI_1(\theta)=\frac{n}{2\theta(1-\theta)}$$

$I^{-1}(\theta)=\frac{2\theta(1-\theta)}{n}$ 因此，θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界为 $\frac{2\theta(1-\theta)}{n}$

2.36 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $U(0,\theta)$, $\theta>0$ 的一个样本，则 θ 的 *MLE* 是 $\hat{\theta}_1=X_{(n)}$，*UMVUE* 是 $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$. 试证：存在一个估计 $\hat{\theta}(x)$, 使

$$MSE_\theta(\hat{\theta})<\min(MSE_\theta(\hat{\theta}_1),MSE_\theta(\hat{\theta}_2)).$$

证明：令 $X_{(n)}$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(t)=P(X_{(n)}\le t)=P(X_1\le t,X_2\le t,\cdots,X_n\le t)$$

$$=[F(t)]^n=\begin{cases}0\ ,\ t<0\ ;\\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n,0\le t<\theta;\\ 1\ ,\ t\ge\theta.\end{cases}$$

则 $X_{(n)}$ 的密度函数为 $f_{X_{(n)}}(t)=n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}(0\le t<\theta)$.

因此，$EX_{(n)}=\int_0^\theta t\bullet n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dt=\frac{n}{n+1}\theta.$

$$EX_{(n)}^2=\int_0^\theta t^2\bullet n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dt=\frac{n}{n+2}\theta^2.$$

那么，$Var(X_{(n)})=EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2.$

令 $\hat{\theta}(t)=t\,X_{(n)}$, 则 $MSE_\theta(\hat{\theta}(t))=[E(\hat{\theta}(t))-\theta]^2+Var(\hat{\theta}(t))$

$$=(-1)^2\theta^2+\ \frac{nt^2}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

$$=(-)\theta^2$$

故由上式可得：当 t=时，$MSE_\theta(\hat{\theta}(t))$取得最小值。

因为$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}(1)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}()$，

所以，当$\hat{\theta}=X_{(n)}$时，有

$$MSE_\theta(\hat{\theta}) < \min(MSE_\theta(\hat{\theta}_1), MSE_\theta(\hat{\theta}_2)).$$

3.2 **设** $X=(X_1,\cdots,X_n)$**是来自正态分布族**$\{N(0,\ \sigma^2):0<\sigma^2<\infty\}$**的样本，考虑原假设** $H_0:\sigma^2=1$ **对备择假设** $H_1:\sigma^2=\sigma_1^2(\sigma_1^2>1)$ **的检验问题，取水平为** $\alpha(0<\alpha<1)$**。试求其 MPT。**

解： $p(x;\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$

似然比为 $\lambda(x)=\frac{\prod p(x_i;\sigma_1^2)}{\prod p(x_i;1)}=(\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-1\right)\right\}$，取 $T(x)=\sum x_i^2$，拒绝域为 $W=\{x:\lambda(x)\geq\lambda_0\}=\{x:T(x)\geq c\}$。

当 $H_0:\sigma^2=1$ 成立时，$T(x)=\sum x_i^2\sim\chi^2(n)$，则拒绝域为 $W=\{x:\sum x_i^2\geq\chi_{1-\alpha}^2(n)\}$。

则 MPT 为 $\phi(x)=\begin{cases}1,\sum x_i^2\geq\chi_{1-\alpha}^2(n)\\0,\sum x_i^2<\chi_{1-\alpha}^2(n)\end{cases}$。

3.3 **设** $X=(X_1,\cdots,X_n)$**是来自均匀分布族**$\{R(0,\ \theta):\theta>0\}$**的样本，考虑原假设** $H_0:\theta=1$**对备择假设**$H_1:\theta=\theta_1(\theta_1<1)$**的检验问题，取水平为**$\alpha(0<\alpha<1)$**。试求其 MPT。**

解： $p(x;\theta)=\begin{cases}\theta^{-1},0\leq x\leq\theta\\0,otherwise\end{cases}$

似然比为 $\lambda(x)=\frac{\prod p(x_i;\theta_1)}{\prod p(x_i;1)}=\begin{cases}\theta_1^{-n},0<x_{(n)}\leq\theta_1\\0,\theta_1<x_{(n)}<1\end{cases}$

则 MPT 为 $\phi(x)=\begin{cases}1,0<x_{(n)}\leq c\\0,c<x_{(n)}<1\end{cases}$，c 由 $E[\phi(x)|\theta=1]=\alpha$ 确定。

当 $H_0:\theta=1$ 成立时，$X_{(n)}$ 的密度函数为 $p(t)=nt^{n-1}(0<t<1)$，由 $\int_0^c nt^{n-1}dt=\alpha$，推得 $c=\sqrt[n]{\alpha}$。

则 $\phi(x)=\begin{cases}1,0<x_{(n)}\leq\sqrt[n]{\alpha}\\0,\sqrt[n]{\alpha}<x_{(n)}<1\end{cases}$。

3.3　设 $X=(X_1, X_2,\ldots X_n)$ **是来自均匀分布族** $\{R(0,\theta): \theta>0\}$ **的样本，考虑原假设** $H_0:\theta=1$ **对备择假设** $H_1:\theta=\theta_1(\theta_1<1)$ **的检验问题。取水平为** $\alpha(0<\alpha<1)$ **。试求MPT 。**

解:似然比统计量$\lambda(x)=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_i)}{\prod_{i=1}^{n}p(x_i;1)}=\begin{cases}\theta_1^{-n} & 0<x_{(n)}<\theta_1\\ 0 & \theta_1\le x_{(n)}\le 1\end{cases}$，

其中$x_{(n)}=\max\{x_1, x_2,\dots x_n\}$.

在原假设H_0成立时$\lambda(x)$的分布为退化分布。令$G(\lambda)=P\{\lambda(x)>\lambda|\theta=1\}$，则当$\lambda>\theta_1^{-n}$时，

$G(\lambda)=P\{\lambda(x)>\lambda\}=P\{0<x_{(n)}<\theta_1\}=\int_0^{\theta_1} nt^{n-1}\,dt=\theta_1^{-n}$，则，

$0=G(\theta_1^{-n})<\alpha<G(\theta_1^{-n}-0)=\theta_1^{n}<1\}$。由 N−P 基本引理可知，取 $k=\theta_1^{-n}$，则MPT 为$\phi(1)=1(\theta_1\le x_{(n)}\le 1)$，而在 $0<x_{(n)}<\theta_1$ 时，$\phi(x)$的值需由 $E[\phi(1)|\ \phi(1)=1]$确定。

3.5 设样本 $X=(X_1,\dots,X_{100})$来自二点分布族$\{b(1,p):0\le p\le 1\}$.试求检验问题：H_0: $p\le 0.01$ 对 H_1:$p>0.01$ 的水平$\alpha=0.05$ 的 UMPT.

解: 因为样本 $X=(X_1,\dots,X_{100})$来自二点分布族$\{b(1,p):0\le p\le 1\}$.故样本的联合密度函数为

$$p(x;p)=p^{\sum_{i=1}^{100}x_i}(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{100}x_i)}=(1-p)^n\exp(\ln(\frac{p}{1-p})\sum_{i=1}^{100}x_i).$$

其中 $Q(p)=\ln\dfrac{p}{1-p}$ 为 p 的严格单调递增函数.

故由定理 3.8 知，存在水平为$\alpha=0.05$ 的 UMPT 的检验函数，其仅依赖于充分统计量 $T(X)=\sum_{i=1}^{100}x_i$，拒绝域为 $W=\{x:T(x)\ge c\}$,其中 c 由 $E_p\Phi(T(X))=0.05$ 确定.

从而

$$E_p\Phi(T(X))=P(T(X)\ge c)=0.05. \qquad (1)$$

在 p=0.01 时，$T(X)\sim b(100,0.01)$.（1）式可转化为 $P(\frac{T(X)-1}{\sqrt{0.99}}<\frac{c-1}{\sqrt{0.99}})=0.95$，由中心极限定理知，$\phi(\frac{c-1}{\sqrt{0.99}})=0.95$.解得 $c=\sqrt{0.99}U_{0.95}+1$

由此该问题水平为 a=0.05 的 UMPT 检验函数为:

$$\phi(T(X))=\begin{cases}1, & \sum_{i=1}^{100}x_i\ge c\\ 0, & \sum_{i=1}^{100}x_i\ge c\end{cases}$$

其中 $c=\sqrt{0.99}U_{0.95}+1$.

3.6（定理 3.7 的推广）设概率密度族$\{p(x;\theta):\theta\in\Theta\subseteq R\}$关于 X 具有非降 MLR。试证明：

（1）若 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自该 MLR 分布族的一个样本，并且$\psi(x_1,\cdots,x_n)$关于每一个 x_i 都是非降的，则 $E_\theta\psi(X_1,\cdots X_n)$ 是θ的一个非降函数；

（2）若函数$\psi(x)$具有性质：存在点 x_0 使得在 $x<x_0$ 时，$\psi(x)\le 0$，而在 $x>x_0$ 时，$\psi(x)\ge 0$，则 $E_\theta\psi(X)$ 或者总是正的，或者总是负的，或者存在点θ_0使得在$\theta<\theta_0$时，$E_\theta\psi(X)\le 0$,而在$\theta>\theta_0$时，$E_\theta\psi(X)\ge 0$.

(1)证明：设 $\theta_1<\theta_2$，令 $A=\left\{(x_1,x_2\cdots x_n):\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_1)<\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_2)\right\}$，

$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_1)>\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_2)\}$

对任意 $(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_n^{(1)})\in A$ 和 $(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots x_n^{(2)})\in B$，有

$$\lambda(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_n^{(1)})=\frac{\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_2)}{\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_1)}>1,\quad \lambda(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots x_n^{(2)})=\frac{\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_2)}{\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta_1)}<1$$

因为似然比 $\lambda(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的非降函数，则由 $\lambda(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_n^{(1)})>\lambda(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots x_n^{(2)})\to(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_n^{(1)})\ge(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots x_n^{(2)})$

由于 $\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的一个非降函数，所以 $\psi(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_n^{(1)})\ge\psi(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots x_n^{(2)})$

令 $a=\inf\{\psi(x_1,x_2,\cdots x_n):(x_1,x_2,\cdots x_n)\in A\}$，

$b=\sup\{\psi(x_1,x_2,\cdots x_n):(x_1,x_2,\cdots x_n)\in B\}$

则有 $a\ge b$ 从而

$$E_{\theta_2}\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)-E_{\theta_1}\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

$$=\int\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)\bullet[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)$$

$$=\int_A\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)+$$

$$\int_B\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)$$

$$\geq a\bullet\int_A[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)+$$

$$b\bullet\int_B[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)$$

由于 $\int\limits_{A\cup B}[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)=0$，

所以 $\int_B[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)=-\int_A[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)$，从而

$$E_{\theta_2}\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)-E_{\theta_1}\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)\geq(a-b)\bullet\int_A[\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_2)-\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1)]du(x)\geq 0$$

所以 $E_\theta\psi(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是 θ 的一个非降函数。

（2）$E_\theta\psi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)p(x;\theta)du(x)=\int_{-\infty}^{x_0}\psi(x)p(x;\theta)du(x)+\int_{x_0}^{+\infty}\psi(x)p(x;\theta)du(x)$

情况 1：$\forall\theta$，当 $x<x_0$ 时，$p(x;\theta)>0$；当 $x>x_0$ 时，$p(x;\theta)<0$，则 $E_\theta\psi(X)$ 为负的；

情况 2：$\forall\theta$，当 $x<x_0$ 时，$p(x;\theta)<0$；当 $x>x_0$ 时，$p(x;\theta)>0$，则 $E_\theta\psi(X)$ 为正的；

情况 3：当 $x<x_0$，$\theta<\theta_0$ 时，$p(x;\theta)>0$；当 $x>x_0$，$\theta<\theta_0$ 时，$p(x;\theta)<0$，则 $E_\theta\psi(X)\leq 0$；

当 $x<x_0$，$\theta>\theta_0$ 时，$p(x;\theta)<0$；当 $x>x_0$，$\theta>\theta_0$ 时，$p(x;\theta)>0$，则 $E_\theta\psi(X)\geq 0$

2.31 设 $(X_i, Y_i), i=1,\cdots n$ 为独立同分布变量， $\Pr(X_i>0)=1$， $EX_1^{\ 2}<\infty, EY_1^{\ 2}<\infty$。

定义 $\theta = EY_1/EX_1$，证明

$$\sqrt{n}(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}-\theta)\underset{\rightarrow}{L}N(0,V)$$

并求 V。

证明：令 $Z_i=\frac{Y_i}{\overline{X}}-\theta$，则 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ 为相互独立随机变量，

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i=\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\overline{X}}-n\theta\,,\quad \overline{Z}=\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}-\theta$$

$$E(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}-\theta)=\frac{E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}-\theta=\frac{E(Y_1)}{E(X_1)}-\theta=0$$

$$Var(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}-\theta)=\frac{Var(Y_1)}{Var(X_1)}$$

所以 $$\sqrt{n}\bullet\frac{\overline{Z}-0}{\sqrt{\frac{nVar(Y_1)}{Var(X_1)}}}\underset{\rightarrow}{L}N(0,1)$$

即 $$\sqrt{n}\bullet(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}-\theta)\underset{\rightarrow}{L}N(0,\frac{nVar(Y_1)}{Var(X_1)})$$

所以 $V=\frac{nVar(Y_1)}{Var(X_1)}$

3.8 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自带有位置参数的指数分布总体的样本，总体的密度函数为 $p(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{-(x-\theta)\}, & x\geq\theta\\ 0, otherwise\end{cases}$。考虑原假设 $H_0:\theta=0$ 对备择假设 $H_1:\theta>0$ 的检验问题，取水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$。试求其 UMPT。

解：首先考虑原假设 $H_0:\theta=0$ 对备择假设 $H_1:\theta=\theta_1(\theta_1>0)$ 的检验问题，取水平

为$\alpha(0<\alpha<1)$。

似然比为$\lambda(x)=\dfrac{\prod p(x_i;\theta_1)}{\prod p(x_i;0)}=\begin{cases}e^{n\theta_1}, x_{(1)}\ge\theta_1\\0, 0<x_{(1)}<\theta_1\end{cases}$

则 MPT 为$\phi(x)=\begin{cases}1, x_{(1)}\ge c\\0, 0<x_{(1)}<c\end{cases}$，c 由$E[\phi(x)|\theta=0]=\alpha$确定。

当$H_0:\theta=0$成立时，$X_{(1)}$的密度函数为$p(t)=n\left(1-\int_0^t e^{-x}dx\right)^{n-1}e^{-t}=ne^{-nt}(t\ge0)$，由

$\int_c^{+\infty}ne^{-nt}dt=\alpha$，推得$c=-\dfrac{\ln\alpha}{n}$。

则$\phi(x)=\begin{cases}1, x_{(1)}\ge-\dfrac{\ln\alpha}{n}\\0, 0<x_{(1)}<-\dfrac{\ln\alpha}{n}\end{cases}$。

由于这个检验与θ_1的具体数值无关，只要求$\theta_1>0$，故这个检验$\phi(x)$是原假设$H_0:\theta=0$对备择假设$H_1:\theta>0$的 UMPT。

3.11　设 $T(x)$的密度函数如(3.26)式所示，其中 $c(\theta)>0$.单边假设检验问题：原假设H_0:$\theta\le\theta_0$对备择假设H_{01}:$\theta>\theta_0$的水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的 UMP 检验$\phi(T)$如(3.19)所示，即为

$$\phi(T)=\begin{cases}1 & T>c\\ r & T=c\\ 0 & T<c\end{cases}$$

其中常数$r(0\le r\le1)$和 c 由(3.20)式，即 $E_{\theta_0}(\phi(T))=\alpha$ 确定。我们知道这个检验的势函数 $g(\theta)=E_\theta(\phi(T))$是非降的，且在集合$\{\theta:(0<g(\theta)<1)\}$上是严格增加的，证明$g'(\theta_0)>0$

解：由定理 3.14 可知

$$g'(\theta)=\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}E_\theta(\phi(T))+E_\theta(T\phi(T))$$

由习题 3.10 可知$E_\theta(T)=-\dfrac{c'(\theta)}{c(\theta)}$，代入上式得

$$g'(\theta)=-E_\theta(T)E_\theta(\phi(T))+E_\theta(T\phi(T))$$

又 $E_{\theta_0}(\phi(T))=\alpha$

要证明$g'(\theta_0)>0$，即证明，$\alpha E_{\theta_0}(T)<E_{\theta_0}(T\phi(T))$

即证明，$\alpha T<T\phi(T)$

令$\phi(T)=\begin{cases}1 & T>0\\ 0 & T<0\end{cases}$，取 $\alpha P_{\theta 0}(T>0)$,则 $E_{\theta 0}(\phi(T))=\alpha$，当 $T>0$ 时有 $\alpha T<T\phi(T)$，当 $T<0$ 时有 $\alpha T<T\phi(T)$，故命题得证。

3.13 设样本 $X=(X_1,\cdots,X_m)$ 和样本 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 互相独立. 他们分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，其中：$-\infty<\mu_1<\infty,-\infty<\mu_2<\infty,\sigma^2>0$. 在 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时，试证明：V 的分布与参数 σ^2 和 μ 无关，V 的分布关于原点对称，其中

$$V=\frac{U}{\sqrt{T_2-\frac{T_1^2}{m+n}}},\qquad U=\overline{Y}-\overline{X}$$

$$T_1=m\overline{X}+n\overline{Y},\ T_2=\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$$

证明：

$$X_i\sim N(\mu_1,\sigma^2),i=1,2,\cdots,m;Y_i\sim N(\mu_2,\sigma^2),i=1,2,\cdots,n$$

$$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{m}\right),\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

在 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时，$U=\overline{Y}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\frac{U}{\sigma\sqrt{\frac{n+m}{nm}}}\sim N(0,1)$，$T_1^2=(m\overline{X}+n\overline{Y})^2=\left(\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2$

$$T_2-\frac{T_1^2}{m+n}=\frac{(m+n)\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2}{m+n}$$

令 $s=n+m,Z_i=X_i(i=1,\cdots,m),Z_{m+j}=Y_j(j=1,\cdots,n)$，则 $\sum_{i=1}^{s}Z_i=\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i$

$$T_2-\frac{T_1^2}{m+n}=\frac{(m+n)\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2}{m+n}$$

$$T_2-\frac{T_1^2}{m+n}=\frac{s\left(\sum_{i=1}^{s}Z_i^{\ 2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{s}Z_i\right)^2}{s}=\sum_{i=1}^{s}Z_i^{\ 2}-\frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s}Z_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{s}Z_i^{\ 2}-\sum_{i=1}^{s}Z_i\overline{Z}-\sum_{i=1}^{s}Z_i\overline{Z}+s\left(\overline{Z}\right)^2+\sum_{i=1}^{s}Z_i\overline{Z}-s\left(\overline{Z}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left(Z_i-\overline{Z}\right)^2$$

$$\frac{T_2-\frac{T_1^2}{m+n}}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{s}\left(Z_i-\overline{Z}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(s-1)=\chi^2(m+n-1)$$

$$\frac{\frac{U}{\sigma\sqrt{\frac{n+m}{nm}}}}{\sqrt{\frac{T_2-\frac{T_1^2}{m+n}}{\sigma^2}}}\sim t(m+n-1),\quad \sqrt{\frac{mn}{n+m}}\frac{U}{\sqrt{T_2-\frac{T_1^2}{m+n}}}=\sqrt{\frac{mn}{n+m}}V\sim t(m+n-1)$$

所以 V 的分布与参数σ^2和μ无关，V 的分布关于原点对称

3.13 设样本$X=(X_1,\cdots,X_n)$来自正态总体$N(\mu，\sigma^2)$，其中$-\infty<\mu<\infty$，$\sigma^2>0$.

在$\mu=0$时，试证明ω的分布与参数σ^2无关，且ω的分布关于原点对称，其中，

$$\omega=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$$

证明：

当$\mu=0$时，每个样本$X_i\sim N(0，\sigma^2)$，$i=1,\cdots,n$，所以$\overline{X}\sim N\left(0，\frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}\sim N(0，1)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$$

所以得到，

$$\omega = n\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}}{\left(\sqrt{\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right)} \sim nt(n)$$

所以ω的分布与参数σ^2无关，由于$t(n)$是关于原点对称，所以ω的分布关于原点对称。

3.17

证：Eθ [(**错误！未找到引用源。**).(**错误！未找到引用源。**)]=–Eθ[**错误！未找到引用源。**]

证明: Eθ [(**错误！未找到引用源。**).(**错误！未找到引用源。**)]

=**错误！未找到引用源。**

= **错误！未找到引用源。**

Eθ[**错误！未找到引用源。**]

=**错误！未找到引用源。**

=**错误！未找到引用源。**

=**错误！未找到引用源。**

=**错误！未找到引用源。**

=–**错误！未找到引用源。**

= −Eθ [(**错误！未找到引用源。**).(**错误！未找到引用源。**)]

3.18 设$(X_1, Y_1),\ldots,(X_n, Y_n)$为来自二元正态分布$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的样本，其中$\rho$是相关系数。试求题$H_0$: $\rho=0$对H_1: $\rho\neq 0$的似然比检验。

解：对于服从参数为 $(\mu, \sum)$的多元正态分布

其分布函数为，$p(X)=\frac{1}{(2\pi)^p|\sum^{-1}|}\exp\{-\frac{(X-\mu)^T\sum^{-1}(X-\mu)}{2}\}$

易知其参数的极大似然估计为，$\hat{\mu}=\bar{X}$ ， $\hat{\sum}=S$

其中 S 的每一元素 $S_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_i)(X_j-\hat{\mu}_j)$

又在二元正态分布下，

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{1i},\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}$$

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\hat{\mu}_1)^2,\quad \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\hat{\mu}_2)^2$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\hat{\mu}_1)(X_{2i}-\hat{\mu}_2)$$

则似然比检验为，$\lambda(x)=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}p(X_i;\ \hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2,\ \hat{\sigma}_1^2,\ \hat{\sigma}_2^2,\ \hat{\rho})}{\prod_{i=1}^{n}p(X_i;\ \hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2,\hat{\sigma}_1^2,\ \hat{\sigma}_2^2,\rho=0)}$

$$2\ln(X)=\sum_{i=1}^{n}\{[\frac{(X_{1i}-\mu_1)^2}{\hat{\sigma}_1^2}+\frac{(X_{2i}-\mu_2)^2}{\hat{\sigma}_2^2}]-\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2}[\frac{(X_{1i}-\mu_1)(X_{2i}-\mu_2)}{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}]\}$$

又 $2\ln(X)$服从 $X^2(1)$，则在显著性水平为 α的情况下，如果有 $2\ln(X)>X_\alpha^2(1)$则拒绝原假设，否则不拒绝原假设。

3. 18 设(X_1,Y_1)，⋯，(X_n,Y_n)为来自二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的样本，其中$\rho$是相关函数。试求检验问题$H_0$：$\rho=0$ 对H_1：$\rho\neq 0$ 的似然比检验。

解：若 $X=$（$X_1, X_2, \cdots, X_p$）服从参数为(μ,Σ)的 p 元正态分布，

其分布密度函数为：

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

易求出其参数的极大似然估计为：$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\Sigma}=S$.

其中，S 的 ij 元为$S_{ij}=\dfrac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}(X_{ai}-\hat{\mu}_i)(X_{aj}-\hat{\mu}_j)$.

故在二元分布下，有$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$.

所以可求得参数的 MLE 为：$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{n}\sum X_i,\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{n}\sum Y_i$ ；

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\hat{\mu}_1)^2,\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum(Y_i-\hat{\mu}_2)^2;$$

$$\hat{\rho}=\frac{1}{n\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}\sum(X_i-\hat{\mu}_1)(Y_i-\hat{\mu}_2).$$

则似然比检验为：

$$\lambda(X)=\frac{\prod_{i=1}^{n} p\left(X_i,Y_i;\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2,\hat{\rho}\right)}{\prod_{i=1}^{n} p\left(X_i,Y_i;\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2,\rho=0\right)}.$$

$$\therefore 2\ln\lambda(X)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\hat{\rho}^2}{1-\hat{\rho}^2}\left[\frac{(X_i-\hat{\mu}_1)^2}{\hat{\sigma}_1^2}+\frac{(Y_i-\hat{\mu}_2)^2}{\hat{\sigma}_2^2}\right]-\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2}\frac{(X_i-\hat{\mu}_1)(Y_i-\hat{\mu}_2)}{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}\right\}$$

由定理 3. 18 可知：

在原假设H_0为真时，$2\ln\lambda(X)$随着 n 的增大而依分布收敛$\chi^2(1)$.

因此，在显著性水平α下，如果$2\ln\lambda(X)\geq\chi^2_{1-\alpha}(1)$，则拒绝原假设，否则不拒绝原假设。

3.19 试证明下述结论：

（1）接例 3.16，

$$\begin{aligned}2\ln\Lambda&=2\sum_{i=1}^{r}n_i\cdot\ln\frac{n_i}{np_{0i}}\\&=\sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i-np_{0i})^2}{np_{0i}}+\text{依概率收敛于0的量}\end{aligned}$$

（2）接 3.6.4 节，

$$\begin{aligned}2\ln\Lambda&=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}n_{ij}\cdot\ln\frac{n\cdot n_{ij}}{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(n_{ij}-n\,\hat{p}_{i\cdot}\,\hat{p}_{\cdot j}\right)^2}{n\,\hat{p}_{i\cdot}\,\hat{p}_{\cdot j}}+\text{依概率收敛于0的量}\end{aligned}$$

解：

（1）例 3.16 的似然比统计量为：

$$\Lambda=\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{n_i}{n}\right)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{r}(p_{0i})^{n_i}}$$

所以$2\ln\Lambda=2\sum_{i=1}^{r}n_i\cdot\ln\frac{n_i}{np_{0i}}=2\sum_{i=1}^{r}n_i\cdot\ln\left[1+\frac{(n_i-np_{0i})}{np_{0i}}\right]$

因为$\ln(1+x)$的$Taylor$ 展式：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ (x\to 0)$

又因为当 H_0 成立时，由伯努利大数定理得 $\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} = \frac{\frac{n_i}{n} - p_{0i}}{p_{0i}}$ 依概率收敛于 0.

$$
\begin{aligned}
2\ln\Lambda &= 2\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \ln\left[1 + \frac{(n_i - np_{0i})}{np_{0i}}\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left[\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}}\right)^2\right)\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{r} \left[np_{0i} + (n_i - np_{0i})\right] \cdot \left[\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}}\right)^2\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} + 2(n_i - np_{0i}) - \frac{(n_i - np_{0i})^3}{(np_{0i})^2} + o\left(\left(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

因为后面三项都依概率收敛于 0（伯努利大数定理）， $\lim_{n\to\infty} p\left(\left|n_i - np_{0i}\right| < \varepsilon\right) = 1$。

所以 $2\ln\Lambda = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} +$ 依概率收敛于0的量。

（2）3.6.4 节的似然比统计量为：

$$
\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c}\left(\frac{n_{ij}}{n}\right)^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c}\left(\frac{n_{i\cdot}}{n}\cdot\frac{n_{\cdot j}}{n}\right)^{n_{ij}}}
$$

因为 $2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij} \cdot \ln\frac{n \cdot n_{ij}}{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}} = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij} \cdot \ln\left(1 + \frac{n \cdot n_{ij} - n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}\right)$

又因为在原假设 $H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ 成立时， p_{ij} 的 MLE 为 $\hat{p}_{i\cdot} \cdot \hat{p}_{\cdot j} = \left(\frac{n_i}{n}\right) \cdot \left(\frac{n_j}{n}\right)$。

$$2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}\cdot\ln\left(1+\frac{n\cdot n_{ij}-n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}\cdot\left[\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}-\frac{1}{2}\left(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}\right)^2+o\left(\left(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}\right)^2\right)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}+n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)\left[\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}-\frac{1}{2}\left(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}\right)^2+o\left(\left(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}\right)^2\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{\left(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}+2\left(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)-\frac{\left(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)^3}{\left(n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)^2}+o\left(\left(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}\right)^2\right)\right]$$

因为当 H_0 成立时，$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{n_{ij}}{n}-\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right|<\varepsilon\right)=1$，所以后面三项都依概率收敛于 0，

因此有

$$2\ln\Lambda = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}\right)^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}+\text{依概率收敛于0的量}$$

3.20

解：

$$H_0: p_{11}=\frac{1-P}{2}, p_{12}=\frac{1-P}{2}, p_{21}=\frac{p^2}{2}+p*(1-p)$$

$$\lambda(x)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta} p(x;p)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} p(x;p)}=\frac{p(x;\hat{\theta})}{p(x;\hat{\theta}_0)}$$

其中 $\hat{\theta}_1$ 为 H_0 不成立时 $(p_{11},p_{12},p_{21},p_{22})$ 的 MLE，

则

$$\hat{\theta}_1=(\hat{p}_{11},\hat{p}_{12},\hat{p}_{21},\hat{p}_{22})=(\frac{n_1}{n},\frac{n_2}{n},\frac{n_3}{n},\frac{n_4}{n},)$$

$\hat{\theta}_0$ 为 H_0 成立时的 MLE，

又因为

$$p_{11}=\frac{1-P}{2},p_{12}=\frac{1-P}{2},p_{21}=\frac{p^2}{2}+p*(1-p)$$

则

$$L(P)=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}p^{n_1+n_3}(1-p)^{n_2+2n_4}(2-p^{n_3}/2^n)$$

令 $\frac{\partial L(P)}{\partial P}=0$

可得

$$(n+n_3+n_4)p^2+(3n+n_2-n_3-n_4)p+2n_1+2n_3=0$$

有

$$\hat{p}=\frac{(3n-n_2+n_3+n_4)-\sqrt{(-3n+n_2-n_3-n_4)-4(n+n_3+n_4)(2n_3+2n_1)}}{2(n+n_3+n_4)}$$

所以

$$2\ln\theta(x)=2\ln(\frac{\hat{p}_{11}{}^{n_1}\ \hat{p}_{12}{}^{n_2}\ \hat{p}_{21}{}^{n_3}\ \hat{p}_{22}{}^{n_4}}{\hat{p}{}^{n_1+n_3}(1-\hat{p})^{n_2+2n_4}(2-\hat{p})^{n_3}}2^n)\approx 2.92$$

以为在 H_0 时，$2\ln\theta(x)\xrightarrow{L}\chi_{(2)}{}^2$ 则 p 值为 0.0875，在显著性水平为 5 时，应保留原假设，即不否认该数据与模型相符。

3.23

解：

（1）

H_0：A 和 C 相互独立 VS H_1：A 和 C 不相互独立

根据题目中所给的表格，绘制下表：

	是	否	共计
男	686	1180	1866
女	468	1259	1727
共计	1154	2439	3593

$$\chi^2(1)=2\sum_{i=2}^{2}\sum_{j=1}^{2}n_{ij}\ln\frac{n\cdot n_{ij}}{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}$$

(其中，n_{11}=686,n_{12}=1180,n_{21}=468,n_{22}=1259, $n_{1\cdot}$ =1866, $n_{2\cdot}$ =1727, $n_{\cdot 1}$ =1154,

$n_{\cdot 2}$ =2439,n=3593）

$$\chi^2(1)=2\times\left(353\times\ln\frac{3593\times686}{1866\times1154}+\cdots1259\times\ln\frac{3593\times1259}{2439\times1727}\right)$$

=38.6

$$\chi^2_{0.95}(1)=3.84<38.6$$

所以拒绝原假设，即该大学秋季招生有性别歧视，

男性录取率为：686/1866=36.8%,

女性录取率为：468/1727=27.1%

可以看出男性录取率更高。

（2）

B_1		是	否	共计
	男	353	207	560
	女	17	8	25
	共计	370	215	585
B_2		是	否	共计
	男	120	205	325
	女	202	391	593
	共计	322	596	918
B_3		是	否	共计
	男	138	279	417
	女	131	244	375
	共计	269	523	792
B_4		是	否	共计
	男	53	138	191
	女	94	299	393
	共计	147	437	584
B_5		是	否	共计
	男	22	351	373
	女	24	317	341
	共计	46	668	714

$$\chi^2(5)=2\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}n_{ijk}\ln\frac{n_k\cdot n_{kij}}{n_{i\cdot k}\cdot n_{\cdot jk}}=$$

$$2\times\left(353\times\ln\frac{585\times353}{560\times370}+\cdots8\times\ln\frac{585\times8}{215\times25}\right)+\cdots$$

$$2\times\left(22\times\ln\frac{714\times22}{373\times46}+\cdots317\times\ln\frac{714\times317}{341\times668}\right)$$

=2.68

$$\chi^2_{0.95}(5)=11.7>2.68$$

所以不拒绝原假设，即给定 B 后，该大学秋季招生没有性别歧视。

3.26 接例 3.18，在原假设成立时，试证明：

$$\boldsymbol{\emptyset_1(x_1)=\mathrm{F}(x_1),\quad \sigma_1^2=\frac{1}{12}}$$

$$\boldsymbol{\emptyset_2(x_1,x_2)=\emptyset(x_1,x_2),\quad \sigma_2^2=\frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{Var}[\mathrm{U}(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\frac{2n-1}{6n(n-1)}}$$

证明：

$$\mathrm{E}[(\mathrm{U}(X_1,\cdots,X_n)]=0.5$$

$$\emptyset_1(x_1)=\mathrm{E}[\emptyset(X_1,X_2)|X_1=x_1]=\mathrm{P}(X_2>-x_1)=1-F(-x_1)=\mathrm{F}(x_1)$$

$$\mathrm{E}[\emptyset_1(x_1)]=\int_0^1F(x_1)dF(x_1)=0.5$$

$$\sigma_1^2=E[\emptyset_1(X_1)]^2-0.5^2=\int_0^1(F(x_1))^2dF(x_1)-0.5^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\emptyset_2(x_1,x_2)=P(x_1+x_2>0)=\emptyset(x_1,x_2)\qquad \mathrm{E}[(\emptyset(x_1,x_2)]=0.5$$

$$\sigma_2^2=E[\emptyset(x_1,x_2)]^2-0.5^2=P(x_1+x_2>0)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Var}[(\mathrm{U}(X_1,\cdots,X_n)]=\binom{n}{2}^{-1}\cdot\sum_{c=1}^{2}\binom{2}{c}\cdot\binom{n-2}{2-c}\cdot\sigma_c^2=\frac{2n-1}{6n(n-1)}$$

4.6

解：因为最大次序统计量$x_{(n)}$=max{ $x_1, x_2,\ldots x_n$}是 N 的 MLE，也是的 N 充分统计量。

又因为$\frac{x_{(n)}}{N}$的密度函数为 $ny^{n-1}(0\le y\le1)$,故取枢轴量 $G(X,N)=\frac{x_{(n)}}{N}$, 对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，只要 a、b 满足 $b^n-a^n=1-\alpha$，即可得到

$$P_\theta(a\le\frac{x_{(n)}}{N}\le b)=1-\alpha$$

从而 N 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为$[\frac{x_{(n)}}{b}, \frac{x_{(n)}}{a}]$

故构造出的 N 的置信水平为 1−α 的置信上限为$\frac{x_{(n)}}{a}$。

4.6

解：

由次序统计量的分布知， $X_{(n)}$ 的概率分布是：

$$P(X_{(n)}=k)=\frac{1}{N^n}[k^n-(k-1)^n],1\le k\le n$$

再由 $X_{(n)}$ 为 N 的充分统计里，有

$$G(x_{(n)},N)=P_N(X_{(n)}<x_{(n)})=\sum_{k=1}^{[x_{(n)}]}\frac{1}{N^n}[k^n-(k-1)^n]$$

从而， $G(x_{(n)},N)$ 为 N 的严格减函数。

所以， N 的$1-\alpha$置信上限为

$$\hat{N}_n=\inf\{N:P_N(X_{(n)}<x_{(n)}\le\alpha)$$ 。

4.6 设总体 X 是点集{1,2,...,N}的均匀分布，其中N为未知参数.设 X=(X_1,…,X_n)是来自 X 的样本.令 $X_{(n)}$=max{X_1,…,X_n}.试基于 $X_{(n)}$构造N的置信水平1−α的置信上限。

解：因为总体 X 是点集{1,2,...,N}的均匀分布，则总体概率分布为：

$$P(X=k)=\frac{1}{N},\quad k=1,2,\cdots,N$$

其分布函数为 $F(x)=\frac{k}{N},\quad k\le x<k+1\quad (k=1,2,\cdots,N)$

从而次序统计量 X(n)的概率分布为：

$$P(X(n)=k)=\frac{1}{N^n}(k^n-(k-1)^n),\quad k=1,2,\cdots,N$$

又 X(n)为 N 的充分统计量，从而

$$G(x(n),N)=P_N(X(n)\le x(n))=\sum_{i=1}^{x(n)}\frac{1}{N^n}(k^n-(k-1)^n)$$

由此，G(x(n),N)为关于 N 的严格单减函数，由定理 4.2 知，N 的置信水平 1−α的置信上限为 $\hat{N}_U=\inf\left\{N:G(X(n),N)\le\alpha\right\}$.

4.14

由题4.4，当x大于0时，

$P(X_{(1)} > x) = \{P(X > x)\}^n = \exp\{-n(x-\theta)\}$

$f(X_{(1)} = x) = n \cdot \exp\{-n(x-\theta)\}$

令$e = X_{(1)} - \theta$

有$f(e) = n \cdot \exp(-ne)$

因此$\theta = X_{(1)} - e$,将$e = X_{(1)} - \theta$代入

得$P(\theta) = n \cdot \exp\{-n(X_{(1)} - \theta)\}$为$\theta$的信仰分布

$P(\theta)$关于θ单增，考虑信仰水平为$1-a$的区间估计$\left[\hat{\theta}_L, X_{(1)}\right]$

$P(\theta \le \hat{\theta}_L) = a, \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_L} P(\theta) d\theta = a$

得$\hat{\theta}_L = X_{(1)} + \dfrac{\ln a}{n}$

选取常数$c, d, d - c = 1 - a$

有$P_\theta = (c \le 1 - \exp\{1 - n(X_{(1)} - \theta)\} \le d) = 1 - a$

这里取$c = 0, d = 1 - a$,置信水平为$1-a$的区间估计为$\left[X_{(1)} + \dfrac{\ln a}{n}，X_{(1)}\right]$

因此信仰水平为$1-a$的区间估计是置信水平为（$1-a$）的区间估计

5.1

解：状态集为$\Theta=\{\theta_1，\theta_2\}$，其中$\theta_1$表示 “不下雨”，其中$\theta_2$表示 “下雨”。

行动集为$\Delta=\{a_1，a_2\}$，其中a_1表示 “不开工”，其中a_2表示 “开工”。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} -4 & 30 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \end{array}$$

所以收益矩阵为:

5.2

解：由题可知，该零件的更换次数θ和采购量 a 的可能取值是一切非负整数。所以,

$$\Theta=\Delta=\{0,1,2,...,n,...\}$$

由此可以写成收益函数如下，

$$Q(\theta,a)=\begin{cases}-(250a+750(\theta-a)) & a<\theta\\ -250a & a\geq\theta\end{cases}$$

又由$L(\theta,a)=\max Q(\theta,a)-Q(\theta,a)$，可以写成损失函数如下，

$$L(\theta,a)=\begin{cases}500(\theta-a) & a<\theta\\ 250(a-\theta) & a\geq\theta\end{cases}$$

若三年内最多需要 4 个备用零件则, $\Theta=\Delta=\{0,1,2,3,4\}$

所以收益矩阵和损失矩阵如下

$$\begin{array}{cccccc} & a_1=0 & a_2=1 & a_3=2 & a_4=3 & a_5=4 \\ Q= & \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{matrix}0 & -250 & -500 & -750 & -1000\\ -750 & -250 & -500 & -750 & -1000\\ -1500 & -1000 & -500 & -750 & -1000\\ -2250 & -1750 & -1250 & -750 & -1000\\ -3000 & -2500 & -2000 & -1500 & -1000\end{matrix}\right)} & \begin{matrix}\theta_1=0\\ \theta_2=1\\ \theta_3=2\\ \theta_4=3\\ \theta_5=4\end{matrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & a_1=0 & a_2=1 & a_3=2 & a_4=3 & a_5=4 \\ L= & \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{matrix}0 & 250 & 500 & 750 & 1000\\ 500 & 0 & 250 & 500 & 750\\ 1000 & 500 & 0 & 250 & 500\\ 1500 & 1000 & 500 & 0 & 250\\ 2000 & 1500 & 1000 & 500 & 0\end{matrix}\right)} & \begin{matrix}\theta_1=0\\ \theta_2=1\\ \theta_3=2\\ \theta_4=3\\ \theta_5=4\end{matrix}\end{array}$$

5.3

依题意，在该问题中状态集Θ和行动集Δ均为区间[0,1],当 $a<\theta$时会导致供不应求，当 $a>\theta$时会导致供过于求，故厂长所用的损失函数为

$$L(\theta,a)=\begin{cases}2(a-\theta),0\leq\theta<a\\ \theta-a \quad ,a\leq\theta\leq 1\end{cases}$$

5.4

依题意,令 $b_1+m_1\theta=b_2+m_2\theta$,解得$\theta=(b_1-b_2)/(m_2-m_1)$,

且当$\theta>(b_1-b_2)/(m_2-m_1)$时，$b_1+m_1\theta>b_2+m_2\theta$；

当$\theta<(b_1-b_2)/(m_2-m_1)$时，$b_1+m_1\theta<b_2+m_2\theta$

又行动 a 所引起的损失为

$$L(\theta,a)=\max_{a\in\Delta}Q(\theta,a)-Q(\theta,a)$$

综上，二行动线性决策问题的损失函数为

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases}(b_2-b_1)+(m_2-m_1)\theta, & \theta\le\left(b_1-b_2\right)/\left(m_2-m_1\right)\\ 0, & \theta>\left(b_1-b_2\right)/\left(m_2-m_1\right)\end{cases}$$

$$L(\theta,a_2)=\begin{cases}0, & \theta\le\left(b_1-b_2\right)/\left(m_2-m_1\right)\\ (b_1-b_2)+(m_1-m_2)\theta, & \theta>\left(b_1-b_2\right)/\left(m_2-m_1\right)\end{cases}$$

5.5

在缺少损失函数信息场合，可用参数θ处的密度函数值 $p(x|\theta)$ 与在行动 a 处的密度函数值 $p(x|a)$之间的距离来度量损失，如下两个距离较为常用.

(1) 熵的距离：$Le(\theta,a)=E_{x|\theta}\left[\ln\dfrac{p(x|\theta)}{p(x|a)}\right]$；

(2) Hellinger 距离：$L_H(\theta,a)=\dfrac{1}{2}E_{x|\theta}\left[\sqrt{\dfrac{p(x|a)}{p(x|\theta)}}-1\right]^2$，假如 $X\sim N(\theta,1)$，证明：

$$Le(\theta,a)=\frac{1}{2}(a-\theta)^2$$

$$L_H(\theta,a)=1-\exp\{-(a-\theta)^2/8\}$$

证明 $$p(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\}$$

$$\frac{p(x|\theta)}{p(x|a)}=\exp\left\{-\frac{1}{2}(a-\theta)(2x-\theta-a)\right\},\quad \ln\frac{p(x|\theta)}{p(x|a)}=-\frac{1}{2}(a-\theta)(2x-\theta-a)$$

$$Le(\theta,a)=E_{x|\theta}\left[\ln\frac{p(x|\theta)}{p(x|a)}\right]=E_{x|\theta}\left[-\frac{1}{2}(a-\theta)(2x-\theta-a)\right]=-\frac{1}{2}(a-\theta)(2\theta-\theta-a)$$

$$=\frac{1}{2}(a-\theta)^2$$

$$L_H(\theta,a)=\frac{1}{2}E_{x|\theta}\left[\sqrt{\frac{p(x|a)}{p(x|\theta)}}-1\right]^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p(x|a)}{p(x|\theta)}-2\sqrt{\frac{p(x|a)}{p(x|\theta)}}+1\right)p(x|\theta)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(p(x|a)-2\sqrt{p(x|a)p(x|\theta)}+p(x|\theta)\right)dx$$

$$=1-\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{p(x\,|\,a)\,p(x\,|\,\theta)}dx$$

$$=1-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\frac{\theta+a}{2})^2-\frac{1}{8}(a-\theta)^2\right\}dx$$

$$=1-\exp\left\{-\frac{1}{8}(a-\theta)^2\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\frac{\theta+a}{2})^2\right\}dx$$

$$=1-\exp\{-(a-\theta)^2/8\}$$