1.2 写出下列统计问题的统计结构

（1）一地质师在一老河床测量 n 个卵石的最大直径，若已知直径的对数服从均值为μ和方差为σ^2的正态分布；

（2）一昆虫产出的卵数目服从均值为λ的 Poisson 分布，卵一旦产出，每个卵能孵出卵虫的概率为θ，并且每个卵的孵化是相互独立的，一位昆虫学家对 n 个昆虫观察所产生的卵数 X 和孵化出的幼虫数 Y；

（3）已知人的体重 Y 和身高 x 有关，一般认为较高的人体重较重，且有线性趋势，但同样身高的人体重不会都相同，如今测量 n 个人的体重 y_i 和身高 x_i，并设有如下关系：

$$y_i=a+bx_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\dots n$$

其中诸ε_i相互独立，$E(\varepsilon_i)=0,Var(\varepsilon_i)=\sigma^2,i=1,\dots n$。而 a，b 和$\sigma^2$都是未知量。

解：1.统计结构： (R^+, B_{R+}, P_1)

$P_1=\{N(e^{\mu+\sigma2/2},(e^{\sigma2}-1)e^{2\mu+\sigma2}):\mu\in R^+,\sigma\in R^+\}$

2.统计结构：(R^+, B_{R+}, P_1) $P_2=\{P(\lambda):\lambda\in R^+\}$

(R^+, B_{R+}, P_3) $P_3=\{P_\theta(\lambda):\lambda\in R^+,\theta\in R^+\}$

3. 统计结构：$(R^+\times R^+,B_{R+}\times B_{R+},P_4)$

$P_4=\{y_i=a+bx_i+\varepsilon_i:E(\varepsilon_i)=0,Var(\varepsilon_i)=\sigma^2,i=1,\dots n\}$

1.2

解：1.$(R^+,B_{R+},\{LN(\mu,\sigma^2):\mu\in R^+,\sigma\in R^+\})$

2. $(R^+,B_{R+},\{P(\lambda):\lambda>0\})$

$(R^+,B_{R+},\{P_\theta(\lambda):\lambda>0,\theta>0\})$

3. $(R^+\times R^+,B_{R+}\times B_{R+},\{y_i=a+bx_i+\varepsilon_i:E(\varepsilon_i)=0,Var(\varepsilon_i)=\sigma^2,i=1,\dots n\})$

1.4 设随机变量 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，若 c 为正实数，证明 $cX\sim Ga(\alpha,\frac{\lambda}{c})$.

若 $X\sim Ga(5,0.01)$，计算概率 $P(X>200)$.

解：

（1） $proof$: 因为 $c>0$，所以 $y=cx$ 是严格增函数。它仍在 $(0,+\infty)$ 上取值，其反函数为 $x=\frac{y}{c}$. 于是可得

① 当 $y<0$ 时， $p_Y(y)=0$.

② 当 $y\geq 0$ 时， $p_Y(y)=p_X(\frac{y}{c})\frac{1}{c}=\frac{\lambda^\alpha}{c\Gamma(\alpha)}(\frac{y}{c})^{\alpha-1}\exp\{-\lambda\frac{y}{c}\}$

$$=\frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}\exp\{-\frac{\lambda}{c}y\}$$

此即$Ga(\alpha,\frac{\lambda}{c})$的密度函数，如所要证。

（2）由（1）之结论知：若 $X\sim Ga(5,0.01)$，则 $Y=\frac{1}{100}X\sim Ga(5,1)$.

故所求概率:

$$
\begin{aligned}
P(X>200)=P(Y>2)\\
&=1-P(Y\le 2)\\
&=1-\int_0^2\frac{1}{\Gamma(5)}x^4e^{-x}dx\\
&=1-\frac{1}{24}\int_0^2 x^4e^{-x}dx\\
&=1-\frac{1}{24}(24-168e^{-2})\\
&=7e^{-2}
\end{aligned}
$$

1.6 设随机变量 $X\sim LN(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=X+\alpha$ 服从三参数对数正太分布，其中 α 称为门限参数，请写出 Y 的密度函数，并计算 $E(Y)$ 和 $Var(Y)$。

解：由于 $X\sim LN(\mu,\sigma^2)$，即：$\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$。令 $X=e^Z$ （X>0）

则：$F_X(x)=P(X\le x)=P(e^Z\le x)=P(Z\le \ln x)=\Phi(\ln x)$,进一步得到：

$$f_X(x)=F_X^{'}(x)=\frac{1}{x}\Phi(\ln x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad (x>0)$$

$$f_X(x)=0\quad x\le 0$$

则有：$P(Y\le x)=P(e^Z+\alpha\le x)=P(e^Z\le x-\alpha)$，可得：

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\frac{1}{y-\alpha}e^{-\frac{(\ln(y-\alpha)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad (y>\alpha)$$

$$f_Y(y)=0\qquad (y\le\alpha)$$

从而; $E(Y)=\int_\alpha^\infty y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{y-\alpha}e^{-\frac{[\ln(y-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}}dy$

令 $z=\ln(x-a)$，则可得：

$$E(Y)=\int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(e^z+\alpha\right)e^{-\frac{[z-\mu]^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_R e^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz+\alpha\int_R e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz\right)$$

$$=\alpha+e^{u+\frac{\sigma^2}{2}}$$

下面求 $E(y^2)$，则由定义得：

$$E(Y^2)=\int_\alpha^\infty y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{y-\alpha}e^{-\frac{[\ln(y-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}}dy$$ 令 $z=\ln(y-a)$，得：

$$E(Y^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_R\left(e^z+\alpha\right)^2e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz$$，展开得：

$$E(Y^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_R e^{2z}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz+\alpha^2\int_R e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz+2\alpha\int_R e^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz\right)$$

$$=\alpha^2+2\alpha e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}+e^{2\sigma^2+2\mu}$$

最后由 $Var(Y)=E(Y^2)-(EY)^2$，得到：

$$Var(Y)=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

综上所述：$E(Y)=\alpha+e^{u+\frac{\sigma^2}{2}}$，$Var(Y)=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

1.8 设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$，证明：自由度为 2 的 χ^2 分布的 α 分位数（0<α<1）为 $x=-2\ln(1-\alpha)$.

证明：自由度为 2 的 χ^2 分布概率密度函数为：$p(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$\therefore$ 其分布函数为：$F(x)=\int_0^x p(t)d_t=\int_0^x\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}d_t=1-e^{-\frac{x}{2}}$

当 $F(x)=\alpha$ 时，即 $1-e^{-\frac{x}{2}}=\alpha$，得 $x=-2\ln(1-\alpha)$

$\therefore$ 自由度为 2 的 χ^2 分布的 α 分位数为 $x=-2\ln(1-\alpha)$.

1.10 设随机变量 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，则 $Y=X^{-1}$ 服从倒 Gamma 分布，请写出 Y 的密度函数，并计算 E（Y）和 Var（Y）.

解：因为 $X\sim Ga$（α，λ），所以 X 的密度函数为

$$p(x;\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp\{-\lambda x\},\quad x\in(0,+\infty)$$

$Y=1/X$ 的密度函数为

$$f(y)=\frac{1}{y^2}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda/y}=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda/y},\quad y\in(0,+\infty)$$

故倒 Gamma 分布的密度函数为

$$p(y;\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda/y},\quad y\in(0,+\infty)$$

倒 Gamma 变量 Y 的 k 阶矩为

$$\begin{aligned}E(Y^k)&=\int_0^{+\infty}y^k\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda/y}dy\\&=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)}y^{-(\alpha-k+1)}e^{-\lambda/y}dy\\&=\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

所以 Gamma 变量 Y 的期望为

$$E(Y)=\frac{\lambda\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\lambda}{\alpha-1}$$

Gamma 变量 Y 的方差为

$$\begin{aligned}Var(Y)&=E(Y^2)-E^2(Y)\\&=\frac{\lambda^2\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}-\left(\frac{\lambda}{\alpha-1}\right)^2\\&=\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\end{aligned}$$

1.16 验证：自由度为 2 和 $2k$ 的 F 分布的 α 分位数是

$$F_{\alpha}(2,2k)=k\left((1-\alpha)^{-1/k}-1\right)$$

证明：F 分布的密度函数是

$$f_{m,n}(x)=\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}m^{m/2}n^{n/2}\frac{x^{m/2-1}}{(mx+n)^{(m+n)/2}}$$

则自由度为2和$2k$的F分布密度函数是

$$f_{2,2k}=\left(\frac{k}{k+x}\right)^{k+1}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^{k\left((1-\alpha)^{-1/k}-1\right)}\left(\frac{k}{k+x}\right)^{k+1}dx\\
&=k^{k+1}\int_0^{k\left((1-\alpha)^{-1/k}-1\right)}(k+x)^{-(k+1)}d(k+x)\\
&=k^{k+1}\left.\frac{(k+x)^{-k}}{-k}\right|_0^{k\left((1-\alpha)^{-1/k}-1\right)}\\
&=k^{k+1}\left(\frac{k^{-k}\left(1+(1-\partial)^{-1/k}-1\right)^{-k}}{-k}+k^{-(k+1)}\right)\\
&=-(1-\alpha)+1\\
&=\alpha
\end{aligned}$$

所以

$$F_\alpha(2,2k)=k\left((1-\alpha)^{-1/k}-1\right)$$

1.17　设x_1，……，x_{n_1},是来自$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，Y_1，……，Y_{n_2}是来自$N(0,\sigma^2)$的一个样本，且诸与诸相互独立，证明：

$$F=\frac{(x_1^2+\cdots+x_{n1}^2)/n_1}{(Y_1^2+\cdots+Y_{n2}^2)/n_2}\sim F(n_1,n_2,\gamma)$$

其中$F(n_1,n_2,\gamma)$成为非中心参数为$\gamma=\frac{n_1\mu^2}{2\sigma^2}$的非中心 F 分布，其密度函数在$u\ll 0$为零，在$u>0$为

$$\rho(u,n_1,n_2,\gamma)=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}e^{-\gamma}u^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+m\right)}\cdot\frac{(\gamma n_1u)^m}{m!\,(n_2+n_1u)^{\frac{n_1+n_2}{2}+m}}$$

并求其期望以及方差。

解：由于x_1，……，x_{n_1}独立同分布于$N(\mu,\sigma^2)$，所以，

$Q_1=(x_1^2+\cdots+x_{n1}^2)/\sigma^2\sim\chi^2(n_1，\gamma)$, 其中$\gamma=\frac{n_1\mu^2}{2\sigma^2}$

根据χ^2与 Gamma 分布的关系$\chi^2(n_1，\gamma)=Ga\left(\frac{n_1}{2},\frac{1}{2},\gamma\right)$, 得$Q_1$的密度函数为

$$\rho_1\left(x,\frac{n_1}{2},\frac{1}{2},\gamma\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-r}\gamma^m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}+m}}{m!\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+m\right)}x^{\frac{n_1}{2}+m-1},x>0$$

又由于Y_1，……，Y_{n_2}独立同分布于$N(0,\sigma^2)$，所以

$Q_2=(Y_1^2+\cdots+Y_{n2}^2)/\sigma^2\sim\chi^2(n_2)=Ga\left(\frac{n_2}{2},\frac{1}{2}\right)$, 且其密度函数为

$$\rho_2(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}x^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},x>0$$

令$Q_3=\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{x_1^2+\cdots+x_{n1}^2}{Y_1^2+\cdots+Y_{n2}^2}$, 则由随机变量的密度函数公式得$Q_3$得的密度函数是：

$$\rho_3(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\rho_1(tx)\rho_2(t)dt$$

令$F=\frac{n_2}{n_1}Q_3$, 则 F 的分布函数为

$$F(u)=p(F\le u)=p\left(\frac{n_2}{n_1}Q_3\le u\right)=p\left(Q_3\le\frac{n_1}{n_2}u\right)=\int_{-\infty}^{\frac{n_1}{n_2}u}\rho_3(x)dx=\int_{0}^{\frac{n_1}{n_2}u}\rho_3(x)dx$$

当$u\le 0$时，$F(u)=0$，在$u>0$时，F 的密度函数是

$$\rho(u)=F'(u)=\frac{n_1}{n_2}\rho_3\left(\frac{n_1}{n_2}u\right)=\frac{n_1}{n_2}\int_0^{+\infty}t\,\rho_1\left(\frac{n_1}{n_2}ut\right)\rho_2(t)dt=$$

$$\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}e^{-\gamma}u^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+m\right)}\cdot\frac{(\gamma n_1u)^m}{m!\,(n_2+n_1u)^{\frac{n_1+n_2}{2}+m}}$$

由非中心 F 分布的定义知，

$F=\frac{(x_1^2+\cdots+x_{n1}^2)/n_1}{(Y_1^2+\cdots+Y_{n2}^2)/n_2}\sim F(n_1,n_2,\gamma)$，其中$F(n_1,n_2,\gamma)$成为非中心参数为$\gamma=\frac{n_1\mu^2}{2\sigma^2}$的非中心 F 分布

设(X,Y)为二维随机变量，令$Z=f(X,Y)$, 则$E(Z)$存在，

$$E(Z)=E\big(f(X,Y)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\rho(x,y)dxdy$$

$$E(Q_3)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\rho_1(y)\rho_2(y)\frac{y_1}{y_2}dxdy=\frac{n_2(n_1+\gamma)}{n_1(n_2-2)},\text{其中}n_2>2$$

$$varX=\frac{2{n_2}^2}{{n_1}^2(n_2-2)^2(n_2-4)}[(n_1+\gamma^2)^2+(n_2-2)(n_1+2\gamma^2)],n_2>4$$

1.20 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim M(n, p_1, \cdots p_r)$，在给定 $X_2 = n_2$ 的条件下，求 X_1 的条件分布.

解：

$$P(X_1 = n_1 \mid X_2 = n_2) = \frac{P(X_1 = n_1, X_2 = n_2)}{P(X_2 = n_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{n_1! n_2! (n - n_1 - n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - n_1 - n_2}}{\dfrac{n_2!}{n_2! (n - n_2)!} p_2^{n_2} (1 - p_2)^{n - n_2}} =$$

$$\frac{(n - n_2)!}{n_1! (n - n_1 - n_2)!} (\frac{p_1}{1 - p_2})^{n_1} (\frac{1 - p_1 - p_2}{1 - p_2})^{(n - n_1 - n_2)} =$$

$$\frac{(n - n_2)!}{n_1! (n - n_1 - n_2)!} (\frac{p_1}{1 - p_2})^{n_1} (1 - \frac{p_1}{1 - p_2})^{(n - n_1 - n_2)}$$

$\therefore X_1$～M（n-n2，$\dfrac{p_1}{1 - p_2}$），X_1～b（n-n2，$\dfrac{p_1}{1 - p_2}$）.

1.24 证明一个 n 元随机变量 X=(X_1,X_2,...X_n)服从 n 元正态分布的充要条 件是 X 的诸分量的任一个线性组合都服从一元正态分布。

证明：⇒(必要性)：X~N(μ，∑)，对任一实向量 a=（a_1,a_2,...a_n）’，则 X 诸分量的任一线性组合可以表示为

$$X^*a = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\mu a, a'\Sigma a)$$

即服从一元正态分布。

⇐（充要性）：因为 X 的诸分量的线性组合都服从一元正态分布，即给任一实向量 a=（a_1,a_2,...a_n）’，Xa~一元正态分布，可知 Xa 的各阶矩存在，故 E（X_i），Cov（X_i，X_j）（i，j=1,2，...n）存在，记 E（X）=μ，D(X)=∑，对任给的 a，ε =Xa~（μa，a’∑a），且ε 的特征函数为

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = E(e^{i\theta\varepsilon}) = \exp[i\theta(\mu a) - \frac{1}{2}\theta^2(a'\Sigma a)]$$

取 θ=1，

$$\Phi_\varepsilon(1) = E(e^{i\varepsilon}) = E(e^{iXa}) = \Phi_X(a) = \exp[i\mu a - \frac{1}{2}a'\Sigma a]$$

即可得到 X~N(μ，∑)。

1.25 设 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 为二元正态变量，其分布为 $N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$，写出给定 *X* 下，*Y* 的

条件分布和给定 Y 下，X 的条件分布。

解：由题意可知，

$$E(X)=\mu_1=0,\ E(Y)=\mu_2=1,\ D(X)=\sigma_1^2=4,\ D(Y)=\sigma_2^2=1,\ \rho=\frac{1}{2}\ .$$

则二元正态分布的密度函数为

$$p(x,y)=1/(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\ )\exp\{-1/(2\sqrt{1-\rho^2}\ )[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\ -2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]$$

$$=1/(2\sqrt{3}\ \pi)\exp\{\frac{-2}{3}[\frac{x^2}{4}-\frac{x(y-1)}{2}+(y-1)^2]\},$$

它们的边缘分布密度函数分别为

$$p_1(x)=1/(2\sqrt{2\pi}\ )\exp(-\frac{x^2}{8}),$$

$$p_2(y)=1/\sqrt{2\pi}\ \exp[-\frac{(y-1)^2}{2}],$$

故 $$p_1(x/y)=p(x,y)/p_2(y)=1/\sqrt{6\pi}\ \exp[-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{3}x(y-1)-\frac{1}{6}(y-1)^2]$$

$$=1/(\sqrt{2\pi}\ \cdot\sqrt{3}\ )\exp\{-\frac{1}{6}[x-(y-1)]^2\},$$

由条件密度函数可知，

$$E[X|Y]=\int xp_1(x/y)dx=y-1,$$

$$D[X|Y]=3.$$

同理可知，

$$p_2(y/x)=p(x,y)/p_1(x)=1/(\sqrt{2\pi}\ \cdot\sqrt{3}\ /2)\exp\{-1/(2\times\frac{3}{4})[y-(1+\frac{x}{4})]^2\},$$

所以

$$E[Y|X]=\int yp_2(y/x)dy=1+\frac{x}{4}\ ,$$

$$D[Y|X]=\ \frac{3}{4}\ .$$

综上所述，

$X|Y$ 服从 $N(y-1,3)$, Y/X 服从 $N(1+\frac{x}{4}\ ,\frac{3}{4})$.、

1.28 设 X_1~N(0,s_1^2),X_2~N(0,s_2^2),且 X_1 与 X_2 独立，寻找 $Y_1=X_1+X_2+a$ 与 $Y_2=X_1-X_2+b$ 的联合分布。

解：设$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix},\mu=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},V=\begin{bmatrix}\sigma_1{}^2 & 0\\0 & \sigma_2{}^2\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},C=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$

故$Y=AX+C,AVA'=\begin{bmatrix}\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2 & \sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2\\\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2 & \sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2\end{bmatrix}$

由题意知，$X\sim N_2(\mu,V)$,故$Y\sim N_2(C,AVA')$

1.29 设 X_1与 X_2是相互独立服从同一指数分布 Exp(1)随机变量，寻找 $Y_1=X_1-X_2$ 和 $Y_2=X_2$的联合密度函数与 Y_1的边际密度函数。

解：由题意知，X_1与X_2的联合密度函数为：

$$f_X(x_1,x_2)=\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}\qquad (x_1>0,x_2>0)$$

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2\end{cases}\text{故}\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_2\end{cases},J=\frac{D(x_1,x_2)}{D(y_1,y_2)}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Y_1与Y_2的联合密度函数为：

$$f_Y(y_1,y_2)=f_X(y_1+y_2,y_2)|J|=\lambda^2 e^{-\lambda(y_1+2y_2)}\qquad (y_1>-y_2,y_2>0)$$

故当$y_1\ge 0$时，Y_1的边际密度函数为：

$$f_{Y_1}(y_1)=\int_0^{+\infty}f_Y(y_1,y_2)dy_2=\frac{\lambda e^{-\lambda y_1}}{2}$$

当$y_1<0$时，Y_1的边际密度函数为：

$$f_{Y_1}(y_1)=\int_{-y_1}^{+\infty}f_Y(y_1,y_2)dy_2=\frac{\lambda e^{\lambda y_1}}{2}$$

故Y_1的边际密度函数为：

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{\lambda e^{-\lambda|y_1|}}{2}$$

1.33 当总体为指数分布 Exp (λ)和均匀分布 U (0 , 1)时，分别寻求容量为 n 的样本极差 R_n 的分布。

解: 总体为指数分布 Exp (λ)的分布函数和密度函数分别为

$$F_1(x,\lambda)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda x), x\ge 0\\0, x<0\end{cases},\qquad P_1(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x), x>0\\0, x\le 0\end{cases}$$

总体为均匀分布 U (0 , 1)的分布函数和密度函数分别为

$$F_2(x)=\begin{cases}1, x>1\\x, 0<x\le 1,\\0, x\le 0\end{cases},\qquad P_2(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\0, \text{其他}\end{cases}$$

由 1.32 知容量为 n 的样本极差 R_n 的分布为

$$F_{R_n}(x)=n\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(y+x)-F(y)\right]^{n-1}P(y)dy,$$

其中 F (y)与 P (y)分别为总体的分布函数与密度函数。

所以，总体为指数分布 Exp (λ)时，

$$F_1(\mathrm{y}+x)-F_1(\mathrm{x})=\int_0^{y+x}\lambda\exp(-\lambda s)ds-\int_0^{y}\lambda\exp(-\lambda s)ds$$

$$=-\exp(-\lambda(y+x))+\exp(-\lambda y)$$

$$F_{1Rn}(x)=n\int_0^{\infty}\left[-\exp(-\lambda(y+x))+\exp(-\lambda y)\right]^{n-1}\lambda\exp(-\lambda y)dy$$

$$=-\left[1-\exp(-\lambda x)\right]^{n-1}\left[\exp(-\lambda y)\right]^{n}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\left[1-\exp(-\lambda x)\right]^{n-1}$$

故 $F_{1Rn}(x)=\begin{cases}[1-\exp(-\lambda x)]^{n-1}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$

总体为均匀分布 U (0 , 1)时，

当 y >1 时，$F_2(y+x)-F_2(x)=0$，

当 y<1 时，$F_2(y+x)-F_2(x)=\begin{cases}x, y+x<1\\ 1-\mathrm{y}，\mathrm{y}+x>1\end{cases}$

所以，$F_{2Rn}=n\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+y)-F(y)]^{n-1}P_2(y)dy$

$$=n\int_0^1[F(y+x)-F(y)]^{n-1}dy$$

$$=n[\int_0^{1-x}x^{n-1}dy+\int_{1-x}^{\infty}(1-y)^{n-1}dy]$$

$$=nx^{n-1}-(n-1)x^n$$

所以，$F_{2Rn}=\begin{cases}nx^{n-1}-(n-1)x^n, 0\le x\le 1\\ 1, x>1\\ 0, x<0\end{cases}$

1.35 设 $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ 是某样本的次序统计量，当剔去其中前 k 个和后 k 个变量后，用剩下 n-2k 个次序统计量计算平均 $T_{n,k}=\frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k}X_{(i)}$，这个平均称为切断平均，其中 k<n/2. 请指出切断平均的期望与方差存在的条件。

解：由切断平均的定义可知，它的期望与方差存在的充分条件是次序统计量 $X_{(i)}$，$k+1 \le i \le n-k$ 的期望与方差存在。

$$\because k+1 \le i \le n-k \quad 可得 \quad k+1 \le i \le n-$$

$$又由 \quad k < \frac{n}{2}, \quad 可得 \quad k+1 < \frac{n}{2}+1 \le n-k$$

$$\therefore \quad \min(i, n-i+1, k+1 \le n-k) = k+1$$

利用定理 1.2 的结论知 $a \ge \frac{r}{k+1}$，若对 $a = \frac{r}{k+1}$ 有 $E|X|^a < \infty$，则有 $E|X_{(i)}|^r < \infty$.

综述得：

若对 $a = \frac{r}{k+1}$ 有 $E|X|^a < \infty$，且 $a \ge \frac{r}{k+1}$，则切断平均的期望与方差存在。

1.38 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自二点分布 b(1，q)的一个样本，其中 $0<q<1$，现要求样本均值 $\bar{X}$ 的函数

$$\mathbf{g_1(\bar{X}) = (\bar{X})^{-1}}$$

$$\mathbf{g_2(\bar{X})} = \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}$$

的渐进分布。

解：X_i ～b(1，θ），i=1,2,⋯,n. E(X_i)=θ, D(X_i)= θ(1-θ) < +∞. 则 E($\bar{X}$)=θ, D($\bar{X}$)= $\frac{1}{n}\theta$(1-θ)。

由中心极限定理，$\bar{X} \xrightarrow{L} N(\theta, \frac{1}{n}\theta(1-\theta))$，即$\sqrt{n}$（$\bar{X}-\theta$） / $\sqrt{\theta(1-\theta)} \xrightarrow{L} N(0,1)$

错误！未指定书签。

1)取 $g_1(y)=\frac{1}{y}$, $g_1(y)'=-\frac{1}{y^2}$在（0,1）上连续，取$a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$，则

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\frac{1}{\bar{X}}-\frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{L} -\frac{1}{\theta^2}Y，其中 Y 为标准正态变量。$$

则

$$\left(\frac{1}{\bar{X}}-\frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{L} -\frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\theta^2\sqrt{n}}Y$$

故当 n 较大时，$\frac{1}{\bar{X}}$～AN($\frac{1}{\theta}$，$\frac{1-\theta}{\theta^3 n}$)

2）取 $g_2(y)=\sqrt{y(1-y)}$, $g_2(y)'=\frac{1-2y}{2\sqrt{y(1-y)}}$在（0,1）上连续，则

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}-\sqrt{\theta(1-\theta)}\right)\xrightarrow{L}\frac{1-2\theta}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}Y$,其中 Y 为标准正态变量。

则

$$\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}-\sqrt{\theta(1-\theta)}\xrightarrow{L}\frac{1-2\theta}{2\sqrt{n}}Y$$

故当 n 较大时，$\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}$～AN($\sqrt{\theta(1-\theta)}$，$\frac{(1-2\theta)^2}{4n}$)

1.39 设 $\bar{x}$ 是来自 Poisson 分布的一个样本均值。

(1)寻求 $h(\bar{x})=e^{-\bar{x}}$ 的期望与方差的近似值。

(2)寻求函数 $h(\bar{x})$，使其方差近似为常数。

(1)解：设$X\sim P(\lambda)$，则$E(X)=\lambda, Var(X)=\lambda$

$$E(X^2)=\lambda^2+\lambda,$$

$$E(X^3)=\sum_{x=0}^{+\infty}(x^3\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda})=\lambda\sum_{x=1}^{+\infty}(x^2\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda})=\lambda(E(X^2)+2E(X)+1)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$$

$$\mu_3=E((X-\lambda)^3)=E(X^3)-3E(X^2)E(X)+2(E(X))^3=\lambda$$

由$h(x)=e^{-x}$可得

$$h'(x)=-e^{-x}, h''(x)=e^{-x}, h'''(x)=-e^{-x}, h^{(4)}(x)=e^{-x}$$

由定理1.9可得,

$$E(h(\bar{x}))\approx e^{-\lambda}(1+\frac{\lambda}{2n})$$

$$Var(h(\bar{x}))\approx e^{-2\lambda}(\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda}{n^2}+\frac{3\lambda^2}{n^2})$$

(2)在$Poisson$分布$P(\lambda)$中,$Var(X)=\lambda$是随着$E(X)=\lambda$变化而变化的

利用定理 1.9，$\mathrm{var}(h(\bar{x}))=\frac{1}{n}[h'(\lambda)]^2\lambda+O(\frac{1}{n^2})$

这时要使方差为常数，等价于使$h'(\lambda)=\sqrt{\frac{c}{\lambda}}$(其中$c$为常数)

解得$h(\lambda)=2\sqrt{c\lambda}+d$(其中$d$为任意常数)

则取$c=\frac{1}{4},d=0$得$h(\lambda)=\sqrt{\lambda}$

故$h(\bar{x})=\sqrt{x}$就是要求的方差稳定变换。

1.40 在下列密度函数下分别寻求容量为 n 的样本中位数 $m_{0.5}$ 的渐进分布.

(1) $p(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$;

(2) $p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$;

(3) $p(x)=\frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x|}$;

(4) $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$;

解：（1）密度函数

$p(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1 & x\geq 1\\ x^2 & 0<x<1,\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

则 $F(x_{0.5})=0.5$,解得 $x_{0.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,由定理 1.8 可得，对样本中位数 p 的近似分布，当

$n\to\infty$时，$m_{0.5}\sim N(\frac{1}{\sqrt{2}},1/(8n))$.

(2) 密度函数

$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的分布函数是

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\arctan t+\frac{1}{2}$$
,

则 $F(x_{0.5})=0.5$,解得 $x_{0.5}=0$,由定理 1.8 可得，对样本中位数 p 的近似分布，当 $n\to\infty$ 时，$m_{0.5}$～$N(0，\pi^2/4n)$

(3) 密度函数

$p(x)=\frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x|}$ 的分布函数是

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}dt+\int_{0}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda x}+1$$

则 $F(x_{0.5})=0.5$,解得 $x_{0.5}=0$,由定理 1.8 可得，对样本中位数 p 的近似分布，当 $n\to\infty$ 时，$m_{0.5}$～$N(0，1/\lambda^2 n)$

(4)密度函数

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$ 的分布函数 $\Phi((x_{0.5}-\mu)/\sigma)=0.5$，而标准正态分布 $N(0,1)$ 的 p 分位数 $m_{0.5}=0$，即上式为 $(x_{0.5}-\mu)/\sigma=m_{0.5}=0$，则 $x_{0.5}=\mu$，由定理 1.8 可得，对样本中位数 p 的近似分布，当 $n\to\infty$ 时，$m_{0.5}$～$N(\mu，\pi\sigma^2/2n)$.

1.43

解：T_n 的可能取值为 0，1，…，

$$P_\theta(\sum_{i=1}^{n}X_i=\mathrm{t})$$
$$=\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_n=t}P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$$
$$=\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_n=t}P_\theta(X_1=x_1)\cdots P_\theta(X_n=x_n)$$

T_n 的分布 $=\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_n=t}(1-\theta)^{x_1+\cdots+x_n}\theta^n$

$$=\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_n=t}(1-\theta)^t\theta^n$$
$$=m_t(1-\theta)^t\theta^n$$

其中 m_t 是满足 $x_1+x_2+\cdots x_n=t$ 的（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）的个数。

（2）样本的联合概率函数为

$$p_\theta(\mathrm{X}_1=\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{X}_n=\mathrm{x}_n)$$
$$=p_\theta(\mathrm{X}_1=\mathrm{x}_1)\cdots p_\theta(\mathrm{X}_n=\mathrm{x}_n)$$
$$=(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\theta^n$$

取 $T_n(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i,g_\theta(\mathrm{T}_n(\mathrm{x}))=(1-\theta)^{T_n(\mathrm{x})}\theta^n,h(\mathrm{x})=1$

则 $\mathrm{p}_\theta(\mathrm{X}_1=\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{X}_n=\mathrm{x}_n)=\mathrm{g}_\theta(\mathrm{T}_n(\mathrm{x}))\mathrm{h}(\mathrm{x})$

$\mathrm{T}_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是充分统计量。

1.44 设 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ 是来自如下密度函数的一个样本，分别求未知参数 的充分统计量

(1)(幂函数)$P_\theta(x)=\theta x^{\theta-1}$，$0<x_i<1,\quad \theta>0.$

(2)(Pareto 分布)$P_\theta(x)=\theta a^\theta/x^{(\theta+1)}$,$x>a$,$\theta>0$($a>0$已知);

(3）拉普拉斯分布 $P_\theta(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-|x|/\theta}$，$-\infty<x<\infty,\theta>0$；

解：(1) 设 X={X_1, X_2,...., X_n}是来自幂函数 $P_\theta(x)=\theta x^{\theta-1}$的一个样本，其中 $0<x_i<1,\quad \theta>0.$则样本的联合密度函数为

$$P(X_i=x_i,\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}\theta x^{\theta-1}$$
$$=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}\qquad 0<x_i<1,\quad \theta>0.$$

取 h(x)=1，T(X)= $\prod_{i=1}^{n}x_i$,由因子分解定理可知，T(X)= $\prod_{i=1}^{n}x_i$ 是θ的充分统计量.

(2)设 X={X_1, X_2,...., X_n}是来自 Pareto 分布 $P_\theta(x)=\theta a^\theta/x^{(\theta+1)}$的一个样本，其中 $x>a$, $\theta>0$($a>0$已知)，则样本的联合密度函数为:

$$P(X_i=x_i,\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}\theta a^{\theta}/x_i^{(\theta+1)}$$

$$=(\theta a^{\theta})^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-(\theta+1)} \qquad x_i>a,\quad \theta>0.$$

取 h(x)=1，T(X)= $\prod_{i=1}^{n}x_i$,由因子分解定理可知，T(X)= $\prod_{i=1}^{n}x_i$ 是θ的充分统计量.

(3)设 X={X_1, X_2,...., X_n}是来自拉普拉斯分布 $P_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-|x|/\theta}$ 的一个样本，其中 $-\infty<x<\infty,\theta>0$，则样本的联合密度函数为:

$$P(X_i=x_i,\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\cdot e^{-|x|/\theta}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\cdot\exp\{-(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)/\theta\} \qquad -\infty<x<\infty,\theta>0$$

取 h(x)=1，T(X)= $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$,由因子分解定理可知，T(X)= $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$是θ的充分统计量.

1.45 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自均匀分布 U(q_1,q_2)的一个样本，其中−∞<q_1<q_2<∞。证明{$X_{(1)}$,$X_{(n)}$}是参数(q_1,q_2)的充分统计量，其中 $X_{(1)}$与 $X_{(n)}$分别是该样本的最小与最大次序统计量。

证明：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ U(θ_1,θ_2)

样本的联合密度函数为

$$p(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)=\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n I_{(\theta_1,\theta_2)}(x_{(n)})I_{(\theta_1,\infty)}(x_{(1)})$$

由因子分解定理知，{$X_{(1)}$,$X_{(n)}$}是参数(θ_1,θ_2)的充分统计量。

1.45 设 X_1，⋯，X_n 是来自均匀分布 U(q_1,q_2)的一个样本，其中-∞<q_1<q_2<∞.证明：（$X_{(1)}$,$X_{(n)}$）是参数(q_1,q_2)的充分统计量，其中 $X_{(1)}$与 $X_{(n)}$分别是该样本的最小与最大次序统计量。

证明：由题意可知样本的联合密度函数为

$$P_\theta(x)=(\frac{1}{\theta_2-\theta_1})^n\cdot I_{(\theta1,\theta2)}(x_{(n)})I_{(\theta1,\infty)}(x_{(1)})$$

其中 $x_{(1)}$与 $x_{(n)}$分别为最小与最大次序统计量的取值，由因子分解定理可知，（$X_{(1)}$,$X_{(n)}$）是参数(θ_1,θ_2)的充分统计量

1.49 证明二维统计量 T=（（X_1+X_2）^{2}，（X_1-X_2）^{2}）是该二元正态分布族的充分统计量。

证：X 的联合密度函数为 $p(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2}}$

其中 n=2，$\mu=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

即 $p(x)=(2\pi)^{-1}|\Sigma|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{-x`\Sigma^{-1}x}{2}}$，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma^2+r^2 & r^2-\sigma^2\\ \sigma^2-r^2 & \sigma^2+r^2\end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1}=\frac{1}{4\sigma^2r^2}\begin{bmatrix}\sigma^2+r^2 & r^2-\sigma^2\\ r^2-\sigma^2 & \sigma^2+r^2\end{bmatrix}$

$x`\ \Sigma^{-1}x=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^2+r^2 & r^2-\sigma^2\\ r^2-\sigma^2 & \sigma^2+r^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\frac{1}{4\sigma^2r^2}$

则$=\frac{1}{4\sigma^2r^2}\left((\sigma^2+r^2)X_1^2+2(r^2-\sigma^2)X_1X_2+(\sigma^2+r^2)X_2^2\right)$

$=\frac{1}{4\sigma^2r^2}\left(r^2(X_1+X_2)^2+\sigma^2(X_1-X_2)^2\right)$

由因子分解，T=（$(X_1+X_2)^2$，$(X_1-X_2)^2$）是该二元正态分布族的充分统计量。

1.50设 Y_1, Y_2,...., Y_n 是相互独立的随机变量，且 $Y_i\sim N(\alpha+\beta x,\sigma^2)$,i=1,....n,其中 $-\infty<\alpha,\beta<\infty,\sigma>0$是未知参数，而 X_1, X_2,...., X_n 是已知量，证明：（$\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$，$\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$）是正态分布族{ $N(\alpha+\beta x,\sigma^2)$：$-\infty<\alpha,\beta<\infty,\sigma>0$}的充分统计量.

解：设 Y={Y_1, Y_2,...., Y_n}是来自的一个样本，则其样本的联合密度函数为：

$$P(Y)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\alpha+\beta x_i))^2\}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i-2\beta\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+n(\alpha+\beta x_i)^2)\}$$

令,由因子分解定理可知：

（$\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$，$\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$）是正态分布族{ $N(\alpha+\beta x,\sigma^2)$：$-\infty<\alpha,\beta<\infty,\sigma>0$}的充分统计量.

1.51 设$\begin{pmatrix}X_i\\Y_i\end{pmatrix}$,$i=1,\ldots,n$是来自正态分布族 $\left\{N\left(\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\theta_1,\theta_2<+\infty,\sigma_1,\ \sigma_2>0,|\rho|\le1\right\}$的一个二维样本，寻求该分布族的充分统计量。

解：记 $\mu=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2\end{pmatrix},a_i=\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix},i=1,\ldots,n.$

则似然函数可表示为

$$L(\mu,\Sigma)=(2\pi)^{-n}\left|\Sigma\right|^{-\frac{n}{2}}etr\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\mu)(a_i-\mu)'\}$$

其中，
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\mu)(a_i-\mu)'\triangleq\begin{pmatrix}m_1 & m_2\\ m_3 & m_4\end{pmatrix}$$

$$m_1=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1{}^2$$

$$m_2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_1\theta_2$$

$$m_3=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_1\theta_2$$

$$m_4=\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-2\theta_2\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_2{}^2$$

故

$$-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\mu)(a_i-\mu)'\triangleq\frac{1}{-2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}u_1\,u_2\\ u_3\,u_4\end{pmatrix},$$ 其中

$$u_1=\sigma_2{}^2(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1{}^2)-\rho\sigma_1\sigma_2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_1\theta_2)$$

$$u_4=\sigma_2{}^2(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-2\theta_2\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_2{}^2)-\rho\sigma_1\sigma_2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_1\theta_2)$$

因此，我们可以得到

$$tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\mu)(a_i-\mu)')=\frac{1}{-2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}[$$

$$\sigma_2{}^2(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-2\theta_2\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_2{}^2+\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1{}^2)-2\rho_1\rho_2($$

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta_1\sum_{i=1}^{n}y_i+n\theta_1\theta_2)]$$

令
$$T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2,T_2=\sum_{i=1}^{n}x_i,T_3=\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2,T_4=\sum_{i=1}^{n}y_i,T_5=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

记 $$T=(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5)$$

$$g_{\theta_1,\theta_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho}(t)=(2\pi)^{-n}\left|\Sigma\right|^{-\frac{n}{2}}\exp\{\frac{1}{-2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[$$

令 $$\sigma_2^2(t_3-2\theta_2 t_4+n\theta_2^2+t_1-2\theta_1 t_2+n\theta_1^2)-2\rho_1\rho_2($$
$$t_5-\theta_2 t_2-\theta_1 t_4+n\theta_1\theta_2)]\}$$

$$h(a_1,a_2,\ldots,a_n)\equiv 1$$

则由因子分解定理，可知统计量$T=(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5)$是分布族

$\left\{N\left(\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\theta_1,\theta_2<+\infty,\sigma_1,\ \sigma_2>0,\left|\rho\right|\le 1\right\}$的充分统计量.

1.53 设 X_1, X_2,…., X_n是来自均匀分布 U（0， ）的一个样本，其中$\theta\in R^+$,证明 $X_{(n)}$=max(X_1, X_2,…., X_n)是完备统计量.

解：T(X)=$X_{(n)}$的密度函数为

$$g_\theta(t)=\begin{cases}nt^{n-1}/\theta^n & 0<t<\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$$

设$\varphi(t)$为 t 的任意实函数，满足 E$\varphi(t)$=0, 即

$\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta\varphi(t)t^{n-1}dt=0$ 对任意的

即$\int_0^\theta\varphi(t)t^{n-1}dt=0$ （*）

对上式两边关于 求导，得：

$^{n-1}\varphi(\theta)$=0, 可以推出$\varphi(\theta)$=0，对一切 ；

改 为 t, 即$\varphi(t)$=0，当 t>0 时，

故 T(X)=$X_{(n)}$是完备统计量.

1.55 下列分布族哪一个是指数族？

(1) $p_\theta(x)=2x/\theta^2$, $0<x<\theta$;

此分布族不是指数族，因为它的支撑$\{x: p_\theta(x)>0\}=(0,\theta)$依赖于未知参数$\theta$.

(2) $p_\theta(x)=1/9$, $x=\theta+0.1, \theta+0.2, \cdots,\theta+0.9$;

此分布族不是指数族，因为它的支撑$\{x: p_\theta(x)>0\}=\{\theta+0.1, \theta+0.2, \cdots,\theta+0.9\}$依赖于参数$\theta$.

(3)Poisson 分布族;

Poisson 分布族$\{P(\lambda):\lambda\in R^+\}$是指数族，因为它对计数测度的概率密度函数为

$$P_\lambda(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\exp\{x\ln\lambda\}\frac{1}{x!}=c(\lambda)\exp\{c_1(\lambda)x\}h(x)\quad x=1,2,\cdots$$

其中 $c(\lambda)=e^{-\lambda}$, $c_1(\lambda)=\ln\lambda$, $h(x)=\frac{1}{x!}$.

(4)Gamma 分布族;

Gamma 分布族$\{Ga(\alpha,\lambda):\alpha\in R^+,\lambda\in R^+\}$是指数族. 因为它对 Lebesgue 测度的密度函数为

$$P_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\exp\{-\lambda x+(\alpha-1)\ln x\}$$

$$=c(\alpha,\lambda)\exp\{c_1(\alpha,\lambda)x+c_2(\alpha,\lambda)\ln x\},\ x>0$$

其中 $c(\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $c_1(\alpha,\lambda)=-\lambda$, $c_2(\alpha,\lambda)=(\alpha-1)$.

(5)正态分布族$\{N(\theta,\theta^2),\ \theta>0\}$;

正态分布族$\{N(\theta,\theta^2),\ \theta>0\}$是指数型分布族. 因为它对 Lebesgue 测度的密度函数为

$$p_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp\{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2\theta^2}+\frac{x}{\theta}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\theta}\exp\{-\frac{1}{2\theta^2}x^2+\frac{1}{\theta}x\}=c(\theta)\exp\{c_1(\theta)x^2+c_2(\theta)x\}$$

其中 $c(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\theta}$,$c_1(\theta)=-\frac{1}{2\theta^2}$, $c_2(\theta)=\frac{1}{\theta}$.

(6) $p_\theta(x)=2(x+\theta)/(1+2\theta),\ 0<x<1,\theta>0$;

不是指数型分布族.

(7)Beta 分布族;

Beta 分布族$\{Be(a,b):a>0,b>0\}$是指数型分布族. 因为它的密度函数为

$$P_{a,b}(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp\{(a-1)\ln x+(b-1)\ln(1-x)\}$$

$$=c(a,b)\exp\{c_1(a,b)\ln x+c_2(a,b)\ln(1-x)\},0<x<1$$

其中 $c(a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$, $c_1(a,b)=a-1$ $c_2(a,b)=b-1$.

(8) $p_\theta(x)=\theta(1-\theta)^x,\ x=0,1,\cdots,0<\theta<1$;

此分布族是指数型分布族. 因为它的概率密度函数为

$$p_\theta(x)=\theta(1-\theta)^x=\theta\exp\{x\ln(1-\theta)\}=c(\theta)\exp\{c_1(\theta)x\},\ x=0,1,\cdots,0<\theta<1$$

其中 $c(\theta)=\theta, c_1(\theta)=\ln(1-\theta)$.

(9)均匀分布族 $U(\theta-0.5,\theta+0.5),\theta\in\mathbf{R}$;

$U(\theta-0.5,\theta+0.5)$不是指数族. 因为它的支撑$\{x: p_\theta(x)>0\}=(\theta-0.5,\theta+0.5)$依赖于参数 θ.

事实上，$p_\theta(x)=\begin{cases}1, & \theta-0.5<x<\theta+0.5, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(10)对数正态分布族;

对数正态分布族是指数型分布族. 因为它的密度函数为

$$P_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\ln^2 x+\frac{\mu}{\sigma^2}\ln x\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\ln^2 x+\frac{\mu}{\sigma^2}\ln x\}\frac{1}{x}$$

$$=c(\mu,\sigma)\exp\{c_1(\mu,\sigma)\ln^2 x+c_2(\mu,\sigma)\ln x\}h(x);\quad x\in R,\ \mu\in R,\sigma\in R^+.$$

其中 $c(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\}$, $c_1(\mu,\sigma)=-\frac{1}{2\sigma^2}$, $c_2(\mu,\sigma)=\frac{\mu}{\sigma^2}$, x$h(x)=\frac{1}{x}$.

(11)多项分布族;

多项分布族$\{M(n,p_1,\cdots,p_r): 0<p_i<1, p_1+\cdots+p_r=1\}$是指数型分布族. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_r)\sim M(n,p_1,\cdots,p_r)$, 参数$\theta=(p_1,\cdots,p_r)$, 其联合密度函数可表示为

$$p_\theta(x)=\frac{n!}{x_1!\cdots x_r!}p_1^{x1}\cdots p_r^{xr}=\frac{n!}{x_1!\cdots x_r!}\exp\{x_1\ln p_1+\cdots+x_r\ln p_r\}$$

$$=\exp\{\sum_{i=1}^{r}c_i(\theta)x_i\}h(x)\qquad x_1+\cdots+x_r=n,\ x_i\in N^+,\ i=1,\cdots,r.$$

其中 $c_i(\theta)=\ln p_i$, $h(x)=\frac{n!}{x_1!\cdots x_r!}$.

(12) $P_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}$,　$\mu\in R,\sigma>0, x>\mu$.

此分布族不是指数族，因为它的支撑$\{x: P_{\mu,\sigma}(x)>0\}=(\mu,+\infty)$依赖于未知参数$\mu$.。

1.56 把下列分布的密度函数写成指数族的标准形式，并指出其自然参数空间。

（1）二项分布

$$P_\theta(x)=(1-\theta)^n e^{x\ln\frac{\theta}{1-\theta}}\binom{n}{x},\ \theta\in(0,1),\ x=0,1,\cdots,n$$

其中 $c(\theta)=(1-\theta)^n, c_1(\theta)=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$，$T_1(x)=x, h(x)=\binom{n}{x}$

令 $w=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$，则$\theta=\frac{e^w}{1+e^w}$

则标准形式为：$p_w(x)=(1+e^w)^{-n}e^{wx}\binom{n}{x}$，$x=0,1,\cdots,n$

其自然参数空间为:Ω=（-∞，+∞）

（2）泊松分布

$P(x,\theta)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}=e^{-\theta}\exp\{x\ln\theta\}\frac{1}{x!}$

其中 $c(\theta)=e^{-\theta}$, $c_1(\theta)=\ln\theta$, $T_1(x)=x$, $h(x)=\frac{1}{x!}$

令 $w=\ln\theta$,则$\theta=e^w$

则标准形式为：$p_w(x)=\exp\{-e^w\}\exp\{wx\}\frac{1}{x!}$

其自然参数空间：Ω=（0, +∞）

(3)Gamma 分布

$P_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\exp\{-\lambda x+(\alpha-1)\ln x\}$

其中 $c(\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $c_1(\alpha,\lambda)=-\lambda$, $c_2(\alpha,\lambda)=(\alpha-1)$, $T_1(x)=x$, $T_2(x)=\ln x$, $h(x)=1$

令 $w_1=-\lambda$, $w_2=\alpha-1$,则$\lambda=-w_1$, $\alpha=w_2+1$

则标准形式为：$p_w(x)=\frac{(-w_1)^{w_2+1}}{\Gamma(w_2+1)}\exp\{w_1x+w_2\ln x\}$

其自然参数空间Ω=$R\times R^+$

(4)二元正态分布

$$P_\theta(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}]\}\exp\{\frac{x_1^2}{\sigma_1^2}+(\frac{2\rho\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2})x_1-2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{2\rho\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2})x_2+\frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\}$$

其中 $c(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}]\}$,

$c_1(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=\frac{1}{\sigma_1^2}$, $c_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=\frac{2\rho\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}$, $c_3(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=-2\rho\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}$,

$c_4(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=\frac{2\rho\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}$, $c_5(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2)=\frac{1}{\sigma_2^2}$, $T_1(x)=x_1^2$, $T_2(x)=x_1$, $T_3(x)=x_1x_2$

$T_4(x)=x_2$, $T_5(x)=x_2^2$

令 $w_1=\frac{1}{\sigma_1^2}$, $w_2=\frac{2\rho\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}$, $w_3=-2\rho\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}$, $w_4=\frac{2\rho\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}$, $w_5=\frac{1}{\sigma_2^2}$

则 标 准 形 式 为 : $p_w(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{w_1 w_5(4-w_1 w_5 w_3^2)}}$

$\exp\{\frac{w_5w_2^2+w_1w_4^2-w_1 w_2 w_3 \cdot w_4w_5}{4w_1w_5-w_1^2 w_3^2 w_5^2}\}\exp\{w_1 x_1^2+w_2 x_1+w_3 x_1x_2+w_4 x_2+w_5 x_2^2\}$

其自然参数空间$\Omega=R^+\times R\times R^-\times R\times R^+$

2.2 设X_1,X_2独立同分布，其密度函数为$p(x,\theta)=k\theta^k x^{-(k+1)},x>\theta,\theta>0,k>2$已知。

（1）证明$T_1=\frac{k-1}{2k}(x_1+x_2)$和$T_2=\frac{k-1}{2k}\min(x_1,x_2)$都是$\theta$的无偏估计

（2）计算T_1和T_2的均方误差并进行比较

（3）证明：在均方误差的意义下，在形如

$T_c=\min(x_1,x_2)$估计中，$c=\frac{2k-2}{2k-1}$时最优

（4）如果 1<k≤2,则T_1的方差为无穷大而T_2的方差有限;如果 k=1,你用什么估计

解（1）

$EX=\int_0^{+\infty}xk\theta^k x^{-(k+1)}dx=\frac{k}{k-1}\theta$

由于X_1,X_2独立同分布，所以

$ET_1=E(\frac{k-1}{k}X)=\theta,\text{for}ET_2$

$P(\min(x_1,x_2)\le y)=1-P(\min(x_1,x_2)>y)$

$=1-p(x_1>y,x_2>y)$

$=1-p(x_1>y)^2=1-\left[\int_y^{+\infty}k\theta^k x^{-(k+1)}\right]^2$

$=1-\frac{\theta^{2k}}{y^{2k}}then$密度函数为$\frac{2k\theta^{2k}}{y^{2k+1}}$

$ET_2=\frac{2k-1}{2k}\int_\theta^{+\infty}2ky\frac{\theta^{2k}}{y^{2k+1}}dy=\frac{2k-1}{2k}\int_\theta^{+\infty}2k\frac{\theta^{2k}}{y^{2k}}dy$

$=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k}{2k-1}\theta=\theta$所以$T_1$和$T_2$均为$\theta$的无偏估计

(2）下面计算T_1和T_2的均方误差，由于它们都是无偏估计，因此均方误差就等于方差

$$D(T_1)=D(\frac{K-1}{K}\bar{x})=(\frac{K-1}{K})^2 D(\bar{x})$$

$$=(\frac{K-1}{K})^2\times\frac{1}{2}\times(\frac{K}{K-2}\theta^2-(\frac{K}{K-1}\theta)^2)$$

$$=\frac{1}{2(k^2-2K)}\theta^2\text{同理可得}$$

$$D(T_2)=(\frac{2K}{2K\text{-}1})^2\times(\int_\theta^{+\infty}2k\,y^2\frac{\theta^{2k}}{y^{2k+1}}dy-(\int_\theta^{+\infty}2k\,y^2\frac{\theta^{2k}}{y^{2k+1}}dy)^2)$$

$$=(\frac{2K}{2K\text{-}1})^2\times(\frac{K}{K-1}\theta^2-(\frac{2K}{2K-1}\theta)^2)$$

$$=\frac{1}{4k(k-1)}\theta^2\text{因而在}k>2\text{的情况下},T_1\text{的均方误差大于}$$

T_2的均方误差

（3)在均方误差的意义下，如果形如

$T_c=c\min(x_1,x_2)$估计中

令$T_c=c\min(x_1,x_2)=cy,MSE\,T_c=E(cy-\theta)^2$

$$=\int_\theta^{+\infty}(cy-\theta)^2\frac{2k\theta^{2k}}{y^{2k+1}}dy$$

$$=\frac{k\theta^2}{k-1}c^2+\frac{4k\theta^2}{1-2k}c+\theta^2$$

因为在$c=\dfrac{2k-2}{2k-1}$时上式取极值，因此此时估计最优

（4)当 1<k$\leq$2 时，由上面算的T_1,T_2知道，

K=2 时T_1的方差为无穷大，T_2的方差为有限值，如果 k=1，用极大似然估计

2.3 设$\theta\in(a,b)$，$T(x)$是θ的无偏估计，令

$$S(x)=\begin{cases}T(x),a\leq T(x)\leq b\\ a,T(x)<a\\ b,T(x)>b\end{cases}$$

证明：$E\left(S(X)-\theta\right)^2 \le E\left(T(X)-\theta\right)^2$.

证明：因为$\theta \in (a,b)$，所以当$a \le T(x) \le b$时，

$$S(x)=T(x)，\left(S(X)-\theta\right)^2=\left(T(X)-\theta\right)^2；$$

当$T(x)<a$时，

$$S(x)=a，\left(S(X)-\theta\right)^2<\left(T(X)-\theta\right)^2；$$

当$T(x)>b$时，

$$S(x)=b，\left(S(X)-\theta\right)^2<\left(T(X)-\theta\right)^2.$$

故

$$\left(S(X)-\theta\right)^2 \le \left(T(X)-\theta\right)^2，$$

从而

$$E\left(S(X)-\theta\right)^2 \le E\left(T(X)-\theta\right)^2.$$

2.7 X_1，X_2，**…,** X_n**独立同分布，E**X_1**=**μ**，Var（**X_1**）<**∞**，证明：**

$\hat{\mu}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$**是** μ **的相合估计.**

证明：设 Var（X_1）=$\sigma^2<\infty$

首先有 E（$\hat{\mu}$）=E（$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$）

$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iE(X_i)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\mu$$

$$=\frac{2\mu}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{2\mu}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\mu\ .$$

Var（$\hat{\mu}$）= Var（$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$）

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n(n+1)}\right)^2 \mathrm{Var}(X_i)$$

$$=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}$.

则对于$\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式，有

$$P(|\hat{\mu}-E(\hat{\mu})|\geq\varepsilon)\leq Var(\hat{\mu})/\varepsilon^2.$$

当 $n\to\infty$时，$Var(\hat{\mu})=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}\to 0$，

从而 $P(|\hat{\mu}-E(\hat{\mu})|\geq\varepsilon)\leq 0$，

由此 $P(|\hat{\mu}-E(\hat{\mu})|\geq\varepsilon)=0$，即 $P(|\hat{\mu}-\mu|\geq\varepsilon)=0$.

综上：$\forall\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\mu}-\mu|\geq\varepsilon)=0$，即$\hat{\mu}$依概率收敛于$\mu$，

也即是$\hat{\mu}$是μ 的相合估计.

2.17

（1） 证明：由题意知，$X_0,X_1,\ldots,X_n$的联合分布为

$$p(x_0,x_1,\ldots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}|B|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}X'B^{-1}X\}$$

其中，$|B|=\begin{vmatrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \ldots & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \ldots & \rho\sigma^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \ldots & \sigma^2\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}=\sigma^{2(n+1)}\begin{vmatrix}1 & \rho & \ldots & \rho\\ \rho & 1 & \ldots & \rho\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho & \rho & \ldots & 1\end{vmatrix}$

$$=\sigma^{2(n+1)}(1+n\rho)\begin{vmatrix}1 & \rho & \ldots & \rho\\ 1 & 1 & \ldots & \rho\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \rho & \ldots & 1\end{vmatrix}=\sigma^{2(n+1)}(1+n\rho)\begin{vmatrix}1 & \rho & \ldots & \rho\\ 0 & 1-\rho & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1-\rho\end{vmatrix}$$

$=\sigma^{2(n+1)}(1+n\rho)(1-\rho)^n$

则 $|B|^{-\frac{1}{2}}=\sigma^{-(n+1)}(1+n\rho)^{-\frac{1}{2}}(1-\rho)^{-\frac{n}{2}}$

$B=(1-\rho)\sigma^2 I+\rho\sigma^2 J\triangleq aI+bJ$ 又由提示知，$(aI+bJ)^{-1}=cI+dJ$ $J^2=(n+1)J$

则 $(aI+bJ)(cI+dJ)=I$

从而$\begin{cases}ac+ad+bc+(n+1)bd=1\\ ad+bc+(n+1)bd=0\end{cases}$ 得出 $ac=1$ 解得$\begin{cases}c=\dfrac{1}{(1-\rho)\sigma^2}\\ d=-\dfrac{\rho}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}\end{cases}$

$B^{-1}=\frac{1}{(1-\rho)\sigma^2}$ I-$-\frac{\rho}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}$ J=$\frac{1}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}$ [(1+nρ)I-ρJ]

$X^{'}$ B^{-1}X=$\frac{1}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}$ [(1+nρ) $X^{'}$ IX－ ρ $X^{'}$ JX]

$$=\frac{1}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}\left[(1+n\rho)\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\rho\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2\right]$$

p(x_0 , x_1 ,…, x_n)= $(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}$ $\sigma^{-(n+1)}(1+n\rho)^{-\frac{1}{2}}(1-\rho)^{-\frac{n}{2}}$ exp{ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{(1-\rho)(1+n\rho)\sigma^2}$ [(1+nρ) $\sum_{i=0}^{n}x_i^2$ － ρ $\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2$]} 从而联合分布为指数族.

由因子分解定理得（ $\sum_{i=0}^{n}X_i^2,\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2$ ）是充分统计量.由课本定理 1.15，知（ $\sum_{i=0}^{n}X_i^2,\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2$ ）为完备统计量.从而（ $\sum_{i=0}^{n}X_i^2,\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2$ ）为完备充分统计量.

（2）解：由 E($\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}X_i^2$)= $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}EX_i^2=\sigma^2$，从而 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}X_i^2$ 为 σ^2 的无偏估计

E $\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2$ =D（ $\sum_{i=0}^{n}X_i$ ）＋ $\left(E\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2$ = D（ $\sum_{i=0}^{n}X_i$ ）＝ $\sum_{i=0}^{n}DX_i+2\sum_{0\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$

=（n＋1） σ^2 +2(n+1) $\rho\sigma^2$

而 $E\left[\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2-\sum_{i=0}^{n}X_i^2}{2(n+1)}\right]$

$$=\frac{1}{2(n+1)}E[(\sum_{i=0}^{n}X_i)^2-(\sum_{i=0}^{n}X_i^2)]=\frac{1}{2(n+1)}[2(n+1)\rho\sigma^2]=\rho\sigma^2$$

从而 $\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)^2-\sum_{i=0}^{n}X_i^2}{2(n+1)}$ 为 $\rho\sigma^2$ 的无偏估计.

又（$\sum_{i=0}^{n} X_i^2, \left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right)^2$）为完备充分统计量，从而 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} X_i^2$ 和 $\frac{\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right)^2-\sum_{i=0}^{n} X_i^2}{2(n+1)}$ 是 σ^2 和 $\rho\sigma^2$ 的 UMVUE.

2.20

证明：令 $\varphi(\mathrm{x})=\mathrm{T}(\mathrm{x})-\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x})$，则 $E(\varphi(\mathrm{x}))=0$，且 $Var(\varphi(\mathrm{x}))<\infty$，

则 $Cov(\mathrm{T}(\mathrm{x}),\varphi(\mathrm{x}))=0$，即 $Cov(\mathrm{T(x)},\mathrm{T(x)}\text{-}\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))=\mathrm{Var}(\mathrm{T(x)})-Cov(\mathrm{T(x)},\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))=0$，

故 $Cov(\mathrm{T(x)},\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))=\mathrm{Var}(\mathrm{T(x)})\geq 0$，得证.

当 $\hat{g}$ 也为 $g(\theta)$ 的 $UMVUE$ 时，$Cov(\mathrm{T(x)},\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))=\mathrm{Var}(\mathrm{T(x)})=\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))$，则

$$Corr(\mathrm{T(x)},\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))=\frac{Cov(\mathrm{T(x)},\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))}{\sqrt{Var(\mathrm{T(x)})}\sqrt{Var(\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{x}))}}=1,$$

以上各步可逆，问题得证.

2.21 证明：若 $T_1(X),T_2(X)$ 分别是 $g_1(\theta),g_2(\theta)$ 的 UMVUE,则 $T_1(X)+T_2(X)$ 是 $g_1(\theta)+g_2(\theta)$ 的 UMVUE.

证：设 S(X)是$\{P_{\theta},\theta\in\Theta\}$的完备充分统计量，$T_1(X)$、$T_2(X)$分别是 $g_1(\theta)$、$g_2(\theta)$的 UMVUE，φ_1（X）和 φ_2（X）分别是 $g_1(\theta)$、$g_2(\theta)$的无偏估计。

根据引理 2.2 和定理 2.3：$T_1(X)=E(\varphi_1(X)|S(X))$，$T_2(X)=E(\varphi_2(X)|S(X))$，

且 $E(T_1(X))=E(E(\varphi_1(X)|S(X)))=E(\varphi_1(X))=g_1(\theta)$,

$E(T_2(X))=E(E(\varphi_2(X)|S(X)))=E(\varphi_2(X))=g_2(\theta)$.

$E(T_1(X)+T_2(X))=g_1(\theta)+g_2(\theta)=E(E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))|S(X)))$，即 $T_1(X)+T_2(X)$是 $g_1(\theta)+g_2(\theta)$的无偏估计。又

$Var(\varphi_1(X)+\varphi_2(X))=E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))))^2$

$=E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))^2$

$=E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X))+(T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))^2=E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X)))^2+E((T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))^2+2E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X))(T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))\geq Var(T_1(X)+T_2(X))$

上式中 $E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X)))^2\geq 0$，交叉项 $2E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X))(T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))=2E\{E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X))(T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta))|S(X))\}=2E\{((T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta))E((\varphi_1(X)+\varphi_2(X))-(T_1(X)+T_2(X)))|S(X))\}=0$,而 $E((T_1(X)+T_2(X))-(g_1(\theta)+g_2(\theta)))^2=Var(T_1(X)+T_2(X))$。

2.22 设$T(x)$是$g(\theta)$的 **UMVUE**，$T_1,T_2\in U_g$，且$Var(T_i)=k_iVar(T)$，$i=1,2$，k_i可与θ有关。记$\rho=\dfrac{Cov(T_1,T_2)}{(Var(T_1)Var(T_2))^{1/2}}$，　$\alpha_i=1/k_i$，$i=1,2$

证明：$(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}-[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]^{1/2}\le\rho\le(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}+[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]^{1/2}$　　（**1**）

特别地，若$S(X)\in U_g$,且$Var(S)=kVar(T)$，**则**T与S **的相关系数**

$$\rho(S,T)=k^{-1/2}.\qquad（2）$$

证明：①令$T_a=aT_1+(1-a)T_2$，则$T_a\in U_g$，$Var(T_a)=Var(aT_1+(1-a)T_2)\ge Var(T)$成立。

展开即：$a^2Var(T_1)+(1-a)^2Var(T_2)+2Cov(aT_1,(1-a)T_2)\ge Var(T)$恒成立

代入ρ后整理得：$a^2k_1+(1-a)^2k_2+2a(1-a)\rho\sqrt{k_1k_2}\ge1$，

它至多只有一个a能使“=”成立

故 $\Delta\le0$即：$\Delta=4(\rho\sqrt{k_1k_2}-k_2)^2-4(k_1+k_2-2\rho\sqrt{k_1k_2})\le0$

令$\alpha_i=1/k_i,i=1,2$代入得：$\rho^2-2\rho\sqrt{\alpha_1\alpha_2}+\alpha_1+\alpha_2-1\le0$

解得：$(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}-[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]^{1/2}\le\rho\le(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}+[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]^{1/2}$即（1）成立。

②若$S(X)\in U_g$,且$Var(S)=kVar(T)$，此时令$T_1=S,T_2=T,$则$k_1=k,k_2=1$，此时$\alpha_1=1/k_1,\alpha_2=1$。

由T_1,T_2的任意性，显然也能使（1）式成立。

代入（1）即得$\rho=\rho(S,T)=k^{-1/2}$.即（2）也成立。

2.23

证明：由于 T(X)是一致无偏最小统计量，

所以 E（T(X)）= g（θ）且 T(x)是充分统计量的函数

∵u（x）∈ u_g则 E[u(x)]= g(θ)

由于（1- a）V=T- a U

则 V 也是无偏估计。

由　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　于

$Var(v)-Var(u)$ =E $[v-g(\theta)]^2$ - $E[T(X)$-g（$\theta)]^2$ - $E[U-T(X)]^2$ +

$E[T(X)-g(\theta)]^2$= $E[V-T(\mathrm{x})]^2$-$E[U-T(X)]^2$

$=E[a(V-U)]^2-E[(1-a)(U-V)]^2$

$=[2a-1]E[U-V]^2$

则当 a<1/2 时，$Var(V)-Var(U)<0$;

当 $a=1/2$时，$Var(V)-Var(U)=0$;

当 $a>1/2$时，$Var(V)-Var(U)>0$;

（2）由于

$$V=\frac{(n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+(n\overline{x})^2}{n(n-1)}$$

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}=\frac{\sum_{1}^{n}x_i{}^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{x}+(n\overline{x})^2}{n-1}$$

$$=\frac{n\sum_{1}^{n}x_i{}^2-(\sum_{1}^{n}x_i)^2}{n(n-1)}$$

所以 U+V=$\dfrac{(2n-2)\sum_{i}^{n}x_i{}^2}{n(n-1)}$

则 1/2U+1/2V=$\dfrac{\sum_{1}^{n}x_i{}^2}{n}$

后目的证明$\dfrac{\sum_{1}^{n}x_i{}^2}{n}$是方差的一致无偏最小估计，

所以，由第一问可得：$VarU=VarV$;

由 p64 知 $T_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是完备统计量，且 $E\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}=1/n\times n\theta=\theta$，

（由于 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ～Ga(n/2, 1/2θ)

$\therefore E(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)=\frac{n/2}{1/2\theta}=n\theta$ ）

则 $E(\sum_{i=1}^{n}x_i^2/n)=\theta$,

则E(1/2U+1/2V)=1/2EU+1/2EV=θ;

由于 U 是θ的一致无偏最小估计，则EU=θ;

所以EV=θ=EU.

2.26 设{ $p(x;\theta)$，$\theta\in$（ a,b ）}为一概率密度函数族，假定

（1） $\int x^2p(x;\theta)dx=\alpha_2(\theta)<\infty$;

（2） $\int p(x;\theta)dx=1$，$\int xp(x;\theta)dx=\alpha_1(\theta)$ **可在积分号下求导；**

（3） $I(\theta)=E(\partial\ln p(x;\theta)/\partial\theta)^2<\infty$**,则**

$$I(\theta)\geq\frac{(\partial\alpha_1(\theta)/\partial\theta)^2}{\sigma^2(\theta)}\text{，其中 }\sigma^2(\theta)=\alpha_2(\theta)-(\alpha_1(\theta))^2$$

证明：设 $S(x)=\partial\ln p(x;\theta)/\partial\theta$

$$I(\theta)=E(\partial\ln p(x;\theta)/\partial\theta)^2=ES^2(x)$$

$$\because\ ES(x)=0\ \therefore ES^2(x)=DS(x)$$

$$\sigma^2(\theta)=\alpha_2(\theta)-\alpha_1^2(\theta)=E(X^2)-(EX)^2=DX$$

$$(\partial\alpha_1(\theta)/\partial\theta)^2=(\int x\partial p(x;\theta)/\partial\theta dx)^2=(\int xS(x)p(x;\theta)dx)^2$$

$$\because\ S(x)=\partial\ln p(x;\theta)/\partial\theta=\frac{\frac{\partial p(x;\theta)}{\partial\theta}}{p(x;\theta)}$$

$$\because\ (\int xS(x)p(x;\theta)dx)^2=\left[EXS(x)\right]^2$$

又 $\rho^2(X,S(X))=(\frac{\mathrm{cov}(X,S(x))}{\sqrt{DX}\sqrt{DS(x)}})^2=\frac{(EXS(x)-ES(x)EX)^2}{DXDS(x)}=\frac{[EXS(x)]^2}{DXDS(x)}\le 1$

则 $[EXS(x)]^2\le DX\cdot DS(x)$

从而：$I(\theta)\ge\frac{(\partial\alpha_1(\theta)/\partial\theta)^2}{\sigma^2(\theta)}$

1.27

解： p(x;θ)=θp_1(θ)+(1-θ)p_2(θ),而且 X_1，X_2，…，X_n 来自该分布的一个样本。

设 J=$\int_R p_1(\theta)p_2(\theta)/p(x;\theta)dx$

于是：

$$I_1(\theta)=-E_\theta\{\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\}=E_\theta\{\frac{(p_1(x)-p_2(x))^2}{(p(x;\theta))^2}\}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(x)^2+p_2(x)^2-2p_1(x)p_2(x)}{p(x;\theta)}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{\theta}p_1(x)-\frac{1-\theta}{\theta}\frac{p_1(x)p_2(x)}{p(x;\theta)}+\frac{1}{1-\theta}p_2(x)-\frac{\theta}{1-\theta}\frac{p_1(x)p_2(x)}{p(x;\theta)}-\frac{2p_1(x)p_2(x)}{p(x;\theta)}]dx$$
$$=\frac{1}{\theta}-\frac{1-\theta}{\theta}J+\frac{1}{1-\theta}-\frac{\theta}{1-\theta}J-2J$$
$$=\frac{1-J}{\theta(1-\theta)}$$

对于重复抽样问题，Fisher 信息矩阵为 $I(\theta)=nI_1(\theta)=\frac{n(1-J)}{\theta(1-\theta)}$

所以 θ 的无偏估计的 C-R 下界为：θ(1-θ)/n((1-J))

（第二问还有点问题，请大家指正啊）

2.28 （1）设 T(X)是 g(q)的无偏估计，并设 Cramer-Rao 正则条件满足。

证明：T(X)是 g(q)的有效无偏估计的充要条件是存在 a(θ),使得

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}=a(\theta)(T(X)-g(\theta))$$

其中 l= l (θ;x)表示对数似然函数。

（2）在（1）中，我们指出，若存在 g(θ)的无偏估计 T(X)，使 T(X) − g(θ)是 $\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta}$ 的线性函数（L 是似然函数），则 T(X)是 g(θ)的有效无偏估计，在多数情况下，找不到满足这样条件的 T(X)，然而，有时可能存在 g(θ)的无偏估计 T(X) 满足 T(X) − g(θ)是 $\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta},\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2},\ldots$ 的线性函数，它也是最优的无偏估计，达到下

面介绍的 **Bhattacharyya** 下界，它改进了 **C-R** 下界。

假设 **Cramer-Rao** 正则条件满足，记 $L^{(r)}=\frac{\partial^r L}{\partial\theta^r}, g^{(r)}=\frac{\partial^r g(\theta)}{\partial\theta^r}, r=1,\ldots,k.$ 假定

$I_{rs}=E(\frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(s)}}{L})\neq 0, r,s=1,\ldots,k$，**T(X)**是 **g(θ)**的无偏估计，证明：

$$Var(T)\geq\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1}g^{(r)}$$

且等号成立的充要条件是

$$T(X)-g(\theta)=\sum_{r=1}^{k}(\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1})\frac{L^{(r)}}{L}$$

此处 $\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1}g^{(r)}$ 称为 **g(θ)**的无偏估计的 **Bhattacharyya** 下界；

（**3**）设 X_1，…，X_n 是来自 **N(θ,1)** 的样本，记 $T(X)=\overline{X^2}-\frac{1}{n}$，证明：

T(X)是 θ^2 的无偏估计，且 **T(X) - θ^2**是 $\frac{L^{(r)}}{L}$ 和 $\frac{L^{(s)}}{L}$ 的线性函数，从而 **T(X)**是 θ^2 的

UMVUE 且方差达到 k= 2 时的 Bhattacharyya 下界。

解：“$\Rightarrow$”由于 T(X)是 g(θ)的有效无偏估计

故由 P107 定理 2.7 的 2.18 式

$$S_\theta(x)=\frac{I(\theta)}{g'(\theta)}(T(X)-g(\theta))$$

取 a(θ)= $\frac{I(\theta)}{g'(\theta)}$ 即可

“$\Leftarrow$”由于 $S_\theta(x)=\frac{\partial l}{\partial\theta}=a(\theta)(T(X)-g(\theta))$

故 $I(\theta)=-E_\theta[\frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}]=a(\theta)g'(\theta)$

注：直接带入 S(x)的表达式即可

故其 C-R 下界为 $[g'(\theta)]^2 I^{-1}(\theta)=g'(\theta)/a(\theta)$

取 $W= T(x) - g(\theta) - g'(\theta)I^{-1}S_\theta(x)$

可知 EW= 0

$VarW=Var(T(x)) - [g'(\theta)]^2 I^{-1}$ 1 式 过程

见 P107

再将 $S_\theta(x)=a(\theta)(T(X)-g(\theta))$ 带入又可得到

VarW = $[1-g'(\theta)I^{-1}a(\theta)]^2$VarT(x)　　　　　　　　2 式

联立 1 式，2 式可得

VarT(x)=$g'(\theta)/(2a(\theta)=-g'(\theta)I^{-1}a^2(\theta))=g'(\theta)/a(\theta)$　　代入 $I(\theta)=a(\theta)g'(\theta)$即可

即 T(X)是 g(θ)的有效无偏估计

总结（1）

从左到右利用了定理 2.7 的方法，构造 W= $T(x)-g(\theta)-g'(\theta)I^{-1}S_\theta(x)$

从右到左利用了定理 2.8 的方法，分别求出 VarT(X)和 C-R 下界，判断是否相等

（2）令 W= $T(X)-g(\theta)-\sum_{r=1}^{k}(\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1})\frac{L^{(r)}}{L}$

EW = 0

VarW = $Var(T)-\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1}g^{(r)}\geq 0$

故 $Var(T)\geq\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1}g^{(r)}$

“⇒”若等号成立

则 VarW = 0

又 EW=0

故 W= 0

可得 $T(X)-g(\theta)=\sum_{r=1}^{k}(\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1})\frac{L^{(r)}}{L}$

“⇐”若 $T(X)-g(\theta)=\sum_{r=1}^{k}(\sum_{s=1}^{k}g^{(s)}I_{rs}^{-1})\frac{L^{(r)}}{L}$

则 VarW= 0

即等号成立

注：　证明过程中利用到了下面的这个性质

$$\rightarrow \int \frac{L^{(a)}}{L}\frac{L^{(b)}}{L}dx\int \frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(s)}}{L}dx = \int \frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(a)}}{L}dx\int \frac{L^{(b)}}{L}\frac{L^{(d)}}{L}dx$$

注：这个是因为积分顺序可以交换

$$\rightarrow E(\frac{L^{(a)}}{L}\frac{L^{(b)}}{L})E(\frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(s)}}{L}) = E(\frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(a)}}{L})E(\frac{L^{(b)}}{L}\frac{L^{(d)}}{L})$$

$$\rightarrow \frac{1}{E(\frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(a)}}{L})}\frac{E(\frac{L^{(a)}}{L}\frac{L^{(b)}}{L})}{1}\frac{1}{E(\frac{L^{(b)}}{L}\frac{L^{(d)}}{L})} = \frac{1}{E(\frac{L^{(r)}}{L}\frac{L^{(s)}}{L})}$$

$$\rightarrow \mathrm{I}_{ra}^{-1}\mathrm{I}_{ab}\mathrm{I}_{bs}^{-1} = \mathrm{I}_{rs}^{-1}$$

（3）X_1，…，$X_n \sim N(\theta,1)$

$\rightarrow \overline{X} \sim N(\theta,1/n)$

$\rightarrow 1/n = Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - (E\overline{X})^2 = E(\overline{X}^2) - \theta^2$

$\rightarrow E(\overline{X}^2)-=\theta^2 + 1/n$

$\rightarrow E(\overline{X}^2-1/n) = E(\overline{X}^2) - 1/n = \theta^2$

故 T(X)是θ^2的无偏估计

又由于 $L=$ （2π）$^{-n/2}$ $*\exp(-\Sigma(x_i-\theta)^2/2)$

故课分别求得

$L^{(1)}= -\Sigma(x_i-\theta)*(2\pi)^{-n/2}*\exp(-\Sigma(x_i-\theta)^2/2)$

$L^{(2)}= \{[\Sigma(x_i-\theta)]^2-n\}*(2\pi)^{-n/2}*\exp(-\Sigma(x_i-\theta)^2/2)$

故 $\frac{L^{(r)}}{L} = -n\theta + n\overline{X}$

$\frac{L^{(s)}}{L} = -n\theta+[\Sigma(x_i-\theta)]^2 = -n + n^2\theta^2 + n^2\overline{X}^2 - 2n^2\theta\overline{X}$

利用待定系数法

设 $T(X) - \theta^2 = \alpha\frac{L^{(r)}}{L} + b\frac{L^{(s)}}{L}$

可求得 $a = -2\theta/n$，$b = 1/n^2$

即 T(X) - θ^2是$\frac{L^{(r)}}{L}$和$\frac{L^{(s)}}{L}$的线性函数，从而 T(X)是θ^2的 UMVUE 且方差达到 k= 2 时的 Bhattacharyya 下界。

2.30 设 $X_1,...,X_n$ 是来自二项分布 $b(k,p)$ 的样本，k,p 未知

（1）证明：$n=1$ 时参数不可估；

（2）设 $n\ge 2$，求 k,p 的矩估计；

（3）求（2）中估计的渐进分布

解:（1）证：根据替换原理知：由样本均值估计总体均值，样本方差估计总体方差，从而得出最小样本总量为 2，所以 $n=1$ 时参数不可估。得证。

（2）易得：

$$EX=kp, VarX=kp(1-p)$$

从而

$$\overline{X}=kp, S^2=kp(1-p)$$

则：

$$\hat{p}=1-\frac{S^2}{\overline{X}}, \hat{k}=\frac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S^2}$$

为 k,p 的矩估计。

（3）设 $\theta=\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}, \hat{\theta}=\begin{pmatrix}\hat{k}\\\hat{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S^2}\\\dfrac{\overline{X}-S^2}{\overline{X}}\end{pmatrix}$

又由于：$\begin{cases}\mu_1=kp\\\mu_2-\mu_1^2=kp(1-p)\end{cases}$

则 $\begin{cases}k=\dfrac{\mu_1^2}{\mu_1-\mu_2+\mu_1^2}\\p=\dfrac{\mu_1-\mu_2+\mu_1^2}{\mu_1}\end{cases}$

$$\theta=\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mu_1^2}{\mu_1-\mu_2+\mu_1^2}\\\dfrac{\mu_1-\mu_2+\mu_1^2}{\mu_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(\mu_1,\mu_2)\\g_2(\mu_1,\mu_2)\end{pmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\mu_2-\mu_1^2 & \mu_3-\mu_1\mu_2\\\mu_3-\mu_1\mu_2 & \mu_4-\mu_2^2\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_2}\\ \frac{\partial g_2}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\mu_1-2\mu_1\mu_2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2} & \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2}\\ \frac{\mu_1^2+\mu_2}{\mu_1^2} & -\frac{1}{\mu_1}\end{pmatrix}$$

由定理 2.10 可知：

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\xrightarrow{L}N_S(0,G\Sigma G')$$

其中：

$$G\Sigma G'=\begin{pmatrix}\frac{\mu_1-2\mu_1\mu_2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2} & \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2}\\ \frac{\mu_1^2+\mu_2}{\mu_1^2} & -\frac{1}{\mu_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_2-\mu_1^2 & \mu_3-\mu_1\mu_2\\ \mu_3-\mu_1\mu_2 & \mu_4-\mu_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mu_1-2\mu_1\mu_2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2} & \frac{\mu_1^2+\mu_2}{\mu_1^2}\\ \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2+\mu_1^2)^2} & -\frac{1}{\mu_1}\end{pmatrix}$$

2.33 $X_1,\cdots,X_n$ **为独立同分布变量，** $\Pr(X_1=k)=p_k(\theta),k=1,\cdots,K$ **以** N_k **表示** $X_i=k$ **的个数，设** $p_k(\theta)$ **对所有** θ **可微，导数不为 0.**

（1）固定 k，求由 $p_k\left(\hat{\theta}_k\right)=\frac{N_k}{n}$ **得到的估计** $\hat{\theta}_k$ **的渐进分布；**

（2） $\hat{\theta}_k$ **是否是相合估计？给一个** $\hat{\theta}_k$ **的渐近方差到位相合估计.**

解：此估计为频数替换估计。由引理 2.11 可得

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_k-\theta_k)\xrightarrow{L}N(0,\sigma_k^2)$，其中 $\hat{\theta}_k=p_k^{-1}\left(\frac{N_k}{n}\right)=h(\frac{N_k}{n})$， $h(p_k(\theta_k))=\theta_k$

且 $\sigma_k^2=\sum_{i=1}^{k}p_i(\theta_i)(\frac{\partial h}{\partial p_i(\theta_i)})^2-(\sum_{i=1}^{k}p_i(\theta_i)(\frac{\partial h}{\partial p_i(\theta_i)}))^2$

$$=\frac{p_k(\theta_k)}{p_k^{'}(\theta_k)^2}-\frac{p_k(\theta_k)^2}{p_k^{'}(\theta_k)^2}=\frac{p_k(\theta_k)(1-p_k(\theta_k))}{p_k^{'}(\theta_k)^2}.$$

(2) 由于 $\hat{\theta}_k$ 是由 $p_k\left(\hat{\theta}_k\right)=\frac{N_k}{n}$ 得到，则 $\hat{\theta}_k\xrightarrow{P}\theta_k$，从而 $\hat{\theta}_k$ 使相合估计.

又σ_k^2是θ_k的连续函数且$\hat{\theta}_k$是的相合估计，则由定理 2.1 可知，$\hat{\theta}_k$的渐进方差的相合估计为$\dfrac{p_k(\hat{\theta}_k)(1-p_k(\hat{\theta}_k))}{p_k^{'}(\hat{\theta}_k)^2}$.

2.38 设$X_1,...,X_n$是来自$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，记$\theta=(\mu,\sigma^2)$，固定c，令$q_c(\theta)$表示c下方的总体的比例。

(2)试求$q_c(\theta)$的 MLE。

(3)试证$q_c(\theta)$的 UMVUE 为

$$T(x)=\begin{cases}0, & kV\le -1\\ G(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}kV), & kV\in(-1,1)\\ 1, & kV\ge 1\end{cases}$$

其中

$$k=\sqrt{n}/(n-1)$$

$$V=(c-\overline{X})/\hat{\sigma}\left(\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2\right)$$

$G(\cdot)$表示 Beta 分布$Be\left(\frac{1}{2}(n-2),\frac{1}{2}(n-2)\right)$的分布函数。

解：（1）根据题意有：

$$l(\mu,\sigma^2;x)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial(\mu,\sigma^2;x)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial(\mu,\sigma^2;x)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

从而可以解出：

$$\hat{\mu}_{ML}=\overline{x},\hat{\sigma}_{ML}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

因为$q_c(\theta)$表示c下方的总体的比例，则：

$$q_c(\theta)=p(X\le c)$$

$$=\Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$$

由 MLE 的不变性可得 $q_c(\theta)$ 的 MLE 为：

$$q_c(\hat{\theta})=\Phi(\frac{c-\hat{\mu}_{ML}}{\hat{\sigma}_{ML}})$$

（2）令 $\varphi(X)=\begin{cases}1, & X\le c\\ 0, & 其他\end{cases}$

则 $E\varphi(X)=P(X\le c)$，即 $\varphi(X)$ 是 $q_c(\theta)$ 的无偏估计，但由于它不是充分完备统计量$(\bar{X},\hat{\sigma}^2)$的函数，故不是 UMVUE。设 $q_c(\theta)$ 的 UMVUE 为 $T(x)$，则：

$$T(x)=E[\varphi(X)\,|\,\bar{X}]$$

$$=p(X\le c\,|\,\bar{X})$$
$$=p(X-\bar{X}\le c\,|\,c-\bar{X}\,|\,\bar{X})$$

易证 $\mathrm{cov}(X-\bar{X},\bar{X})=0$，则 $X-\bar{X}$与$\bar{X}$ 相互独立，则：

$$T(x)=p(X-\bar{X}\le c-\bar{X}\,|\,\bar{X})$$

$$=F^*(c-\bar{X})$$

F^* 为 $X-\bar{X}$ 的分布函数，由于 $X-\bar{X}\sim N(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2)$，则：

$$T(x)=\begin{cases}0, & kV\le -1\\ G(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}kV), & kV\in(-1,1)\\ 1, & kV\ge 1\end{cases}$$

$$k=\sqrt{n}/(n-1)$$

$$V=(c-\bar{X})/\hat{\sigma}\left(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2\right)$$

可见 $T(x)$ 是 $q_c(\theta)$ 的无偏估计，又是充分完备统计量$(\bar{X},\hat{\sigma}^2)$的函数，故 $T(x)$ 是 $q_c(\theta)$ 的 UMVUE。

2.42

(1)由分布函数知联合密度函数为

$$p(x;\eta)=\frac{m^n}{\eta^n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{m-1}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^m/\eta\right\}$$

所以 $l(\eta;x)=n\ln m-n\ln\eta+(m-1)\ln\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i/\eta$

令 $\partial l/\partial\eta=0$，得到η的似然估计为 $\sum_{i=1}^{n}x_i{}^m/n$

(4)令 $y_i=x_i{}^m$，则 $f(y)=1/\eta\times\exp\{-y/\eta\}$所以 y_i~E（η）且E y_i=η, $Dy_i=\eta^2$

由中心极限定理知 $\hat{\eta}=\bar{Y}\sim N$（η，η^2/n）所以服从正态分布

2.43 证明：对正态分布 N(m,s ^{2}),若只有一个观测值，则 m,s ^{2} 的极大似然估计不存在。

证明：

对正态总体 N (μ,σ ^{2})，θ =(μ,σ)是二维参数，

设样本观测值为 x，则似然函数及其对数分别为：

$$L(\mu,\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

将 ln L(μ,σ ^{2}) 分别关于两个分量求偏导并令其为 0，

即得似然方程组：

$$\frac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)=0$$

$$\frac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}(x-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma^2}=0$$

解此方程组知其无解，故μ,σ ^{2} 的极大似然估计不存在。

2.44 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ N(q,aq ^{2}),q 未知，a>0.

(1)计算 q 的 MLE，求其渐进分布；

(2)对什么样的 a，$\overline{X}$ 的渐近效超过 0.9？

证明：（1）取似然对数 $l(\theta;x)=\ln L(\theta;x)=\Sigma\ln p(\theta;x)=\Sigma\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\ln(2\pi\sigma^2)\right]$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\Sigma\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sqrt{a\theta^2})-\Sigma\frac{(x_i-\mu)^2}{2a\theta^2}$$

令$\frac{\partial l(\theta;x)}{\partial\theta}=0$ 可得

$$-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{2a\theta^2}\Sigma 2(x_i-\theta)=0$$

$$-\frac{2n}{\theta}+\frac{n}{2a\theta^2}(\overline{X}-\theta)=0$$

$$\frac{\overline{X}}{\theta^2}=\frac{2a+1}{\theta}$$

$$\overline{X}=(2a+1)\theta$$

θ的 MLE 为：$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2a+1}$

又因 $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma^2}\sim AN(0,1)$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{a\theta^2}\sim AN(0,1)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\sim AN(0,a^2\theta^4) \qquad (\overline{X}-\theta)\sim AN(0,\frac{a^2\theta^4}{n})$$

$$\frac{\overline{X}}{2a+1}-\frac{\theta}{2a+1}\sim AN(0,\frac{a^2\theta^4}{n}\cdot\frac{1}{(2a+1)^2})$$

令 $g(t)=\frac{t}{2a+1}$ $\qquad [g'(t)]^2=\frac{1}{2a+1}$

所以 $\frac{\overline{X}}{2a+1}\sim AN(\frac{1}{2a+1},\frac{a^2\theta^4}{n}\cdot\frac{1}{(2a+1)^2}\cdot\frac{\theta}{(2a+1)^2})$

即 $\hat{\theta}\sim AN(\frac{1}{2a+1},\frac{a^2\theta^6}{n(2a+1)^4})$

(2) 正态函数的 Fisher 信息矩阵 $I(\theta)=\begin{pmatrix}\frac{n}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4}\end{pmatrix}$

则本函数的 Fisher 信息矩阵 $I(\theta)=\begin{pmatrix} \frac{n}{a\theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2a^2\theta^4} \end{pmatrix}$

其渐进效 $e(\theta,T_n)=\frac{[g'(\theta)]^2\cdot I(\theta)^{-1}}{\sigma(\theta)^2}=\frac{1}{a\theta^2}\cdot\frac{1}{I(\theta)}=\frac{1}{a\theta^2}\cdot\frac{n^2}{2a^3\theta^6}=\frac{n^2}{2a^4\theta^8}$

=0.95

可得 当 $a=\sqrt{\frac{10}{9}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\theta^2}$ 时，$\overline{X}$ 的渐近效超过 0.9。

2.45 $X_i\sim Exp(\alpha), i=1,\cdots,n, Y_j\sim Exp(\alpha\theta), j=1,\cdots,n$,合样本独立。求$\theta$的MLE$\hat{\theta}$并将它的渐进方差与$\alpha$已知时$\theta$的MLE的渐进方差进行比较。

解：α已知时，由$p(y_i;\alpha\theta)=\alpha\theta e^{-\alpha\theta y_i}$,知

$l(y;\alpha\theta)=n\ln(\alpha\theta)-\alpha\theta\sum_{i=1}^{n}y_i$,令$\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}-\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i=0$,可得$\hat{\theta}=\frac{n}{\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i}$

α未知时，由$p(x_i;\alpha)=\alpha e^{-\alpha x_i}$,知$l(x;\alpha)=n\ln(\alpha)-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i$,

令$\frac{\partial l}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$,可得$\hat{\alpha}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$，则$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$。

由$\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}=-\frac{n}{\theta^2}$，知$I(\theta)=\frac{n}{\theta^2}$，$I^{-1}(\theta)=\frac{\theta^2}{n}$,

与α无关，所以α未知时与α已知时，θ有相同的渐进方差，为$\frac{\theta^2}{n^2}$。

2.45

解：a 已知时，由 $p(y_i;\alpha\theta)=\alpha\theta e^{-\alpha\theta y_i}$，知 $l(y;\theta\alpha)=n\ln(\theta\alpha)-\theta\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i$，

令 $\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}-\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，可得 $\hat{\theta}=\frac{n}{\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i}$.

a 未知时，由 $p(x_i;\alpha)=\alpha e^{-\alpha x_i}$，知 $l(x;\alpha)=n\ln\alpha-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i$，

令 $\frac{\partial l}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，可得 $\hat{\alpha}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$，则 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$.

由 $\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}=-\frac{n}{\theta^2}$，知 $I(\theta)=\frac{n}{\theta^2}$，故 $I^{-1}(\theta)=\frac{\theta^2}{n}$，与 a 无关，故 a 未知与 a 已知时，

θ有相同的渐近方差，为$\dfrac{\theta^2}{n^2}$.

2.46

解：（1）

$$Pr(X=x)=\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x, x=c,c+1,\ldots,\infty$$

$$E_\theta(x)=\sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x\,x=\theta\sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x\,x$$

$$\because\ \sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x=1$$

对θ两边同时求导，得

$$\sum_{x=c}^{\infty}(-\frac{a_x}{f'(\theta)}f'(\theta)\theta^x+\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^{x-1}x)=0$$

$$\therefore\ \sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^{x-1}x=\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^x$$

$$\therefore\ E_\theta(x)=\theta\sum_{x=c}^{\infty}\frac{a_x}{f(\theta)}\theta^{x-1}x=\theta f'(\theta)\Big/f(\theta)$$

（2） $$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{x_i}}{f(\theta)}\theta^{x_i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{x_i}}{f(\theta)}\theta^{\sum x_i}$$

$$l(x;\theta)=lnL=\sum_{i=1}^{n}lna_{x_i}-nlnf(\theta)+ln\theta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

对$l(x;\theta)$关于θ求导，得

$$\bar{x}-\theta\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=0$$

因此，θ的 MLE 为$\bar{x}=\mu(\theta)$的根。

（3） $$lnPr(X=x)=lna_x-lnf(\theta)+xln\theta$$

$$\frac{\partial\, lnPr(X=x)}{\partial\theta}=-\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}+\frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2\, lnPr(X=x)}{\partial\theta^2}=-\frac{f''^{(\theta)}f(\theta)-[f'(\theta)^2]}{f^2(\theta)}-\frac{x}{\theta^2}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2\, lnPr(X=x)}{\partial\theta^2}\right]=\frac{f''^{(\theta)}f(\theta)-[f'(\theta)^2]}{f^2(\theta)}+\frac{\theta f'(\theta)}{\theta^2 f(\theta)}$$

$$=\frac{\theta f''^{(\theta)}f(\theta)-\theta[f'(\theta)^2]+f'(\theta)f(\theta)}{\theta f^2(\theta)}$$

（4）以二项分布为例

$P(X=x)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$

$$=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x(1-p)^n$$

令$\frac{p}{1-p}=\theta$，则$f(\theta)=(1+\theta)^n$

由（2）知，$\bar{x}=\theta f'(\theta)\big/f(\theta)$的根。

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{\theta n}{(1+\theta)}$$

$$\therefore\quad \hat{\theta}=\frac{\bar{x}}{n-\bar{x}}$$

$$\therefore\quad \hat{p}=\frac{\bar{x}}{n}$$

2.47 设$X_i\sim N(\mu,\omega_i\sigma^2)$, $i=1,2,\ldots,n$, ω_i已知，诸X_i独立。

（1）试求μ的 BLUE $\hat{\mu}$；

（2）$\hat{\mu}$是否为μ的无偏估计；

（3）设σ^2已知，求位移变换下μ的最优同变估计。

解：

（1）　设$Y_i=X_i/\sqrt{\omega_i}\sim N\left(\mu/\sqrt{\omega_i},\sigma^2\right)$

$$X=\left[\frac{1}{\sqrt{\omega_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{\omega_n}}\right]'$$

$$\because E(Y)=X\beta, Var(Y)=\sigma^2 I_n$$

$$\therefore \hat{\mu}=(X'X)^{-1}X'Y=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\omega_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{\omega_n}}\right]\left[\frac{X_1}{\sqrt{\omega_1}},\ldots,\frac{X_n}{\sqrt{\omega_n}}\right]'$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\omega_i}$$

（3） $\hat{\mu} = \dfrac{\int \mu \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{(X_i-\mu)^2}{2\omega_i\sigma^2}\right\} d\mu}{\int \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{(X_i-\mu)^2}{2\omega_i\sigma^2}\right\} d\mu}$

$$= \frac{\int \mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)\mu^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)\mu]\}d\mu}{\int \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)\mu^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\right)\mu]\}d\mu}$$

令$\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}, \mathrm{b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\omega_i}$

$$= \frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[a\mu^2 - 2b\mu]\right\}d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[a\mu^2 - 2b\mu]\right\}d\mu}$$

$$= \frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}a(\mu - \frac{b}{a})^2\right\}d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}a(\mu - \frac{b}{a})^2\right\}d\mu}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\int \sqrt{a}\mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{a}\mu - \frac{b}{\sqrt{a}})^2\}d\sqrt{a}\mu}{\frac{1}{\sqrt{a}}\int \mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{a}\mu - \frac{b}{\sqrt{a}})^2\}d\sqrt{a}\mu}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{b}{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\omega_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}}$$

2.47 设$\mathrm{X}_i \sim N(\mu, \omega_i\sigma^2), \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{m}, \mathrm{Y}_i \sim N(c\mu, \sigma^2), i = 1,\dots,n$，合样本独立，**c** 已知

（**1**）试求μ的 **BLUE** $\hat{\mu}$；

（**2**）$\hat{\mu}$是否为μ的有效无偏估计；

（**3**）设σ^2已知，求位移变换下μ的最优同变估计。

解：(1)

$\mathrm{Z} = [X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n]'$

$\mathrm{X} = [1,\dots,1,\mathrm{c},\dots,\mathrm{c}]'$

其中有 m 个 1，n 个 c

$\because$ $\mathrm{E(Y)} = X\beta, Var(Y) = \sigma^2 I_n$

$$\therefore \hat{\mu} = (X'X)^{-1}X'Y = (m + nc^2)^{-1}[1, \dots, 1, \mathrm{c}, \dots, \mathrm{c}][X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]'$$

$$= (m + nc^2)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + c\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$$

(2)

$$\mathrm{E}(\widehat{\mu}) = (m + nc^2)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} E(X_i) + c\sum_{j=1}^{n} E(Y_j)\right] = (m + nc^2)^{-1}(m + nc^2)\mu$$
$$= \mu$$

$\therefore$ $\widehat{\mu}$为μ的无偏估计

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = (m + nc^2)^{-2}\left[\sum_{i=1}^{m} Var(X_i) + c^2\sum_{j=1}^{n} Var(Y_j)\right]$$
$$= (m + nc^2)^{-2}[m\sigma^2 + c^2 n\sigma^2] = (m + nc^2)^{-1}\sigma^2$$

$$\mathrm{L} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^m \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\mathrm{l} = \ln L = -\frac{m}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu) + \frac{c}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - c\mu)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -\frac{m}{\sigma^2} - \frac{nc^2}{\sigma^2}$$

$$\mathrm{I(\theta)} = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}(m + nc^2)$$

C-R 下界$\frac{1}{\mathrm{I(\theta)}} = \mathrm{Var}(\widehat{\mu})$

$\therefore$ $\widehat{\mu}$为μ的有效无偏

(3)

$$\tilde{\mu}=\frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^m (x_i-\mu)^2+\sum_{j=1}^n \left(y_j-\mu\right)^2\right]\right\}d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^m (x_i-\mu)^2+\sum_{j=1}^n \left(y_j-\mu\right)^2\right]\right\}d\mu}$$

$$=\frac{\int \mu \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\sum_{i=1}^m x_i{}^2+\sum_{j=1}^n y_j{}^2)-2\mu(\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j)+(m+c^2n)\mu^2\right]\right\}d\mu}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\sum_{i=1}^m x_i{}^2+\sum_{j=1}^n y_j{}^2)-2\mu(\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j)+(m+c^2n)\mu^2\right]\right\}d\mu}$$

$$=\frac{\int \mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(m+c^2n)\mu^2-2\mu(\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j)]\}d\mu}{\int \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(m+c^2n)\mu^2-2\mu(\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j)]\}d\mu}$$

$$=\frac{\int \mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(m+c^2n)[\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2n}\right)^2-(\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2n})^2]\}d\mu}{\int \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(m+c^2n)[\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2n}\right)^2-(\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2n})^2]\}d\mu}$$

$$=\frac{\int \mu\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{m+c^2n}\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2n}})^2\}d\mu}{\int \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{m+c^2n}\mu-\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2n}})^2\}d\mu}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m+c^2n}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{\sqrt{m+c^2n}}=\frac{\sum_{i=1}^m x_i+c\sum_{j=1}^n y_j}{m+c^2n}$$

2.49

解：由题意知道，独立同分许，且密度函数

$$\frac{kx^{k-1}}{\theta^k}=\frac{1}{\theta}\frac{kx^{k-1}}{\theta^{k-1}}=\frac{1}{\theta}f(x/\theta)=\frac{1}{\theta}k(x/\theta)^{k-1}$$

所以由 2.51 式可得，在尺度变换下最优同变估计

$$\hat{\theta}=\frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(n+2)}k^{n}\frac{(\prod_{i=1}^{n}x_{i})^{k-1}}{\theta^{n(k-1)}}d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(n+3)}k^{n}\frac{(\prod_{i=1}^{n}x_{i})^{k-1}}{\theta^{n(k-1)}}d\theta}$$

$$=\frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(n+2)}\theta^{nk-n}d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(n+3)}\theta^{nk-n}d\theta}$$

$$=\frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-nk-2}d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-nk-3}d\theta}$$

$$=\frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(nk+2)}d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-(nk+3)}d\theta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{nk+1}\theta^{-(nk+1)}\Big|_{x_{(n)}}^{\infty}}{-\frac{1}{nk+2}\theta^{-(nk+2)}\Big|_{x_{(n)}}^{\infty}}$$

$$=\frac{nk+2}{nk+1}X_{(n)}$$

2.49

解：**错误！未找到引用源。**的密度函数为**错误！未找到引用源。**

变形为 **错误！未找到引用源。**

所以**错误！未找到引用源。**为位置参数

由公式（2.51）**错误！未找到引用源。**的最优同变估计为

$$\theta^{*}=\frac{\int\theta^{-(n+2)}f\left(\frac{x_1}{\theta},\dots,\frac{x_n}{\theta}\right)d\theta}{\int\theta^{-(n+3)}f\left(\frac{x_1}{\theta},\dots,\frac{x_n}{\theta}\right)d\theta}$$

=

$$\frac{\int\theta^{-(n+2)}k^{n}(\frac{x_1}{\theta})^{k-1}\dots(\frac{x_n}{\theta})^{k-1}d\theta}{\int\theta^{-(n+3)}k^{n}(\frac{x_1}{\theta})^{k-1}\dots(\frac{x_n}{\theta})^{k-1}d\theta}$$

=

$$\frac{\int \theta^{-(2+nk)}d\theta}{\int \theta^{-(3+nk)}d\theta}$$

=

$$\frac{\frac{1}{-1-nk}\theta^{-2-nk}|_0^\infty}{\frac{1}{-2-nk}\theta^{-3-nk}|_0^\infty}$$

=

$$\frac{2+nk}{1+nk}$$

2.50

解：x_i 的密度函数为 $4\theta^4 x^{-5}=(\frac{1}{\sqrt{2}\theta})(\frac{x}{\sqrt{2}\theta})^{-5}=\frac{1}{\sigma}f(\frac{x}{\sigma})$，则在尺度变换下 σ 的最优同变估计为

$$\hat{\sigma}=\frac{\int \sigma^{-(n+2)}f(\frac{x_1}{\sigma},\cdots,\frac{x_{n-1}}{\sigma},\frac{x_n}{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\int \sigma^{-(n+3)}f(\frac{x_1}{\sigma},\cdots,\frac{x_{n-1}}{\sigma},\frac{x_n}{\sigma})\mathrm{d}\sigma}$$

$$=\frac{\int \sigma^{-(n+2)}\prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\sigma})^{-5}\mathrm{d}\sigma}{\int \sigma^{-(n+3)}\prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\sigma})^{-5}\mathrm{d}\sigma}$$

$$=\frac{\int \sigma^{4n-2}\mathrm{d}\sigma}{\int \sigma^{4n-3}\mathrm{d}\sigma} \qquad ,$$

$$=\frac{4n-2}{4n-1}\tilde{x}$$

其中 $\tilde{x}=\min\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$， 即 $\sqrt{2}\hat{\theta}=\frac{4n-2}{4n-1}\tilde{x}$， 所以 $\hat{\theta}=\frac{4n-2}{\sqrt{2}(4n-1)}\tilde{x}$.

2.51 设 $X_1, \dots, X_2$ 是来自密度函数为 $1/2d\exp\{-|x|/d\}$的双指数分布的一个样本，$d>0$ 是未知参数，试在尺度变换下求δ的最优同变估计。

解：P(|X|<x)=P(-x<X<x)=F(x)-F(-x),其 F(X)为分布函数。

对两边同时求导有：

$$F(|X|<x)=2f(x)=1/\delta\exp\{-|x|/\delta\}$$

记 $T=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$,尺度变换下δ的最优同变估计为

$$\delta=(\int_0^\infty \delta^{-(n+2)}e^{(-T/(\delta d))}dx)/(\int_0^\infty \delta^{-(n+3)}e^{(-T/(\delta d))}dx)$$

$$=[\Gamma(n+1)T^{-(n+1)}]/[\Gamma(n+2)T^{-(n+2)}]$$

$$=T/(n+1)$$

2.51 设 $X_1,\ldots X_n$ 是来自密度函数为的双指数分布的一个样本,$\sigma>0$ 是未知参数,试在尺度参数变换下求 σ 的最优同变估计。

解：$\because \sigma>0$，记 $T=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$，

由 $\hat{\sigma}^*=\dfrac{\int\sigma^{-(n+2)}f(x_1/\sigma,\ldots,x_{n-1}/\sigma,x_n/\sigma)d\sigma}{\int\sigma^{-(n+3)}f(x_1/\sigma,\ldots x_{n-1}/\sigma,x_n/\sigma)d\sigma}$ 得

$$\hat{\sigma}=\frac{\int_0^\infty\sigma^{-(n+2)}\cdot\frac{1}{2}e^{-T/\sigma}d\sigma}{\int_0^\infty\sigma^{-(n+3)}\cdot\frac{1}{2}e^{-T/\sigma}d\sigma}\quad,\qquad 令\ \theta=\frac{1}{\sigma}$$

$$=\frac{\int_0^\infty\theta^{(n+2)}e^{-\theta T}\theta^{-2}d\theta}{\int_0^\infty\theta^{(n+3)}e^{-\theta T}\theta^{-2}d\theta}$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)T^{-(n+1)}}{\Gamma(n+2)T^{-(n+2)}}=\frac{T}{n+1}$$

2.52 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自下列分布的一个样本，取 a =0.10，计算（2.71）式中的 $\bar{X}_a$ 对 $\bar{X}$的渐进相对效.

（1）（−1,0）上的均匀分布；

（2） $p(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

（3）正态分布 $N(0,s_2^2)$.

解：（1）$t=\sigma^2=2(1-2\alpha)^2\{\int_0^b dF(x)+\alpha\times(\xi_{1-\alpha})^2\}$, $b=\xi_{1-\alpha}$

$=2(1-2\times0.1)^2\{\int_0^b 1/2dx+0.1\times0.8^2\}$

$=2\times0.64\times0.464$

$=0.594$

$$ARE(\alpha,)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)$$

$$=\frac{1}{0.594}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2dx$$

$=0.561$

（2）$t=\sigma^2=2(1-2\alpha)^2\{\int_0^b dF(x)+\alpha\times(\xi_{1-}\alpha)^2\}$, $b=\xi_{1-}\alpha$

$=2(1-2\times0.8)^2\{0.4+0.40044\}$

$=0.513$

$$ARE(\alpha,)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)$$

$$=\frac{1}{0.513}\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}(1-x^2)x^2dx$$

$=0.39$

（3）$t=\sigma^2=2(1-2\alpha)^2\{\int_0^b dF(x)+\alpha\times(\xi_{1-}\alpha)^2\}$, $b=\xi_{1-}\alpha$

$=2(1-2\times0.8)^2\{0.4+0.1\Phi(\frac{0.9}{\sigma})\}$

$$ARE(\alpha,)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)=\ldots$$

2.52 设 X1,,X2，…Xn 是来自下列分布的一个样本，取 a=0.10,计算（2.72）式中的 $\bar{x}_\alpha$ 对 $\bar{x}$ 的渐进相对效。

（1）（-1,1）上的均匀分布

（2）**P(x)=** $\begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & |x|\le 1 \\ 0 \quad , & |x|>1 \end{cases}$

（3）**正态分布 N(0，**σ^2**)(提示：**$\int_0^a x^2 d\phi(x) = -a\varphi(a)+\phi(a)-\frac{1}{2}$**)**

解：（1） $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ,x\in(-1,1) \\ 0 & ,x\ge 1, x\le -1 \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & x\le -1 \\ \frac{x+1}{2}, & x\in(-1,1) \\ 1 \quad , & x\ge 1 \end{cases}$

由于 $\xi_{1-\alpha}=\sup\{x:F(x)<1-\alpha\}$ 代入公式得到 $\xi_{1-\alpha}=0.8$ 又 p(0.8)=0.5

又 $\sigma_\alpha^2 = 2\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 dF(x) + 2\alpha(\xi_{1-\alpha}+\frac{\alpha}{p(\xi_{1-\alpha})})$，所以 $\sigma_\alpha^2=0.3707$

$$ARE(\overline{X_\alpha},\overline{X}) = \frac{1}{\sigma_\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

故 ARE=0.8992

(2)

$p(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & ,|x|\le 1 \\ 0 & ,|x|\ge 1 \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<-1 \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}, & |x|\le 1 \\ 1 & ,x>1 \end{cases}$

解 F(X)<1-a 得

$$\xi_{1-\alpha}=\sup\{x \quad F(X)<1-\alpha\} = 0$$

代入得到

$$\sigma_\alpha^2 = 2\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 dF(X) + 2\alpha\left(\xi_{1-\alpha}+\frac{\alpha}{p(\xi_{1-\alpha})}\right) = 0.251$$

因此渐进相对效

$$ARE(\overline{X_\alpha},\overline{X}) = \frac{1}{\sigma_\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(X) = 0.798$$

（3）

查标准正态分布表得

$$\xi_{1-\alpha}=1.28\sigma$$

又因为 X 服从 N（0，σ ^{2}），故令 $y=\dfrac{x}{\sigma}$ 所以有

$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 dF(x)=\sigma^2\int_0^{\xi_{1-\alpha}}\left(\frac{x}{\sigma}\right)d\phi(\frac{x}{\sigma})$$

$$=\sigma^2\int_0^{1.28} y^2 d\phi(y)$$

$$=\sigma^2\left[-1.28\varphi(1.28)+\phi(1.28)-\frac{1}{2}\right]$$

因此得到

$$\sigma_\alpha^2=2\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 dF(x)+2\alpha(\xi_{1-\alpha}+\frac{\alpha}{p(\xi_{1-\alpha})})$$

$$=2\sigma^2\left[-1.28\varphi(1.28)+\phi(1.28)-\frac{1}{2}\right]+0.2\left(1.28\sigma+\frac{0.1}{p(1.28\sigma)}\right)$$

可得渐进相对效

$$ARE(\overline{X_\alpha},\overline{X})=\frac{1}{\sigma_\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sigma_\alpha^2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\sigma^2\left[-1.28\varphi(1.28)+\phi(1.28)-\frac{1}{2}\right]+0.2\left(1.28\sigma+\frac{0.1}{p(1.28\sigma)}\right)}$$

2.53 问什么样的密度函数 p(x)使得 Winsor 化均值相对应的 M 估计是未知参数的极大似然估计？

解：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布变量，$X_1 f(x-\theta)$, $EX_1^2<+\infty$.设 $_n$ 为 Winsor 化均值.

因为$\lambda(t)=\int_{-k}^{k}(x-t)f(x-\theta)dx+(1-F(k+t-\theta))-F(-k+t-\theta)$, 其中 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.

若假设 X_1 的分布是对称的，易知对称中心θ是方程$\lambda(t)=0$ 的解，则若由密度函数 p(x)积分所得的分布函数满足上述条件，即分布是对称的，于是该密度函数 p(x)使得 Winsor 化均值相对应的 M 估计是未知参数的极大似然估计。

3.3

构造似然比统计量 λ(x)= $\frac{\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} p(x_i;1)} = \begin{cases} \theta_1^{-n}, 0 < x_{(n)} < \theta_1 \\ 0, \theta_1 \le x_{(n)} \le 1 \end{cases}$,其中

$x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$。在原假设 H_0 成立时，λ（x）的分布是退化分布。令

G(λ)=P(λ(X)>λ|θ=1)，则当 λ> θ_1^{-n} 时，G(λ)= $P\{\lambda(x) > \lambda | \theta = 1\}$=0；当 0<λ < θ_1^{-n} 时，

$G(\lambda) = P\{\lambda(x) > \lambda\} = P\{0 < x_{(n)} < \theta_1\} = \int_0^{\theta_1} nt^{n-1} dt = \theta_1^n$，则

$0 = G(\theta_1^{-n}) < \alpha < G(\theta_1^{-n} - 0) = \theta_1^n < 1$。由 N-P 基本引理知，取 $k = \theta_1^{-n}$，则

MPT 为φ （x）=1 $(\theta_1 < x_{(n)} < 1)$,而在 $0 < x_{(n)} < \theta_1$ 时，φ （x）的值由

$E[\phi(x) \mid \theta = 1]$ 而定。

3.11.设 T（x）的密度函数为： $p(t,\theta)=c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)$**，其中** $c(\theta)>0$**，单边假设检验问题：原假设 H$_0$：** $\theta\le\theta_0$ **对备择假设** $H_1:\theta>\theta_0$ **的水平为** α **（**$0<\alpha<1$**）的 UMP 检验** $\phi(T)$ **如下所示：**

$$\phi(T)=\begin{cases}0, T>C\\ r\ , T=c\\ 1\ , T<c\end{cases}$$

其中常数 r（$0\le r\le 1$**）和 c 由** $E_{\theta_0}\phi(T)=\alpha$ **确定，我们知道这个检验的势函数** $g(\theta)=E_\theta\phi(T(X))$ **是非降的，且在集合** $\{\theta:0<g(\theta)<1\}$ **上是严格增加的，试证明：** $g^{'}(\theta_0)>0$

证明：$\because\int p(t,\theta)d\mu(t)=\int c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)=1$

两边同时对 θ 求导：

$$\int t\cdot c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)+\int c^{'}(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}h(t)d\mu(t)=0$$

得：$\dfrac{c^{'}(\theta)}{c(\theta)}=-E_\theta(T)$

势函数 $g(\theta)=\int\phi(t)c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)$ 则：

$$g^{'}(\theta)=\int\phi(t)\cdot c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot th(t)d\mu(t)+\int\phi(t)c^{'}(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}h(t)d\mu(t)$$

$$=\frac{c^{'}(\theta)}{c(\theta)}E_\theta\phi(T)+E_\theta[\phi(T)\cdot T]=-E_\theta(T)\cdot E_\theta\phi(T)+E_\theta(\phi(T)\cdot T)$$

则，要证明 $g^{'}(\theta_0)>0$，只需证明 $-E_{\theta_0}(T)\cdot E_{\theta_0}\phi(T)+E_{\theta_0}(\phi(T)\cdot T)>0$

又因为 $E_{\theta_0}\phi(t)=\alpha$，则只需证明：$-E_{\theta_0}(T)\cdot\alpha+E_{\theta_0}(\phi(T)\cdot T)>0$

即证明 $(\alpha-\phi(T))T<0$

则，取 $\phi(T)=\begin{cases}1, T\geq 0\\ 0, T<0\end{cases}$，则 $E_{\theta_0}\phi(T)=\alpha,(\alpha-\phi(T))T<0$

命题得证。

3.11 **设**$T(x)$**的密度函数为：**$p(t;\theta)=c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)$**,其中**$c(\theta)>0$**单边假设检验问题：原假设**$H_0:\theta\leq\theta_0$**对备择假设**$H_1:\theta>\theta_0$**的水平为**$\alpha(0<\alpha<1)$**的 UMP 检验**$\emptyset(T)$**如下所示，**

$$\emptyset(T)=\begin{cases}1, & T>c\\ r, & T=c\\ 0, & T<c\end{cases}$$

其中常数$r(0\leq r\leq 1)$**和**c**由**$E_{\theta_0}\emptyset(T)=\alpha$**确定.我们知道这个检验的势函数**$g(\theta)=E_\theta\emptyset(T(X))$**是非降的，且在集合**$\{\theta:0<g(\theta)<1\}$**上是严格增加的.试证明：**$g'(\theta_0)>0$.

证明：$\because\int p(t;\theta)\,d\mu(t)=\int c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)=1$

$\therefore$两边同时对θ求导可得

$$\int c'(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)+\int c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot t\cdot h(t)d\mu(t)=0$$

$$\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}\int c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)=-\int t\cdot c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)$$

即 $\dfrac{c'(\theta)}{c(\theta)}=-E_\theta(T)$ $\qquad(*)$

势函数$g(\theta)=\int\emptyset(t)c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)$，则

$$g'(\theta)=\int\emptyset(t)\cdot c'(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot h(t)d\mu(t)+\int\emptyset(t)\cdot c(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot t\}\cdot t\cdot h(t)d\mu(t)$$

$$=\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}E_\theta\emptyset(T)+E_\theta[\emptyset(T)\cdot T]$$

$$\xRightarrow{由(*)式}-E_\theta(T)\cdot E_\theta\emptyset(T)+E_\theta[\emptyset(T)\cdot T]$$

$\therefore$要证明$g'(\theta_0)>0$,只须要证明 $-E_{\theta_0}(T)\cdot E_{\theta_0}\emptyset(T)+E_{\theta_0}[\emptyset(T)\cdot T]>0$

又$\because E_{\theta_0}\emptyset(T)=\alpha,\therefore$ 只须要证明 $-E_{\theta_0}(T)\cdot\alpha+E_{\theta_0}[\emptyset(T)\cdot T]>0$

即证明$\alpha\int Tp(t;\theta_0)d\mu(t)<\int T\emptyset(T)\,p(t;\theta_0)d\mu(t)$

即证明$\alpha T<T\emptyset(T)$,即$(\alpha-\emptyset(T))T<0$

$\therefore$ 必须保证 $\alpha-\emptyset(T)$与T为异号

$\therefore$ 取$\emptyset(T)=\begin{cases}1, & T\geq 0\\ 0, & T<0\end{cases}$，则$E_{\theta_0}\emptyset(T)=\alpha$，且$(\alpha-\emptyset(T))T<0$

命题得证。

3.14 **设样本** $X=(X_1,\cdots,X_m)$ **和样本** $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ **相互独立，它们分别来自正态总**

体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，其中：$-\infty<\mu_1<\infty$，$-\infty<\mu_2<\infty$，$\sigma^2>0$。在 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时，试证明：V 的分布与参数 σ^2 和 μ 无关，V 的分布关于原点对称，其中

$$V=\frac{U}{\sqrt{T_2-\frac{T_1^2}{m+n}}}，\quad U=\overline{Y}-\overline{X}，\quad T_1=m\overline{X}+n\overline{Y}，\quad T_2=\sum_{i=1}^{m}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}Y_i^2。$$

证明：$\because X\sim N(\mu_1,\sigma^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

$$\therefore \overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{m}) \qquad \overline{Y}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\therefore \overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{n}) \qquad \therefore \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\sim N(0,\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$$

由于 X 与 Y 具有相同的分布且相互独立

$$\therefore Z=(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)\sim N(\mu,\sigma^2)$$

令 $\overline{Z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{j=1}^{n}Y_j}{m+n}$ $\quad\therefore \overline{Z}\sim N(\mu\, ,\dfrac{\sigma^2}{m+n}$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z})^2}{\sigma^2}\sim \chi(m+n-1)$$

上式中

$$T_2-\frac{T_1^2}{m+n}=\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\overline{Z}^2(m+n)$$

$$=\sum_{i=1}^{m+n}Z_i^2-\overline{Z}^2(m+n)$$

$$=\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z}+\overline{Z})^2-\overline{Z}^2(m+n)$$

$$=\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z})^2$$

$$V=\frac{\frac{V}{\sigma}}{\frac{\sqrt{T_2-\frac{T_1}{m+m}}}{\sigma}}=\frac{\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sigma}}{\frac{\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z})^2}{\sigma}}=\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z})^2}$$

$\therefore V$ 的分布与参数 σ^2 和 μ 无关.

$$V(-X-Y)=\frac{-\overline{Y}+\overline{X}}{\sum_{i=1}^{m+n}(Z_i-\overline{Z})^2}=-V(X,Y)$$

$\therefore V$ 的分布关于原点是对称的

3.16 设样本 X＝（X 1,… X n）,来自双参数指数分布总体，其密度函数为：

$$p(x;\mu;\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}*\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\},\ x\geq\mu\\ 0,\ x<\mu\end{cases}$$

（1）试求检验问题 $H_0:\sigma=1$ 对 $H_1:\sigma\neq 1$ 的 UMPUT;

（2）试求检验问题 $H_0:\mu=1$ 对 $H_1:\mu\neq 0$ 的 UMPUT.

解:

（1） 使用似然比检验，对于简单假设，似然比检验就为 UMPUT 的。

$$L(\sigma)=(\frac{1}{\sigma})^n\exp\{-\frac{\sum x_i-\mu}{\sigma}\}I_{\{x(1)\geq\mu\}}$$

μ 的极大似然估计是 $x_{(1)}$，σ 的极大似然估计是 $\overline{x}-x_{(1)}$，那么在 $H_0:\sigma=1$ 成立时，μ 的极大似然估计是 $x_{(1)}$

$$\lambda(x)=\frac{(\frac{1}{\overline{x}-x_{(1)}})^n\exp\{-n\}}{\exp\{-n(\overline{x}-x_{(1)})\}}=(\frac{1}{\overline{x}-x_{(1)}})^n\exp\{-n(1+\overline{x}-x_{(1)})\}$$

因为 $2\ln\lambda(x)$ 的分布是 $\chi(2)$，所以拒绝域为 $\{2\ln\lambda(x)>\chi_{1-\alpha}(2)\}$；

(2)使用似然比检验，对于简单假设，似然比检验就是 UMPUT 的。

$$L(\sigma)=(\frac{1}{\sigma})^n\exp\{-\frac{\sum x_i-\mu}{\sigma}\}I_{\{x(1)\geq\mu\}}$$

μ 的极大似然估计是 $x_{(1)}$，σ 的极大似然估计是 $\overline{x}-x_{(1)}$，那么在 $H_0:\mu=1$ 成立时，σ 的极大似然估计是 $\overline{x}-1$，

$$\lambda(x) = \frac{(\frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}})^n \exp\{-n\}}{(\frac{1}{\overline{X} - 1})^n \exp\{-n\}} = (\frac{\overline{X} - 1}{\overline{X} - X_{(1)}})^n\}$$

因为$2\ln\lambda(x)$的分布是$\chi(2)$，所以拒绝域为$\{2\ln\lambda(x) > \chi_{1-\alpha}(2)\}$。

3.16 设样本 X=（$X_1,\ldots,X_n$）,来自双参数指数分布总体，其密度函数为：

$$p(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}, & x \ge \mu \\ 0 \quad , & x < \mu \end{cases}$$

（1）试求检验问题 H_0:　=1 对 H_1:　≠1 的 UMPUT;

（2）试求检验问题 H_0:　=0 对 H_1:　≠0 的 UMPUT.

解:

$$L(\mu,\sigma;x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma}\right\} I_{\{X_{(1)}\ge\mu\}}$$

（1） 使用似然比检验，对于简单假设，似然比检验就为 UMPUT 的.

在 H_0: σ=1成立时，μ 的 MLE $\hat{\mu} = X_{(1)}$， 在 H_1: σ≠1成立时，μ 和 σ 皆未知，μ 和 σ 的 MLE 分别为 $\hat{\mu} = X_{(1)}$， $\hat{\sigma} = \overline{X} - X_{(1)}$，因而似然比

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}\right)^n \exp\{-n\}}{\exp\left\{-n\left(\overline{X} - X_{(1)}\right)\right\}} = \left(\frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}\right)^n \exp\left\{-n\left(1 + \overline{X} - X_{(1)}\right)\right\}$$

因为在 H_0成立时，$2\ln\lambda(X) \sim \chi^2(2)$，所以拒绝域为$\{2\ln\lambda(X) \ge \chi^2_{1-\alpha}(2\}$.

(2)使用似然比检验，对于简单假设，似然比检验就是 UMPUT 的。

在 H_0: μ =0成立时，σ的 MLE $\hat{\sigma} = \overline{X}$ ，在 H_1: μ ≠0 成立时，μ 和 σ 皆未知，μ 和 σ 的 MLE $\hat{\mu} = X_{(1)}$， $\hat{\sigma} = \overline{X} - X_{(1)}$，因而似然比

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}\right)^n \exp\{-n\}}{\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) \exp\{-n\}} = \left(\frac{\overline{X}}{\overline{X} - X_{(1)}}\right)^n$$

因为在 H_0成立时，$2\ln\lambda(X) \sim \chi^2(2)$，所以拒绝域为$\{2\ln\lambda(X) \ge \chi^2_{1-\alpha}(2\}$.

3.18 设 $(X_1,Y_1),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的样本，其中 ρ 是相关系数。试求检验问题 $H_0:\rho=0$ 对 $H_1:\rho\neq 0$ 的似然比检验。

解：对于服从参数为 (μ,Σ) 的多元正态分布，

其分布函数为： $p(X)=\dfrac{1}{(2\pi)^p\left|\Sigma^{-1}\right|}\exp\left\{-\dfrac{(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}{2}\right\}$

易求其极大似然估计为： $\hat{\mu}=\bar{X}$

$\hat{\Sigma}=S$

其中 S 的 ij 元为 $S_{ij}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{u}_i)(X_j-\hat{u}_j)$

又在二元分布下：$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{n}\Sigma X_{1i}$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\Sigma X_{2i}$$

所以在 θ 中参数的 MLE 估计为 $\sigma_1^2=\dfrac{1}{n}\Sigma(X_{1i}-\hat{\mu}_1)^2$

$$\sigma_2^2=\frac{1}{n}\Sigma(X_{2i}-\hat{\mu}_2)^2$$

$$\hat{\rho}=\frac{1}{n\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}2}\Sigma(X_{1i}-\hat{\mu}_1)(X_{2i}-\hat{\mu}_2)$$

则似然比检验为：

$$\lambda(X)=\frac{\prod_{i=1}^{n}p(X_i;\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\hat{\rho})}{\prod_{i=1}^{n}p(X_i;\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho=0)}$$

$$2\ln(X)=\sum_{i=1}^{n}\{[\frac{(X_{1i}-\hat{\mu}_1)^2}{\hat{\sigma}_1^2}+\frac{(X_{2i}-\hat{\mu}_2)^2}{\hat{\sigma}_2^2}]-\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2}\frac{(X_{1i}-\hat{\mu}_1)(X_{2i}-\hat{\mu}_2)}{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}\}$$

有 $2\ln(X)$ 服从 $X^2(1)$，在显著水平为 α 的情况下，如果有：

$2\ln(X)\geq X_\alpha^1(1)$ 则拒绝原假设，反之不拒绝原假设。

3.19 试证明下述结论：

（1）接例 3.16，

$$2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r} n_i.\ln\frac{n_i}{np_{0i}} = \sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$$ **+依概率收敛于 0 的量**

（1）接§3.6.4

$$2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}.\ln\frac{n.n_{ij}}{n_{i.}.n_{.j}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^2}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}$$ **+依概率收敛于 0 的量**

解：

（1）例 3.16 的似然比统计量为：

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^{r}(\frac{n_i}{n})^{n_i}}{\prod_{i=1}^{r}(p_{0i})^{n_i}}$$

$\therefore\quad 2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r} n_i.\ln\frac{n_i}{np_{0i}} = 2\sum_{i=1}^{r} n_i.\ln[1+\frac{(n_i - np_{0i})}{np_{0i}}]$

$\because\quad \ln(1+x)$ 的 T$aylor$ 展式：$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ (x\to 0)$

$\because$ 当 H_0 成立时，由伯努利大数定理得 $\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} = \frac{\frac{n_i}{n} - p_{0i}}{p_{0i}}$ 依概率收敛于 0.

$$\therefore\quad 2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{r} n_i.\ln[1+\frac{(n_i - np_{0i})}{np_{0i}}]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r} n_i.\left[\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} - \frac{1}{2}.(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}})^2 + o((\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}})^2)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r}\left[np_{0i} + (n_i - np_{0i})\right].\left[\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}} - \frac{1}{2}.(\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}})^2 + o((\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}})^2)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} + 2(n_i - np_{0i}) - \frac{(n_i - np_{0i})^3}{(np_{0i})^2} + o((\frac{n_i - np_{0i}}{np_{0i}})^2)\right]$$

$\because$ 后面三项都依概率收敛于 0（伯努利大数定理），$\lim_{n\to\infty} p(|n_i - np_{0i}| < \varepsilon) = 1$

$\therefore\quad 2\ln\Lambda = \sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$+依概率收敛于 0 的量

（2）§3.6.4 的似然比统计量为：

$$\Lambda=\frac{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c}(\frac{n_{ij}}{n})^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c}(\frac{n_{i.}}{n}.\frac{n_{.j}}{n})^{n_{ij}}}$$

$$\therefore\quad 2\ln\Lambda=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}n_{ij}.\ln\frac{n.n_{ij}}{n_{i.}.n_{.j}}=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}n_{ij}.\ln(1+\frac{n.n_{ij}-n_{i.}.n_{.j}}{n_{i.}.n_{.j}})$$

$\because$ 在原假设 $H_0:p_{ij}=p_{i.}.p_{.j}$ 成立时， p_{ij} 的 MLE 为 $\hat{p}_{i.}\cdot\hat{p}_{.j}=(\frac{n_i}{n}).(\frac{n_j}{n})$

$$\therefore\quad 2\ln\Lambda=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}n_{ij}.\ln(1+\frac{n.n_{ij}-n_{i.}.n_{.j}}{n_{i.}.n_{.j}})$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}n_{ij}\left[\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}-\frac{1}{2}.(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}})^2+o((\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}})^2)\right]$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}+n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})\left[\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}-\frac{1}{2}.(\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}})^2+o((\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}})^2)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^2}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}2(n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})-\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^3}{(n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^2}+o((\frac{n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}})^2)\right]$$

$\because$ 当 H_0 成立时， $\lim_{n\to\infty}p(\left|\frac{n_{ij}}{n}-\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}\right|<\varepsilon)=1$

$\therefore$ 后面三项都依概率收敛于 0.

$\therefore$ $2\ln\Lambda=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^2}{n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}$ +依概率收敛于 0 的量

3.20

解：数据与模型是否相符需要作如下检验

$H_0:\theta\in\Theta_0$ 其中 $\theta=(p_{11},p_{12},p_{21})$，$\Theta_0=\left\{\theta:\theta\in\Theta;p_{11}=\frac{p}{2},p_{12}=\frac{1-p}{2},p_{21}=\frac{p^2}{2}+p(1-p);p\in[0,1]\right\}$

$H_1:\theta\notin\Theta_0$

根据定理 3.19，似然比统计量

$$\lambda(X)=\frac{\prod_{i=1}^{n}p\left(X_i;\hat{\theta}\right)}{\prod_{i=1}^{n}p\left(X_i;\hat{\theta}_0\right)}=\frac{\frac{n!}{n_{11}!\,n_{12}!\,n_{21}!\,n_{22}!}\prod_{i=1,2;\,j=1,2}^{n}\hat{p}_{ij}^{\,n_{ij}}}{\frac{n!}{n_{11}!\,n_{12}!\,n_{21}!\,n_{22}!}\prod_{i=1,2;\,j=1,2}^{n}\hat{p}_{0\,ij}^{\,n_{ij}}}=\frac{\prod_{i=1,2;\,j=1,2}^{n}\hat{p}_{ij}^{\,n_{ij}}}{\prod_{i=1,2;\,j=1,2}^{n}\hat{p}_{0\,ij}^{\,n_{ij}}}$$

，

其中 $\sum_{i=1,2;\,j=1,2}p_{ij}=1$

$\hat{\theta}$是似然方程$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=0$的解，$l(\theta)=\ln\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$；

$\hat{\theta}_0=\left(\hat{p}_0\frac{\hat{p}_0}{2},\frac{1-\hat{p}_0}{2},\frac{\hat{p}_0^2}{2}+\hat{p}_0\left(1-\hat{p}_0\right)\right)$，$\hat{p}_0$是似然方程$\frac{\partial l(p)}{\partial p}=0$的解，$\tilde{l}(p)=\ln\prod_{i=1}^{n}\tilde{p}(x_i;p)$

在原假设成立时，$2\ln\lambda(X)$随 n 增大而依分布收敛于$\chi^2(3-1)$

下面我们求解$\hat{\theta}_0$和$\hat{\theta}$，先求$\hat{\theta}$

$$l(\theta)=\ln\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)=\ln\frac{n!}{n_{11}!\,n_{12}!\,n_{21}!\,n_{22}!}\prod_{i=1,2;\,j=1,2}p_{ij}^{\,n_{ij}}$$

且 $\sum_{i=1,2;\,j=1,2}p_{ij}=1$

故按拉格朗日乘数法求解如下：

$$F(\theta,\eta)=l(\theta)+\eta\left(\sum_{i=1,2;\,j=1,2}p_{ij}-1\right)$$

令 $\frac{\partial F}{\partial\theta}=0,\frac{\partial F}{\partial\eta}=0$

$$\text{得}\begin{cases}n_{11}\frac{1}{p_{11}}=\eta\\ n_{12}\frac{1}{p_{12}}=\eta\\ n_{21}\frac{1}{p_{21}}=\eta\\ n_{22}\frac{1}{p_{22}}=\eta\end{cases}$$

求得 $\hat{p}_{11}=n_{11}/n,\ \hat{p}_{12}=n_{12}/n,\ \hat{p}_{21}=n_{21}/n,\ \hat{p}_{22}=n_{22}/n$

再求 $\widehat{\theta}_0$，

$$\widehat{\theta}_0=\left(\frac{\widehat{p}_0}{2},\frac{1-\widehat{p}_0}{2},\frac{\widehat{p}_0^2}{2}+\widehat{p}_0\left(1-\widehat{p}_0\right)\right),\ \widehat{p}_0\text{是似然方程}\frac{\partial\tilde{l}(p)}{\partial p}=0\text{的解，}$$

$$\tilde{l}(p)=\ln\prod_{i=1}^{n}\tilde{p}(x_i;p)=\ln\frac{n!}{n_{11}!\,n_{12}!\,n_{21}!\,n_{22}!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n_{11}}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n_{12}}\left(\frac{p^2}{2}+p(1-p)\right)^{n_{21}}\left(\frac{(1-p)^2}{2}\right)^{n_{22}}$$

$$=\ln\frac{n!}{n_{11}!\,n_{12}!\,n_{21}!\,n_{22}!}+n_{11}\ln\frac{p}{2}+n_{12}\ln\frac{1-p}{2}+n_{21}\ln\left(\frac{p^2}{2}+p(1-p)\right)+n_{22}\ln\frac{(1-p)^2}{2}$$

令 $\dfrac{\partial l(p)}{\partial p}=0$

得 $(n_{11}+n_{12}+2n_{21}+2n_{22})p^2-(3n_{11}+2n_{12}+4n_{21}+4n_{22})p+(2n_{11}+2n_{21})=0$

求得 $$\widehat{p}_0=\frac{(3n_{11}+2n_{12}+4n_{21}+4n_{22})-\sqrt{(3n_{11}+2n_{12}+4n_{21}+4n_{22})^2-4(n_{11}+n_{12}+2n_{21}+2n_{22})(2n_{11}+2n_{21})}}{2(n_{11}+n_{12}+2n_{21}+2n_{22})}$$

那么 $\widehat{\theta}_0=\left(\dfrac{\widehat{p}_0}{2},\dfrac{1-\widehat{p}_0}{2},\dfrac{\widehat{p}_0^2}{2}+\widehat{p}_0\left(1-\widehat{p}_0\right)\right)$

注：计算可知另一个解大于 1，舍去

根据定理 3.19，原假设成立时，$2\ln\lambda(X)$ 随 n 增大而依分布收敛于 $\chi^2(2)$，我们考虑 0.05 的置信水平。又 $n_{11}=442, n_{12}=38, n_{21}=514, n_{22}=6$

由上面的计算可知

$$2\ln\lambda(X)=2n_{11}\left(\ln\frac{\widehat{p}_{11}}{\widehat{p}_{011}}\right)+2n_{12}\left(\ln\frac{\widehat{p}_{12}}{\widehat{p}_{012}}\right)+2n_{21}\left(\ln\frac{\widehat{p}_{21}}{\widehat{p}_{021}}\right)+2n_{22}\left(\ln\frac{\widehat{p}_{22}}{\widehat{p}_{022}}\right)$$

$$=2n_{11}\left(\ln\frac{\frac{n_{11}}{n}}{\frac{\widehat{p}_0}{2}}\right)+2n_{12}\left(\ln\frac{\frac{n_{12}}{n}}{\frac{1-\widehat{p}_0}{2}}\right)+2n_{21}\left(\ln\frac{\frac{n_{21}}{n}}{\frac{\widehat{p}_0^2}{2}+\widehat{p}_0\left(1-\widehat{p}_0\right)}\right)+2n_{22}\left(\ln\frac{\frac{n_{22}}{n}}{\frac{(1-\widehat{p}_0)^2}{2}}\right)$$

$$=117.09$$

$p\left(\chi^2(2)\ge 117.09\right)<0.05$，故我们拒绝原假设，即数据与模型不相符。

3.28（Kendall τ 检验）设(X_1,Y_1)，…，(X_n,Y_n)是来自连续总体(X,Y)的样本.欲检验假设 H_0: X 和 Y 相互独立对备择假设检验 H_1: X 和 Y 正相关.1938 年 Kendall 构造了以 $\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ 为核的 U 统计量，其中 $\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ =1 或 0，在$(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)>0$ 或其他。

（1）在原假设成立时，试证明：E(U)=0.5；

（2）这里正相关理解为

$$P(Y_1-Y_2>0\,|\,X_1-X_2>0)>\mathbf{0.5}$$

$$P(Y_1-Y_2<0\,|\,X_1-X_2<0)>\mathbf{0.5}$$

在原假设不成立时，试证明：$\mathrm{E(U)}>0.5$；

（3）试在大样本场合下，给出检验的拒绝域；

（4）上述检验问题可认为是有“有方向的”的检验问题，而下述检验问题，原假设 $\mathbf{H_0}$：**X** 和 **Y** 相互独立，对备择假设：**X** 和 **Y** 不相互独立，可认为是“无方向的”的检验问题.令

$$\boldsymbol{\theta}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(x,y)-F_x(x)\cdot F_y(y)\right]^2 dF(x,y)$$

基于样本构造参数 **θ** 的 **U** 统计量（假设样本容量足够大），并基于该 **U** 统计量给出这个“无方向的”的检验问题的解，其中 **F(x , y)**是(X,Y)的联合分布函数，$\mathrm{F_x(x)}$和$\mathrm{F_y(y)}$分别为X 和 Y的边缘分布函数.

(1)证明：以 $\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ 为核的 U 统计量

$$\mathrm{U}=\binom{n}{2}^{-1}\sum \phi((X_{i_1},X_{i_2}),(Y_{i_1},Y_{i_2}))$$

要证明 E(U)=0.5,只需证明 E($\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$)=0.5 即可.

E($\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$)= $P((X_1-X_2)(Y_1-Y_2)>0)$

$$=P(X_1-X_2>0,Y_1-Y_2>0)+P(X_1-X_2<0,Y_1-Y_2<0)$$

$$=P(Y_1-Y_2>0\,|\,X_1-X_2>0)\,P(X_1-X_2>0)+$$

$$P(Y_1-Y_2<0\,|\,X_1-X_2<0)\,P(X_1-X_2<0)$$

当原假设成立时，X_1-X_2 与 Y_1-Y_2 相互独立，从而

E($\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$)=$P(Y_1-Y_2>0)P(X_1-X_2>0)$+

$P(Y_1 - Y_2 < 0)\, P(X_1 - X_2 < 0)$

其中，$P(X_1 - X_2 > 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x_2) \int_{x_2}^{+\infty} dF(x_1)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(x_2) dF(x_2)$

$=0.5$

同理，$P(X_1 - X_2 < 0) = P(Y_1 - Y_2 < 0) = P(Y_1 - Y_2 > 0) = 0.5$.

从而，当原假设成立时，$E(\phi((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)))=0.5$.故 $E(U)=0.5$.

(2)在原假设不成立时，

$E(U)=P(Y_1 - Y_2 > 0 | X_1 - X_2 > 0)\, P(X_1 - X_2 > 0) +$

$P(Y_1 - Y_2 < 0 | X_1 - X_2 < 0)\, P(X_1 - X_2 < 0)$

$> 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5$

$=0.5$

(3) $\emptyset_1((x,y)) = E(\emptyset_1((X_1, Y_1),(X_2, Y_2)) | (X_1 = x, Y_1 = y)))$

$= P((x - X_2)(y - Y_2) > 0)$

$= P(X_2 > x, Y_2 > y) + P(X_2 < x, Y_2 < y)$

在原假设成立的条件下，即X和Y相互独立时，

$\emptyset_1((x,y)) = P(X_2 > x) P(Y_2 > y) + P(X_2 < x) P(Y_2 < y)$

$= \overline{F_x}(x) \overline{F_y}(y) + F(x)F(y)$-

$$\mathrm{E}(\emptyset_1(\mathrm{X}_1,Y_1))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\overline{F_x}(x)\overline{F_y}(y)+\mathrm{F(x)F(y)}]dF(x,y)$$

$=0.5$

$$\mathrm{E}(\emptyset_1^2(\mathrm{X}_1,Y_1))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\overline{F_x}(x)\overline{F_y}(y)+\mathrm{F(x)F(y)}]^2dF(x,y)$$

$=\frac{5}{18}$

从而，$\sigma_1^2=\mathrm{Var}\left(\emptyset_1(\mathrm{X}_1,Y_1)\right)=\mathrm{E}\left(\emptyset_1^2(\mathrm{X}_1,Y_1)\right)-E^2\left(\emptyset_1(\mathrm{X}_1,Y_1)\right)$

$=\frac{1}{36}$.

由U统计量的渐进正态性知，

$$\sqrt{n(\mathrm{U}-0.5)}\xrightarrow{L}N(0,4\sigma_1^2),\mathrm{n}\to\infty$$

在大样本场合下，U检验的拒绝域为

$$\mathrm{U}\geq\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{9n}}U_{1-\alpha}$$

(4)?

(1)证明：要想证 $E_\mu=0.5$，则只需证明$E_\Phi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=0.5$,

下证：

$\mathrm{E}\Phi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)$ =

$\mathrm{P}\left((x_1-x_2)(y_1-y_2)>0\right)=\mathrm{P}((x_1-x_2)>0)P((y_1-y_2)>0\mid(x_1-x_2)>0))+P((y_1-y_2)<0\mid(x_1-x_2)<0)$

在H_0为真得情况下，有

$E_\Phi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=\mathrm{P}((x_1-x_2)>0)P((y_1-y_2)>0)+P((y_1-y_2)<0)\mathrm{P}((x_1-x_2)<0)$

由于x_1与x_2，y_1与y_2的位置对等，故有$P((x_1-x_2)>0)=P((x_1-x_2)\leq 0)$且$P((x_1-x_2)>0)+P((x_1-x_2)\leq 0)$=1,故$P((x_1-x_2)>0)=0.5$，同理$P((y_1-y_2)>0)=0.5$.

从而有：$E_{\Phi}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0.5*0.5+0.5*0.5=0.5$.

(2)由(1)知H_0不成立，即H_1成立，所以有$E(\mu)>0.5*0.5+0.5*0.5=0.5$。

(3)在大样本场合下，

$\sqrt{n}[v-E_{\Phi}((x_1,y_1),(x_2,y_2))]\xrightarrow{L}N(0,4\sigma_1^2)$

其中σ_1^2为$\Phi_1=E[\Phi((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mid(x_1,y_1)=(x_2,y_2)]$的方差。

而 $E[\Phi((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0.5$，即 H_0 为真的情况下，故

$\sqrt{n}$（$v-0.5$）$\xrightarrow{L}N(0,4\sigma_1^2)$

在大样本场合下检验的拒绝域为$\left[\mu\mid\mu>\frac{1}{2}+\frac{2\sigma_1}{\sqrt{n}}\mu_{1-\alpha}\right]$,其中$\mu_{1-\alpha}$满足：

$$P(x>\mu_{1-\alpha})=\alpha$$

下面求σ_1^2，$\sigma_1^2=\mathrm{var}\Phi_1=var[E\Phi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\mid(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\right)]$

容易知道$\Phi_1(x_1,y_1)=\left[E\Phi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\mid(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\right)\right]=F$（$x_1,y_1$）

故$\sigma_1^2=\mathrm{var}\Phi_1=\mathrm{var}F(x_1,y_1)$=$\frac{1}{12}$。

故综上有：拒绝域为

$$\left[\mu\mid\mu>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}}\mu_{1-\alpha}\right]$$

第(4)没做出来。

3.29

证明：由于 R 服从均匀分布

故单个 R_i，$i=0,1,\cdots,n$，的也服从均匀分布：

$$P(R_i=r)=\frac{1}{n},\quad r=0,1,\cdots,n$$

（1）$E(R_i)=\sum_{i=1}^{n}P(R_i=r).r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r=\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)}{2}$

（2）$E(R_i^2)=\sum_{i=1}^{n}P(R_i=r).r^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r^2=\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(2n+1)(n+1)}{6}$

$$Var(R_i)=E(R_i^2)-(E(R_i))^2=\frac{(2n+1)(n+1)}{6}-(\frac{(n+1)}{2})^2=\frac{(n+1)(n-1)}{2}$$

（3）$P(R_i=r_1, R_j=r_2,)=\frac{1}{n(n-1)}$, $r_1\neq r_2$

$$Cov(R_i, R_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{r_1=1}^{n}\sum_{r_2=1}^{n}[(r_1-\frac{(n+1)}{2})(r_2-\frac{(n+1)}{2})]$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{r_1=1}^{n}[(r_1-\frac{(n+1)}{2})(\frac{n(n+1)}{2}-r_1-\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{r_1=1}^{n}[(r_1-\frac{(n+1)}{2})(-r_1)]$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(n+1)}{4})$$

$$=-\frac{(n+1)}{12}$$

3.32

解：样本 x_1, $x_2 \cdots x_m$ 和 y_1, $y_2 \cdots y_n$ 分别来自相互独立的连续随机变量总体 X 和 Y。将合样本(x_1, $x_2 \cdots x_m$, y_1, $y_2 \cdots y_n$)从小到大排列，排列后记作 $z_{(1)}\leqslant z_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant z_{(m+n)}$，记 y_1, $y_2 \cdots y_n$ 在合样本中的秩为 R_j(R_j=1,2,3…n+m)。

Y 样本的秩和 $W_y=\sum_{j=1}^{n}R_j$,称为秩和统计量。

U 统计量：$U(x_1, x_2 \ldots x_m; y_1, y_2 \ldots y_n)=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j}^{n}\phi(x_i,y_j)$ $\quad \phi(x_i,y_j)=\begin{cases}1, & x_i<y_j\\ 0, & x_i>y_j\end{cases}$

其中 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j}^{n}\phi(x_i,y_j)$={mn 个数对($x_i$,$y_j$)中 y 比 x 大的个数。$y_1$, $y_2 \cdots y_n$ 在合样本中排序

$y_{(1)}\leqslant y_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant y_{(n)}$，其中对应的秩为 R_j(R_j=1,2,3…n)。

有：

＃{$x_i<y_{(1)}$,i=1,2,3…m}=R_1-1

＃{$x_i<y_{(2)}$,i=1,2,3…m}=R_2-2

＃{$x_i<y_{(3)}$,i=1,2,3…m}=R_3-3

….

＃{$x_i<y_{(n)}$,i=1,2,3…m}=R_n-n

上式左边＃{A}表示(x_i,y_j)中 y 比 x 大的 x 的个数。

所有由此得出：

$$mnU = W_y - \frac{n(n+1)}{2}$$

3.33 在 $x_1,x_2,\cdots,x_m,\ y_1,y_2,\cdots,y_n,$同连续性分布时，试求下列尺度参数检验问题的检验统计量的期望和方差：(1)Ansari-Bradley 检验统计量；(2) Mood 检验统计量。

解：检验统计量的期望方差分别记为 E_A，E_M，D_A，D_M，将 $x_1,x_2,\cdots,x_m,\ y_1,y_2,\cdots,y_n,$从小到大排列得到样本 y_i 的秩 R_i，取$\sum_{i=1}^{n}a(R_i)$为检验统计量：

(1) Ansari-Bradley 检验：

1) N=2k 为偶数时，$a(r)=\begin{cases} r, & r=1,2,\cdots,k \\ N-r+1, & r=k+1,k+2,\cdots,N \end{cases}$

$$E_A=E\sum_{i=1}^{n}a(R_i)=nE(a(r))=n\times(\sum_{r=1}^{k}r+\sum_{r=k+1}^{N}N-r+1)\times\frac{1}{N}=\frac{n}{N}\times[\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(N-k)(N-k+1)}{2}]=\frac{n(N+2)}{4}$$

$$D_A=\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(a(R_i)-\bar{a})^2=\frac{2nm}{N(N-1)}[\sum_{r=1}^{k}r^2-k\times(\frac{(N+2)}{4})^2]$$

$$=\frac{2nm}{N(N-1)}[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-k\times(\frac{(N+2)}{4})^2]=\frac{(N^2-4)nm}{48(N-1)}$$

2) N=2k+1 为奇数时，$a(r)=\begin{cases} r, & r=1,2,\cdots,k+1 \\ N-r+1, & r=,k+2,\cdots,N \end{cases}$

$$E_A=E\sum_{i=1}^{n}a(R_i)=nE(a(r))=n\times(\sum_{r=1}^{k+1}r+\sum_{r=k+2}^{N}(N-r+1))\times\frac{1}{N}$$

$$=\frac{n}{N}\times[\frac{(k+2)(k+1)}{2}+\frac{(N-k)(N-k-1)}{2}]=\frac{n(N+1)^2}{4N}$$

$$D_A=\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(a(R_i)-\bar{a})^2=\frac{nm}{N(N-1)}[\sum_{r=1}^{k+1}r^2-(k+1)\times(\frac{(N+1)^2}{4N})^2+\sum_{r=k+2}^{N}(N-r-1)^2-k\times(\frac{(N+1)^2}{4N})^2]$$

$$=\frac{nm}{N(N-1)}[\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-N\times(\frac{(N+1)^2}{4N})^2]=\frac{(N+1)(N^2+3)nm}{48N^2}$$

(2) Mood 检验：$a(r)=(r-\frac{N+1}{2})^2$

$E_M=E\sum_{i=1}^{n}a(R_i)=nEa(R_i)=nE(r-(\frac{N+1}{2}))^2=n\times[E$ 错 误 ！ 未 找 到 引 用 源 。$(r^2)+E(\frac{N+1}{2})^2-E(r)\times(N+1)]$

$= n\times[\sum_{r=1}^{N} r^2\times\frac{1}{N}$**错误！未指定书签。**$+(\frac{N+1}{2})^2-\sum_{r=1}^{N} r\times\frac{1}{N}\times(N+1)]= n\times[\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$ **错误！未指定书签。**$+(\frac{N+1}{2})^2-\frac{N+1}{2}\times(N+1)]$

$= \frac{n(N^2-1)}{12}$

$$D_M = \frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(a(R_i)-\bar{a})^2 = \frac{nm}{N(N-1)}\left[\sum_{r=1}^{N}(r-\frac{N+1}{2})^4 - \frac{(N^2-1)^2N}{144}\right]$$

①

由于$\sum_{r=1}^{N} r^3=(\frac{N(N+1)}{2})^2$，$\sum_{r=1}^{N} r^4=\frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$

代入①得：$D_M=\frac{(N^2-4)(N+1)nm}{180}$

3.34 试根据 Hajek 定理，验证下列检验统计量的渐近正态性：

（1）Wilcoxon 秩和检验统计量 Wy；

（2）Mood 检验统计量；

（3）Ansari-Bradley 检验统计量。

证明：（1）将两样本 x1,,x2,⋯,xm 和 y1,y2,⋯,yn 合在一起，并将 y1,y2,⋯,yn 视为 xm+1,xm+2,⋯,xN。如果

$$c(i)=\begin{cases}0, i=1,2,\cdots m\\ 1, i=m+1,m+2,\cdots N\end{cases}$$

并且计分函数 a(r) = r,r=1,2,⋯,N。则有 Wilcoxon 秩和统计量

$$Wy = L = \sum_{i=1}^{N} c(i)a(Ri) = \sum_{j=1}^{n} Rj$$

对于 Wilcoxon 秩和检验统计量 Wy 的回归系数 c(i)有

$$\bar{c} = \frac{N-m}{N} = \frac{n}{N}$$

所以有

$$\max_{1\le i\le N}(c(i)-\bar{c})^2=\begin{cases}\left(\dfrac{n}{N}\right)^2 (m<n)\\ \left(\dfrac{m}{N}\right)^2 (m>n)\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2=m\left(\frac{n}{N}\right)^2+n\left(\frac{m}{N}\right)^2=\frac{mn}{N}$$

当 m<n 时，有

$$\frac{\max\limits_{1\le i\le n}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2}=\frac{n}{Nm}=\frac{n}{(m+n)m}\to 0, N\to\infty$$

同理 m>n，该比例也趋近于 0。

则有回归系数 c(i)满足条件 N。

对于 Wilcoxon 秩和检验统计量 Wy 的计分函数

$a(i)=i, i=1,2,\cdots,N$，

它具有形式 a(i)=(N+1)ϕ(i/(N+1))，其中 ϕ(t)=t,0<t<1。不难看出 ϕ(t)是平方可积函数。所以计分函数 a(i)为平方可积计分函数，由 Hajek 定理的推广，可知

$$\frac{L-E(L)}{\sqrt{Var(L)}}=\frac{L-N\bar{a}\bar{c}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(a(i)-\bar{a}\right)^2\Big/(N-1)}}\to N(0,1)$$

所以 Wilcoxon 秩和检验统计量 Wy 具有渐近正态性。

(2)将两样本 x1,,x2,⋯,xm 和 y1,y2,⋯,yn 合在一起，并将 y1,y2,⋯,yn 视为 xm+1,xm+2,⋯,xN。

$$c(i)=\begin{cases}0, i=1,2,\cdots m\\ 1, i=m+1, m+2,\cdots N\end{cases}$$

并且计分函数

$a(r)=(r-(N+1)/2)^2, r=1,2,\cdots,N$

则有 Mood 检验统计量

$$\sum_{j=1}^{n} a(Rj) = L = \sum_{i=1}^{N} c(i)a(Ri)$$

由（1）可知回归系数 c(i)满足条件 N。
对于 Mood 检验统计量的计分函数

$$a(r) = (r-(N+1)/2)^2, r = 1,2,\cdots,N$$

它具有形式 a(i)=(N+1)ϕ(i/(N+1))，其中

$$\varphi(t) = (t-\frac{1}{2})^2, 0 < t < 1$$

不难看出 ϕ(t)是平方可积函数。所以计分函数 a(i)为平方可积计分函数，由 Hajek 定理的推广，可知

$$\frac{L-E(L)}{\sqrt{Var(L)}} = \frac{L-N\bar{a}\,\bar{c}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(a(i)-\bar{a}\right)^2 \Big/ (N-1)}} \to N(0,1)$$

所以 Mood 检验统计量具有渐近正态性。
（3）将两样本 x1,,x2,⋯,xm 和 y1,y2,⋯,yn 合在一起，并将 y1,y2,⋯,yn 视为 xm+1,xm+2,⋯,xN。

$$c(i) = \begin{cases} 0, i = 1,2,\cdots m \\ 1, i = m+1, m+2,\cdots N \end{cases}$$

并且计分函数

$$a(r) = \begin{cases} r, r = 1,2,\cdots,k \\ N-r+1, r = k+1, k+2,\cdots,N \end{cases} (N = 2k)$$

$$a(r) = \begin{cases} r, r = 1,2,\cdots,k+1 \\ N-r+1, r = k+2, k+3,\cdots,N \end{cases} (N = 2k+1)$$

则有 Ansari-Bradley 检验统计量

$$\sum_{j=1}^{n} a(Rj) = L = \sum_{i=1}^{N} c(i)a(Ri)$$

由（1）可知回归系数 c(i)满足条件 N。
对于 Ansari-Bradley 检验统计量的计分函数

$$a(r)=\begin{cases} r, r=1,2,\cdots,k \\ N-r+1, r=k+1,k+2,\cdots,N \end{cases}(N=2k)$$

$$a(r)=\begin{cases} r, r=1,2,\cdots,k+1 \\ N-r+1, r=k+2,k+3,\cdots,N \end{cases}(N=2k+1)$$

它具有形式 a(i)=(N+1)ϕ(i/(N+1))，其中

$$\varphi(t)=\begin{cases} t(t\le \frac{1}{2}) \\ 1-t(t>\frac{1}{2}) \end{cases}(N=2k)$$

$$\varphi(t)=\begin{cases} t(t\le \frac{k+1}{N}) \\ 1-t(t>\frac{k+1}{N}) \end{cases}(N=2k+1)$$

不难看出 ϕ(t)是平方可积函数。所以计分函数 a(i)为平方可积计分函数，由 Hajek 定理的推广，可知

$$\frac{L-E(L)}{\sqrt{Var(L)}}=\frac{L-N\bar{a}\,\bar{c}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(c(i)-\bar{c}\right)^2\sum_{i=1}^{N}\left(a(i)-\bar{a}\right)^2\Big/(N-1)}}\to N(0,1)$$

所以 Ansari-Bradley 检验统计量具有渐近正态性。

4.4 设$X=(X_1,X_2,\dots\dots,X_n)$是来自密度函数为

$$\rho(x,\theta)=\begin{cases}\exp\{-(x-\theta)\}, & x\ge\theta\\ 0\quad , & x<\theta\end{cases}$$

的总体样本，试基于最小次序统计量$x_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\dots\dots,X_n\}$构造$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

解： $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}I_{\{\theta\le x_{(1)}\}}$

所以$T=x_{(1)}$为θ的充分统计量，取枢轴量是$x_{(1)}-\theta\sim\exp(n)$

所以，

$2n(x_{(1)}-\theta)\sim Ga(1,0.5)=\chi^2(2)$,

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2)\le 2n(x_{(1)}-\theta)\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)\right)=1-\alpha$$

则：所要求的基于最小次序统计量$x_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\dots\dots,X_n\}$构造$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置置信区间是：

$$x_{(1)}-\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)}{2n}\le\theta\le x_{(1)}-\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2)}{2n}$$

4.6 设总体 X={1,2,...,N}上的均匀分布，其中 N 为未知参数。设 $X=(X_1,\dots,X_n)$是来自 X 的样本。令 $X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.试基于 $X_{(n)}$构造 N 的置信水平 1-a 的置信上限。

解：最大次序统计量 $X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$是 N 的 MLE，也是 N 的充分统计量。

因为$\frac{X_{(n)}}{N}$的密度函数为 $ny^{n-1}(0\le y\le 1)$,所以取枢轴量 $G(X,N)=\frac{X_{(n)}}{N}$,

对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，只要a和b($a<b$)满足条件：$b^n-a^n=1-\alpha$，就有

$$P_\theta(a\le\frac{X_{(n)}}{N}\le b)=1-\alpha$$

则N的置信水平$1-\alpha$的置信区间$[\frac{X_{(n)}}{b},\ \frac{X_{(n)}}{a}]$,

故构造出N的置信水平$1-\alpha$的置信上限是$\frac{X_{(n)}}{a}$。

4.7 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自均匀分布 U（q-0.5，q+0.5）的样本。试构造 q 的

置信水平为的 1-a 的置信区间.

解：令 $\hat{\theta}=\frac{X(1)+X(n)}{2}-\theta$，则 $\hat{\theta}$ 的密度函数为

$$f(z)=\begin{cases} n(1+2z)^{n-1}, & -\frac{1}{2}\le z\le 0 \\ n(1-2z)^{n-1}, & 0\le z\le\frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即

$$f(z)=\begin{cases} n(1-2|z|)^{n-1}, & |z|\le\frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 $\hat{\theta}$的分布与θ无关。从而 $\hat{\theta}$可以作为对θ求置信区间的枢轴量。

选取常数 c 和 d（$-\frac{1}{2}\le c<0$，$0\le d<\frac{1}{2}$）使得

$$P_\theta\left\{c\le\frac{X(1)+X(n)}{2}-\theta\le d\right\}=\int_c^d f(z)dz=\int_c^0 n(1+2z)^{n-1}\,dz+\int_0^d n(1-2z)^{n-1}\,dz$$

$$=1-\frac{1}{2}(1+2c)^n-\frac{1}{2}(1-2d)^n=1-\alpha$$

从而

$$(1+2c)^n+(1-2d)^n=2\alpha\qquad（*）;$$

置信区间为$[\frac{X(1)+X(n)}{2}-d,\ \frac{X(1)+X(n)}{2}-c]$，其长度为 L=d-c.由（*）式得

$$c=\frac{1}{2}\left\{[2\alpha-(1-2d)^n]^{\frac{1}{n}}-1\right\}$$

代入 L=d-c 得，

$$L=d-\frac{1}{2}\left\{[2\alpha-(1-2d)^n]^{\frac{1}{n}}-1\right\}$$

取$\frac{(1+2c)^n}{2}=\frac{(1-2d)^n}{2}=\frac{\alpha}{2}$，则 $c=\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{2}$，$d=\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}$。

从而θ的置信水平为的$1-\alpha$的置信区间为：

$$[\frac{X(1)+X(n)}{2}-\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2},\ \frac{X(1)+X(n)}{2}+\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}]$$

4.7 设 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 是来自均匀分布 $U(\theta-0.5,\theta+0.5)$的样本.试构造θ的置信水平为 $1-\alpha$的置信区间.

解：由于 $L(\theta,x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}-0.5<\theta<x_{(1)}+0.5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

介于 $X_{(n)}-0.5$ 与 $X_{(1)}+0.5$ 之间的数均是θ的一个 MLE.

取 $MLE\ \hat{\theta}=(X_{(1)}+X_{(n)})/2$

1.下证 $G(Z,\theta)=(X_{(1)}+X_{(n)})/2-\theta$ 是枢轴量.

$X_{(1)}$与 $X_{(n)}$不相互独立，其联合分布密度函数为

$$P(x,y)=n(n-1)(y-x)^{n-2} \quad (-0.5-\theta\le x\le y\le 0.5-\theta)$$

令 $X=(X_{(1)}-\theta)/2,Y=(X_{(n)}-\theta)/2$.则（$X,Y$）的联合分布密度函数为

$$P(x,y)=2^n n(n-1)(y-x)^{n-2} \quad (-0.5\le x\le y\le 0.5)$$

$P(x,y)$与参数θ无关,则 $G(Z,\theta)=(X+Y)/2$ $(-0.25\le Z\le 0.25)$为枢轴量.

2.下求 $Z=(X+Y)/2$ 的分布函数.

(1)当 $z\le -0.25$ 时,$F(z)=0$.

(2)当$-0.25<z\le 0$ 时,

$$\begin{aligned}F(z)&=\int_{-0.25}^{z/2}dx\int_{x}^{z-x}2^n n(n-1)(y-x)^{n-2}dy\\&=\int_{-0.25}^{z/2}2^n n(z-2x)^{n-1}dx\\&=\frac{(1+2z)^n}{2}\end{aligned}$$

(3)当 $0<z\le 0.25$ 时

$$\begin{aligned}F(z)&=2^n\int_{-0.25}^{z/2}dx\int_{x}^{z/2}n(n-1)(y-x)^{n-2}dy+2^n\int_{z/2}^{0.25}dy\int_{0.25}^{z-y}n(n-1)(y-x)^{n-2}dx\\&=2^n\int_{-0.25}^{z/2}n(z/2-x)^{n-1}dx+(-1)^{n-2}2^n\int_{z/2}^{0.25}[n(2y-z)^{n-1}-n(0.25-y)^{n-1}]dy\\&=(2z+1)^n/2-(1-2z)^n/2+1-(2z+1)^n/2\\&=1-(1-2z)^n/2\end{aligned}$$

(4)当 $z>0.25$ 时,$F(z)=1$.

故 Z 的分布函数为：

$$F(z)=\begin{cases}0, & z\le -0.25\\(1+2z)^n/2, & -0.25<z\le 0\\1-(1-2z)^n/2, & 0<z\le 0.25\\1, & z>0.25\end{cases}$$

对给定的α $(0<\alpha<1)$,只要 a 和 b $(a<b)$满足条件：$F(a)-F(b)=1-\alpha$,就有 $P(a\le(X_{(1)}+X_{(n)})/2-\theta\le b)=1-\alpha$.

由不等式等价变形可以得到θ的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[(X_{(1)}+X_{(n)})/2-b,(X_{(1)}+X_{(n)})/2-a]$.取值时仅考虑区间的平均长度愈短愈好的精度要求.

不妨设 $a<0<b$,则

$F(b)-F(a)=1-(1-2b)^n/2-(1+2a)^n/2=1-\alpha$

取$(1-2b)^n/2=(1+2a)^n/2=\alpha/2$

则 $a=(\alpha^{1/n}-1)/2$, $b=(1-\alpha^{1/n})/2$, 故 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[(X_{(1)}+X_{(n)})/2-(1-\alpha^{1/n})/2,\ (X_{(1)}+X_{(n)})/2+(1-\alpha^{1/n})/2]$.

4.8

解：设 $p(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n)=\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}I_{(\theta_1\le x_{(1)}\le x_{(\mathrm{n})}\le\theta_2)}$,

记 x_1 的密度函数为 p(x), x_n 的密度函数为 p(y),

$$p(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)[\mathrm{F}(\mathrm{y})-\mathrm{F}(\mathrm{x})]^{n-2}p(\mathrm{x})\mathrm{p}(\mathrm{y})$$

$$=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\frac{(y-x)^{n-2}}{(\theta_2-\theta_1)^n},(1)$$

$$z=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1},w=\frac{x_{(n)}+x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1},$$

则 $x_{(n)}=\dfrac{(z+w)(\theta_2-\theta_1)}{2},x_{(1)}=\dfrac{(\mathrm{w}-\mathrm{z})(\theta_2-\theta_1)}{2}$,

$$p(\mathrm{w},\mathrm{z})=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)[\frac{(\mathrm{z}+\mathrm{w})(\theta_2-\theta_1)}{2}-\frac{(w-z)(\theta_2-\theta_1)}{2}]^{n-2}\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2},$$

$$=\frac{n(\mathrm{n}-1)}{2}z^{n-2},$$

解（1）式可得，$w-z\ge\dfrac{2\theta_1}{\theta_2-\theta_1},z\ge0,w+z\ge\dfrac{2\theta_2}{\theta_2-\theta_1}.$

4.9 设 $X=(X_1,\cdots X_{10})$ 是来自 Pareto 分布总体的样本。Pareto 分布的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\theta}\cdot(\dfrac{\theta}{x})^{\beta+1}, & x\ge\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\beta=2$ 已知。试构造 θ 的置信水平为 $1-\alpha=0.9$ 的 UMA 置信上限。

解：$X\sim p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x\ge\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2\theta^2}{x^3}dx=2\theta^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=2\theta$$

取$\theta_1 < \theta_2$, $p(x,\theta_1) = \dfrac{2\theta_1^2}{x^3}$, $p(x,\theta_2) = \dfrac{2\theta_2^2}{x^3}$

取$T = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$, $S = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

似然比$\lambda(x) = \dfrac{p(x,\theta_2)}{p(x,\theta_1)} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(2\theta_2^2 / x_i^3)}{\prod_{i=1}^{n}(2\theta_1^2 / x_i^3)} = (\dfrac{\theta_2}{\theta_1})^{2n}$ 与$T(X)$无关

故$\lambda(x)$是关于$T(X)$单调非降的，

由 Th3.8 知，单边假设检验问题存在水平为α的 UMPT 检验函数

由于$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$,

故拒绝域为$\{x: T(X) < c\} = \{x: \dfrac{\sqrt{n}(X-\mu)}{S} < \dfrac{\sqrt{n}(c-\mu)}{S}\}$

$E_{\theta_0}\phi(T(x)) = p\{x: T(x) < c\} + r\cdot p\{x: T(x) = c\}$

又由于$t(n-1)$是连续的

所以$E_{\theta_0}\phi(T(x)) = p\{x: T(x) < c\} = p\{x: \dfrac{\sqrt{n}(X-\mu)}{S} < \dfrac{\sqrt{n}(c-\mu)}{S}\} = \alpha$

$\dfrac{\sqrt{n}(c-\mu)}{S} = t_\alpha \Rightarrow c = \dfrac{t_\alpha \cdot S}{\sqrt{n}} + \mu = \dfrac{t_\alpha \cdot S}{\sqrt{n}} + 2\theta$

所以接受域为$\overline{W} = \{x: T(x) > c\} = \{x: \overline{X} > \dfrac{t_\alpha\cdot S}{\sqrt{n}} + 2\theta\} = \{x: \theta < \dfrac{\overline{X}}{2} - \dfrac{t_\alpha \cdot S}{2\sqrt{n}}\}$

故θ的置信水平为$1-\alpha$的 UMA 置信上限为$\dfrac{\overline{X}}{2} - \dfrac{t_\alpha\cdot S}{2\sqrt{n}}$

4.11 接例 4.10，试证明，$\hat{\theta}_U^*$为θ的置信水平为1−α的无偏置信估计上限.

解： 令 $X_{(1)}$为最小次序统计量. 易知 $X_{(1)}$为充分统计量且密度函数为

$$P(y;\theta) = \begin{cases} \dfrac{n}{\theta}\exp\{-\dfrac{ny}{\theta}\}, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

则 $X_{(1)} \sim \exp\{\dfrac{n}{\theta}\}$.

构造检验问题 H_0: $\theta \ge \theta_0$ 对 H_1: $\theta < \theta_0$.

由指数分布与 Gamma 分布关系可知：

$2\frac{n}{\theta}$ $X_{(1)} \sim Ga(1,\ \frac{1}{2})=\chi^2(2)$.

则$\int_{\frac{2nX_{(1)}}{\theta}}^{+\infty}\chi_\alpha^2(2)\,dx$ = α .从而 $P\{\theta_0 > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}=\alpha$.

且拒绝域 W 为$\{\frac{2nX_{(1)}}{\theta_0} < \chi_\alpha^2(2)\}$即$\{\theta_0 > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}$.

由定理4.8知 $\hat{\theta}_U^* = \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}$ 为θ的置信水平为$1-\alpha$的 UMA 置信上限.

$\forall\theta' > \theta$ 时

$P_\theta\{\theta' > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\} \le P_\theta\{\theta > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\} \le P\{\theta_0 > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}=\alpha$.

从而 $P_\theta\{\theta' \le \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\} \le 1-P_\theta\{\theta' > \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\} \le 1-\alpha$.

由无偏置信上限定义可知 $\hat{\theta}_U^* = \frac{2nX_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}$ 是 $1-\alpha$的无偏置信上限.

4.11

解：令 $x_{(1)}$ 是最小次序统计量，易知 $x_{(1)}$ 为充分统计量.

构造检验问题 $H_0:\theta\ge\theta_0 vs H_1:\theta<\theta_0$

且 $x_{(1)}$ 的密度函数为

$$p(y;\theta)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{\frac{-ny}{\theta}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

则 $x_{(1)} \sim \exp\{\frac{n}{\theta}\}$

由指数分布与伽玛分布关系可知

$2\frac{n}{\theta}x_{(1)} \sim Ga(1,\frac{1}{2})=\chi^2(2)$

则$\int_{\frac{2nx_{(1)}}{\theta_0}}^{+\infty}\chi_\alpha^2(2)dx=\alpha$，从而 $p_\theta\{\theta_0 > \frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}=\alpha$，

且拒绝域 w 为{ $\frac{2nx_{(1)}}{\theta_0}<\chi_\alpha^2(2)$}即{ $\theta_0>\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}$}.

由定理 4.8 可知，$\hat{\theta}_U^{\,*}=\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的 UMA 置信上限.

$\forall\theta^{'}>\theta$时,

$$p_\theta\left\{\theta^{'}>\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\right\}\le p_\theta\{\theta>\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}\le p_\theta\{\theta_0>\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}=\alpha \quad ,$$

从而 $p_\theta\left\{\theta^{'}\le\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\right\}\le 1-p_\theta\{\theta^{'}\ge\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2(2)}\}\le 1-\alpha$，由无偏置信上限的定义可知

$\frac{2nx_{(1)}}{\chi_\alpha^2}$是$1-\alpha$的无偏置信上限.

4.12 设样本 X=(X_1,……,Xn)来自双参数指数分布总体，其密度函数为

$$P(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$$

(1) 试构造μ的置信水平为 1–α的 UMAU 的置信下限;

(2) 试构造σ的置信水平为 1–α的 UMAU 的置信区间。

解:

（1）要求μ的 UMAU 的置信下限，须求 H_0：$\mu\le\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$ 的 UMPU 检验，拒绝域为 $W=W(x;\mu_0)$

若 $x\in\overline{W}(x;\mu_0)\Leftrightarrow\mu_0\ge\tilde{\mu}_L(x)$,则$\tilde{\mu}_L(x)$为μ的置信水平为 1–α的 UMAU 的置信下限，要求σ的 UMAU 的置信区间，须求 H_0：$\sigma=\sigma_0$; H_1：$\sigma\ne\sigma_0$ 的 UMPU 检验, 拒绝域为 $W=W(x;\ \sigma_0)$

若 $x\in\overline{W}(x;\sigma_0)\Leftrightarrow\tilde{\sigma}_L(x)\le\sigma_0\le\tilde{\sigma}_0(x)$,则$[\tilde{\sigma}_L(x),\ \tilde{\sigma}_0(x)]$为σ的置信水平为 1–α的 UMAU 的置信区间。

对 X~ $P(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}$ $x\ge\mu$,样本 X_1,……,Xn 的联合密度函数为

$$P(x_1\ldots\ldots x_2;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma^n}\exp\{-\frac{\sum_{i=2}^n x_i-n\mu}{\sigma}\}I_{[x(1)\ge\mu]}=\frac{1}{\sigma^n}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-n\mu)}{\sigma}\}I_{[x_{(1)}\ge\mu]}$$

则 $x_{(1)}$和$\sum_{i=1}^n x_i-x_{(1)}$为(μ,σ)的完备充分统计量，记 $T_1=x_{(1)}$, $T_2=\sum_{i=1}^n x_i-x_{(1)}$

由已知可求 T_1 的密度函数为$\rho_1(x)=\frac{n}{\sigma}\exp\{-\frac{n(x-\mu)}{\sigma}\}I_{[x_{(1)}\geq\mu]}$

T_2 的密度函数为$\rho_2(x)=\frac{1}{(n-2)!}\sigma^{-(n-1)}\exp\{-\frac{x}{\sigma}\}x^{n-2}I_{[x\geq 0]}$

设 T 是 X~ $\rho_\theta(\theta\in\Theta)$充分并且有界完备统计量，而 f($x$)的分布与θ无关，则$\forall\ \theta\in\Theta$，T($x$)与 f($x$)独立，则 T_1 ，T_2 相互独立。

（2）下面讨论σ的检验问题：H_0：$\sigma=\sigma_0$; H_1：$\sigma\neq\sigma_0$（$\sigma_0>0$），

当 H_0 成立时 $T_2\sim\frac{\sigma_0}{2}\chi^2_{2n-2}(\alpha)$,σ的 UMAU 的拒绝域为$[T_2\leq C_1$ 或 $T_2\geq C_2]$

$\phi(T_1,T_2)=\begin{cases}0, & C_1<T_1<C_2,\\ 1, & T_2\leq C_1 或 T_2\geq C_2.\end{cases}$其中 C_1，C_2 由以下㊀㊁两式确定：

$E_{\sigma_0}[\phi(T_1,T_2)\mid T_1=t]-E_{\sigma_0}[\phi(T_2)]=\alpha\Rightarrow\int_{\frac{2C_1}{\sigma_0}}^{\frac{2C_2}{\sigma_0}}\chi^2(x\mid 2n-2)dx=1-\alpha$ ㊀

$E_{\sigma_0}[T_2\phi(T_1,T_2)\mid T_1=t]=\alpha E_{\sigma_0}[T_2\mid T_1=t]$即 $E_{\sigma_0}[T_2\phi(T_2)]=\alpha E_{\sigma_0}[T_2]$

由 $ET_2=\frac{\sigma_0}{2}(2n-2)=\sigma_0(n-1)$得：

$E_{\sigma_0}[T_2(1-\phi(T_2))]=(1-\alpha)E_{\sigma_0}[T_2]=(n-1)\sigma_0(1-\alpha)=(n-1)\sigma_0 E_{\sigma_0}[1-\phi(T_2)]$

$\Rightarrow E_{\sigma_0}[(\frac{T_2}{T_1}-(n-1))(1-\phi(T_2))]=0$ 即 $E_{\sigma_0}[(\frac{2}{T_1}T_2-(2n-2))(1-\phi(T_2))]=0$

$\Rightarrow\int_{\frac{2C_1}{\sigma_0}}^{\frac{2C_2}{\sigma_0}}(x-(2n-2))\chi^2(x\mid 2n-2)dx=0$ ㊁

由势函数 $g(t)=1-\int_{\frac{2C_1}{\sigma_0}}^{\frac{2C_2}{\sigma_0}}\chi^2(x\mid 2n-2)dx$在$\sigma=\sigma_0$时达到最小

$\Rightarrow C_2\chi^2(\frac{2C_2}{\sigma_0}\mid 2n-2)-C_1\chi^2(\frac{2C_1}{\sigma_0}\mid 2n-2)=0$

令 $C_1=\frac{(2n-2)\sigma_0}{b}$ ，$C_2=\frac{(2n-2)\sigma_0}{a}$

则拒绝域变为 $W=[x:b\frac{T_2}{2n-2}\leq\sigma_0$ 或 $a\frac{T_2}{2n-2}\geq\sigma_0]$

其中 a,b 满足$\frac{1}{a}\chi^2(\frac{2n-2}{a}\mid 2n-2)=\frac{1}{b}\chi^2(\frac{2n-2}{b}\mid 2n-2)$

$\Rightarrow[a\frac{T_2}{2n-2}, b\frac{T_2}{2n-2}]$为σ的置信水平为 $1-\alpha$的 UMAU 的置信区间，

其中 $T_2=\sum_{i=1}^{n}x_i-x$

4.12 设样本 X=(X_1, …, X_n)来自双参数指数分布总体，其密度函数为

$$\mathbf{p}(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}$$

(1)试构造μ 的置信水平为 1-α 的 UMAU 的置信下限；

(2)试构造σ 的置信水平为 1-α 的 UMAU 的置信区间。

解：（1）要求μ 的 UMAU 的置信下限，须求 H_0：μ 错误！未找到引用源。0；H_1：μ 错误！未找到引用源。0 的 UMPU 检验，拒绝域为 W=W（错误！未找到引用源。0）

若错误！未找到引用源。，则错误！未找到引用源。为μ 的置信水平为 1-α 的 UMAU 的置信下限，

要求σ 的 UMAU 的置信区间，须求 H_0：σ =σ 0；H_1：σ 错误！未找到引用源。σ 0 的 UMPU 检验，拒绝域为 W=W（错误！未找到引用源。0）

若错误！未找到引用源。，则[错误！未找到引用源。]为σ 的置信水平为 1-α 的 UMAU 的置信区间。

对 X 错误！未找到引用源。，

样本 X_1, …, X_n 的联合密度函数为错误！未找到引用源。=错误！未找到引用源。

=错误！未找到引用源。

则错误！未找到引用源。和错误！未找到引用源。为（μ ，σ ）的完备充分统计量。记 T_1=错误！未找到引用源。，T_2=错误！未找到引用源。

由已知可求知 T_1 的密度函数为错误！未找到引用源。=错误！未找到引用源。

T_2 的密度函数为错误！未找到引用源。=错误！未找到引用源。

设 T 是 X 错误！未找到引用源。充分且有界完备统计量，而 f(x)的分布与θ 无关，则对错误！未找到引用源。θ 错误！未找到引用源。Θ，T（x）与 f(x)独立，则有 T_1，T_2 相互独立。

（2）下面讨论σ的检验问题：$H_0:\sigma=\sigma_0$ ，$H_1:\sigma\neq\sigma_0(\sigma_0>0)$

当H_0成立时 $T_2\sim\frac{\sigma_0}{2}\chi^2_{2n-2}(\alpha)$，$\sigma$的 UMPUT 的拒绝域为$\left[T_2\leq C_1或T_2\geq C_2\right]$

$$\phi(T_1,T_2)=\begin{cases}0,C_1<T_1<C_2\\ 1,T_2\leq C_1或T_2\geq C_2\end{cases}$$

其中C_1，C_2由以下①，②两式确定：

$$E_{\sigma_0}\left[\phi(T_1,T_2)|T_1=t\right]-E_{\sigma_0}\left[\phi(T_2)\right]=\alpha\Rightarrow\int_{2C_1/\sigma_0}^{2C_2/\sigma_0}\chi^2(x|2n-2)dx=1-\alpha \quad ①$$

$$E_{\sigma_0}\left[T_2\phi(T_1,T_2)|T_1=t\right]=\alpha E_{\sigma_0}\left[T_2|T_1=t\right]即E_{\sigma_0}\left[T_2\phi(T_2)\right]=\alpha E_{\sigma_0}\left[T_2\right]$$

由 $ET_2=\frac{\sigma_0}{2}(2n-2)=\sigma_0(n-1)$

$\therefore E_{\sigma_0}\left[T_2\left(1-\phi\left(T_2\right)\right)\right]=\left(1-\alpha\right)E_{\sigma_0}\left[T_2\right]=(n-1)\sigma_0(1-\alpha)=(n-1)\sigma_0 E_{\sigma_0}\left[1-\phi\left(T_2\right)\right]$

$\Rightarrow E_{\sigma_0}\left[\left(\frac{T_2}{T_1}-\left(n-1\right)\right)\left(1-\phi\left(T_2\right)\right)\right]=0$ 即： $E_{\sigma_0}\left[\left(\frac{2}{T_1}T_2-\left(2n-2\right)\right)\left(1-\phi\left(T_2\right)\right)\right]=0$

$\Rightarrow \int_{2C_1/\sigma_0}^{2C_2/\sigma_0}\left(x-\left(2n-2\right)\right)\chi^2\left(x\mid 2n-2\right)dx=0$ ②

由势函数 $g\left(t\right)=1-\int_{2C_1/\sigma_0}^{2C_2/\sigma_0}\chi^2\left(x\mid 2n-2\right)dx$ 在 $\sigma=\sigma_0$ 时达到最小

$\Rightarrow C_2\chi^2\left(\frac{2C_2}{\sigma_0}\mid 2n-2\right)-C_1\chi^2\left(\frac{2C_1}{\sigma_0}\mid 2n-2\right)=0$

令 $C_1=\frac{\left(2n-2\right)\sigma_0}{b}$， $C_2=\frac{\left(2n-2\right)\sigma_0}{a}$

则拒绝域变为 $W=\left[x:b\cdot\frac{T_2}{2n-2}\le\sigma_0 \text{或} a\cdot\frac{T_2}{2n-2}\ge\sigma_0\right]$

其中 a,b 满足 $\frac{1}{a}\chi^2\left(\frac{2\text{n}-2}{a}\mid 2n-2\right)=\frac{1}{b}\chi^2\left(\frac{2\text{n}-2}{b}\mid 2n-2\right)$

$\Rightarrow\left[a\frac{T_2}{2n-2},b\frac{T_2}{2n-2}\right]$ 为 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的 UMAU 置信区间，其中

$T_2=\sum_{i=1}^{n}x_i-x$

4.13

证明：1）若 $n=n_0$,则 $n_0>[\frac{s^2}{c}]+1$。设此时构造的区间长度为 L_1，则

$L_1^2=(\frac{2s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1))^2=\frac{4s^2}{n_0}[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2$（因为 $c=\frac{L^2}{4[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2}$）

$=\frac{s^2}{n_0}\cdot\frac{L^2}{c}=L^2\cdot\frac{\frac{s^2}{c}}{n_0}<L^2$

则 $L_1<L$。（1）

$$P_{\mu}\{\overline{X}_0 - \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1) \le \mu \le \overline{X}_0 + \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)\}$$

$$= P_{\mu}\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1) \le \frac{\overline{X}_0 - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)\}$$

而 $\frac{\overline{X}_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}} \sim N(0,1)$，$\frac{\sum_{i=1}^{n_0}(X_i - \overline{X}_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_0 - 1)$，也即 $\frac{(n_0 - 1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_0 - 1)$，

则 $\frac{\frac{\overline{X}_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}}}{\sqrt{\frac{(n_0 - 1)s^2}{\sigma^2(n_0 - 1)}}} \sim t(n_0 - 1)$，也即 $\frac{\overline{X}_0 - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}} \sim t(n_0 - 1)$

则 $P_{\mu}\{\overline{X}_0 - \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1) \le \mu \le \overline{X}_0 + \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)\}$

$$= P_{\mu}\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1) \le \frac{\overline{X}_0 - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)\}$$

$=1-\alpha$ （2）

由（1）（2）知构造的区间 $[\overline{X}_0 - \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1),\ \overline{X}_0 + \frac{s}{\sqrt{n_0}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)]$ 为μ的置信水平为 $1-\alpha$ 且区间长度不大于给定正数 L 的置信区间。

2）当 $n>n_0$ 时，即 $n=[\frac{s^2}{c}]+1$。

设此时构造的区间长度为 L_2，则

$$L_2^2 = (\frac{2s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1))^2 = \frac{4s^2}{n}[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0 - 1)]^2 = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{L^2}{c} = L^2 \cdot \frac{\frac{s^2}{c}}{n} < L^2$$

即 $L_2<L$。 （3）

$$P_\mu\{\overline{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\mu\le\overline{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}$$

$$=P_\mu\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}$$

而 $\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$， $\frac{(n_0-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_0-1)$， 则 $\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n_0-1)$。

则 $P_\mu\{\overline{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\mu\le\overline{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}$

$$=P_\mu\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}$$

=1-α。 （4）

由（3）（4）知区间 $[\overline{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1),\ \overline{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]$ 为μ的置信水平为 1-α 且区间长度不大于正数 L 的置信区间。

4.13 (Stein 两阶段抽样方案)设总体 X 服从正态分布 $N(m,s^2)$.欲构造 m 的置信水平为 1−a 且区间长度不大于给定正数 L 的置信区间.关于这个问题,Stein 的两阶段抽样方案如下:

(1)第一阶段抽样:从总体 X 抽取样本 $X_1,\cdots X_{n0}$,其中 n_0 是任意预先指定的自然数.令

$$X_0=\frac{1}{n_0}\cdot\sum_{i=1}^{n_0}X_i,\qquad S^2=\frac{1}{n_0-1}\cdot\sum_{i=1}^{n_0}(X_i-\bar{X}_0)^2,\qquad c=\frac{L^2}{4[t_{1-\frac{a}{2}}(n_0-1)]^2},\qquad n=\max\{n_0,[\frac{s^2}{c}]+1\},$$

(2)如果 $n=n_0$,则抽样结束,构造区间 $[\bar{X}_0-\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{a}{2}}(n_0-1),\bar{X}_0+\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{a}{2}}(n_0-1)]$

(3)如果 $n>n_0$,则有第二阶段抽样;从总体 X 继续抽取样本 $X_{n0-1}\cdots X_n$,令 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i$

并构造区间 $[\bar{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{a}{2}}(n_0-1),\bar{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{a}{2}}(n_0-1)]$

试证明所构造的区间符合要求.

证明：1)若 $n=n_0$,则 $n_0>[\frac{s^2}{c}]+1$.设此时构造的区间长度为 L_1,则

$$L_1^2=[\frac{2s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2=\frac{4s^2}{n_0}[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2(\text{因为 } c=\frac{L^2}{4[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2})$$

$$=\frac{s^2}{n_0}\cdot\frac{L^2}{c}=L^2\cdot\frac{\frac{s^2}{c}}{n_0}<L^2$$

则 $L_1<L$.(1)

$$P_\mu\{\bar{X}_0-\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\leq\mu\leq\bar{X}_0+\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}=P_\mu\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\leq\frac{\bar{X}_0-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}}\leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1))\}$$

而$\frac{\bar{X}_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}}\sim N(0,1)$，$\frac{\sum_{i=1}^{n_0}(X_i-\bar{X}_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_0-1)$,也即$\frac{(n_0-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_0-1)$,

则$\frac{\frac{\bar{X}_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}}}{\sqrt{\frac{(n_0-1)s^2}{\sigma^2(n_0-1)}}}\sim t(n_0-1)$,也即$\frac{\bar{X}_0-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}}\sim t(n_0-1)$

则 $P_\mu\{\bar{X}_0-\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\leq\mu\leq\bar{X}_0+\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}$

$$=P_\mu\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\leq\frac{\bar{X}_0-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n_0}}}\leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\}=1-\alpha.(2)$$

由(1) (2)知构造的区间$[\bar{X}_0-\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1),\ \bar{X}_0+\frac{s}{\sqrt{n_0}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]$为$\mu$的置信水平为$1-\alpha$且区间长度不大于给定正数 L 的置信区间。

2)当 $n>n_0$ 时,即 $n_0=[\frac{s^2}{c}]+1$.设此时构造的区间长度为 L_2，则

$$L_2^2=[\frac{2s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2=\frac{4s^2}{n}[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)]^2=\frac{s^2}{n}\cdot\frac{L^2}{c}=L^2\cdot\frac{\frac{s^2}{c}}{n}<L^2$$

即 $L_2<L$.(3)

$$P_\mu\left\{\bar{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\mu\le\bar{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\right\}=P_\mu\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\frac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\right\}$$

而$\dfrac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$,$\dfrac{(n_0-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_0-1)$,则$\dfrac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n_0-1)$

$$P_\mu\left\{\bar{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\mu\le\bar{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\right\}$$

$$=P_\mu\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\le\frac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\right\}=1-\alpha.(4)$$

由(3) (4)知构造的区间$\left[\bar{X}_n-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1),\ \bar{X}_n+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0-1)\right]$为$\mu$的置信水平为$1-\alpha$且区间长度不大于给定正数 L 的置信区间。

4.14 接习题 4.4，试以 $X_{(1)}$ 为观察值，θ 为参数构造函数模型，并由此导出 θ 的信仰分布，然后给出 θ 的信仰水平为 $1-\alpha$ 的区间估计。这个信仰水平为 $1-\alpha$ 的区间估计是不是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计？

解：设 X=（$X_1,X_2,\dots,X_n$） 密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\exp(-(x-\theta)), & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

首先：$p(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)=e^{-\sum(X_i-\theta)}I_{\{X_{(1)}\ge\theta\}}=e^{-\sum X_i+n\theta}I_{\{X_{(1)}\ge\theta\}}$

又由于 $X_{(1)}$的密度函数为：

$P_1(x)=n(1-F(x))^{n-1}p(x)=n(1-(1-e^{-(x-\theta)}))^{n-1}e^{-(x-\theta)}=n(e^{-(x-\theta)})^{n-1}e^{-(x-\theta)}=ne^{-n(x-\theta)}$

另一方面，令 $e=X_{(1)}-\theta$，则 e 的密度函数为 $p(t)=ne^{-n(t+\theta-\theta)}=ne^{-nt}$ 与 θ 无关。从而得：$\theta=X_{(1)}-e$,则 θ 的信仰分布的密度函数为：$p(y)=ne^{-n(x_{(1)}-\theta)}$,e>0

由于该信仰分布的密度函数关于是严格递增的，故从区间长度尽可能短的精度要求出发，取形如$[\hat{\theta}_L(x),X_{(1)}]$的区间为 θ 的区间估计，从而得：

$P\{\hat{\theta}_L\le\theta\le X_{(1)}\}=\int_{\hat{\theta}_L}^{X_{(1)}}ne^{-n(x_{(1)}-\theta)}d\theta=1-\alpha$

得：$\hat{\theta}_L = X_{(1)} + \frac{\ln\alpha}{n}$

所以的信仰水平为 1-α 的区间估计为[$X_{(1)} + \frac{\ln\alpha}{n}, X_{(1)}$].

枢轴量为 $X_{(1)}-\theta \sim \exp(n)$,则 $2n(X_{(1)}-\theta) \sim Ga(1,0.5)=\chi^2(2)$

从而 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2) \le 2n(X_{(1)}-\theta) \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)$ 为 $2n(X_{(1)}-\theta)$的区间估计。

θ 的置信水平为的区间估计为$[X_{(1)} - \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)}{2n}, X_{(1)} - \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2)}{2n}]$，所以不一样。

4.15 接例题 4.14.

（1）试求 m 和 s^2 的联合信仰分布的密度函数；

（2）试证明：在 s^2 给定的条件下，m 的条件信仰分布为正态分布 $N(\overline{X}, \frac{s^2}{n})$；

（3）试从区间长度尽可能短的精度要求，分别构造 m 和 s^2 的信仰系数为 1-a 的区间估计；

（4）试证明：m 和 s^2 的信仰系数为 1-a 的区间估计分别是 m 和 s^2 的置信水平为 1-a 的区间估计。

解：（1）因为 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{Q^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，其中 $Q^2=\Sigma(X_i-\overline{X})^2$,并且 Q^2 与 $\overline{X}$ 独立。

若记 $e_1 \sim N(0,1)$　$e_2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 e_1 e_2 相互独立，则其函数模型为

$$\begin{cases} \overline{X} = \mu + \frac{\sigma}{n} \\ Q^2 = \sigma^2 . e_2 \end{cases}$$

此函数模型中的观测值、参数和误差分别为

（$\overline{X}$，Q^2），（μ，σ^2），（e_1，e_2）

由此函数模型可得
$$\begin{cases} \mu = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} . \frac{Q}{\sqrt{e_2}} . e_1 \\ \sigma^2 = \frac{Q^2}{e_2} \end{cases}$$

则有了样本观测值 X，从而有了$\overline{X}$ 和 Q^2 后，可诱导出（μ，σ^2）的联合信仰分布，由于 $e_1 \sim N(0,1)$　$e_2 \sim \chi^2(n-1)$且 e_1 e_2 相互独立，则（μ，σ^2）的联合信仰密度函数为：

$$P(\mu, \sigma^2) \approx (\sigma^2)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\{-\frac{n(\mu-\overline{X})^2+Q^2}{2\sigma^2}\} \quad ,-\infty<\mu<+\infty, \quad \sigma^2>0$$

(2) 由于：$\sqrt{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n}(\mu-\overline{X})}{Q} = \sqrt{n-1} \cdot \frac{e_1}{\sqrt{e_2}} \sim t(n-1)$

所以μ的边际信仰分布为 t 分布

$P(\mu|\sigma^2) \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

（3）由（2）可知

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1) \leqslant \frac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{Q} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)) = 1-\alpha$$

所以 $\overline{X} - \frac{Q}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1) \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \frac{Q}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)$

所以，均值的区间估计为

$$[\overline{X} - \frac{Q}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1), \overline{X} + \frac{Q}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)]$$

因为 $\frac{\sigma^2}{Q} = \frac{1}{e_2}$，$e_2 \sim \chi^2(n\text{-}1) = p(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$

所以 $\frac{1}{e_2} \sim IGa(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$，$\sigma^2$ 的边际信仰分布为 IGa 分布，其密度函数等价为

$\tau^{-\frac{n+1}{2}} \exp\{-\frac{Q^2}{2\tau}\}$，$\tau > 0, \tau = \sigma^2$

根据区间长度尽可能短的精度要求,区间的左右断点 $_L^2$ 和 $_U^2$ 必须满足条件 $(_L^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\{-\} = (_U^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\{-\}$

如果把 $_L^2$ 和 $_U^2$ 分别记为 aS^2 和 bS^2,其中 $S^2 = \frac{Q^2}{n-1} = \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$

那么 a,b 就满足条件 $(a)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\{-\frac{Q^2}{2a}\} = (b)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\{-\frac{Q^2}{2b}\}$

所以，σ^2 的信仰水平为 $1-\alpha$ 的区间估计与例 4.2 给出的 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计一致。

（4）由（3）可知：常取 σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)}]$$

4.16 接习题 4.12，试以相互独立的充分统计量 $(X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)})$ 为观察值，(μ, σ) 为

参数构造函数模型，并由此导出(μ,σ)的信仰分布，以及分别给出μ和σ的信仰水平为$1-\alpha$的区间估计。这个信仰水平为$1-\alpha$的区间估计是不是置信水平为$1-\alpha$的区间估计？

解：$X_{(1)}$的概率密度函数为$p(x)=\frac{n}{\sigma}\exp\left(-\frac{n(x-\mu)}{\sigma}\right)(x\geq\mu)$。再求$\bar{X}-X_{(1)}$的概率密度函数。X的概率密度函数为$p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)(x\geq\mu)$。设$X-\mu=Y$,则$p(y)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)(y\geq 0)$，则$\sum_{i=1}^{n}y_i\sim Ga(n,\frac{1}{\sigma})$，$\bar{X}-\mu=\bar{Y}$，$\bar{Y}$的概率密度函数$p_1(y)=\frac{n^n}{\sigma^n\Gamma(n)}y^{n-1}\exp\left(-\frac{ny}{\sigma}\right)(y\geq 0)$，则$\bar{X}$的概率密度函数为$p_1(x)=\frac{n^n}{\sigma^n\Gamma(n)}(x-\mu)^{n-1}\exp\left(-\frac{n(x-\mu)}{\sigma}\right)(x\geq\mu)$。由此得出$\bar{X}-X_{(1)}$服从分布$Ga(n-1,\frac{n}{\sigma})$。

设$\begin{cases}X_{(1)}=\sigma e_1+\mu\\ \bar{X}-X_{(1)}=\sigma e_2\end{cases}$得出$e_1$的概率密度函数$p_2(x)=n\exp(-nx)(x\geq 0)$，即$e_1\sim\exp(n)$。由$\bar{X}-X_{(1)}$的分布得出$e_2$服从分布$Ga(n-1,n)$，$e_2$的概率密度函数为$p_3(x)=\frac{n^{n-1}}{\Gamma(n-1)}x^{n-2}\exp(-nx)$，$e_1$和$e_2$的概率密度与$\mu$和$\sigma$无关。

此函数模型中的观察值为$(X_{(1)},\bar{X}-X_{(1)})$，参数为$(\mu,\sigma)$，误差为$(e_1,e_2)$。

由此函数模型可得$\begin{cases}\mu=X_{(1)}-\frac{\bar{X}-X_{(1)}}{e_2}e_1\\ \sigma=\frac{\bar{X}-X_{(1)}}{e_2}\end{cases}$，由于$e_1,e_2$相互独立，求$(\mu,\sigma)$的联合信仰分布，再求$(\mu,\sigma)$的边际信仰分布。也可以根据$e_1,e_2$的分布直接得出$(\mu,\sigma)$的边际信仰分布。由$e_2$的分布得出$\frac{\sigma}{\bar{X}-X_{(1)}}\sim IGa(n-1,n)$，所以$\sigma$的信仰系数为$1-\alpha$的区间估计为$\left[IGa_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)(\bar{X}-X_{(1)}),IGa_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)(\bar{X}-X_{(1)})\right]$。

由$\frac{X_{(1)}-\mu}{\bar{X}-X_{(1)}}=\frac{e_1}{e_2}$求$\mu$的边际信仰分布。由两个随机变量商的分布，求得$\frac{e_1}{e_2}$的概率密度函数为$p_4(x)=\frac{n-1}{(1+x)^n}$，所以$\mu$的信仰系数为$1-\alpha$的区间估计为$\left[X_{(1)}-(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n-1}}-1)(\bar{X}-X_{(1)}),X_{(1)}-((1-\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{n-1}}-1)(\bar{X}-X_{(1)})\right]$。比较 4.12 可得，这个信仰水平为$1-\alpha$的区间估计不是置信水平为$1-\alpha$的区间估计。

5.9 设错误！未找到引用源。**是来自正态分布**错误！未找到引用源。**的一个样本函数，其中**错误！未找到引用源。**已知，在给定显著性水平**错误！未找到引用源。**下，对假设检验问题**

错误！未找到引用源。 **对** 错误！未找到引用源。

作错误！未找到引用源。**检验。其行动空间**错误！未找到引用源。**，0 表示接收，1 表示拒绝。试在损失函数**

$$L(\mu, a) = \begin{cases} 0, & 当\mu = \mu_0, a = 0 或\mu \neq \mu_0, a = 1 \\ 1, & 其他 \end{cases}$$

下计算错误！未找到引用源。**检验的风险函数。**

解：**错误！未找到引用源。** **错误！未找到引用源。**，**错误！未找到引用源。**给定显著性水平**错误！未找到引用源。**下的假设检验问题

错误！未找到引用源。 对 **错误！未找到引用源。**

拒绝**错误！未找到引用源。**的概率

$$P\left\{\left|Q(\mu, \delta_0^2) = \frac{\sqrt{n}}{\delta_0}(\overline{X} - \mu)\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$$

设**错误！未找到引用源。**为参数空间到行动空间**错误！未找到引用源。**的决策函数。

则在损失函数**错误！未找到引用源。**下的**错误！未找到引用源。**检验的风险函数为：

$$R(\mu,\delta(x))=L(\mu,\delta(0))\cdot P\{接收H_0\}+L(\mu,\delta(1))\cdot P\{拒绝H_0\}=0+P\{拒绝H_0\}=\alpha$$

5.12 一只罐里装有两个球，其中白球个数θ未知，通过返回抽样，可得一个容量为 2 的样本。其中白球数记为X，据此定义如下的随机化决策函数$\delta(x)$，

当$X=0$时，有$P\{\delta(0)=0\}=3/4, P\{\delta(0)=1\}=1/4$；

当$X=1$时，有$\delta(1)=1$；

当$X=2$时，有$P\{\delta(2)=1\}=1/4, P\{\delta(2)=2\}=3/4$

试计算$\delta(x)$的风险函数。

解：由题意知：$X\sim b(2,\dfrac{\theta}{2})$，即二项分布

设该决策问题的状态集为$\Theta=\{\theta_0,\theta_1,\theta_2\}$，其中$\theta_0,\theta_1,\theta_2$分别表示罐内各装有 0,1,2 个白球。

行动集为$A=\{a_0,a_1,a_2\}$，其中a_0,a_1,a_2分别表示猜测罐内装有 0,1,2 个白球。

现假定只有猜对才有效（用 1 表示收益），猜错的情况收益均为 0，可得此决策问题的收益函数为

$Q(\theta,a)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，损失函数为$L(\theta,a)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

那么，将损失函数$L(\theta,a)$对条件分布$\delta(D|x)$求数学期望，即求其加权损失函数，得

$$\bar{L}(\theta,\delta(x=0))=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times0=\frac{1}{4}$$
$$\bar{L}(\theta,\delta(x=1))=1\times0+0\times1+1\times0=0$$
$$\bar{L}(\theta,\delta(x=2))=1\times0+1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

然后对加权函数针对正态总体$p_\theta(x)$求数学期望，得$\delta(x)$的风险函数为

$$R(\theta,\delta)=\sum_{i=0}^{2}\overline{L}(\theta,\delta(x=i))P(x=i)$$

$$=\frac{1}{4}\times(\frac{2-\theta}{2})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{\theta}{2})^2=2\theta^2-4\theta+4$$

5.13

证明：因 $X_i\sim b$（1，θ）,i=1,2,3,…,n.则 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b$（n，$\theta$），它对 lebesgue 测度 dy 的密度函数为：

$$p(y;\ \theta)dy=\binom{n}{y}(1-\theta)^n e^{y\ln\frac{\theta}{1-\theta}}dy,\quad 0\le y<\infty,0<\theta<1$$

因 EY=nθ,我们取 $T(y)=\frac{y}{n}$，$w=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$，于是 b（n，$\theta$）相对于 $du(y)=\binom{n}{y}dy$ 的的密度函数为：

$$p(y;\ w)dy=\beta(w)e^{wy}du(y),\quad 0\le y<\infty,-\infty<w<+\infty$$，其中

$$\beta(w)=(1+e^w)^n$$

可验证 $E_w[T(y)]=\frac{-\beta^{'}(w)}{\beta\ (w)}=\frac{1}{(1+e^{-w})}=\theta$，且 $\int_0^\infty e^{wy}du(y)<\infty$，

而对于 $\forall C_1$，C_2，$-\infty<C_1<C_2<+\infty$,取 $\lambda=0$ 有：

$$\lim_{c_2\to\infty}\int_{c_1}^{c_2}\beta^{-\lambda}(w)dw=\lim_{c_2\to\infty}\int_{c_1}^{c_2}dw=\infty$$

$$\lim_{c_1\to-\infty}\int_{c_1}^{c_2}\beta^{-\lambda}(w)dw=\lim_{c_1\to-\infty}\int_{c_1}^{c_2}dw=\infty$$

根据定理 5. 1，在平方损失函数下

$$\frac{T(y)}{\lambda+1}=\frac{\frac{y}{n}}{0+1}=\frac{y}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$ 是 θ 的容许估计.