高等统计学作业一

王祎帆

2020000117

2020.9.24

1 课上习题

已知 $X \sim Ga(\lambda, \alpha), Y \sim Ga(\lambda, \beta)$，求 $\frac{X}{X+Y}$ 服从什么分布？

Proof. 设

$$Z_1 = \frac{X}{X+Y}, \quad Z_2 = X + Y$$

则有

$$X = Z_1 Z_2$$

$$Y = Z_2 - Z_1 Z_2$$

可以得到 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{vmatrix} Z_2 & Z_1 \\ -Z_2 & 1 - Z_1 \end{vmatrix} = Z_2$$

又由题设可得 X, Y 联合分布的密度函数为

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) p_Y(y) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x+y)} \end{aligned}$$

可得 Z_1, Z_2 联合分布的密度函数为

$$\begin{aligned} p_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) &= p_{X,Y}(x(z_1, z_2), y(z_2, z_2)) |J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (z_1 z_2)^{\alpha-1} (z_2 - z_1 z_2)^{\beta-1} e^{-\lambda z_2} |z_2| \end{aligned}$$

其中 $0<z_1<1, z_2>0$，故可得 Z_1 的边际密度函数为

$$\begin{aligned}
p_{Z_1}(z_1) &= \int_0^{\infty} p_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)\,dz_2 \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z_1^{\alpha-1}(1-z_1)^{\beta-1} \int_0^{\infty} z_2^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z_2} dz_2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z_1^{\alpha-1}(1-z_1)^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z_2^{\beta} e^{-\lambda z_2} dz_2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z_1^{\alpha-1}(1-z_1)^{\beta-1}
\end{aligned}$$

故可得 $Z_1=\frac{X}{X+Y} \sim Be(\alpha,\beta)$。 □

2 1.2

写出下列统计问题的统计结构

（1）一地质师在一老河床测量 n 个卵石的最大直径，若已知直径的对数服从均值为 μ 和方差为 σ^2 的正态分布；

解答：

根据题意，统计结构为 $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}, \mathscr{P})^n$

其中 $\mathscr{P}=\{LN(\mu,\sigma^2):(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\}$

（2）一昆虫产出的卵数服从均值为 λ 的 Poisson 分布，卵一旦产出，每个卵能孵出幼虫的概率为 θ，并且每个卵的孵化是相互独立的，一位昆虫学家对 n 各昆虫观察所产生的卵数 X 和孵化出的幼虫数 Y；

解答：

由题意可得

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,\ldots)$$
$$P(Y=l \mid X=k)=C_k^l\theta^l(1-\theta)^{k-l} \quad (l=0,1,\ldots,k)$$

故有

$$\begin{aligned}
P(Y=l,X=k) &= P(Y=l \mid X=k)P(X=k) \\
&= C_k^l\theta^l(1-\theta)^{k-l}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (0\le l\le k)
\end{aligned}$$

设其为 $\{F(\lambda,\theta):(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,1]\}$

则统计结构为 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathscr{B}_{\mathbb{N}}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{N}},\mathscr{P})^n$

其中 $\mathscr{P}=\{F(\lambda,\theta):(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,1]\}$

（3）已知人的体重 Y 与身高 x 有关，一般认为较高的人体重较重，且有线性趋势，但同样身高的人的体重且不会都相同。如今测量 n 个人的体重 y_i 和身高 x_i，并设有如下关系：

$$y_i=a+bx_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\dots,n$$

其中诸 ε_i 相互独立，$E(\varepsilon_i=0),Var(\varepsilon_i)=\sigma^2,i=1,\dots,n$，而 a,b 和 σ^2 都是未知量。

解答：

根据题意，统计结构为 $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}^+},\mathscr{P}_x\otimes\mathscr{P}_Y)^n$

其中 $\mathscr{P}_x$ 为 x 对应的概率分布族，$\mathscr{P}_Y=\{N(a+bx,\sigma^2):(a,b,x,\sigma)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\}$

3 1.3

设 $(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$ 是一个统计结构，证明：

（1）若 $\mathscr{X}$ 只含有不多于可数个元素，则此结构是可控的；

Proof. 不妨在 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上定义如下测度：

$$\mu(B) = B\text{中元素个数}, \forall B \in \mathscr{B}$$

(1.1) 首先证明 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上的测度，即满足：

(1.1.1) 非负性，即 $\forall B \in \mathscr{B}, \mu(B) \geq 0$

(1.1.2) 规范性，即 $\mu(\emptyset) = 0$

(1.1.3) 完全可加性,即任意一列两两不交的集合 $B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots)$,有 $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$

其中由 $\mu(B)$ 的定义易得条件 (1.1.1)(1.1.2)。对于条件 (1.1.3)，由于 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{X}$ 上的 σ 代数，故有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{B}$$

又因为 $B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots)$ 两两不交，故由 $\mu(B)$ 定义可得：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$$

所以可得 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上的测度。

(1.2) 接下来证明 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度：对于 $\forall B \in \mathscr{B}$，因为 $\mathscr{X}$ 只含有不多于可数个元素，由定义可得 $\mu(B) \leq \infty$，故存在至多可数个有限集合 $B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots)$，使得 $\mu(B_i) < \infty$ 且 $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$，故可得 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度。

(1.3) 最后证明 $\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P}$ 结构可控：对于任意 $\mathscr{X},\mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度 $\nu(B)$，当 $\mu(B) = 0$ 时，可得 $B = \emptyset$，故 $\nu(B) = 0$，即 $\nu << \mu$，此结构可控。

得证 $\square$

（2）若 $\mathscr{P}$ 只含有不多于可数个元素，则此结构是可控的；

Proof. **正确解法：取 $\mu = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{p_j}{2^j}$ 即可。**

错误解法：不妨在 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上定义如下测度：

$$\mu(B) = sup\{p_j(B) : p_j \in \mathscr{P}, j = 1, 2, \ldots\}$$

(2.1) 首先证明 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上的测度，即满足：

(2.1.1) 非负性，即 $\forall B \in \mathscr{B}, \mu(B) \geq 0$

(2.1.2) 规范性，即 $\mu(\emptyset) = 0$

(2.1.3) 完全可加性,即任意一列两两不交的集合 $B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots)$,有 $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$

其中由 $\mu(B)$ 的定义易得条件 (2.1.1)(2.1.2)。对于条件 (2.1.3)，由于 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{X}$ 上的 σ 代数，故有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{B}$$

又因为 $B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots)$ 两两不交，故由 $\mu(B)$ 定义可得

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= sup\{p_j(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) : p_j \in \mathscr{P}, j = 1, 2, \ldots\} \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty} p_j(B_i) : p_j \in \mathscr{P}, j = 1, 2, \ldots\} \\
&= (\textbf{should be} \leq) \sum_{i=1}^{\infty} sup\{p_j(B_i) : p_j \in \mathscr{P}, j = 1, 2, \ldots\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)
\end{aligned}$$

所以可得 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上的测度。

(2.2) 接下来证明 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度：对于 $\forall B \in \mathscr{B}$，令 $B_i = B(i = 1, 2, \ldots)$，则由定义可得 $\mu(B_i) \leq 1 < \infty$，且 $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$，故可得 $\mu(B)$ 为 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度。

(2.3) 最后证明 $\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathscr{P}$ 结构可控：对于任意 $\mathscr{X}, \mathscr{B}$ 上的 σ 有限测度 $p_j(B) \in \mathscr{P}$，当 $\mu(B) = 0$ 时，可得 $p_j(B) = 0$，即 $p_j << \mu$，此结构可控。

□

4 1.5

设随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，则 $Y = X + \mu$ 服从三参数 Gamma 分布，其中 μ 称为门限参数，请写出 Y 的密度函数，并计算 $E(Y)$ 和 $Var(Y)$

Proof. 由题意得，$X = Y - \mu$，且

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

故

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(x(y)) \frac{dX}{dY} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y-\mu)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\mu)} \quad (y > \mu) \end{aligned}$$

可以计算得到

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_\mu^\infty y(y-\mu)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\mu)} dy \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \int_\mu^\infty \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} (y-\mu)^\alpha e^{-\lambda(y-\mu)} dy + \mu \int_\mu^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y-\mu)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\mu)} dy \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} + \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) =& E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_\mu^\infty y^2 (y-\mu)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\mu)} dy - (E(Y))^2 \\ =& \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \int_\mu^\infty \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} (y-\mu)^{\alpha+1} e^{-\lambda(y-\mu)} dy \\ & + 2\mu E(Y) - \mu^2 \int_\mu^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y-\mu)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\mu)} dy - (E(Y))^2 \\ =& \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} + 2\mu(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu) - \mu^2 - (\frac{\alpha}{\lambda} + \mu)^2 \\ =& \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

或直接通过 $E(Y) = E(X + \mu) = E(X) + \mu$，$Var(Y) = Var(X + \mu) = Var(X)$ 可以得到相同的结果。 □

5 1.7

设随机变量 $X \sim Exp(\lambda)$**，证明：对任意非负实数** t **与** s**，有（无记忆性）**

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$$

Proof. 由题可得

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

对任意非负实数 t 与 s，可以得到

$$\begin{aligned} P(X > t + s \mid X > s) &= \frac{P(X > t + s, X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P(X > t) \end{aligned}$$

得证 □

6 1.8

设随机变量 $X \sim \chi^2(2)$**，证明：自由度为** 2 **的** χ^2 **分布的** α **分位数** $(0 < \alpha < 1)$ **为** $-2ln(1 - \alpha)$

Proof. 由题可得

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

设其 α 分位数 $(0 < \alpha < 1)$ 为 $q(\alpha)$，则有

$$\begin{aligned} \int_0^{q(\alpha)} p(x) dx &= \int_0^{q(\alpha)} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx \\ &= -\left. e^{-x/2} \right|_0^{q(\alpha)} \\ &= 1 - e^{-q(\alpha)/2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

故有

$$q(\alpha) = -2ln(1 - \alpha)$$

得证 □

高等统计学作业二

王祎帆

2020000117

2020.10.15

1 1.10

设随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，则 $Y = X^{-1}$ 服从倒 Gamma 分布，请写出 Y 的密度函数，并计算 $E(Y)$ 和 $Var(Y)$

解：由题意得，X 的密度函数为

$$p_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

则 $Y = X^{-1}$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X(x(y))|\frac{dx}{dy}| \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{1-\alpha} e^{-\lambda/y} \frac{1}{y^2} \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-1-\alpha} e^{-\lambda/y}, \quad y > 0
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^\infty y \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-1-\alpha} e^{-\lambda/y} dy \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-\alpha} e^{-\lambda/y} dy \\
&\xlongequal{x=y^{-1}} \frac{\lambda}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} x^{(\alpha-1)-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
&= \int_0^\infty y^2 \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-1-\alpha} e^{-\lambda/y} dy - (\frac{\lambda}{\alpha-1})^2 \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-\alpha+1} e^{-\lambda/y} dy - (\frac{\lambda}{\alpha-1})^2 \\
&\xlongequal{x=y^{-1}} \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-2)} x^{(\alpha-1)-2} e^{-\lambda x} dx - (\frac{\lambda}{\alpha-1})^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}
\end{aligned}
$$

2 1.12

设随机变量 $X \sim Be(a,b)$，证明：$Y = 1 - X \sim Be(b,a)$

Proof. 由题意得

$$
p_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1)
$$

则 $Y = 1 - X$ 的密度函数为

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X(x(y))|\frac{dx}{dy}| \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{a-1} y^{b-1}, \quad y \in (0,1)
\end{aligned}
$$

故有 $Y \sim Be(b,a)$，得证 □

3 1.15

证明下述结论：(1) 设 $F(x)$ **为连续随机变量** X **的分布函数，则**

$$Y = F(x) \sim U(0,1)$$

Proof. $Y = F(x) \in (0,1)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} P(F(x) \leq y) &= P(x \leq F^{-1}(y)) \\ &= F(F^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

故 $Y = F(x) \sim U(0,1)$，得证 □

(2) 设 $Y \sim U(0,1)$**，则** $u = -2\ln Y \sim \chi^2(2)$

Proof. 由题意得

$$p_Y(y) = 1, \quad y \in (0,1)$$

则 $u = -2\ln Y$ 的密度函数为

$$\begin{aligned} p_U(u) &= p_Y(y(u))|\frac{dy}{du}| \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)}x^{\frac{2}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}, \quad u > 0 \end{aligned}$$

故 $u \sim \chi^2(2)$，得证 □

(3) 设 $X_1,...X_n$ 是连续随机变量 X 的 n 次观察值，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则

$$-2\sum_{i=1}^{n}\ln F\left(X_i\right)\sim\chi^2(2n)$$

Proof. 由前两问可得：$F(x_i)\sim U(0,1)$ 且 $-2\ln F(x_i)\sim\chi^2(2)$，又因为各 X_i 独立，故由 Gamma 分布的可加性得

$$-2\sum_{i=1}^{n}\ln F\left(X_i\right)\sim\chi^2(2n)$$

得证 □

4 1.16

验证：自由度为 2 和 $2k$ 的 F 分布的 α 分位数是

$$F_\alpha(2,2k)=k\left[(1-\alpha)^{-1/k}-1\right]$$

Proof. 由题意得，自由度为 2 和 $2k$ 的 F 分布密度函数为

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(k)}\frac{1}{k}\frac{1}{(1+\frac{x}{k})^{1+k}}\\&=(1+\frac{x}{k})^{-1-k},\quad x>0\end{aligned}$$

则其 α 分位数 $q_\alpha=F_\alpha(2,2k)$ 满足：

$$\begin{aligned}P(X\le q_\alpha)&=\int_0^q{}_\alpha(1+\frac{x}{k})^{-1-k}dx\\&=-(1+\frac{x}{k})^{-k}\Big|_0^{q_\alpha}\\&=1-(1+\frac{q_\alpha}{k})^{-k}\\&=\alpha\end{aligned}$$

故有 $F_\alpha(2,2k)=q_\alpha=k\left[(1-\alpha)^{-1/k}-1\right]$，得证 □

高等统计学作业三

王祎帆

2020000117

2020.10.22

1 1.23

设 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,4)$，且 X_1 与 X_2 独立，求 $Y_1 = X_1 + X_2$ 和 $Y_2 = X_1 - X_2$ 的联合分布。

解：由 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,4)$，且 X_1 与 X_2 独立得：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

设 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则有 $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{PX}$，。

由多元正态分布性质得，$\mathbf{Y}$ 依旧服从正态分布，其中

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{P}E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Var(\mathbf{Y}) = \mathbf{P}Var(\mathbf{X})\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

即 $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\right)$

2 1.26

设 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$**，证明**

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

为相互独立的标准正态变量

Proof. 设 $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ 以及

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix}$$

则由题意，有 $\mathbf{Y} = \mathbf{P}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$，且 $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$

由多元正态分布性质得，$\mathbf{Y}$ 依旧服从正态分布，其中

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{P}E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{Y}) &= \mathbf{P}Var(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{P}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_2 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即 $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$，故 Y_1 和 Y_2 为相互独立的标准正态变量，得证。 □

3 1.27

设 $X_1 \sim Ga(\alpha_1, \lambda)$**，**$X_2 \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$**，且** X_1 **与** X_2 **独立，证明：**

(1) $Y_1 = X_1 + X_2$ **与** $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ **独立，且** $Y_2 \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$

Proof. 由题意得：

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

且有 $X_1 = Y_1 Y_2$，$X_2 = Y_1 - Y_1 Y_2$，则对应的 Jacobian 矩阵为：

$$J = \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(Y_1, Y_2)} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 \\ 1 - Y_2 & -Y_1 \end{vmatrix} = -Y_1$$

则有

$$\begin{aligned} p_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= p_{X_1,X_2}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (y_1 y_2)^{\alpha_1-1} (y_1(1 - y_2))^{\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1} y_1 \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_2^{\alpha_1-1} (1 - y_2)^{\alpha_2-1}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 1) \end{aligned}$$

可得 Y_1 的边际密度函数为

$$p_{Y_1}(y_1) = \int_0^1 p_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) dy_2 = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^+$$

Y_2 的边际密度函数为

$$p_{Y_2}(y_2) = \int_0^\infty p_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) dy_1 = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_2^{\alpha_1-1} (1 - y_2)^{\alpha_2-1}, \quad y_2 \in (0, 1)$$

则有 $p_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = p_{Y_1}(y_1)p_{Y_2}(y_2)$，即 Y_1 与 Y_2 独立，且 $Y_2 \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$，得证。 □

(2) $Y_1 = X_1 + X_2$ **与** $Y_3 = X_1/X_2$ **独立，且** $Y_3 \sim Z(\alpha_1, \alpha_2)$

Proof. 由题意得：

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

且有 $X_1 = Y_1Y_3/(1+Y_3)$，$X_2 = Y_1/(1+Y_3)$，则对应的 Jacobian 矩阵为：

$$J = \frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(Y_1,Y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{Y_3}{1+Y_3} & \frac{Y_1}{(1+Y_3)^2} \\ \frac{1}{1+Y_3} & -\frac{Y_1}{(1+Y_3)^2} \end{vmatrix} = -\frac{Y_1}{(1+Y_3)^2}$$

则有

$$\begin{aligned} p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3) &= p_{X_1,X_2}(x_1(y_1,y_3), x_2(y_1,y_3))|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (\frac{y_1y_3}{1+y_3})^{\alpha_1-1} (\frac{y_1}{1+y_3})^{\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1} \frac{y_1}{(1+y_3)^2} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{y_3^{\alpha_1-1}}{(1+y_3)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

可得 Y_1 的边际密度函数为

$$p_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3)dy_3 = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^+$$

Y_3 的边际密度函数为

$$p_{Y_3}(y_3) = \int_0^\infty p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3)dy_1 = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{y_3^{\alpha_1-1}}{(1+y_3)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad y_3 \in \mathbb{R}^+$$

则有 $p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3) = p_{Y_1}(y_1)p_{Y_3}(y_3)$，即 Y_1 与 Y_3 独立，且 $Y_3 \sim Ze(\alpha_1, \alpha_2)$，得证。 □

4 1.29

设 X_1 与 X_2 是相互独立且服从同一指数分布 $Exp(\lambda)$ 的随机变量，寻找 $Y_1 = X_1 - X_2$ 和 $Y_2 = X_2$ 的联合密度函数和 Y_1 的边际密度函数。

解：由题意得：

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

且有 $X_1 = Y_1 + Y_2$，$X_2 = Y_2$，则对应的 Jacobian 矩阵为：

$$J = \frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(Y_1,Y_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

则 Y_1 和 Y_2 的联合密度函数为

$$\begin{aligned} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= p_{X_1,X_2}(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))|J| \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda(y_1+2y_2)} \end{aligned}$$

其中 $(y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$，且 $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}^+$。可得 Y_1 的边际密度函数为：

$$p_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \int_0^\infty p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda y_1}, & y_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \int_{-y_1}^\infty p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{\lambda}{2}e^{\lambda y_1}, & y_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

即

$$p_{Y_1}(y_1) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y_1|}, \quad y_1 \in \mathbb{R}$$

5 1.35

设 $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ 是某样本的次序统计量，当剔去其中前 k 个和后 k 个变量后，用剩下 $n-2k$ 个次序统计量计算平均

$$T_{n,k}=\frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k}X_{(i)}$$

这个平均称为切断平均，其中 $k<n/2$。请指出切断平均的期望与方差存在的条件。

解：$T_{n,k}$ 的期望和方差存在，等价于 $X_{(k+1)},\ldots,X_{(n-k)}$ 的期望和方差存在，即其一阶矩和二阶矩均存在即可。设本题总体为 X，则由课本定理 1.2 可得，若对某个 $a>0$ 有 $E|X|^a<\infty$，假如 n，i 和 r 满足：

$$r\le a\cdot\min(i,n-i+1)$$

则有 $E|X_{(i)}|^a<\infty$。

对于本题而言，若想让 $X_{(k+1)},\ldots,X_{(n-k)}$ 的 r 阶矩均存在，则需 $r\le a\cdot(k+1)$。故切断平均的期望存在的条件为：

$$\exists a\in[\frac{1}{k+1},\infty),\quad \text{s.t.}E|X|^a<\infty$$

切断平均的方差存在的条件为：

$$\exists a\in[\frac{2}{k+1},\infty),\quad \text{s.t.}E|X|^a<\infty$$

6 1.36

设 $X_1, \ldots, X_n$ **是来自总体分布函数** $F(x)$ **的一个样本，**$F_n(x)$ **为其经验分布函数**

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{|X_i \le x|}$$

证明：

$$\sqrt{n}\,[F_n(x) - F(x)] \xrightarrow{L} N(0, F(x)[1 - F(x)])$$

Proof. 令

$$H(x) = \sqrt{n}\,[F_n(x) - F(x)] = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{|X_i \le x|} - nF(x)}{\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$$

其中 $h_i(x) = (I_{|X_i \le x|} - F(x))/\sqrt{n}$ 且各 $h_i(x)$ 独立，则有

$$E(h_i(x)) = 0$$

$$Var(h_i(x)) = \frac{F(x) - F(x)^2}{n} = \frac{F(x)[1 - F(x)]}{n}$$

故由中心极限定理得：

$$\frac{H(x) - E(H(x))}{\sqrt{Var(H(x))}} = \frac{H(x)}{\sqrt{F(x)[1 - F(x)]}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

则由 Slutsky 定理得：

$$H(x) = \sqrt{n}\,[F_n(x) - F(x)] \xrightarrow{L} N(0, F(x)[1 - F(x)])$$

得证。 □

高等统计学作业四

王祎帆

2020000117

2020.10.29

1 1.42

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自二项分布 $b(m,\theta)$ 的一个样本，证明：$T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是 θ 的充分统计量。

Proof. 由题意得：

$$P(X_i = x_i) = \begin{pmatrix} m \\ x_i \end{pmatrix} \theta^{x_i}(1-\theta)^{m-x_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n; \quad x_i = 0,1,\cdots,m$$

由二项分布可加性得，$T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim b(nm,\theta)$，即

$$P(T_n = t) = \begin{pmatrix} nm \\ t \end{pmatrix} \theta^{t}(1-\theta)^{nm-t}, \quad t = 0,1,\cdots,nm$$

故有：

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n | T_n = t) &= \frac{P(X_1 = x_1)\cdots P(X_{n-1} = x_{n-1})P(X_n = t - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(T_n = t)} \\ &= \left[\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} m \\ x_i \end{pmatrix}\right] \frac{\theta^t(1-\theta)^{nm-t}}{\begin{pmatrix} nm \\ t \end{pmatrix} \theta^t(1-\theta)^{nm-t}} \\ &= \left[\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} m \\ x_i \end{pmatrix}\right] \Big/ \begin{pmatrix} nm \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $x_i = 0,1,\cdots,m$，$t = 0,1,\cdots,nm$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i = t$。可以看到上式与 θ 无关，故 T_n 是 θ 的充分统计量，得证。 $\square$

2 1.44

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自如下密度函数的一个样本，分别求未知参数 θ 的充分统计量

（1）（幂分布）$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$，$0 < x < 1$，$\theta > 0$；

解：设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$，由题意得，样本联合密度函数为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}, \quad 0 < x_1, \cdots, x_n < 1; \quad \theta > 0$$

取 $T(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$，$h(\boldsymbol{x}) = 1$，则上式可改写为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \theta^n T(\boldsymbol{x})^{\theta-1} h(\boldsymbol{x}), \quad 0 < x_1, \cdots, x_n < 1; \quad \theta > 0$$

由因子分解定理得，$T(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ 是 θ 的充分统计量。

（2）（Pareto 分布）$p_\theta(x) = \theta a^\theta / x^{\theta+1}$，$x > a$，$\theta > 0$（$a > 0$ 已知）；

解：设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$，由题意得，样本联合密度函数为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{\theta^n a^{n\theta}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta+1}}, \quad x_1, \cdots, x_n > a > 0; \quad \theta > 0$$

取 $T(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$，$h(\boldsymbol{x}) = 1$，则上式可改写为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{\theta^n a^{n\theta}}{T(\boldsymbol{x})^{\theta+1}} h(\boldsymbol{x}), \quad x_1, \cdots, x_n > a > 0; \quad \theta > 0$$

由因子分解定理得，$T(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ 是 θ 的充分统计量。

（3）（拉普拉斯分布）$p_\theta(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-|x|/\theta}$**，**$-\infty<x<\infty$**，**$\theta>0$**；**

解：设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$，由题意得，样本联合密度函数为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\theta^n}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|/\theta},\quad -\infty<x_1,\cdots,x_n<\infty;\quad \theta>0$$

取 $T(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，$h(\boldsymbol{x})=1$，则上式可改写为：

$$p_\theta(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\theta^n}e^{-T(\boldsymbol{x})/\theta}h(\boldsymbol{x}),\quad -\infty<x_1,\cdots,x_n<\infty;\quad \theta>0$$

由因子分解定理得，$T(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$ 是 θ 的充分统计量。

3 1.49

设二维随机变量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ **服从二元正态分布，其均值向量为零向量，协方差阵为**

$$\begin{pmatrix}\sigma^2+r^2 & \sigma^2-r^2\\ \sigma^2-r^2 & \sigma^2+r^2\end{pmatrix},\quad \sigma>0,\quad r>0$$

证明：二维统计量 $\boldsymbol{T}=\left((X_1+X_2)^2,(X_1-X_2)^2\right)$ **是该二元正态分布族的充分统计量。**

Proof. 由题意得，$\rho=(\sigma^2-r^2)/(\sigma^2+r^2)$，为简化表示，设题干中 $\boldsymbol{X}$ 的协方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$，则有 $|\boldsymbol{\Sigma}|=4\sigma^2r^2$，可得 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度函数为：

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma^2+r^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma^2+r^2}+\frac{x_2^2}{\sigma^2+r^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{4\pi\sigma r}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{\sigma^2+r^2}-\frac{\rho+1}{2}\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2}{\sigma^2+r^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{4\pi\sigma r}\exp\left[-\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{8\sigma^2}+\frac{(x_1-x_2)^2}{8r^2}\right)\right],\quad \sigma>0,\quad r>0\end{aligned}$$

令 $\omega_1=-1/(8\sigma^2)$，$\omega_1=-1/(8r^2)$，则上式可写成

$$p(\boldsymbol{x})=\frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\pi}\exp\left[\omega_1(x_1+x_2)^2+\omega_2(x_1-x_2)^2\right],\quad \omega_1<0,\quad \omega_2<0$$

可得该二元正态分布为指数分布族，由定理 1.15 得，二维统计量 $\boldsymbol{T}=\left((X_1+X_2)^2,(X_1-X_2)^2\right)$ 是该二元正态分布族的充分统计量，得证。

$\square$

4　1.54

考察如下的幂级数分布

$$P_\theta(X=x)=\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x,\quad x=c,c+1,\cdots$$

设 $X_1,\cdots,X_n$ **是来自此分布的一个样本，又设** $T=X_1+\cdots+X_n$**，证明：**

（1）T **的分布具有同样形式；**

Proof. 由题意得：

$$\begin{aligned}P_\theta(T=t)&=\sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}}P_\theta(X_1=x_1,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i)\\&=\sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_{x_i}\right)a_{t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i}}{f(\theta)^n}\theta^t,\quad t=nc,nc+1,\cdots\end{aligned}$$

设 $a_t=\sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}}\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_{x_i}\right)a_{t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i}\right]$，$F_n(\theta)=f(\theta)^n$，则上式可写成

$$P_\theta(T=t)=\frac{a_t}{F_n(\theta)}\theta^t,\quad t=nc,nc+1,\cdots$$

又因为

$$\sum_{x=c}^{\infty}P_\theta(X=x)=\sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x=1$$

$$\sum_{t=nc}^{\infty}P_\theta(T=t)=\sum_{t=nc}^{\infty}\frac{a_t}{F_n(\theta)}\theta^t=1$$

可得

$$f(\theta)=\sum_{x=c}^{\infty}a_x\theta^x$$

$$F_n(\theta)=\sum_{t=nc}^{\infty}a_t\theta^t$$

即 $f(\theta)$ 与 $F_n(\theta)$ 的形式相同，故可得 T 的分布和 X 的分布具有同样的形式，得证。 □

（2）T 是完备统计量。

Proof. 由上题得，$a_x \neq 0 \quad (x = c, c+1, \cdots)$，$f(\theta) \neq 0$，$\theta \neq 0$，故有 $a_t \neq 0 \quad (t = nc, nc+1, \cdots)$，$F_n(\theta) \neq 0$，且对任意 $\phi(t)$，有：

$$E_\theta[\phi(t)] = \sum_{t=nc}^{\infty} \phi(t) \frac{a_t}{F_n(\theta)} \theta^t$$

则 $E_\theta[\phi(t)]$ 可视为 θ 的多项式，至多有可列多个根。故对 $\forall \theta \in \Theta$，若均有 $E_\theta[\phi(t)] = 0$，则必有 $\phi(t) = 0$。反之，若 $\phi(t) = 0$，易得 $E_\theta[\phi(t)] = 0$，$\forall \theta \in \Theta$。

综上，T 是完备统计量，得证。 $\square$

5 1.56

把下列分布的密度函数写成指数族的标准形式，并指出其自然参数空间。

（1）二项分布；

解：对于二项分布 $b(n,p)$，其密度函数为

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \exp\left[\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) x\right] (1-p)^n, \quad x = 0, 1, \cdots, n; \quad p \in (0,1) \end{aligned}$$

设 $\omega = \ln(p/(1-p)) \in (-\infty, +\infty)$，即 $p = e^\omega/(1+e^\omega)$，则上式可写成指数族的标准形式：

$$\begin{aligned} P_\omega(X = x) &= [1+e^\omega]^{-n} e^{\omega x} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \\ &= c(\omega) e^{\omega T(x)} h(x), \quad x = 0, 1, \cdots, n; \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

其中 $c(\omega) = [1+e^\omega]^{-n}$，$T(x) = x$，$h(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}$，自然参数空间 $\Omega = (-\infty, +\infty)$。

（2）Poisson 分布；

解：对于 Poisson 分布 $P(\lambda)$，其密度函数为

$$\begin{aligned}P(X=x)&=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\\&=e^{-\lambda}e^{\ln(\lambda)x}\frac{1}{x!},\quad x=0,1,\cdots;\quad \lambda>0\end{aligned}$$

设 $\omega=\ln(\lambda)$，即 $\lambda=e^{\omega}$，则上式可写成指数族的标准形式：

$$\begin{aligned}P_{\omega}(X=x)&=e^{-e^{\omega}}e^{\omega x}\frac{1}{x!}\\&=c(\omega)e^{\omega T(x)}h(x),\quad x=0,1,\cdots,n;\quad \omega\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

其中 $c(\omega)=e^{-e^{\omega}}$，$T(x)=x$，$h(x)=1/x!$，自然参数空间 $\Omega=(-\infty,+\infty)$。

（3）Gamma 分布；

解：对于 Gamma 分布 $Ga(\alpha,\lambda)$，其密度函数为

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\\&=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}e^{(\alpha-1)\ln(x)-\lambda x},\quad x>0;\quad \alpha>0;\quad \lambda>0\end{aligned}$$

设 $\omega_1=\alpha-1$，$\omega_2=-\lambda$，即 $\alpha=\omega_1+1$，$\lambda=e^{-\omega_2}$，则上式可写成指数族的标准形式：

$$\begin{aligned}p_{\omega_1,\omega_2}(x)&=\frac{e^{-(\omega_1+1)\omega_2}}{\Gamma(\omega_1+1)}e^{\omega_1\ln(x)+\omega_2 x}\\&=c(\omega_1,\omega_2)e^{\omega_1T_1(x)+\omega_2T_2(x)}h(x),\quad x=0,1,\cdots,n;\quad \omega_1>-1;\quad \omega_2<0\end{aligned}$$

其中 $c(\omega_1,\omega_2)=\frac{e^{-(\omega_1+1)\omega_2}}{\Gamma(\omega_1+1)}$，$T_1(x)=\ln(x)$，$T_2(x)=x$，$h(x)=1$，自然参数空间 $\Omega=(-1,+\infty)\times(-\infty,0)$。

（4）二元正态分布。

解：对于服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，其密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

其中 $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times[-1,1]$，且

$$\begin{aligned}\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}&=x^2\frac{1}{\sigma_1^2}+x\frac{2\rho\mu_2\sigma_1-2\mu_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2}\\&\quad+y^2\frac{1}{\sigma_2^2}+y\frac{2\rho\mu_1\sigma_2-2\mu_2\sigma_1}{\sigma_1\sigma_2^2}\\&\quad+xy\frac{-2\rho}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\mu_1^2\sigma_1^2+\mu_2^2\sigma_2^2-2\rho\mu_1\mu_2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\omega_1&=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\frac{1}{\sigma_1^2}=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2}\\\omega_2&=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\frac{2\rho\mu_2\sigma_1-2\mu_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2}=\frac{\mu_1\sigma_2-\rho\mu_2\sigma_1}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2\sigma_2}\\\omega_3&=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\frac{1}{\sigma_2^2}=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2}\\\omega_4&=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\frac{2\rho\mu_1\sigma_2-2\mu_2\sigma_1}{\sigma_1\sigma_2^2}=\frac{\mu_2\sigma_1-\rho\mu_1\sigma_2}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1\sigma_2^2}\\\omega_5&=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\frac{-2\rho}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{\rho}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1\sigma_2}\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\omega}=c(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)$，可反解出各参数的表达式：

$$\rho=\frac{\omega_5}{2\sqrt{\omega_1\omega_3}}\equiv\rho(\boldsymbol{\omega})$$

$$\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{-2\omega_1(1-\rho^2)}}=\sqrt{\frac{2\omega_3}{\omega_5^2-4\omega_1\omega_3}}\equiv\sigma_1(\boldsymbol{\omega})$$

$$\sigma_2=\frac{1}{\sqrt{-2\omega_3(1-\rho^2)}}=\sqrt{\frac{2\omega_1}{\omega_5^2-4\omega_1\omega_3}}\equiv\sigma_2(\boldsymbol{\omega})$$

$$\mu_1=\sigma_1(\rho\omega_4\sigma_2+\omega_2\sigma_1)=\frac{\omega_4\omega_5+2\omega_2\omega_3}{\omega_5^2-4\omega_1\omega_3}\equiv\mu_1(\boldsymbol{\omega})$$

$$\mu_2=\sigma_2(\rho\omega_2\sigma_1+\omega_4\sigma_2)=\frac{\omega_2\omega_5+2\omega_4\omega_3}{\omega_5^2-4\omega_1\omega_3}\equiv\mu_2(\boldsymbol{\omega})$$

则上述二元正态分布的密度函数可写成指数族的标准形式：

$$p(x,y) = c(\boldsymbol{\omega}) e^{\sum\limits_{i=1}^{5} w_i T_i(x,y)} h(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

其中

$$c(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1(\boldsymbol{\omega})\sigma_2(\boldsymbol{\omega})\sqrt{1-\rho(\boldsymbol{\omega})^2}} \exp\left[\frac{\mu_1(\boldsymbol{\omega})^2\sigma_1(\boldsymbol{\omega})^2 + \mu_2(\boldsymbol{\omega})^2\sigma_2(\boldsymbol{\omega})^2 - 2\rho(\boldsymbol{\omega})\mu_1(\boldsymbol{\omega})\mu_2(\boldsymbol{\omega})\sigma_1(\boldsymbol{\omega})\sigma_2(\boldsymbol{\omega})}{-2(1-\rho(\boldsymbol{\omega})^2)\sigma_1(\boldsymbol{\omega})^2\sigma_2(\boldsymbol{\omega})^2}\right]$$

$$T_1(x,y) = x^2$$

$$T_2(x,y) = x$$

$$T_3(x,y) = y^2$$

$$T_4(x,y) = y$$

$$T_5(x,y) = xy$$

$$h(x,y) = 1$$

自然参数空间 $\Omega = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。

高等统计学作业五

王祎帆

2020000117

2020.11.5

1 2.6

设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的估计量，证明：若 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{E}\,\hat{\theta}_n \to \theta$，$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) \to 0$，则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计。

Proof. 由题意得，当 $n \to 0$ 时：

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_n\right) &= \left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 \\ &= \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) + \left(\mathrm{E}\,\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 \to 0\end{aligned}$$

又对任意 $\varepsilon > 0$，下面两式等价：

$$P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$P\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 \geq \varepsilon^2\right)$$

故当 $n \to 0$ 时，由 $\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_n\right) \to 0$ 可得 $P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \to 0$，相合性得证。 □

2 2.7

$X_1, \ldots, X_n$ **独立同分布，** $\mathrm{E}\, X_1 = \mu$**，** $\mathrm{Var}\,(X_1) < \infty$**，证明：** $\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)} \sum\limits_{i=1}^{n} iX_i$ **是** μ **的相合估计。**

Proof. 由独立同分布的性质可得，对于任意 $j = 1, 2, \cdots, n$，$\mathrm{E}\, X_j = \mu$，$\mathrm{Var}\,(X_j) \equiv \sigma^2 < \infty$。故有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, \hat{\mu} &= \mathrm{E} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i \right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(\hat{\mu}) &= \mathrm{Var} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i \right) \\
&= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 \sigma^2 \\
&= \frac{4n+2}{3n(n+1)} \sigma^2
\end{aligned}$$

由切比雪夫不等式得，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\begin{aligned}
P\left(|\hat{\mu} - \mu| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathrm{Var}\,(\hat{\mu})}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{4n+2}{3n(n+1)} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to 0)
\end{aligned}$$

故相合性得证。 □

3 2.9

设 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 为独立同分布的二元正态变量，$\mathrm{E}\, X_1 = \mathrm{E}\, Y_1 = 0$，$\mathrm{Var}\, X_1 = \mathrm{Var}\, Y_1 = 1$，$\mathrm{Cov}\,(X_1, Y_1) = \rho$。记

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum X_i^2, \quad S_{xy} = \frac{1}{n}\sum X_i Y_i, \quad S_{yy} = \frac{1}{n}\sum Y_i^2$$

（1）证明 $\sqrt{n}\,(S_{xx} - 1, S_{xy} - \rho, S_{yy} - 1) \xrightarrow{L} N_3(0, \Sigma)$，其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2\rho & 2\rho^2 \\ 2\rho & 1+\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2\rho & 2 \end{pmatrix}$$

Proof. 由独立同分布的性质可得，对于任意 $j = 1, 2, \cdots, n$，$X_i \sim N(0,1)$，$Y_i \sim N(0,1)$，$\mathrm{E}\, X_j = \mathrm{E}\, Y_j = 0$，$\mathrm{Var}\, X_j = \mathrm{Var}\, Y_j = 1$，$\mathrm{Cov}\,(X_j, Y_j) = \rho$。

故有 $\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$，$\sum\limits_{i=1}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n)$。所以可以得到

$$\mathrm{E}\,(S_{xx}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = 1$$

$$\mathrm{E}\,(S_{yy}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) = 1$$

$$\mathrm{E}\,(S_{xy}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[\mathrm{E}\,(X_i Y_i) - \mathrm{E}\, X_i\, \mathrm{E}\, Y_i\right] = \rho$$

$$\mathrm{Var}\,(S_{xx}) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{2}{n}$$

$$\mathrm{Var}\,(S_{yy}) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) = \frac{2}{n}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(S_{xy}) &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_iY_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_iY_i\right)^2 - \left(\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_iY_i\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2\right) + \mathrm{E}\left(\sum_{i\neq j} X_iY_iX_jY_j\right) - n^2\rho^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2\right) + n(n-1)\rho^2 - n^2\rho^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2\right) - n\rho^2\right]
\end{aligned}
$$

又因为对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$，(X_i, Y_i) 为二元正态分布，故 $X_i|Y_i \sim N(\rho Y_i, 1-\rho^2)$，所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2\right) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2|Y_i\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_i^2\left(\operatorname{Var}(X_i|Y_i) + (\mathrm{E}(X_i|Y_i))^2\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(1-\rho)^2Y_i^2 + \rho^2Y_i^4\right] \\
&= 1 + 2\rho^2
\end{aligned}
$$

代入 $\operatorname{Var}(S_{xy})$ 得

$$
\operatorname{Var}(S_{xy}) = \frac{1+\rho^2}{n}
$$

另外又有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(S_{xx}-1, S_{yy}-1) &= \mathrm{E}\left[(S_{xx}-1)(S_{yy}-1)\right] - \mathrm{E}(S_{xx}-1)\,\mathrm{E}(S_{yy}-1) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - 1 \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2Y_i^2\right) + \sum_{i\neq j}\mathrm{E}\,X_i^2\,\mathrm{E}\,Y_i^2\right] - 1 \\
&= \frac{n(1+2\rho^2) + n(n-1)}{n^2} - 1 \\
&= \frac{2\rho^2}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(S_{yy}-1, S_{xy}-\rho\right) &= \mathrm{E}\left[\left(S_{yy}-1\right)\left(S_{xy}-\rho\right)\right]-\mathrm{E}\left(S_{yy}-1\right)\mathrm{E}\left(S_{xy}-\rho\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)-\rho \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i Y_i^3\right)+\sum_{i\neq j}\mathrm{E}\,Y_i^2\,\mathrm{E}\,X_i Y_i\right]-\rho \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(X_i Y_i^3 | Y_i\right)\right)+n(n-1)\rho\right]-\rho \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\rho Y_i^4\right)+n(n-1)\rho\right]-\rho \\
&= \frac{1}{n^2}\left[3n\rho+n(n-1)\rho\right]-\rho \\
&= \frac{2\rho}{n}
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\operatorname{Cov}\left(S_{xx}-1, S_{xy}-\rho\right)=\frac{2\rho}{n}
$$

综上，由中心极限定理可得，$\sqrt{n}\left(S_{xx}-1, S_{xy}-\rho, S_{yy}-1\right) \xrightarrow{L} N_3(0,\Sigma)$，其中

$$
\Sigma=\begin{pmatrix} 2 & 2\rho & 2\rho^2 \\ 2\rho & 1+\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2\rho & 2 \end{pmatrix}
$$

□

（2）令 $r=S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$，求 $\sqrt{n}(r-\rho)$ 的渐近分布。

解： 记 $\boldsymbol{T}_n=\left(S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}\right)'$，$\boldsymbol{\theta}=(1,\rho,1)'$。由上一问可知，$\sqrt{n}\left(\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{L} N_3(0,\Sigma)$。

又设 $\boldsymbol{g}(t_1,t_2,t_3)=t_2/\sqrt{t_1t_3}$，则其对各 t_i 有连续偏导数，则由引理 2.11 可得，当 $n\to\infty$ 时有。

$$
\sqrt{n}\left[\boldsymbol{g}(S_{xx},S_{xy},S_{yy})-\boldsymbol{g}(1,\rho,1)\right]=\sqrt{n}(r-\rho) \xrightarrow{L} N_3\left(0,\Sigma_1\right)
$$

其中

$$
\Sigma_1=\sum\sum\left(\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\frac{\partial g}{\partial\theta_j}\sigma_{ij}\right)
$$

又因为

$$
\frac{\partial g}{\partial\theta_1}=-\frac{\theta_2}{2\sqrt{\theta_1\theta_3}\theta_1}=-\frac{\rho}{2}
$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_2} = \frac{1}{\sqrt{\theta_1\theta_3}} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_3} = -\frac{\theta_2}{2\sqrt{\theta_1\theta_3}\theta_3} - \frac{\rho}{2}$$

故可得

$$\Sigma_1 = \left(-\frac{\rho}{2}, 1, -\frac{\rho}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 2\rho & 2\rho^2 \\ 2\rho & 1+\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2\rho & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho/2 \\ 1 \\ -\rho/2 \end{pmatrix} = \left(1-\rho^2\right)^2$$

即 $\sqrt{n}(r-\rho) \xrightarrow{L} N_3\left(0, (1-\rho^2)^2\right)$

4 2.11

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自均值为 μ，方差为 σ^2 的分布的一个样本，μ，σ^2 均未知，考虑 μ 的线性估计类

$$\mathscr{L}_\theta = \left\{T(x) : T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\}$$

（1）证明：$T(x)$ 为 μ 的无偏估计的充要条件是 $\sum c_i = 1$；

Proof. 充分性：若 $\sum c_i = 1$，则

$$\mathrm{E}\left[T(x)\right] = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \mu \sum_{i=1}^{n} c_i = \mu$$

即 $T(x)$ 为 μ 的无偏估计。

必要性：若 $T(x)$ 为 μ 的无偏估计，即

$$\mathrm{E}\left[T(x)\right] = \mu \sum_{i=1}^{n} c_i = \mu$$

故 $\sum c_i = 1$。综上，充要性得证。 □

（2）证明：$\bar{X}$ 在线性无偏估计类中方差一致达到最小。

Proof. 对任意 $T(x) \in \mathscr{L}_\theta$，其方差为

$$\operatorname{Var}[T(x)] = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

由 Cauchy-Shcwarz 不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sum_{i=1}^{n} 1^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2$$

其取等条件为 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$，由上一问得 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，故有

$$c_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

得到最小方差对应的无偏估计为

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i = \bar{X}$$

得证。 $\square$

高等统计学作业六

王祎帆

2020000117

2020.11.12

1 2.12

考虑如下离散型的均匀分布 $P_\theta(X=i)=1/\theta$，$i=1,\cdots,\theta$。记 $\mathscr{P}=\{P_\theta,\theta=1,2,\cdots\}$。

（1）试证 $\mathscr{P}$ 是完备的；

Proof. 对于可测函数 $\phi(x)$，若对任意 $\theta=1,2,\cdots$ 均有

$$\mathrm{E}\,\phi(x)=\sum_{x=1}^{\theta}\phi(x)P_\theta(x)=\sum_{x=1}^{\theta}\phi(x)\frac{1}{\theta}=0$$

则令 $\theta=1$ 可得 $\phi(1)=0$，同理可得 $\phi(x)=0$，$x=1,2,\cdots,\theta$，故 $\mathscr{P}$ 是完备的，得证。 □

（2）试求 θ 的 UMVUE $\hat{\theta}$；

解：对于样本 $X_1,\cdots,X_n$，由题意得，

$$\begin{aligned}P_\theta\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)&=\frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}\left(x_{(n)}\leq\theta\right)\mathbf{I}\left(x_{(1)}\geq 1\right)\\&=g_\theta[T(\boldsymbol{x})]h(\boldsymbol{x}),\quad x_1,\cdots x_n=1,\cdots,\theta\end{aligned}$$

其中 $T(\boldsymbol{x})=x_{(n)}$，$g_\theta(T((x)))=\mathbf{I}\left(T((x))\leq\theta\right)/\theta^n$，$h(\boldsymbol{x})=\mathbf{I}\left(x_{(1)}\geq 1\right)$，故由因子分解定理得，$T(\boldsymbol{x})=x_{(n)}$ 为 θ 的充分统计量。

由 $\mathrm{E}\,X_1=(\theta+1)/2$，可得 θ 的一个无偏估计为 $g(\boldsymbol{x})=2x_1-1$，故可解得 θ 的 UMVUE 为

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}&=\mathrm{E}\left(2X_1-1\mid X_{(n)}=x_{(n)}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{x_{(n)}}P_\theta\left(X_1=i\mid X_{(n)}=x_{(n)}\right)(2i-1)\\
&=\sum_{i=1}^{x_{(n)}-1}\frac{P_\theta\left(X_1=i,X_{(n)}=x_{(n)}\right)}{P_\theta\left(X_{(n)}=x_{(n)}\right)}(2i-1)+\frac{P_\theta\left(X_1=x_{(n)},X_{(n)}=x_{(n)}\right)}{P_\theta\left(X_{(n)}=x_{(n)}\right)}(2x_{(n)}-1)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\frac{P_\theta\left(X_1=x_{(n)},X_{(n)}=x_{(n)}\right)}{P_\theta\left(X_{(n)}=x_{(n)}\right)}=\frac{\frac{1}{\theta}\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}}{\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^n-\left(\frac{x_{(n)}-1}{\theta}\right)^n}=\frac{x^{n-1}}{x^n-(x-1)^n}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P_\theta\left(X_1=i,X_{(n)}=x_{(n)}\right)}{P_\theta\left(X_{(n)}=x_{(n)}\right)}&=\frac{P\left(X_1=i,X_{(n)}\le x_{(n)}\right)-P\left(X_1=i,X_{(n)}\le x_{(n)}-1\right)}{P\left(X_{(n)}=x_{(n)}\right)}\\
&=\frac{\frac{1}{\theta}\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}-\frac{1}{\theta}\left(\frac{x_{(n)}-1}{\theta}\right)^{n-1}}{\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^n-\left(\frac{x_{(n)}-1}{\theta}\right)^n}\\
&=\frac{x_{(n)}^{n-1}-(x_{(n)}-1)^{n-1}}{x_{(n)}^n-(x_{(n)}-1)^n}
\end{aligned}
$$

故可解得 θ 的 UMVUE 为

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}=&\sum_{i=1}^{x_{(n)}-1}\frac{x_{(n)}^{n-1}-(x_{(n)}-1)^{n-1}}{x_{(n)}^n-(x_{(n)}-1)^n}(2i-1)+\frac{x_{(n)}^{n-1}}{x_{(n)}^n-(x_{(n)}-1)^n}(2x_{(n)}-1)\\
=&\frac{x_{(n)}^{n+1}-(x_{(n)}-1)^{n+1}}{x_{(n)}^n-(x_{(n)}-1)^n}
\end{aligned}
$$

（3）固定某正整数 k，令 $\mathscr{P}_k=\mathscr{P}-\{P_k\}$，试证 $\mathscr{P}_k$ 是不完备的；

Proof. 不妨令

$$
\phi'(x)=\begin{cases}1, & x=k\\ -1, & x=k+1\\ 0, & else\end{cases}
$$

则有

$$
\mathrm{E}\,\phi'(x)=\sum_{x=1}^{\theta}\phi'(x)P_\theta(x)=\begin{cases}0, & \theta<k\\ P_\theta(k)-P_\theta(k+1)=0, & \theta>k\end{cases}
$$

即 $\mathscr{P}_k$ 是不完备的，得证。 □

（4）试证对 $\mathscr{P}_k$，$\hat{\theta}$ 不是 θ 的 UMVUE。

Proof. 不妨令 $n=1$，则由第二问得，$\hat{\theta}=2x_{(n)}-1=2x-1$。对于第三问中的 $\phi'(x)$，当 $\theta>k$ 时，有

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\phi'(x)\right)=\frac{\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}(k+1)}{\theta}=-\frac{2}{\theta}$$

由于 $\mathrm{E}(\phi'(x))=0$，故 $\hat{\theta}+\phi'(x)$ 同样为 θ 的无偏估计，同时有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\theta}+\phi'(x))&=\mathrm{Var}(\hat{\theta})+\mathrm{Var}(\phi'(x))+2\,\mathrm{Cov}(\hat{\theta},\phi'(x))\\&=\mathrm{Var}(\hat{\theta})+\frac{2}{\theta}+2\,\mathrm{E}(\hat{\theta}\phi'(x))\\&=\mathrm{Var}(\hat{\theta})-\frac{2}{\theta}\\&<\mathrm{Var}(\hat{\theta})\end{aligned}$$

故 $\hat{\theta}$ 的方差不是 θ 的无偏估计中最小的，即 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的 UMVUE。 □

2 2.13

考虑幂级数分布的参数估计问题。设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自

$$Pr(X=x)=\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x,\quad x=c,\quad c+1,\cdots,\infty \tag{2.73}$$

的一个样本，令 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$。

（1）证明：T 是 θ 的完备充分统计量，且 T 的分布仍具 (2.73) 形式

$$Pr(T=t)=\frac{b_t}{f^n(\theta)}\theta^t,\quad t=nc,\quad nc+1,\cdots,\infty$$

Proof. **充分统计量：**由题意可得，

$$\begin{aligned}Pr\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)&=\frac{a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_n}}{[f(\theta)]^n}\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\\&=g_\theta[T(\boldsymbol{x})]h(\boldsymbol{x}),\quad x_1,\cdots,x_n=c,c+1,\cdots,\infty\end{aligned}$$

其中 $g_\theta[T(\boldsymbol{x})]=\theta^t/[f(\theta)]^n$，$h(\boldsymbol{x})=a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_n}$，故由因子分解定理得，$T$ 是 θ 的充分统计量。

完备统计量：由题意得，

$$
\begin{aligned}
Pr\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right) &= \frac{a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_n}}{[f(\theta)]^n}\theta^{\sum\limits_{i=1}^n x_i} \\
&= \frac{1}{\left[f\left(e^{\ln\theta}\right)\right]^n}\exp\left(\ln\theta\sum_{i=1}^n x_i\right)a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_n} \\
&= c(w)\exp\left[wT(\boldsymbol{x})\right]h(\boldsymbol{x}), \quad x_1,\cdots,x_n=c,c+1,\cdots,\infty
\end{aligned}
$$

其中 $w=\ln\theta$ 对应的 $\Omega=\{x: x=\ln\theta,\theta\in\Theta\}$ 有内点，$c(w)=\left[f\left(e^w\right)\right]^{-n}$，$h(\boldsymbol{x})=a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_n}$，即 $X_1,\cdots,X_n$ 来自指数型分布族，故由定理 1.16 得，T 是 θ 的完备统计量。

形式相同：

$$
\begin{aligned}
Pr(T=t) &= \sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}} P_\theta(X_1=x_1,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i) \\
&= \sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}} \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{x_i}\right)a_{t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i}}{f^n(\theta)}\theta^t, \quad t=nc,nc+1,\cdots
\end{aligned}
$$

设 $b_t=\sum\limits_{x_1,\cdots,x_{n-1}}\left[\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{x_i}\right)a_{t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i}\right]$，则上式可写成

$$
Pr(T=t)=\frac{b_t}{f^n(\theta)}\theta^t, \quad t=nc,nc+1,\cdots
$$

即 T 的分布仍具 (2.73) 形式。

综上，T 是 θ 的完备充分统计量，且 T 的分布仍具 (2.73) 形式，得证。 □

（2）证明 θ^r 的 UMVUE 是

$$
\hat{\theta}^r=\begin{cases} 0, & t<r+nc \\ b_{t-r}/b_{t,} & t\geq r+nc \end{cases}
$$

Proof. 由上题可得，$\hat{\theta}^r$ 是充分完备统计量 $T(x)$ 的函数，故只需证明 $\hat{\theta}^r$ 是 θ^r 的无偏估计即可。令 $z=t-r$，则有

$$
\mathrm{E}\,\hat{\theta}^r=\sum_{t=r+nc}^{\infty}\frac{b_{t-r}}{bt}\frac{b_t}{f^n(\theta)}\theta^t=\sum_{z=nc}^{\infty}\frac{b_z}{f^n(\theta)}\theta^z\theta^r=\theta^r
$$

故 $\hat{\theta}^r$ 是 θ^r 的无偏估计，可得 $\hat{\theta}^r$ 是 θ^r 的 UMVUE，得证。 □

（3）证明：若 X 的取值范围有限，则（1），（2）中的结论不再正确。

Proof. **正确答案：（1）中结论正确。**

设 X 的取值范围为 $c, \cdots, k$，满足 $c \le k < \infty$，则 T 的取值范围为 $nc, \cdots, nk$，进一步设

$$b_t^* = \sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}; c \le t - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \le k} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_{x_i} \right) a_{t-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right]$$

对于（1）中结论：易证 T 仍是 θ 的充分统计量。对于完备性，对任意 $\phi(t)$，若对任意 $\theta \in \Theta$ 均有

$$\mathrm{E}\,\phi(t) = \sum_{t=nc}^{nk} \phi(t) \frac{b_t^*}{f^n(\theta)} \theta^t = 0$$

等价于

$$\sum_{t=nc}^{nk} \phi(t) b_t^* \theta^t = 0$$

上式为 θ 的多项式，由 θ 的任意性以及 $b_t^* \neq 0$ 可得 $\phi(x) = 0$，故 T 为完备统计量，即 T 仍是 θ 的充分完备统计量。但 T 的分布为

$$Pr(T = t) = \frac{b_t^*}{f^n(\theta)} \theta^t, \quad t = nc, nc+1, \cdots, nk$$

其中 t 的取值范围有限，而 (2.73) 中 x 的取值范围无限，故（1）中结论不再正确。**但若认为取值范围的不同不代表分布形式的不同，则（1）中结论正确。**

对于（2）中结论：同样令 $z = t - r$，若 $\hat{\theta}^r$ 是 θ^r 的 UMVUE，则必有

$$\mathrm{E}\,\hat{\theta}^r = \sum_{t=r+nc}^{nk} \frac{b_{t-r}}{bt} \frac{b_t}{f^n(\theta)} \theta^t = \sum_{z=nc}^{nk-r} \frac{b_z}{f^n(\theta)} \theta^z \theta^r = \theta^r$$

即

$$\sum_{z=nc}^{nk-r} \frac{b_z}{f^n(\theta)} \theta^z = 1$$

但由题目定义可得

$$\sum_{z=nc}^{nk} \frac{b_z}{f^n(\theta)} \theta^z = 1 > \sum_{z=nc}^{nk-r} \frac{b_z}{f^n(\theta)} \theta^z = 1$$

矛盾，故（2）中结论不成立。 □

3 2.15

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，试求均值 $\mathrm{E}\, X_1$ 的 UMVUE。

解：由题意得

$$
\begin{aligned}
p\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n \prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n \prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\mu\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n \prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2\right)-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\mu\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $x_1, \cdots, x_n \in (0, \infty)$，则由因式分解定理可得，充分统计量为 $T_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2$，$T_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，进一步可将上式简化为

$$
\begin{aligned}
p\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(T_1-\frac{1}{n}T_2^2\right)-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{n^2}T_2^2-\frac{2\mu}{n}T_2+\mu^2\right)\right\}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \\
&= c(\boldsymbol{\omega})\exp\left\{\sum_{j=1}^{2}\omega_j T_j(\boldsymbol{x})\right\}h(\boldsymbol{x}), \quad x_1, \cdots, x_n \in (0, \infty)
\end{aligned}
$$

其中 $\omega_1 = -1/(2\sigma^2)$, $\omega_2 = \mu/\sigma^2$, $c(\boldsymbol{\omega}) = \exp\left[n\omega_2^2/(4\omega_1)\right] / \left[\left(\sqrt{-\pi/\omega_1}\right)^n\right]$, $h((x)) = 1/\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$，即可证其为指数分布族，且 $\Omega = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ 有内点，故由定理 1.16 得，T_1 和 T_2 同时也是完备统计量。

由 $X_1, \cdots, X_n \sim LN(\mu, \sigma^2)$ 可得 $\ln X_1, \cdots, \ln X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$，故有

$$
T_2 = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)
$$

$$
T_3 \triangleq \sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\frac{T_2}{n}\right)^2 = T_1-\frac{T_2^2}{n} \sim \sigma^2\chi^2(n-1) = \sigma^2 Ga(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(T_2, T_3) &= \operatorname{Cov}(T_1, T_2) - \frac{\operatorname{Cov}(T_2, T_2^2)}{n} \\
&= -\frac{\partial^2 \ln c(\omega)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} - \frac{1}{n}\left(\mathrm{E}\, T_2^3 - \mathrm{E}\, T_2^2\, \mathrm{E}\, T_2\right) \\
&= 2n\mu\sigma^2 - \frac{2n^2\mu\sigma^2}{n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

即 T_2 和 T_3 独立。又因为 $\exp(T_2/n) \sim LN(\mu, \sigma^2/n)$，故

$$
\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{T_2}{n}\right)\right) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{n}\right)
$$

因为

$$
\mathrm{E}\left(T_3\right)^k = 2^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma^{2k}
$$

故有

$$
\mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^k}{2^k k!} T_3^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^k}{k!} \sigma^{2k} = \exp\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\sigma^2\right]
$$

令

$$
g\left(T_2, T_3\right) = \exp\left(\frac{T_1}{n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^k}{2^k k!} T_3^k
$$

由 T_2 和 T_3 独立可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(g\left(T_2, T_3\right)\right) &= \mathrm{E}\left(\exp\left\{\frac{T_1}{n}\right\}\right) \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^k}{2^k k!} T_3^k\right) \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2n}\right) \exp\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\sigma^2\right] \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
&= \mathrm{E} X_1
\end{aligned}
$$

故 $g\left(T_2, T_3\right)$ 为 $\mathrm{E}\, X_1$ 的 UMVUE。

4 2.16

（1）设 $X \sim p(x;\theta) = f(x)/h(\theta)$，$\theta \le x \le b$。$\theta$ 是未知参数，$h(\theta) > 0$，$f(x) > 0$。证明，若 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，则

$$-T(X) = \{g(X)h'(X) + g'(X)h(X)\}/f(X)$$

Proof. 由于 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，故有

$$g(\theta) = \mathrm{E}\,T(x) = \int_{\theta}^{b} T(x)\frac{f(x)}{h(\theta)}dx$$

即

$$g(\theta)h(\theta) = \int_{\theta}^{b} T(x)f(x)$$

两边对 θ 求导可得

$$g'(\theta)h(\theta) + g(\theta)h'(\theta) = -T(\theta)f(\theta)$$

由 θ 的任意性，将 θ 替换为 X 可得

$$-T(X) = \{g(X)h'(X) + g'(X)h(X)\}/f(X)$$

□

（2）设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自（1）中分布的一个样本，则 $g(\theta)$ 的唯一的 UMVUE 为

$$T(X) = g\left(X_{(1)}\right) - \frac{g'\left(X_{(1)}\right)}{n}\frac{h\left(X_{(1)}\right)}{f\left(X_{(1)}\right)}$$

类似地可讨论 $p(x;\theta) = f(x)/h(\theta)$，$a \le x \le \theta$ 的情形。

Proof. 由题可得

$$p(x_1, \cdots, x_n;\theta) = \mathbf{I}\left(x_{(1)} \ge \theta\right)\mathbf{I}\left(x_{(n)} \le b\right)\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)/h^n(\theta) = g_\theta(T(\boldsymbol{x}))l(\boldsymbol{x}), \quad \theta \le x_1, \cdots, x_n \le b$$

其中 $T(\boldsymbol{x}) = x_{(1)}$，$g_\theta(T(\boldsymbol{x})) = \mathbf{I}\left(T(\boldsymbol{x}) \ge \theta\right)/h^n(\theta)$，$l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{I}\left(x_{(n)} \le b\right)\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)$，由因子分解定理得，$T(\boldsymbol{x}) = x_{(1)}$ 为充分统计量。

另外，对任意 $\phi(x)$，若对任意 $\theta < b$ 均有：

$$\mathrm{E}\,\phi(x) = \int_\theta^b \phi(x)\frac{f(x)}{h(\theta)}dx = 0$$

即

$$\int_\theta^b \phi(x)f(x)dx = 0$$

两边对 θ 求导可得

$$-\phi(\theta)f(\theta) = 0$$

由 $f(x) > 0$ 可得 $\phi(\theta) \equiv 0$，由 θ 任意性可得 $\phi(x) \equiv 0$，故该分布族完备，故 $T(\boldsymbol{x}) = x_{(1)}$ 为完备统计量，从而其为充分完备统计量。

进一步，由题可得，$T(\boldsymbol{x}) = x_{(1)}$ 的密度函数为

$$p_{(1)}(x) = \frac{nf(x)}{h(\theta)}[1-F(x)]^{n-1}, \quad \theta \le x \le b$$

且有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,g(x) &= \int_\theta^b g(x)p_{(1)}(x)dx \\
&= \int_\theta^b -g(x)d[1-F(x)]^n \\
&= -\,g(x)[1-F(x)]^n\big|_\theta^b + \int_\theta^b g'(x)[1-F(x)]^n dx \\
&= g(\theta) + \int_\theta^b \frac{g'(x)h(\theta)[1-F(x)]}{nf(x)}p_{(1)}(x)dx
\end{aligned}$$

其中 $F(x) = \int_\theta^x f(t)/h(\theta)dt$，故有 $h(\theta)F(x) = \int_\theta^x f(t)$。又由 $\int_\theta^b f(t)/h(\theta)dt = 1$ 可得 $h(\theta) = \int_\theta^b f(t)dt$，故有 $h(\theta)[1-F(x)] = h(x)$，代入 $\mathrm{E}\,g(x)$ 可得

$$\mathrm{E}\,g(x) = g(\theta) + \int_\theta^b \frac{g'(x)}{n}\frac{h(x)}{f(x)}p_{(1)}(x)dx$$

即

$$\int_\theta^b \left[g(x) - \frac{g'(x)}{n}\frac{h(x)}{f(x)}\right]p_{(1)}(x)dx = g(\theta)$$

又因为 $T(x) = x_{(1)}$ 为充分完备统计量，故 $g(\theta)$ 的唯一的 UMVUE 为

$$T(X) = g\left(X_{(1)}\right) - \frac{g'\left(X_{(1)}\right)}{n}\frac{h\left(X_{(1)}\right)}{f\left(X_{(1)}\right)}$$

同理可得，对于 $p(x;\theta) = f(x)/h(\theta)$，$a \le x \le \theta$ 的情形，$g(\theta)$ 的唯一的 UMVUE 为

$$T(X) = g\left(X_{(n)}\right) + \frac{g'\left(X_{(n)}\right)}{n}\frac{h\left(X_{(n)}\right)}{f\left(X_{(n)}\right)}$$

□

高等统计学作业七

王祎帆
2020000117

2020.11.19

1 2.18

（1）设 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，$\operatorname{Var}(T(x))<\infty$。证明：$T(x)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE 的充要条件是，对任一 0 的无偏估计 $\varphi(x)$，若 $\operatorname{Var}(\varphi(x))<\infty$，则 $Cov(\varphi(x),T(x))=0$；

Proof. **充分性：**已知对任一 0 的无偏估计 $\varphi(x)$，若 $\operatorname{Var}(\varphi(x))<\infty$，则 $\operatorname{Cov}(\varphi(X),T(X))=0$，则有对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T(x)+\lambda\varphi(x)) &= \operatorname{Var}(T(x))+\operatorname{Var}(\lambda\varphi(x))+2\lambda Cov(\varphi(X),T(X))\\ &= \operatorname{Var}(T(x))+\lambda^2\operatorname{Var}(\varphi(x))\geq\operatorname{Var}(T(x))\end{aligned}$$

故 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 方差最小的无偏估计，即 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计。

必要性：已知 $T(x)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，则对任一 0 的无偏估计 $\varphi(x)$ 以及 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\operatorname{Var}(T(x)+\lambda\varphi(x))\geq\operatorname{Var}(T(x))$$

可得

$$\lambda^2\operatorname{Var}(\varphi(x))+2\lambda Cov(\varphi(X),T(X))\geq 0$$

可看作 λ 的二次函数，故有

$$\Delta=4Cov(\varphi(X),T(X))^2\leq 0$$

可得 $Cov(\varphi(X),T(X))^2\leq 0$，故有 $Cov(\varphi(X),T(X))^2=0$。

综上，充分必要性得证。 □

（2）试用（1）的结论证明，若 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则 $\bar{X}$ 和 s_{n-1}^2 分别是 μ 和 σ^2 的 UMVUE。（提示：对 0 的任一无偏估计 T_0，对 $\mathrm{E}\, T_0 = 0$ 的运算式求导。）

Proof. 首先证无偏性与方差有限性：

$$\mathrm{E}\,\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\, X_i}{n} = \mu$$

$$\mathrm{Var}\,\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\, X_i}{n} = \frac{\sigma^2}{n} < \infty$$

由于 $(n-1)s_{n-1}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$，故

$$\mathrm{E}\, s_{n-1}^2 = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}\, s_{n-1}^2 = \frac{2\sigma^2}{n-1} < \infty$$

无偏性即方差有限性得证。

下证 $\bar{X}$ 和 s_{n-1}^2 分别是 μ 和 σ^2 的 UMVUE：

对于 0 的任一无偏估计 T_0，若满足 $\mathrm{Var}(T_0) < \infty$ 有

$$\mathrm{E}\, T_0 = \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

对 μ 求导可得

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\, \mathrm{E}\, T_0}{\partial \mu} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{n(\bar{x}-\mu)}{\sigma^2} dx \\
&= \frac{n}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \bar{x} f(x) dx - \frac{n\mu}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} T_0 f(x) dx \\
&= \frac{n}{\sigma^2}\, \mathrm{E}\,(T_0 \bar{x})
\end{aligned}$$

即 $\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}\right)=0$。另外对 σ^2 求导可得

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\,\mathrm{E}\,T_0}{\partial\sigma^2}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}T_0\left(-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\cdot\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_{-\infty}^{\infty}T_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}dx\\
&=-\frac{n}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}T_0f(x)dx+\frac{1}{2\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right]f(x)dx\\
&=-\frac{n}{2\sigma^2}\,\mathrm{E}\,T_0+\frac{n-1}{2\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}T_0s_{n-1}^2f(x)dx+\frac{n}{2\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\left(\bar{x}^2-2\bar{x}\mu+\mu^2\right)f(x)dx\\
&=\frac{n-1}{2\sigma^4}\,\mathrm{E}\left(T_0s_{n-1}^2\right)+\frac{n}{2\sigma^4}\,\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}^2\right)-\frac{n\mu}{\sigma^4}\,\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}\right)+\frac{n\mu^2}{2\sigma^4}\,\mathrm{E}\,T_0
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}^2\right)$ 可由 $\mathrm{E}\,T_0$ 对 μ 求二阶导得：

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2\,\mathrm{E}\,T_0}{\partial\mu^2}\\
&=\frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\bar{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\\
&=\frac{n}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\bar{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}dx\\
&=\frac{n^2}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\bar{x}^2f(x)dx-\frac{n^2\mu}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}T_0\bar{x}f(x)dx\\
&=\frac{n^2}{\sigma^4}\,\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}^2\right)
\end{aligned}
$$

即 $\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}^2\right)=0$，代入 $\mathrm{E}\,T_0$ 对 σ^2 求导结果可得

$$
0=\frac{\partial\,\mathrm{E}\,T_0}{\partial\sigma^2}=\frac{n-1}{2\sigma^4}\,\mathrm{E}\left(T_0s_{n-1}^2\right)
$$

即 $\mathrm{E}\left(T_0s_{n-1}^2\right)=0$，则有

$$
\mathrm{Cov}\left(T_0,\bar{x}\right)=\mathrm{E}\left(T_0\bar{x}\right)-\mathrm{E}\,T_0\cdot\mathrm{E}\,\bar{x}=0
$$

$$
\mathrm{Cov}\left(T_0,s_{n-1}^2\right)=\mathrm{E}\left(T_0s_{n-1}^2\right)-\mathrm{E}\,T_0\cdot\mathrm{E}\,s_{n-1}^2=0
$$

则由（1）中结论可得，$\bar{X}$ 和 s_{n-1}^2 分别是 μ 和 σ^2 的 UMVUE，得证。 $\square$

2 2.19

设 X 的概率分布为

$$P_\theta(X=k)=\begin{cases}\theta & k=-1\\ \theta^k(1-\theta)^2 & k=0,1,\cdots\end{cases}\quad \theta\in(0,1)$$

（1）找出 0 的无偏估计类 U_0；

解：首先，由

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,X&=-\theta+\sum_{k=0}^{\infty}k\theta^k(1-\theta)^2=-\theta+(1-\theta)^2\sum_{k=0}^{\infty}k\theta^k\\&=-\theta+(1-\theta)^2\frac{\theta}{(1-\theta)^2}=0\end{aligned}$$

可得 $X\in U_0$，即 0 的无偏估计类 U_0 非空集。进一步，对于任意 $\varphi(x)\in U_0$，有

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{E}\,\varphi(x)\\&=\varphi(-1)\theta+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)\theta^k(1-\theta)^2\\&=\varphi(0)+[\varphi(-1)-2\varphi(0)+\varphi(1)]\theta+[\varphi(0)-2\varphi(1)+\varphi(2)]\theta^2+\cdots\\&=\varphi(0)+\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi(k-1)-2\varphi(k)+\varphi(k+1)]\theta^{k+1}\end{aligned}$$

故由 θ 任意性可得

$$\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \varphi(x-1)-2\varphi(x)+\varphi(x+1)=0\end{cases}$$

可以解得通式为 $\varphi(x)=x\varphi((1)$。

故 0 的无偏估计类为 $U_0=\{\varphi(x)\mid\varphi(x)=x\varphi(1),\varphi(1)\in\mathbb{R}\}$。

（2）证明 θ 有无偏估计但其 UMVUE 不存在。这表明，该分布族没有完备充分统计量；

Proof. **首先证明 θ 有无偏估计：**

对于示性函数 $I(x=-1)$，可得 $\mathrm{E}\,[I(x=-1)]=\theta$，即 $I(x=-1)$ 为 θ 的无偏估计。

下证 θ 的 UMVUE 不存在：

反证法：假设 θ 有 UMVUE，设其为 $h(x)$，则由 2.18 结论（1）可得，对任意 $\varphi(x)\in U_0$，且 $\mathrm{Var}(\varphi(x))<\infty$，有 $\mathrm{Cov}\,(h(x),\varphi(x))=0$，即 $\mathrm{E}\,(h(x)\varphi(x))=0$

可得 $h(x)\varphi(x) \in U_0$，由（1）可得，$h(x)\varphi(x) = xh(1)\varphi(1)$，又因为 $\varphi(x) = x\varphi(1)$，可得 $h(x) = h(1)$，即 $h(x)$ 是常数，与其为 θ 的 UMVUE 矛盾，故 θ 没有 UMVUE，得证。 □

（3）令 $g(\theta) = (1-\theta)^2$，证明 $g(\theta)$ 的 UMVUE 存在。

Proof. 设对于单样本来说，$T_1(x) = I(x_1 = 0)$，则可得 $\mathrm{E}\, T_1(x) = (1-\theta)^2$，即 $T_1(x)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计。

又对任意 $\varphi(x) \in U_0$，且 $\mathrm{Var}(\varphi(x)) < \infty$，有

$$E[T_1(x)\varphi(x)] = \varphi(0)(1-\theta)^2 + \sum_{k\neq 0} 0\varphi(k)P(x=k) = \varphi(0)(1-\theta)^2 = 0\varphi(1)(1-\theta)^2 = 0$$

即 $\mathrm{Cov}[T_1(x)\varphi(x)] = 0$，单样本下 $T_1(x)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE。同理，对于样本量为 n 的情，$T(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I(x_i = 0)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE，得证。 □

注：对于样本量为 n 的情况，仍可得到 $T_1(x)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计且 $\mathrm{Cov}[T_1(x)\varphi(x)] = 0$，是否也可说明 $T_1(x)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE？但显然 $T_1(x)$ 的方差要大于 $T(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I(x_i = 0)$？
解答：设 X_1, X_2 独立同分布，取 $\varphi(X_1, X_2) = T_1(X_1) - T_2(X_2)$，则 φ 是 0 的无偏估计。

$$Cov(T_1(X_1), \varphi(X_1, X_2)) = E[T_1(X_1)\varphi(X_1, X_2)] = Var[T_1(X_1)] \geq 0$$

3 2.23

（1）设 $T(X)$ 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE，$U(X) \in U_g$，定义 $V(X)$ 满足 $aU + (1-a)V = T$，a 是常数，$0 < a < 1$。证明

$$\mathrm{Var}(V) - \mathrm{Var}(U) = \begin{cases} < 0, & a < \frac{1}{2} \\ = 0, & a = \frac{1}{2} \\ > 0, & a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Proof. 由题意可得

$$\mathrm{E}\, V(X) = \frac{\mathrm{E}\, T(X) - a\,\mathrm{E}\, U(X)}{1-a} = g(\theta)$$

故 $V(X) \in U_g$。

又因为 $U(X)\in U_g$，故 $U(X)-T(X)\in U_0$，由 2.18（1）可得，$\operatorname{Cov}(U-T,T)=0$，故

$$\operatorname{Cov}(U,T)=\operatorname{Cov}(U-T,T)+\operatorname{Var}(T)=\operatorname{Var}(T)$$

不妨设 $\operatorname{Var}(U)=k_1\operatorname{Var}(T)$，$\operatorname{Var}(V)=k_2\operatorname{Var}(T)$，其中 $k_1,k_2\geq 1$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(U,V)&=\operatorname{Cov}\left(U,\frac{T-aU}{1-a}\right)\\&=\frac{\operatorname{Cov}(U,T)-a\operatorname{Var}(U)}{1-a}\\&=\frac{\operatorname{Var}(T)-ak_1\operatorname{Var}(T)}{1-a}\\&=\frac{1-ak_1}{1-a}\operatorname{Var}(T)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T)&=\operatorname{Var}(aU+(1-a)V)\\&=a^2k_1\operatorname{Var}(T)+2a(1-a)\frac{1-ak_1}{1-a}\operatorname{Var}(T)+(1-a)^2k_2\operatorname{Var}(T)\end{aligned}$$

即

$$1=a^2k_1+2a\left(1-ak_1\right)+\left(1-a^2\right)k_2$$

可得

$$k_1=\frac{(1-a)^2k_2-(1-2a)}{a^2}$$

即

$$k_2-k_1=\frac{2a-1}{a^2}\left(k_2-1\right)$$

所以有

$$\operatorname{Var}(V)-\operatorname{Var}(U)=\left(k_2-k_1\right)\operatorname{Var}(T)=\begin{cases}<0, & a<\frac{1}{2}\\=0, & a=\frac{1}{2}\\>0, & a>\frac{1}{2}\end{cases}$$

得证。 $\square$

（2）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(0,\theta)$ 的样本，定义

$$V=\frac{(n-2)\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2+\left(n\bar{X}\right)^2}{n(n-1)}$$

$$U=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}$$

证明：U 与 V 有相同的均值和方差。

Proof. 由题意可得

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\theta} \sim \chi^2(n), \quad \bar{X} \sim \frac{\theta}{n}\chi^2(1), \quad \frac{n-1}{\theta}U \sim \chi^2(n-1)$$

故

$$\mathrm{E}(V) = \frac{(n-2)\theta n + n^2\frac{\theta}{n}}{n(n-1)} = \theta$$

$$\mathrm{E}(U) = \frac{\theta}{n-1}(n-1) = \theta = \mathrm{E}(V)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U) &= \left(\frac{\theta}{n-1}\right)^2 2(n-1)\\ &= \frac{2\theta^2}{n-1}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}\right)\\ &= \frac{\theta^2 2n - 2n\,\mathrm{Cov}\left(\sum X_i^2, \bar{X}^2\right) + n^2\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 2}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2, \bar{X}^2\right) = \frac{2\theta^2}{n}$$

故有

$$\mathrm{Var}(V) = \frac{(n-2)^2\theta^2 2n + 2n^2\,\mathrm{Cov}\left(\sum X_1^2, \bar{X}^2\right) + n^4\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 2}{n^2(n-1)^2} = \frac{2\theta^2}{n-1} = \mathrm{Var}(U)$$

所以 U 与 V 有相同的均值和方差，得证。 □

4 2.24

对 Poisson 分布 $P(\theta)$，

（1）求 $I(\theta)$；

解：容易得到 Poisson 分布族 $\{P(\theta), \theta > 0\}$ 为 Cramer-Rao 正则族，其 Fisher 信息存在，故

$$S_\theta(x) = \frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - 1$$

可得

$$I(\theta)=\operatorname{Var}_\theta\left(S_\theta(x)\right)==\operatorname{Var}_\theta\left(\frac{x}{\theta}\right)=\frac{1}{\theta}$$

（2）求 $I\left(\frac{1}{\theta}\right)$；

解：不妨令 $\lambda=1/\theta$，则

$$p_\lambda(x)=\frac{1}{x!\lambda^x}e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

故

$$S_\lambda(x)=\frac{\partial\log p_\lambda(x)}{\partial\lambda}=-\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}$$

可得

$$I(\lambda)=\operatorname{Var}_\lambda\left(S_\lambda(x)\right)=\operatorname{Var}_\lambda\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^3}$$

所以

$$I\left(\frac{1}{\theta}\right)=\theta^3$$

（3）找一个函数 $g(\cdot)$，使 $g(\theta)$ 的 Fisher 信息与 θ 无关。

解：设 $\varphi=\theta^k, k\neq 0$，则

$$p_\varphi(x)=\frac{\varphi^{\frac{x}{k}}}{x!}e^{-\varphi^{\frac{1}{k}}}$$

故

$$S_\varphi(x)=\frac{\partial\log p_\varphi(x)}{\partial\varphi}=-\frac{x-\varphi^{\frac{1}{k}}}{\varphi k}$$

可得

$$I(\varphi)=\operatorname{Var}_\varphi\left(S_\varphi(x)\right)=\operatorname{Var}_\varphi\left(\frac{x}{\varphi k}\right)=\frac{\varphi^{\frac{1}{k}-2}}{k^2}$$

即

$$I\left(\theta^k\right)=\frac{\theta^{1-2k}}{k^2}$$

所以当 $k=1/2$ 时，$g(\theta)=\varphi=\theta^{1/2}$ 的 Fisher 信息为

$$I\left(g(\theta)\right)=4$$

与 θ 无关。

5 2.25

设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布。X_1 的取值有四种可能，其概率分别为 $p_1 = 1-\theta$，$p_2 = \theta - \theta^2$，$p_3 = \theta^2 - \theta^3$，$p_4 = \theta^3$，以 N_j 记 $X_1, \cdots, X_n$ 中出现各种可能结果的次数，$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = n$。

（1）确定 a_1，a_2，a_3，a_4，使 $T = \sum\limits_{j=1}^{4} a_j N_j$ 为 θ 的无偏估计；

解：由题可得，$(N_1, N_2, N_3, N_4) \sim M(n; p_1, p_2, p_3, p_4)$ 且 $N_i \sim B(n, p_i), i = 1, 2, 3, 4$，故

$$
\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{E}T \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{4} a_j N_j\right) \\
&= n \sum_{j=1}^{4} a_j p_j \\
&= n\left[a_1 + \theta(a_2 - a_1) + \theta^2(a_3 - a_2) + \theta^3(a_4 - a_3)\right]
\end{aligned}
$$

故有 $a_1 = 0$，$a_2 - a_1 = 1/n$，$a_3 = a_2$，$a_4 = a_3$，即 $a_1 = 0$，$a_2 = a_3 = a_4 = 1/n$。

（2）将 $\mathrm{Var}(T)$ 与 θ 的无偏估计方差的 C-R 下界比较。

解：由于 $N_i \sim B(n, p_i), i = 1, 2, 3, 4$，故

$$
\mathrm{Var}(N_i) = np_i(1-p_i), \quad i = 1, 2, 3, 4
$$

另外

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(N_i, N_j) &= E(N_i N_j) - E(N_i)E(N_j) \\
&= E\left[\left(\sum_{s=1}^{n} I(x_s = i)\right)\left(\sum_{t=1}^{n} I(x_t = j)\right)\right] - n^2 p_i p_j \\
&= \sum_{s,t} E\left[I(x_s = i) I(x_t = j)\right] - n^2 p_i p_j \\
&= \sum_{s \neq t} E\left[I(x_s = i) I(x_t = j)\right] - n^2 p_i p_j \\
&= \sum_{s \neq t} p_i p_j - n^2 p_i p_j \\
&= n(n-1) p_i p_j - n^2 p_i p_j \\
&= -np_i p_j. \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \text{且} i \neq j
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(T) &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(N_2+N_3+N_4) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=2}^{4}\operatorname{Var}(N_i)+2\operatorname{Cov}(N_2,N_3)+2\operatorname{Cov}(N_3,N_4)+2\operatorname{Cov}(N_2,N_4)\right] \\
&= \frac{n}{n^2}\left[p_2(1-p_2)+p_3(1-p_3)+p_4(1-p_4)-2p_2p_3-2p_3p_4-2p_2p_4\right] \\
&= \frac{\theta(1-\theta)}{n}
\end{aligned}$$

另外，θ 的 Fisher 信息为

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= -\operatorname{E}_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln p_\theta(x)}{\partial\theta^2}\right] \\
&= -\operatorname{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\ln\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}+n_1\ln p_1+n_2\ln p_2+n_3\ln p_3+n_4\ln p_4)\right] \\
&= -\operatorname{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(-\frac{n_1}{p_1}+\frac{n_2}{p_2}(1-2\theta)+\frac{n_3}{p_3}(2\theta-3\theta^2)+\frac{n_4}{p_4}3\theta^2)\right] \\
&= -\operatorname{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-n_1\theta+n_2(1-2\theta)+n_3(2-3\theta)+3n_4(1-\theta)}{(1-\theta)\theta}\right)\right] \\
&= -\operatorname{E}_\theta\left[\frac{\theta^2\left(-n_1-2n_2-3n_3-3n_4\right)-(1-2\theta)\left(n_2+2n_3+3n_4\right)}{(1-\theta)^2\theta^2}\right] \\
&= n\left[\frac{\theta^2}{(1-\theta)^2\theta^2}\left(p_1+2p_2+3p_3+3p_4\right)+\frac{1-2\theta}{(1-\theta)^2\theta^2}\left(p_2+2p_3+3p_4\right)\right] \\
&= \frac{n}{(1-\theta)^2\theta^2}\left[\theta^2(1+\theta+\theta^2)+(1-2\theta)(\theta+\theta^2+\theta^3)\right] \\
&= \frac{n(1+\theta+\theta^2)}{(1-\theta)\theta}
\end{aligned}$$

故 C-R 下界

$$\frac{(\partial\theta/\partial\theta)^2}{I(\theta)} = \frac{(1-\theta)\theta}{n(1+\theta+\theta^2)} < \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \operatorname{Var}(T)$$

即 $\operatorname{Var}(T)$ 大于 θ 无偏估计方差的的 C-R 下界。

6 2.31

设 (X_i, Y_i)**，**$i = 1, \cdots, n$ **为独立同分布变量，**$Pr(X_1 > 0) = 1$**，**$\mathrm{E}\, X_1^2 < \infty$**，**$\mathrm{E}\, Y_1^2 < \infty$**。定义** $\theta = \mathrm{E}\, Y_1 / \mathrm{E}\, X_1$**，证明**

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \theta\right) \xrightarrow{L} N(0, V)$$

并求 V**。**

Proof. 根据题意，由中心极限定理可得

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mathrm{E}\, X_1\right) \xrightarrow{L} N\left(0, \mathrm{Var}(X_1)\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}}{\mathrm{E}\, X_1} - \theta\right) \xrightarrow{L} N\left(0, \mathrm{Var}\left(\frac{Y_1}{\mathrm{E}\, X_1}\right)\right)$$

设 $\boldsymbol{T}_n = (T_1, T_2) = (\bar{X}, \bar{Y} / \mathrm{E}\, X_1)$，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = (\mathrm{E}\, X_1, \theta)$，则

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{L} N(0, \boldsymbol{\Sigma})$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, Y_1) / \mathrm{E}\, X_1 \\ \mathrm{Cov}(X_1, Y_1) / \mathrm{E}\, X_1 & \mathrm{Var}(Y_1) / (\mathrm{E}\, X_1)^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{g}(z_1, z_2) = \mathrm{E}\, X_1 z_2 / z_1$，则根据引理 2.11 可得

$$\sqrt{n}\left[\boldsymbol{g}\left(\bar{X}, \frac{\bar{Y}}{\mathrm{E}\, X_1}\right) - \boldsymbol{g}(\mathrm{E}\, X_1, \theta)\right] = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \theta\right) \xrightarrow{L} N(0, V)$$

其中

$$V = \sum\sum\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \theta_i}\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \theta_j}\sigma_{ij}\right) = \frac{\theta^2\, \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y_1) - 2\theta\, \mathrm{Cov}(X_1, Y_1)}{(\mathrm{E}\, X_1)^2}$$

□

高等统计学作业八

王祎帆

2020000117

2020.11.26

1 2.47

设 $X_i \sim N(\mu, \omega_i \sigma^2), i = 1, \cdots, n$，$\omega_i$ 已知，诸 X_i 独立。

（1）求 μ 的 BLUE $\hat{\mu}$；

解：设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$，则由题意可得

$$\boldsymbol{X} \sim N(\mu \boldsymbol{I}_n, \sigma^2 \boldsymbol{G})$$

其中 $\boldsymbol{I}_n = (1, 1, \cdots, 1)^T$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{pmatrix}$$

从而得到线性模型 $(\boldsymbol{X}, \mu \boldsymbol{I}_n, \sigma^2 \boldsymbol{G})$。因 $\boldsymbol{G} > 0$，故存在 n 阶非奇异对称阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^2$。令 $\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}$，$\tilde{\boldsymbol{I}}_n = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_n$，则有

$$\mathrm{E}\,\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\mathrm{E}\,\boldsymbol{X} = \mu \tilde{\boldsymbol{I}}_n$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{B}^{-1}\,\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$$

故 $(\tilde{\boldsymbol{X}}, \mu \tilde{\boldsymbol{I}}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ 为 Gauss-Markov 模型，由该模型得到的 LSE 为

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{LSE} &= \left(\tilde{\boldsymbol{I}}_n^T \tilde{\boldsymbol{I}}_n\right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{I}}_n^T \tilde{\boldsymbol{X}} = \left(\boldsymbol{I}_n^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_n\right)^{-1} \boldsymbol{I}_n^T \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{X} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n w_i^{-1}\right)^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^n w_j^{-1} x_j\right] \end{aligned}$$

由定理 2.16 可得，μ 的 BLUE $\hat{\mu} = \hat{\mu}_{LSE}$。

（2）问 $\hat{\mu}$ 是否是 μ 的有效无偏估计；

Proof. 由上一问得，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\hat{\mu}) &= \operatorname{Var}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}\right)^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} w_j^{-1} x_j\right]\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}\right)^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}}
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
S_\mu(\boldsymbol{X}) &= \frac{\partial \ln p\left(x_1, \cdots, x_n\right)}{\partial \mu} \\
&= \frac{\partial \prod_{i=1}^{n} p\left(x_i\right)}{\partial \mu} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln p\left(x_i\right)}{\partial \mu} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{w_i \sigma^2}
\end{aligned}$$

故 μ 的 Fisher 信息量为

$$I(\mu) = \operatorname{Var}_\mu\left(S_\mu(\boldsymbol{X})\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i \sigma^2}$$

即

$$I(\mu)^{-1} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}} = \operatorname{Var}(\hat{\mu})$$

所以 $\hat{\mu}$ 是 μ 的有效无偏估计，得证。 □

（3）设 σ^2 已知，求位移变换下 μ 的最优同变估计。

解：位移变换下 μ 的最优同变估计为

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}^* &= \frac{\int \mu f(x_1 - \mu, \cdots, x_n - \mu) d\mu}{\int f(x_1 - \mu, \cdots, x_n - \mu) d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\omega_i \sigma^2}\right\} d\mu}{\int \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\omega_i \sigma^2}\right\} d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i}\right)\mu^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\omega_i}\right)\mu\right]\right\} d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i}\right)\mu^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\omega_i}\right)\mu\right]\right\} d\mu}
\end{aligned}$$

不妨设 $a=\sum_{i=1}^n 1/\omega_i, b=\sum_{i=1}^n x_i/\omega_i$，则

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}^* &= \frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[a\mu^2-2b\mu\right]\right\} d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[a\mu^2-2b\mu\right]\right\} d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} a\left(\mu-\frac{b}{a}\right)^2\right\} d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} a\left(\mu-\frac{b}{a}\right)^2\right\} d\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{a}\int \sqrt{a}\mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{a}\mu-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} d\sqrt{a}\mu}{\frac{1}{\sqrt{a}}\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{a}\mu-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} d\sqrt{a}\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{a}\frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = b/a \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i/\omega_i}{\sum_{i=1}^n 1/\omega_i}
\end{aligned}
$$

2 2.48

设 $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), i=1,\ldots,m, Y_i \sim N\left(c\mu, \sigma^2\right), i=1,\ldots,n$，合样本独立，$c$ 已知。

（1）求 μ 的 BLUE $\hat{\mu}$；

解：设 $\boldsymbol{Y}=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m)^T$，则 $\mathrm{E}\,\boldsymbol{Y}=(\mu\boldsymbol{I}_m, c\mu\boldsymbol{I}_n)^T$，$\operatorname{Var}(\boldsymbol{Y})=\sigma^2\boldsymbol{I}_{m+n}$。又设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}_m, c\boldsymbol{I}_n)^T$，则有 $\mathrm{E}\,\boldsymbol{Y}=\mu\boldsymbol{X}$。从而得到线性模型 $(\boldsymbol{Y}, \mu\boldsymbol{X}, \sigma^2\boldsymbol{I}_{m+n})$，该模型为 Gauss-Markov 模型，由该模型得到的 LSE 为

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_{LSE} &= \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} \\
&= \left(\left(I_m, cI_n\right)\left(I_m, cI_n\right)^T\right)^{-1}\left(I_m, cI_n\right)\left(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n\right)^T \\
&= \left(m+c^2n\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^m X_i+\sum_{i=1}^n cY_i\right)
\end{aligned}
$$

由定理 2.16 可得，μ 的 BLUE $\hat{\mu}=\hat{\mu}_{LSE}$。

（2）$\hat{\mu}$ 是否是 μ 的有效无偏估计；

Proof. 由上一问得，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\hat{\mu}) &= \left(m+c^2n\right)^{-2}\left(\sum_{i=1}^m \operatorname{Var}\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^n c^2\operatorname{Var}\left(Y_i\right)\right) \\
&= \frac{m\sigma^2+nc^2\sigma^2}{\left(m+c^2n\right)^2}=\frac{\sigma^2}{m+c^2n}
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
S_\mu(\boldsymbol{Y}) &= \frac{\partial \ln \left\{\left[\prod_{i=1}^m p\left(x_i\right)\right]\left[\prod_{i=1}^n p\left(y_i\right)\right]\right\}}{\partial \mu} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{x_i-\mu}{\sigma^2}+\sum_{i=1}^n \frac{c y_i-c^2 \mu}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

故 μ 的 Fisher 信息量为

$$
I(\mu)=\operatorname{Var}_\mu\left(S_\mu(\boldsymbol{Y})\right)=\frac{m+c^2 n}{\sigma^2}
$$

即

$$
I(\mu)^{-1}=\frac{\sigma^2}{m+c^2 n}=\operatorname{Var}(\hat{\mu})
$$

所以 $\hat{\mu}$ 是 μ 的有效无偏估计，得证。 □

（3）设 σ^2 已知，求位移变换下 μ 的最优同变估计。

解：位移变换下 μ 的最优同变估计为

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}^* &= \frac{\int \mu f(x_1-\mu, \cdots, x_m-\mu, y_1-\mu, \cdots, y_n-\mu) d\mu}{\int f(x_1-\mu, \cdots, x_m-\mu, y_1-\mu, \cdots, y_n-\mu) d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^m\left(x_i-\mu\right)^2+\sum_{j=1}^n\left(y_j-c\mu\right)^2\right]\right\} d\mu}{\int \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^m\left(x_i-\mu\right)^2+\sum_{j=1}^n\left(y_j-c\mu\right)^2\right]\right\} d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(m+c^2 n\right) \mu^2-2\mu\left(\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j\right)\right]\right\} d\mu}{\int \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(m+c^2 n\right) \mu^2-2\mu\left(\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j\right)\right]\right\} d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(m+c^2 n\right)\left[\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2 n}\right)^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2 n}\right)^2\right]\right\} d\mu}{\int \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(m+c^2 n\right)\left[\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2 n}\right)^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2 n}\right)^2\right]\right\} d\mu} \\
&= \frac{\int \mu \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{m+c^2 n}\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2 n}}\right)^2\right\} d\mu}{\int \exp \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{m+c^2 n}\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2 n}}\right)^2\right\} d\mu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{m+c^2 n}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2 n}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^m x_i+c \sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2 n}
\end{aligned}
$$

3 2.53

问什么样的密度函数 $p(x)$ 使得与 Winsor 化均值相对应的 M 估计是位置参数的极大似然估计？

解：设 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立同分布变量，$X_1 \sim p(x;\theta) = p(x-\theta)$，其中 θ 为位置参数，则 Winsor 化均值对应的 M 估计中的非负函数为：

$$\rho(x-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-\theta)^2, & |x-\theta| \le k \\ k|x-\theta| - \frac{1}{2}k^2, & |x-\theta| > k \end{cases}$$

以及

$$\psi(x-\theta) = \frac{\partial \rho(x-\theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} -(x-\theta), & |x-\theta| \le k \\ k \cdot \operatorname{sign}(x-\theta), & |x-\theta| > k \end{cases}$$

得到 $\hat{\theta}_W$ 为下列方程的解：

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i - \theta) = 0$$

另外，θ 的极大似然估计的似然函数为

$$L(\hat{\theta}; x) = \sup_{\theta} L(\theta; x) = \sup_{\theta} \prod_{i=1}^{n} p(x_i - \theta)$$

可得 $\hat{\theta}_{MLE}$ 即为下列似然方程的解

$$\frac{\partial \ln L(\theta; x)}{\partial \theta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{p'(x_i-\theta)}{p(x_i-\theta)} = 0$$

故若想得到所求的密度函数 $p(x)$，使得与 Winsor 化均值相对应的 M 估计是位置参数的极大似然估计，仅需令

$$-\frac{p'(x_i-\theta)}{p(x_i-\theta)} = \psi(x_i-\theta) = \frac{\partial \rho(x_i-\theta)}{\partial \theta}$$

可得

$$p(x) = \exp\left\{\frac{k - \rho(x-\theta)}{\alpha}\right\}, (\alpha > 0)$$

其中参数 k 和 α 需要满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

4 3.1

电话交换台单位时间内接到的呼唤次数服从 Possion 分布 $P(\lambda), \lambda > 0$。λ 为单位时间内接到的平均呼唤次数。设 $x = (x_1, \cdots, x_{10})$ 是该电话交换台的 10 次记录。考虑假设检验问题：原假设 $H_0 : \lambda \geq 1$ 对备择假设 $H_1 : \lambda < 1$。取水平为 $\alpha = 0.05$。

解: 由题可得,存在仅依赖于充分统计量 $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 的检验函数,对于原假设 $H_0 : \lambda \geq 1$ 和备择假设 $H_1 : \lambda < 1$，其拒绝域为

$$W = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq c \right\}$$

其势函数为

$$g(\lambda) = P_\lambda(x \in W) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\lambda)^k e^{-n\lambda}}{k!}, \quad \lambda \geq 1$$

由于 $g(\lambda)$ 为 λ 的递减函数，故 $\lambda = 1$ 时 $g(\lambda)$ 最大，此时只需要找到最大的 c 使得势函数 $g(1) \leq \alpha$ 成立，即

$$\sum_{k=0}^{c} \frac{n^k e^{-n}}{k!} \leq \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{c+1} \frac{n^k e^{-n}}{k!} > \alpha$$

本题 $n = 10$，$\alpha = 0.05$，可以解得 $c = 4$，即拒绝域为

$$W = \left\{ x : \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 4 \right\}$$

进一步为了构造出被“足量”地使用的检验，需要引进随机化检验函数

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) \geq c + 2 = 6 \\ r, & T(x) = c + 1 = 5 \\ 0, & \quad T(x) \leq c = 4 \end{cases}$$

使得

$$\mathrm{E}_\lambda \, \phi(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{10^k e^{-10}}{k!} + r \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = \alpha = 0.05$$

可解得 $r = 0.5484$，即若 $T(x) \leq 4$ 则接受原假设，$T(x) \geq 6$ 则拒绝原假设，$T(x) = 5$ 则先做一个成功概率为 0.5484 的伯努利试验，如果试验结果为成功则拒绝原假设，反之则接受原假设。

5 3.2

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自正态分布族 $\{N(0,\sigma^2):0<\sigma^2<\infty\}$ 的样本，考虑原假设 $H_0:\sigma^2=1$ 对备择假设 $H_1:\sigma^2=\sigma_1^2\,(\sigma_1^2>1)$ 的检验问题。取水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$。试求其 MPT。

解：由题可得

$$p\left(x;\sigma^2\right)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

构造似然检验比函数

$$\lambda(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;\sigma_1^2\right)}{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;1^2\right)}=\frac{1}{\sigma_1^n}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\right]$$

可得 $\lambda(x)$ 是充分统计量为 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 的函数，故由 N-P 基本引理，MPT 的拒绝域的形式为

$$W=\{x:\lambda(x)>k\}=\left\{x:T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2>c\right\}$$

当 $H_0:\sigma^2=1$ 成立时，可得 $T(x)\sim\chi^2(n)$，所以对给定的 $\alpha\in(0,1)$，令 $c=\chi^2_{1-\alpha}(n)$ 即可，从而可得 MPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & T>\chi^2_{1-\alpha}(n)\\ 0, & T\le\chi^2_{1-\alpha}(n)\end{cases}$$

6 3.3

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自均匀分布族 $\{R(0,\theta):\theta>0\}$ 的样本，考虑原假设 $H_0:\theta=1$ 对备择假设 $H_1:\theta=\theta_1(\theta_1<1)$ 的检验问题。取水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$。试求其 MPT。

解：由题可得

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta^{-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

构造似然检验比函数

$$\lambda(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;\theta_1\right)}{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;1\right)}=\begin{cases}\theta_1^{-n}, & 0<x_{(n)}\le\theta_1\\ 0, & \theta_1<x_{(n)}<1\end{cases}$$

可得 $\lambda(x)$ 是充分统计量为 $T(x)=x_{(n)}$ 的函数，故由 N-P 基本引理，MPT 的拒绝域的形式为

$$W=\{x:\lambda(x)>k\}=\left\{x:T(x)=x_{(n)}>c\right\}$$

当 $H_0:\theta=1$ 成立时，可得 $T(x)$ 的密度函数为

$$p(t)=nt^{n-1},\quad 0<t<1$$

由

$$\int_0^c p(t)dt=\int_0^c nt^{n-1}dt=\alpha$$

可解得 $c=\sqrt[n]{\alpha}$，从而得到 MPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & 0<x_{(n)}\le\sqrt[n]{\alpha}\\ 0, & \sqrt[n]{\alpha}<x_{(n)}<1\end{cases}$$

7 3.4

（N-P 基本引理的补遗）设 P_{θ_0} 和 P_{θ_1} 是可测空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ 上的两个不同的概率测度，关于某个 σ 有限的测度 μ，有

$$p\left(x;\theta_0\right)=\frac{dP_{\theta_0}}{d\mu},p\left(x;\theta_1\right)=\frac{dP_{\theta_1}}{d\mu}$$

则在检验问题（3.9）中，如果 $\phi(x)$ 是水平为 α 的 MPT，则它不一定满足（3.10）式，但在 $\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(X)<1$ 的时候，它必满足（3.10）式。

注：检验问题（3.9）为：简单原假设 $H_0:\theta=\theta_0$ 对简单备择假设 $H_1:\theta=\theta_1(\theta_0\neq\theta_1)$；

（3.10）式为 $\mathrm{E}_{\theta_0}\phi(X)=\alpha$

Proof.（1）首先证明，在检验问题（3.9）中，如果 $\phi(x)$ 是水平为 α 的 MPT，则它不一定满足（3.10）式：

反例：构造一个区间，$\theta=\theta_1$ 时，统计量取值在此区间概率达到 1；$\theta=\theta_0$ 时，统计量取值在此区间概率不到 α 即可。

例子 1：不妨设

$$p(x;\theta_0)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & x\in(\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$p(x;\theta_1)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & x\in(\theta_1-\varepsilon,\theta_1+\varepsilon)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其中 $\varepsilon < |\theta_0 - \theta_1|/2$，同时令

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则有 $\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(x) = 1$，则对水平为任意 α 的检验 $\phi_1(x)$，都有

$$\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(x) \geq \mathrm{E}_{\theta_1}\phi_1(x)$$

即 $\phi(x)$ 是水平为 α 的 MPT，但此时 $\mathrm{E}_{\theta_0}\phi(X) = 0 \neq \alpha$，即 $\phi(x)$ 是水平为 α 的 MPT 仅能得到 $\mathrm{E}_{\theta_0}\phi(x) \leq \alpha$，并不能保证取等，即水平为 α 的 MPT 不一定满足（3.10）式。

（2）其次证明，在 $\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(X) < 1$ 的时候，它必满足（3.10）式：

当 $\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(X) < 1$ 时，若 $\phi(x)$ 不满足（3.10），则必有

$$\mathrm{E}_{\theta_0}\phi(x) < \alpha$$

适当扩大拒绝域则存在检验函数 $\phi^*(x)$，使得 $\mathrm{E}_{\theta_0}\phi^*(X) = \alpha$，此时由于拒绝域被扩大，则必有

$$\mathrm{E}_{\theta_1}\phi^*(X) > \mathrm{E}_{\theta_1}\phi(X)$$

与 $\phi(x)$ 是水平为 α 的 MPT 矛盾，故在 $\mathrm{E}_{\theta_1}\phi(X) < 1$ 的时候，$\phi(x)$ 必满足（3.10）式，得证。 □

高等统计学作业九

王祎帆

2020000117

2020.12.03

1 3.6

（定理 3.7 的推广）设概率密度族 $\{p(x;\theta):\theta\in\Theta\subseteq R\}$ 关于 X 有非降 MLR。试证明：

（1）若 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自该 MLR 分布族的一个样本，并且 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 关于每一个 x_i 都是非降的，则 $\mathrm{E}_\theta\,\psi(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个非降函数；

Proof. 由题可知，由于 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 关于每一个 x_i 都是非降的，故对于任意 $i=1,\cdots,n$，给定任意 $X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n$，由于 $\{p(x;\theta):\theta\in\Theta\subseteq R\}$ 关于 X_i 有非降 MLR。令

$$\psi_i(X_i)=\mathrm{E}_\theta(\psi(X_1,\cdots,X_n)\,|X_i)$$

则 $\psi_i(x_i)$ 关于 x_i 非降，根据定理 3.7 可得

$$\mathrm{E}_\theta\,\psi(X_1,\cdots,X_n)=\mathrm{E}_\theta\left[\mathrm{E}_\theta(\psi(X_1,\cdots,X_n)\,|X_i)\right]$$

是 θ 的一个非降函数。进一步，由 i 以及 $X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n$ 的任意性可得，对任意样本 $X_1,\cdots,X_n$，$\mathrm{E}_\theta\,\psi(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个非降函数，得证。 □

若按照书上定理 3.7 的证明方法，只能说明对于每个 X_i 都成立，但无法直接推到多维情况，即证明过程中的一步：

- **因为似然比 $\lambda(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{X}$ 的非降函数，故 $(x_{11},\cdots.x_{n1})>(x_{12},\cdots.x_{n2})$。**

不一定成立，因为可能存在此消彼长的情况。请问上述理解是否有误？无误的话此题应该如何证明呢？

解答：理解没错，不能得到逐点大于等于。例如 $\{p(x;\theta):\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}\}=\{N(\theta,1):\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}\}$，对 $X_1,\cdots,X_n$ 做置换可得到相同的似然比取值。

按书上定理证明过程：

Proof. 设 $\theta_1 < \theta_2$ 且 $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$，令

$$A = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) : p(x_1, \cdots, x_n; \theta_1) < p(x_1, \cdots, x_n; \theta_2)\}$$

$$B = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) : p(x_1, \cdots, x_n; \theta_1) > p(x_1, \cdots, x_n; \theta_2)\}$$

对任意的 $\boldsymbol{x}_1 \in A$，$\boldsymbol{x}_2 \in B$，有

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1) = \frac{p(\boldsymbol{x}; \theta_2)}{p(\boldsymbol{x}; \theta_1)} > 1, \lambda(\boldsymbol{x}_2) = \frac{p(\boldsymbol{x}; \theta_2)}{p(\boldsymbol{x}; \theta_1)} < 1$$

因为似然比 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 是 X 的非降函数，则由 $\lambda(\boldsymbol{x}_1) > \lambda(\boldsymbol{x}_2)$ 可得 $\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{x}_2$。由于 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 关于每一个 x_i 都是非降的，所以 $\psi(\boldsymbol{x}_1) \geq \psi(\boldsymbol{x}_2)$。令

$$a = \inf\{\psi(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}_1 \in A\}, b = \sup\{\psi(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}_2 \in B\}$$

则有 $a \geq b$。从而

$$\begin{aligned}
&E_{\theta_2}\psi(X_1, \cdots, X_n) - E_{\theta_1}\psi(X_1, \cdots, X_n) \\
&= \int \cdots \int \psi(\boldsymbol{x})[p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= a\int \cdots \int_A [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x}) + b\int \cdots \int_B [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

由于

$$\int \cdots \int_{A \cup B} [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x}) = 0$$

所以

$$\int \cdots \int_B [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x}) = -\int \cdots \int_A [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x})$$

从而

$$E_{\theta_2}\psi(X_1, \cdots, X_n) - E_{\theta_1}\psi(X_1, \cdots, X_n) \geq (a - b)\int \cdots \int_A [p(\boldsymbol{x}; \theta_2) - p(\boldsymbol{x}; \theta_1)]\, d\mu(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

即 $\mathrm{E}_\theta\, \psi(X_1, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个非降函数，得证。 $\square$

（2）若函数 $\psi(x)$ 具有性质：存在点 x_0 使得在 $x < x_0$ 时，$\psi(x) \leq 0$ 而在 $x > x_0$ 时，$\psi(x) \geq 0$，则 $\mathrm{E}_\theta \psi(X)$ 或者总是正的，或者总是负的，或者存在点 θ_0 使得在 $\theta < \theta_0$ 时，$\mathrm{E}_\theta \psi(X) \leq 0$，而在在 $\theta > \theta_0$ 时，$\mathrm{E}_\theta \psi(X) \geq 0$

Proof. 设 $\theta_1 < \theta_2$ 且 $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$，对于满足题意的 x_0，有

$$\lambda\left(x_0\right) = \frac{p\left(x_0; \theta_2\right)}{p\left(x_0; \theta_1\right)} = c \geq 0$$

因为似然比 $\lambda(x)$ 是 X 的非降函数，所以有

$$\begin{cases} p\left(x; \theta_2\right) \leq c \times p\left(x; \theta_1\right), & x < x_0 \\ p\left(x; \theta_2\right) \geq c \times p\left(x; \theta_1\right), & x > x_0 \end{cases}$$

又因为函数 $\psi(x)$ 具有性质：

$$\begin{cases} \psi(x) \leq 0, & x < x_0 \\ \psi(x) \geq 0, & x > x_0 \end{cases}$$

所以恒有 $\psi(x)\left[p\left(x; \theta_2\right) - c \times p\left(x; \theta_1\right)\right] \geq 0$ 故

$$\int \psi(x) p\left(x; \theta_2\right) d\mu(x) \geq c \int \psi(x) p\left(x; \theta_1\right) d\mu(x)$$

即 $\mathrm{E}_{\theta_2} \psi(X) \geq c\, \mathrm{E}_{\theta_1} \psi(X)$。当 $\mathrm{E}_{\theta_2} \psi(X) \leq 0$ 时，$\mathrm{E}_{\theta_1} \psi(X) \leq 0$；当 $\mathrm{E}_{\theta_1} \psi(X) \geq 0$ 时，$\mathrm{E}_{\theta_2} \psi(X) \geq 0$。

设 $\theta_0 = \inf\{\theta : \mathrm{E}_\theta \psi(X) \geq 0\}$，则若 $\theta_0 \in (-\infty, \infty)$，有

$$\begin{cases} \mathrm{E}_\theta \psi(X) \leq 0, & \theta < \theta_0 \\ \mathrm{E}_\theta \psi(X) \geq 0, & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

若 $\theta = -\infty$，则 $\mathrm{E}_\theta \psi(X)$ 总是正的；若 $\theta = \infty$，则 $\mathrm{E}_\theta \psi(X)$ 总是负的。得证。 □

2 3.8

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自带有位置参数的指数分布总体的样本。总体的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{-(x-\theta)\}, & x\geq\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

考虑如下的检验问题:原假设 $H_0:\theta=0$ 对备择假设 $H_1:\theta>0$。试构造水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 UMPT。

解：由题可得，样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\exp\left\{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\theta\right)\right\}, & x\geq\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\lambda(x)&=\frac{p(x_1,\cdots,x_n;\theta)}{p(x_1,\cdots,x_n;0)}\\&=\frac{\exp\left\{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\theta\right)\right\}}{\exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right\}}\\&=\begin{cases}\exp\{n\theta\}, & x_{(1)}\geq\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

可见似然比 $\lambda(x)$ 是 $x_{(1)}$ 的非降函数，即 $p(x;\theta)$ 关于 $x_{(1)}$ 具有非降 MLR，则由定理 3.8 的推论及指数分布的连续性可得，存在水平为 α 的 UMPT 的检验函数

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & ,x_{(1)}\geq c\\ 0 & ,x_{(1)}<c\end{cases}$$

又因为 $x_{(1)}$ 的密度函数为

$$p(x_{(1)})=\begin{cases}n\exp\{-n(x_{(1)}-\theta)\}, & x_{(1)}\geq c\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以由

$$\alpha=\mathrm{E}_0\,\phi(x)=p_0\left(x_{(1)}\geq c\right)=\int_c^{+\infty}n\exp\{-nx\}dx$$

得到 $c=-\dfrac{\ln\alpha}{n}$，故本题中水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x_{(1)}\geq-\dfrac{\ln\alpha}{n}\\ 0, & x_{(1)}<-\dfrac{\ln\alpha}{n}\end{cases}$$

3 3.9

设 $X=(X_1,\cdots,X_{10})$ 是来自 Pareto 分布总体的样本。Pareto 分布的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\theta}\cdot\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\beta+1}, & x\geq\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\beta=2$ 已知。考虑如下的检验问题：原假设 $H_0:\theta=1$ 对备择假设 $H_1:\theta>1$。试构造水平 $\alpha=0.1$ 的 UMPT。

解：由题可得，样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{\theta^n}\dfrac{\theta^{n\beta+n}}{\prod_{i=1}^n x_i^{\beta+1}}, & x\geq\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\lambda(x)&=\frac{p\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)}{p\left(x_1,\cdots,x_n;1\right)}\\&=\frac{\dfrac{\beta^n}{\theta^n}\dfrac{\theta^{n\beta+n}}{\prod_{i=1}^n x_i^{\beta+1}}}{\dfrac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n x_i^{\beta+1}}}\\&=\begin{cases}\theta^{n\beta}, & x_{(1)}\geq\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

可见似然比 $\lambda(x)$ 是 $x_{(1)}$ 的非降函数，即 $p(x;\theta)$ 关于 $x_{(1)}$ 具有非降 MLR，则由定理 3.8 的推论及 Pareto 分布的连续性可得，存在水平为 α 的 UMPT 的检验函数

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & ,x_{(1)}\geq c\\ 0 & ,x_{(1)}<c\end{cases}$$

又因为 $x_{(1)}$ 的密度函数为

$$p(x_{(1)})=\begin{cases}n\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{(n-1)\beta}\dfrac{\beta}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\beta+1}, & x_{(1)}\geq c\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以由

$$\alpha=\mathrm{E}_1\,\phi(x)=P_1\left(x_{(1)}\geq c\right)=\int_c^{+\infty}n\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)\beta}\beta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1}dx$$

得到 $c=(1/\alpha)^{(1/n\beta)}$，由题得 $\alpha=0.1$，$\beta=2$，故本题中水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x_{(1)}\geq 10^{1/20}\\ 0, & x_{(1)}<10^{1/20}\end{cases}$$

4 3.10

设 $T(x)$ 的密度函数如（3.26）所示，即为

$$p(t;\theta) = c(\theta) \cdot \exp\{\theta \cdot t\} \cdot h(t) \qquad (3.26)$$

试证明：$\mathrm{E}_\theta[T] = -\dfrac{c'(\theta)}{c(\theta)}$

Proof. 由题可得，$T(x)$ 的分布为 C-R 正则族，而且有

$$\ln p(t;\theta) = \ln c(\theta) + \theta t + \ln h(t)$$

即

$$\frac{\partial \ln p(t;\theta)}{\partial \theta} = \frac{c'(\theta)}{c(\theta)} + t$$

两边同取期望可得

$$\mathrm{E}_\theta \frac{\partial \ln p(t;\theta)}{\partial \theta} = \frac{c'(\theta)}{c(\theta)} + \mathrm{E}_\theta[T]$$

又由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\theta \frac{\partial \ln p(t;\theta)}{\partial \theta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln p(t;\theta)}{\partial \theta} p(t;\theta) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p(t;\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{p(t;\theta)} p(t;\theta) dt \\
&= \frac{\partial \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(t;\theta) dt}{\partial \theta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

故

$$0 = \frac{c'(\theta)}{c(\theta)} + \mathrm{E}_\theta[T]$$

即

$$\mathrm{E}_\theta[T] = -\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}$$

得证。 □

高等统计学作业十

王祎帆
2020000117

2020.12.10

1 3.13

设样本 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $-\infty<\mu<\infty$，$\sigma^2>0$。在 $\mu=0$ 时，试证明 ω 的分布与参数 σ^2 无关，且 ω 的分布关于原点对称，其中

$$\omega=\frac{\bar{X}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}}$$

Proof. **方法一：**

由题可得，在 $\mu=0$ 时，$\bar{X}\sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\sum\limits_{i=1}^n X_i^2\sim\sigma^2\chi(n)$。不妨设 $Z_1=\bar{X}/\sqrt{\sigma^2/n}\sim N(0,1)$，$Z_2=\sum\limits_{i=1}^n X_i^2/(\sigma^2)\sim\chi^2(n)$，可得 Z_1 和 Z_2 的分布与 σ^2 无关，故由

$$\omega=\frac{\bar{X}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}}=\frac{1}{n}\frac{\bar{X}/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2/(n\sigma^2)}}=\frac{1}{n}\frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/n}}$$

可得 ω 的分布与参数 σ^2 无关。另外，由于 X 的分布关于原点对称，则 $p(x)=p(-x)$，又因为

$$\omega(X)=-\omega(-X)$$

则

$$\begin{aligned}p(\omega)&=\int_X p(\omega|x)p(x)dx=\int_X p(\omega|x)p(-x)dx\\&=\int_X p(-\omega|-x)p(-x)d(-x)=p(-\omega)\end{aligned}$$

即 ω 的分布关于原点对称，得证。

方法二：由题意得

$$X \sim N(0,\sigma^2), \quad \bar{X} \sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$$

不妨令

$$S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)\sigma^2$$

则有 $\bar{X}$ 与 S 独立，故有

$$p(\bar{x},s) \propto \exp(\frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2/n})\left(\frac{s}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1}\exp(-\frac{s}{2\sigma^2}), \quad \bar{x} \in [-\infty,\infty], s \in [0,\infty]$$

若 ω 的分布与 σ^2 无关，则对 $\forall a, x' = ax \sim N(0,a^2\sigma^2)$，$\omega$ 的分布与 a 无关。由于

$$\omega' = \frac{a\bar{X}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a^2 X_i^2}} = \omega$$

故 ω 的分布与 a 无关，进而与 σ^2 无关。

另外，若 ω 的分布关于原点对称，则对 $\forall t \geq 0, P(\omega \geq t) = P(\omega \leq -t)$。由于

$$\omega = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S + n\bar{X}^2}}$$

故

$$\omega \geq t \Rightarrow \bar{X} \geq t\sqrt{S+n\bar{X}^2} \Leftrightarrow \bar{X} \geq \sqrt{\frac{t^2}{1-t^2n}S}$$

同理可得

$$\omega \leq -t \Rightarrow \bar{X} \leq -\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2n}S}$$

又因为 $p(\bar{x},s)$ 关于 $\bar{x}$ 为偶函数，且积分域 $\left\{\bar{X} \geq \sqrt{\frac{t^2}{1-t^2n}S}\right\}$ 和 $\left\{\bar{X} \leq -\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2n}S}\right\}$ 关于 $\bar{X} = 0$ 对称，故

$$P(\omega \geq t) = P(\omega \leq -t)$$

对 $\forall t$ 成立，得到 ω 关于原点对称，得证。

$\square$

2 3.14

设样本 $X = (X_1, \ldots, X_m)$ 和样本 $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ 互相独立。它们分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$，其中 $-\infty < \mu_1 < \infty$，$-\infty < \mu_2 < \infty$，$\sigma^2 > 0$。在 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 时，试证明：V 的分布与参数 σ^2 和 μ 无关，V 的分布关于原点对称，其中

$$V = \frac{U}{\sqrt{T_2 - \dfrac{T_1^2}{m+n}}}, \quad U = \bar{Y} - \bar{X}$$

$$T_1 = m\bar{X} + n\bar{Y}, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

Proof. 由题得，在 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 时，$X = (X_1, \ldots, X_m) \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$，即 X 和 Y 同分布，不妨设

$$Z = (Z_1, \cdots, Z_{m+n}) = \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \ldots, \frac{X_m - \mu}{\sigma}, \frac{Y_1 - \mu}{\sigma}, \ldots, \frac{Y_n - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$$

其中 $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$（$i = 1, \cdots, n$），$Z_j = \dfrac{Y_{j-m} - \mu}{\sigma}$（$j = m+1, \cdots, m+n$），则

$$T_1 = m\bar{X} + n\bar{Y} = (m+n)(\bar{Z} + \mu)\sigma$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m+n} (Z_i + \mu)^2$$

故有

$$\begin{aligned} T_2 - \frac{T_1^2}{m+n} &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{m+n} (Z_i + \mu)^2 - (m+n)(\bar{Z} + \mu)^2 \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{m+n} (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \sigma^2 \chi^2(m+n-1) \end{aligned}$$

又因为 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ 且二者独立，故

$$U = \bar{Y} - \bar{X} \sim N(0, \sigma^2 \frac{m+n}{mn})$$

所以

$$V = \frac{U}{\sqrt{T_2 - \dfrac{T_1^2}{m+n}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{m+n}{mn}}}{m+n-1} \frac{U \Big/ \left(\sigma\sqrt{\dfrac{m+n}{mn}}\right)}{\sqrt{\left(T_2 - \dfrac{T_1^2}{m+n}\right) / \left[\sigma^2(m+n-1)\right]}}$$

与 3.13 同理可证 V 的分布与参数 σ^2 和 μ 无关，且 V 的分布关于原点对称，得证。 □

3 3.15

设样本 $X=(X_1,\ldots,X_m)$ **和样本** $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ **互相独立。它们分别来自正态总体** $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ **和** $N(\mu_2,\sigma_2^2)$**，其中** $-\infty<\mu_1<\infty$**，**$-\infty<\mu_2<\infty$**，**$\sigma_1^2>0$**，**$\sigma_2^2>0$**。**

（1）试证明：在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ **时，**

$$V=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}\sim Be\left(\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)$$

Proof. 由题得，在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$X=(X_1,\ldots,X_m)\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y=(Y_1,\ldots,Y_n)\sim N(\mu_2,\sigma^2)$。不妨设

$$U=(U_1,\cdots,U_m)=\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma},\cdots,\frac{X_m-\mu_1}{\sigma}\right)\sim N(0,1)$$

$$W=(W_1,\cdots,W_n)=\left(\frac{Y_1-\mu_1}{\sigma},\cdots,\frac{Y_n-\mu_1}{\sigma}\right)\sim N(0,1)$$

则

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{m}\left(U_i-\bar{U}\right)^2\sim\chi^2(m-1)=Ga(\frac{m-1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(W_i-\bar{W}\right)^2\sim\chi^2(n-1)=Ga(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2})$$

且 U 和 W 彼此独立，由习题 1.27 第（1）问可得

$$V=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(W_i-\bar{W}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(U_i-\bar{U}\right)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(W_i-\bar{W}\right)^2}\sim Be\left(\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)$$

得证。 □

(2)试证明:检验问题 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 对 $H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 的 UMPUT 的拒绝域为 $\{x, y: v \leq c_1$ 或$v \geq c_2\}$，其中 c_1 和 c_2 由以下两式确定

$$\int_{c_1}^{c_2} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx = 1 - \alpha$$

$$\int_{c_1}^{c_2} \left(x - \frac{n-1}{n+m-2}\right) Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx = 0$$

Proof. 由例 3.13 可得，c_1 和 c_2 由以下两式确定

$$\mathrm{E}_{\theta_0} \phi(V) = \alpha \tag{1}$$

$$\mathrm{E}_{\theta_0} [V\phi(V)] = \alpha \, \mathrm{E}_{\theta_0} V \tag{2}$$

其中由第（1）问得

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} \sim Be\left(\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right)$$

$$\phi(v) = \begin{cases} 1, & v \leq c_1 \text{ 或} v \geq c_2 \\ 0, & c_1 < v < c_2 \end{cases}$$

则公式 (1) 可以写成

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\theta_0} \phi(V) &= P\left(v \leq c_1 \text{ 或} v \geq c_2\right) \\ &= \int_0^{c_1} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx + \int_{c_2}^{1} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx \\ &= \alpha \end{aligned}$$

即

$$\int_{c_1}^{c_2} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx = 1 - \alpha$$

公式 (2) 可以写成

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\theta_0} [V\phi(V)] &= \int_0^{c1} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx + \int_{c_2}^{1} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{1} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx - \int_{c_1}^{c_2} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx \\ &= \mathrm{E}_{\theta_0} V - \int_{c_1}^{c_2} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx \\ &= \alpha \, \mathrm{E}_{\theta_0} V \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{c_1}^{c_2} xBe\left(x \mid \frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)dx &= (1-\alpha)\operatorname{E}_{\theta_0} V \\ &= (1-\alpha)\frac{n-1}{n+m-2} \\ &= \frac{n-1}{n+m-2}\int_{c_1}^{c_2} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)dx\end{aligned}$$

故

$$\int_{c_1}^{c_2}\left(x-\frac{n-1}{n+m-2}\right)Be\left(x \mid \frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)dx = 0$$

得证。 □

（3）试证明：该 UMPUT 的拒绝域可等价地写成 $\left\{x,y: F \le c_1 \text{ 或} F \ge c_2\right\}$，其中 c_1 和 c_2 由以下两式确定

$$\int_{c_1}^{c_2} F(x \mid n-1,m-1)dx = 1-\alpha$$

$$\int_{c_1}^{c_2}\left(\frac{x-1}{(n-1)x+(m-1)}\right)\cdot F(x \mid n-1,m-1)dx = 0$$

Proof. 由例 3.13 得

$$F = \frac{V}{1-V}\frac{m-1}{n-1} \sim \frac{m-1}{n-1}Z\left(\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)$$

是 V 的严增函数，可反解得到

$$V = \frac{(n-1)F}{(m-1)+(n-1)F}$$

为表示区分，将第（2）问中的 c_1 和 c_2 表示为 $c_1^{(2)}$ 和 $c_2^{(2)}$，将此问中的 c_1 和 c_2 表示为 $c_1^{(3)}$ 和 $c_2^{(3)}$，则由第（2）问可得，检验问题 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 对 $H_0: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ 的 UMPUT 的拒绝域为 $\left\{x,y: v \le c_1^{(2)} \text{ 或} v \ge c_2^{(2)}\right\}$，其中 $c_1^{(2)}$ 和 $c_2^{(2)}$ 由以下两式确定

$$\int_{c_1^{(2)}}^{c_2^{(2)}} Be\left(x \mid \frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)dx = 1-\alpha \tag{3}$$

$$\int_{c_1^{(2)}}^{c_2^{(2)}}\left(x-\frac{n-1}{n+m-2}\right)Be\left(x \mid \frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}\right)dx = 0 \tag{4}$$

由 F 对 V 的严增性可得，公式 (3) 等价为

$$\int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} F(x \mid n-1,m-1)dx = 1-\alpha$$

公式 (4) 可以被写为

$$
\begin{aligned}
&\int_{c_1^{(2)}}^{c_2^{(2)}} \left(x - \frac{n-1}{n+m-2}\right) Be\left(x \mid \frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) dx \\
&= \int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} \left(\frac{(n-1)f}{(m-1)+(n-1)f} - \frac{n-1}{n+m-2}\right) F\left(f \mid n-1, m-1\right) df \\
&= \int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} \left(\frac{f-1}{(m-1)+(n-1)f} \frac{(m-1)(n-1)}{n+m-2}\right) F\left(f \mid n-1, m-1\right) df \\
&= \frac{(m-1)(n-1)}{n+m-2} \int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} \left(\frac{f-1}{(m-1)+(n-1)f}\right) F\left(f \mid n-1, m-1\right) df \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} \left(\frac{f-1}{(m-1)+(n-1)f}\right) F\left(f \mid n-1, m-1\right) df \\
&= \int_{c_1^{(3)}}^{c_2^{(3)}} \left(\frac{x-1}{(m-1)+(n-1)f}\right) F\left(x \mid n-1, m-1\right) dx = 0
\end{aligned}
$$

得证。 □

高等统计学作业十一

王祎帆
2020000117

2020.12.17

1 3.20

设有 X,Y 两个离散型随机变量。X 表示人的性别，“$X=1$”表示男性；“$X=2$”表示女性；Y 表示是否色盲，“$Y=1$”表示正常；“$Y=2$”表示色盲。令 $p_{ij}=P(X=i,Y=j)$，$i,j=1,2$。这时 $\theta=(p_{11},p_{12},p_{21})$，其中 $0\leq p_{11},p_{12},p_{21}\leq 1$，且 $p_{11}+p_{12}+p_{21}\leq 1$。所以参数空间 Θ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的一个单纯形。

有 1000 人按性别与色盲分类如下

	正常	色盲
男	442	38
女	514	6

按遗传学模型，数据应有下列相对应的概率，

	正常	色盲
男	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$
女	$\frac{p^2}{2}+p(1-p)$	$\frac{(1-p)^2}{2}$

其中 $0\leq p\leq 1$。问数据与模型是否相符？

解：由题可得，原假设为

$$H_0: p_{11}=\frac{p}{2}, p_{12}=\frac{1-p}{2}, p_{21}=\frac{p^2}{2}+p(1-p)$$

且参数 $\boldsymbol{\theta}=(p_{11},p_{12},p_{21})$ 受两个条件限制：$p_{12}=(1-2p_{11})/2$，$p_{21}=2p_{11}^2+2p_{11}(1-2p_{11})$，则有

$$\Theta_0=\left\{p_{11},p_{12},p_{21}:p_{11}=p_{11}\in(0,1/2),p_{12}=(1-2p_{11})/2,p_{21}=2p_{11}^2+2p_{11}(1-2p_{11})\right\}$$

根据定理 3.19，参数空间维数 $k=3$，$r=1$，可定义似然比统计量

$$\lambda(X)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta}\prod_{i=1}^{n}p(X_i;p)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}\prod_{i=1}^{n}p(X_i;p)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}p\left(X_i;\hat{\theta}\right)}{\prod_{i=1}^{n}p\left(X_i;\hat{\theta}_0\right)}$$

且有 $2\ln\lambda(X)\to\chi^2(k-r)=\chi^2(2)$，其中 $\hat{\theta}$ 为全参数空间 Θ 的 MLE，即

$$L(\boldsymbol{\theta})=\frac{n!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!(n-n_{11}-n_{12}-n_{21})!}p_{11}^{n_{11}}p_{12}^{n_{12}}p_{21}^{n_{21}}(1-p_{11}-p_{12}-p_{21})^{n-n_{11}-n_{12}-n_{21}}$$

可解得 $\hat{\theta}=(\frac{n_{11}}{n},\frac{n_{12}}{n},\frac{n_{21}}{n})=(0.442,0.038,0.514)$。

而 $\hat{\theta}_0$ 为 Θ_0 的 MLE，即

$$L(\boldsymbol{\theta})=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!(n-n_{11}-n_{12}-n_{21})!}p^{n_{11}+n_{21}}(1-p)^{n_{12}+2(n-n_{11}-n_{12}-n_{21})}\frac{(2-p)^{n_{21}}}{2^n}$$

求解

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial p_{11}}=\frac{n_{11}+n_{21}}{p}-\frac{n_{12}+2(n-n_{11}-n_{12}-n_{21})}{1-p}-\frac{n_{21}}{2-p}=0$$

可得

$$(2n-n_{11}-n_{12})\,p^2+(n_{11}+2n_{12}-4n)p+2n_{11}+2n_{21}=0$$

即

$$\hat{p}=\frac{-(n_{11}+2n_{12}-4n)-\sqrt{(n_{11}+2n_{12}-4n)^2-4(2n-n_{11}-n_{12})(2n_{11}+2n_{21})}}{2(2n-n_{11}-n_{12})}\approx 0.913$$

故

$$2\ln\lambda(X)=2\ln\left(2^n\frac{\hat{p}_{11}^{n_{11}}\hat{p}_{12}^{n_{12}}\hat{p}_{21}^{n_{21}}(1-\hat{p}_{11}-\hat{p}_{12}-\hat{p}_{21})^{n-n_{11}-n_{12}-n_{21}}}{\hat{p}^{n_{11}+n_{21}}(1-\hat{p})^{n_{12}+2(n-n_{11}-n_{12}-n_{21})}(2-\hat{p})^{n_{21}}}\right)\approx 2.921$$

由于 $P\{\chi^2(2)\geq 2.921\}\approx 0.232$，所以不拒绝原假设，即数据与模型相符。

2 3.21

设有 X，Y，Z 三个离散型随机变量，与此相联系的有一个三维列联表 $r \times c \times t$。作 n 次观测，在 (i,j,k) 格的观测频数为 n_{ijk}，$i=1,\cdots,r$；$j=1,\cdots,c$；$k=1,\cdots,t$。观测值落入 (i,j,k) 格的概率为 p_{ijk}。

（1）试证明：在给定 Z 之后，X 和 Y 条件相互独立的时候，p_{ijk} 的 MLE 为

$$\hat{p}_{ijk} = \frac{n_{i.k} \cdot n_{.jk}}{n \cdot n_{..k}}$$

Proof. 由题得，在给定 Z 之后，X 和 Y 条件相互独立，故

$$P(X=i, Y=j \mid Z=k) = P(X=i \mid Z=k) \cdot P(Y=j \mid Z=k)$$

即

$$p_{ijk} = \frac{p_{i.k} \cdot p_{.jk}}{p_{..k}}$$

由 MLE 的不变性可得：

$$\hat{p}_{ijk} = \frac{\hat{p}_{i.k} \cdot \hat{p}_{.jk}}{\hat{p}_{..k}}$$

故分别求 $p_{i.k}$，$p_{.jk}$ 和 $p_{..k}$ 的 MLE 即可。

求解 $\hat{p}_{i.k}$**：**对于 $\{n_{i.k} : i=1,\cdots,r; k=1,\cdots,t\}$，似然函数为

$$L = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{t} n_{i.k!}} \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{t} p_{i.k}^{n_{i.k}}$$

在 $\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{t} p_{i.k} = 1$ 的条件下求解

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_{i.k}} = 0$$

由拉格朗日法可解得：

$$\hat{p}_{i.k} = \frac{n_{i.k}}{n}$$

求解 $\hat{p}_{.jk}$**：**与 $\hat{p}_{i.k}$ 的解法相似，对于 $\{n_{.jk} : j=1,\cdots,c; k=1,\cdots,t\}$，似然函数为

$$L = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{c} \prod_{k=1}^{t} n_{.jk!}} \prod_{j=1}^{c} \prod_{k=1}^{t} p_{.jk}^{n_{.jk}}$$

在 $\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}p_{.jk}=1$ 的条件下求解似然函数最大化问题可得

$$\hat{p}_{.jk}=\frac{n_{.jk}}{n}$$

求解 $\hat{p}_{..k}$**：**与 $\hat{p}_{i.k}$ 的解法相似，对于 $\{n_{..k}:k=1,\cdots,t\}$，似然函数为

$$L=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{t}n_{..k}!}\prod_{k=1}^{t}p_{..k}^{n_{..k}}$$

在 $\sum_{k=1}^{t}p_{..k}=1$ 的条件下求解似然函数最大化问题可得

$$\hat{p}_{..k}=\frac{n_{..k}}{n}$$

综上，由 MLE 的不变性可得：

$$\hat{p}_{ijk}=\frac{\hat{p}_{i.k}\cdot\hat{p}_{.jk}}{\hat{p}_{..k}}=\frac{n_{i.k}\cdot n_{.jk}}{n\cdot n_{..k}}$$

得证。 $\square$

（2）

$$A=\Big\{(p_{i.k},p_{.jk},p_{..k}):i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,c;k=1,\cdots t;p_{i.k}\geq 0,p_{.jk}\geq 0,\\ \sum_{i=1}^{r}p_{i.k}=\sum_{j=1}^{c}p_{.jk}=p_{..k},\sum_{k=1}^{t}p_{..k}=1\Big\}$$

A **中独立参数为什么有** $t(r+c-1)-1$ **个？**

Proof. 首先考虑 $p_{i.k}$，由于其满足的约束仅为 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}p_{i.k}=1$，故 $\{p_{i.k}:i=1,\cdots,r;k=1,\cdots,t\}$ 中有 $tr-1$ 个参数相互独立。

在已知 $\{p_{i.k}:i=1,\cdots,r;k=1,\cdots,t\}$ 后，可以求得 $\{p_{..k}=\sum_{i=1}^{r}p_{i.k}:k=1,\cdots,t\}$，即此时 $\{p_{..k}:k=1,\cdots,t\}$ 中无独立参数。

在已知 $\{p_{..k}:k=1,\cdots,t\}$ 后，可得 $\{p_{.jk}:j=1,\cdots,c;k=1,\cdots,t\}$ 的约束条件为 $\sum_{j=1}^{c}p_{.jk}=p_{..k}$（$k=1,\cdots,t$）共 t 个，故其独立参数个数为 $tc-t=t(c-1)$。

综上，A 中独立参数共有 $tr-1+t(c-1)=t(r+c-1)-1$ 个，得证。 $\square$

3　3.23

下表是某大学秋季招生情况的数据。令 $A=$ 是否录取，$B=$ 系别，$C=$ 性别。

系别（B）	性别（C）	是否录取（A）是	否
B_1	男	353	207
	女	17	8
B_2	男	120	205
	女	202	391
B_3	男	138	279
	女	131	244
B_4	男	53	138
	女	94	299
B_5	男	22	351
	女	24	317

（1）检验：A 和 C 相互独立性。该大学秋季招生有没有性别歧视？如果有，哪种性别的录取率高？

解：建立假设检验问题：$H_0: A$和C独立，$H_1: A$和C不独立，其二维列联表为

性别（C）	是否录取（A）是	否	合计
男	686	1180	1866
女	468	1259	1727
合计	1154	2439	3593

故可得

$$2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{ij}\ln\frac{n\cdot n_{ij}}{n_{i.}\cdot n_{.j}} \approx 38.6 > \chi^2_{0.95}\left((2-1)\cdot(2-1)\right) \approx 3.84$$

即在 95% 的置信度下可认为 A 和 C 不独立,即存在性别歧视,其中男性录取率为 $686/1866 \approx 36.8\%$，高于女性录取率 $468/1727 \approx 27.1\%$。

（2）检验：给定 B 之后，A 和 C 的条件独立性。该大学秋季招生有没有性别歧视？

建立假设检验问题：在给定 B 后，$H_0: A$和C独立，$H_1: A$和C不独立，则

$$2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{5} n_{ijk}\ln\frac{n_{..k}\cdot n_{ijk}}{n_{i.k}\cdot n_{.jk}} \approx 2.68 < \chi^2_{0.95}\left(5\cdot(2-1)\cdot(2-1)\right) \approx 11.07$$

在 95% 的置信度下不能拒绝 A 和 C 独立，即给定 B 之后，该大学秋季招生没有性别歧视。

4 3.24

试证明：

（1）以 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 为核的 U 统计量的方差不可能比核 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 的方差大；

Proof. 由于

$$U = U(X_1,\cdots,X_n) = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}^{-1} \sum \phi(X_{i_1},\cdots,X_{i_m})$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U) &= \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}^{-2} \mathrm{Var}\left(\sum \phi(X_{i_1},\cdots,X_{i_m})\right) \\
&= \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}^{-2} \left[\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \mathrm{Var}\left(\phi(X_1,\cdots,X_m)\right) + \sum\sum\nolimits_{i\neq j} \mathrm{Cov}\left(\phi(X_{i_1},\cdots,X_{i_m}),\phi(X_{j_1},\cdots,X_{j_m})\right)\right] \\
&\leq \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}^{-2} \left[\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \mathrm{Var}\left(\phi(X_1,\cdots,X_m)\right) + 2\begin{pmatrix} C_n^m \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{Var}\left(\phi(X_1,\cdots,X_m)\right)\right] \\
&= \mathrm{Var}\left(\phi(X_1,\cdots,X_m)\right)
\end{aligned}$$

故以 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 为核的 U 统计量的方差不可能比核 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 的方差大，得证。

□

（2）若 U 统计量的核 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 的方差有限，则 $\phi_c(X_1,\cdots,X_c)$ 的方差 σ_c^2 也有限，其中 $\phi_c(X_1,\cdots,X_c)$ 如（3.73）式所示。

$$\phi_c(X_1,\cdots,X_c)=\mathrm{E}\left[\phi(X_1,\cdots,X_m)|X_1=x_1,\cdots,X_c=x_c\right] \tag{3.73}$$

Proof. 不妨设 U 统计量的核 $\phi(X_1,\cdots,X_m)$ 的方差为 $\sigma_m^2<\infty$。根据条件方差满足的公式

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(Y|X)\right]+\mathrm{Var}\left[\mathrm{E}(Y|X)\right]\geq \mathrm{Var}\left[\mathrm{E}(Y|X)\right]$$

可得

$$\begin{aligned}\sigma_c^2=\mathrm{Var}\left(\phi_c(X_1,\cdots,X_c)\right)&=\mathrm{Var}\left\{\mathrm{E}\left[\phi(X_1,\cdots,X_m)|X_1=x_1,\cdots,X_c=x_c\right]\right\}\\&\leq \mathrm{Var}\left(\phi(X_1,\cdots,X_m)\right)=\sigma_m^2<\infty\end{aligned}$$

即 σ_c^2 有限，得证。 □