目录

第八章 向量代数和空间解析几何（数学一）习题解析

习题 1. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $a=(2,1,1)$ 和 $b=(1,-1,0)$，试求这平面方程.

【答案】 所求平面平行于向量 a 和 b，可取平面的法向量

$$n=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

故所求平面为 $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$，即

$x+y-3z-4=0.$

习题 2．求平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 的平面方程

【答案】所求平面平行于 x 轴，故所求平面方程为 $By+Cz+D=0$．将点 $(4,0,-2)$ 及 $(5,1,7)$

分别代入方程得

$-2C+D=0$ 及 $B+7C+D=0.$

从而解得 $C=\dfrac{D}{2}, B=-\dfrac{9}{2}D.$

因此，所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即

$9y-z-2=0.$

习题 3. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

【答案】 所求直线与已知的两个平面平行，因此所求直线的方向向量可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

习题 4. 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

【答案】 利用平面束方程，过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$. 的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda(\frac{y+3}{2}-z)=0,$$

将点 $(3,1,-2)$ 代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$. 因此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}(\frac{y+3}{2}-z)=0,$$

即 $8x-9y-22z-59=0$.

习题 5. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases} 和 \begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面方程.

【答案】 两直线的方向向量为

$$s_1=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 2 & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3), s_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

取 $n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -2 & -3\\0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1),$

则过点 $(1,2,1)$，以 n 为法向量的平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0,$$

即 $x-y+z=0$.

习题 6. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

【答案】 作过已知直线的平面束，在该平面束中找出与已知平面垂直的平面，该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$.

由 $(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0$,

得 $\lambda=-\frac{13}{11}$.. 代入平面束方程，得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

习题 7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

【答案】 双曲线绕 x 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

$$4x^2-9y^2-9z^2=36.$$

双曲线绕 y 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

$$4x^2+4z^2-9y^2=36$$

习题 8. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

【答案】 由 $x+z=1$ 得 $z=1-x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得方程 $2x^2-2x+y^2=8$, 这是母线平行于 z 轴, 准线为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线的柱面方程, 于是所求的投影方程为

$$\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8\\z=0\end{cases}.$$

习题 9. 求上半球 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\le ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

【答案】 圆柱体 $x^2+y^2\le ax$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\le ax$, 它含在半球 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2\le ax$ 内, 所以半球与圆柱体的公共部分在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\le ax$.

为求半球与圆柱体的公共部分在 xOz 面上的投影, 由圆柱面方程 $x^2+y^2=ax$ 得 $y^2=ax-x^2$, 代入半球面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 得 $z=\sqrt{a^2-ax}$ $(0\le x\le a)$, 于是半球与圆柱体的公共部分在 xOz 面上的投影为

$$0\le z\le\sqrt{a^2-ax}\,(0\le x\le a),\text{ 即 } z^2+ax\le a^2, 0\le x\le a, z\ge 0.$$

习题 10. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$ 在三坐标面上的投影.

【答案】令 $z=4$ 得 $x^2+y^2=4$, 于是旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\le 4$.

令 $x=0$ 得 $z=y^2$,于是旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$ 在 yOz 面上的投影为 $y^2\le z\le 4$.

令 $y=0$ 得 $z=x^2$，于是旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$ 在 xOz 面上的投影为 $x^2\le z\le 4$.

第九章 多元函数微分法及其应用习题解析

习题 1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=$__________.

【答案】不存在

【解析】取特殊路径 $y^2=x$，则极限化为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y^2=x}}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$，再取特殊路径 $y=x$，则极限化为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{x}{1+x^2}=0$，所以不同路径的极限不一样，因此原极限不存在.

习题 2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=$__________.

【答案】0.

【解析】利用换元法令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

则利用 $x^2+y^2=r^2$ 得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin\theta\cos^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\sin\theta\cos^2\theta=0,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

所以极限为 0

习题 3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=$__________

【答案】0.

【解析】因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy=0$ 且函数 $\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，所以有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

习题 4 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x},x>0,y>0$，求

（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

【答案】（1） $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}, x>0$；（2） $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\pi$.

【解析】（1）

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1-\frac{\sin\frac{\pi x}{y}}{\frac{1}{y}}}{\arctan x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$$

（2）

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+2\pi x(1+x^2)}{2x(1+x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+2\pi x(1+x^2)}{2x}=\pi$$

习题 5 判断 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+y}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续性.

【答案】 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

【解析】取特殊路径 $y=x$，则极限化为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2}{x+x}=0$，再取特殊路径 $y=x^2-x$，则极限化为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}} x-1=-1$，所以不同路径的极限不一样，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

习题 6 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$.

【答案】 $f_x(0,0)=1, f_y(0,0)=-1$.

【解析】利用偏导数定义：

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}}{x}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-y^3}{y^2}}{y}=-1$$

所以 $f_x(0,0)=1, f_y(0,0)=-1$.

习题 7 设 $z=x(x^2+y^2)^{\frac{y}{x}+e^{xy}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$________.

【答案】3

【解析】求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$ 先代入 $y=0$，函数变为 $z=x(x^2+0)^1=x^3$，再对 x求导得到 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=3x^2\Big|_{x=1}=3$.

习题 8 设 $u=\arctan(x-y)^z$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

【答案】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$； $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$； $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

【解析】

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left[(x-y)^z\right]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot 1=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left[(x-y)^z\right]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}(-1)=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\left[(x-y)^z\right]^2}\cdot (x-y)^z\ln(x-y)=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

习题 9 设 $z=(\frac{y}{x})^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=$________.

【答案】 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

【解析】求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$ 先代入 $y=2$，函数变为 $z=(\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$，再对 x 求导得到

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=e^{\frac{x}{2}\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\cdot\left.\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x}\right)-\frac{1}{2}\right)\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$$.

习题 10 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【答案】$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}$.

【解析】两边取对数 $\ln z=\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}$，同时关于 x 求导得

$$\frac{z'_x}{z}=\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})$$

即

$$z'_x=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{2x+y}{x^2+y^2}=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}]$$

化简得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}$$

习题 11 设 $z=f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【答案】$\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})$.

【解析】由已知条件 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，设 $u=\frac{y}{x},v=\frac{x}{y}$

则 $g(x,y)=f(u)+yf(v)$

因此有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{df(v)}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(u)+f'(v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{y}{x^2}f'(u)+f'(v)\right]=\frac{2y}{x^3}f'(u)+\frac{y^2}{x^4}f''(u)+\frac{1}{y}f''(v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+f(v)+y\frac{df(\mathrm{v})}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(u)+f(v)-\frac{x}{y}f'(v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x}f'(u)+f(v)-\frac{x}{y}f'(v)\right]=\frac{1}{x^2}f''(u)-\frac{x}{y^2}f'(v)+\frac{x}{y^2}f'(v)+\frac{x^2}{y^3}f''(v)$$

所以有

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})$$

习题 12 设 $z=xf(x-y)+yg(x+y)$，其中 f 与 g 有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 等于____________.

【答案】$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2[f'(x-y)-g'(x+y)]$

【解析】由题目知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x-y)+xf'(x-y)+yg'(x+y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f'(x-y)+f'(x-y)+xf''(x-y)+yg''(x+y)\\&=2f'(x-y)+xf''(x-y)+yg''(x+y)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-xf'(x-y)+g(x+y)+yg'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''(x-y)+2g'(x+y)+yg''(x+y)$$

则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'(x-y)-2g'(x+y)$$

习题 13 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在， 但不可微分.

【解析】当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \le \left|\frac{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

由偏导数的定义得

$$f_X'(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$$

$$f_Y'(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

由可微分的定义得

$$\rho = \frac{\triangle z - [f_X'(x,0)\cdot\triangle x + f_Y'(0,y)\cdot\triangle y]}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}} = \frac{\triangle x^2\cdot\triangle y^2}{[(\triangle x)^2+(\triangle y)^2]^2} = \left[\frac{\triangle x\cdot\triangle y}{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}\right]^2$$

取 $\triangle y = k\cdot\triangle x \quad (k\ne 0)$，则 $\rho = \left[\frac{k(\triangle x)^2}{\left(1+k^2\right)(\triangle x)^2}\right]^2 = \frac{k^2}{\left(1+k^2\right)^2} \ne 0$ 故不可微分

习题 14 判断 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 是否连续，偏导数是否存在， 函数是否可微.

【答案】 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，偏导数否存在且可微.

【解析】利用连续性定义

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy = 0$ 且函数 $\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，所以有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续；

由偏导数的定义得

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

所以 $f_x(0,0)=0$， $f_y(0,0)=0$；

由可微分的定义得

$$\rho=\frac{\triangle z-[f_X'(x,0)\cdot\triangle x+f_Y'(0,y)\cdot\triangle y]}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}$$

$$=\frac{\triangle x\cdot\triangle y\sin\frac{1}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}\le\frac{\triangle x\cdot\triangle y}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}\le\frac{\frac{1}{2}[(\triangle x)^2+(\triangle y)^2]}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}=0$$

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分.

习题 15 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【答案】$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$.

【解析】设 $u=xy,\mathrm{v}=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$，则有 $z=f(u,v)$，求一阶偏导得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}，\quad\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}$$

再求二阶偏导得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$$

故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$$

习题 16 已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[(x+y),f(x,y)]$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【答案】$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)f_{12}''(1,1)$.

【解析】对函数 $z=f[(x+y),f(x,y)]$ 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1[x+y,f(x,y)]+f'_2[x+y,f(x,y)]\cdot f'_1(x,y)$$

继续关于 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}[x+y,f(x,y)]+f''_{12}[x+y,f(x,y)]\cdot f'_2(x,y)+$$

$$f'_1(x,y)\cdot\left\{f''_{21}[x+y,f(x,y)]+f''_{22}[x+y,f(x,y)]\cdot f'_2(x,y)\right\}$$

$$+f'_2[x+y,f(x,y)]\cdot f''_{12}(x,y)$$

由 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，得 $f'_1(1,1)=f'_2(1,1)=0$ 代入上式：

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f''_{11}[1+1,f(1,1)]+f'_2[1+1,f(1,1)]\cdot f''_{12}(1,1)$$

$$=f''_{11}[2,2]+f'_2[2,2]\cdot f''_{12}(1,1)$$

习题 17 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，求 $\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

【答案】$\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=51$.

【解析】因为 $\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，所以有

$$\frac{d\varphi}{dx}=f'_x[x,f(x,x)]+f'_y[x,f(x,x)](f'_x(x,x)+f'_y(x,x)),$$

从而有

$$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)$$

$$=3\varphi^2(x)\cdot\left[f'_x[x,f(x,x)]+f'_y[x,f(x,x)](f'_x(x,x)+f'_y(x,x))\right]$$

代入 $x=1$ 得

$$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)=3f^2(1,f(1,1))\left[f'_x(1,f(1,1)+f'_y(1,f(1,1))(f'_x(1,1)+f'_y(1,1))\right]$$

$$=3f^2(1,1)\left[f'_x(1,1)+f'_y(1,1)(f'_x(1,1)+f'_y(1,1))\right]=3\times(2+3\times(2+3))=51$$

即 $\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=51$.

习题 18 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【答案】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xyf_{11}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''+f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{y}{x^3}g''-\dfrac{1}{x^2}g'$.

【解析】f 是二元函数，有两个中间变量，故可以用 f'_1,f'_2 表示对第一个、第二个中间变量求偏导数，g 也是二元复合函数，但只有一个中间变量，故应该用 g' 表示 g 对中间变量的导数，由多元复合函数求导得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$$

继续关于 y 求偏导得

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f'_1+y\left[f''_{11}\cdot x+f''_{12}(-\frac{x}{y^2})\right]+(-\frac{1}{y^2})f'_2+\frac{1}{y}\left[f''_{21}\cdot x+f''_{22}(-\frac{x}{y^2})\right]$$

$$-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}$$

$$=xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'$$

习题 19 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（1）求 dz；

（2）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y})$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

【答案】(1) $dz=\dfrac{1}{1+\varphi'}\left[(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dx\right],\varphi'\neq -1$；(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

【解析】

（1）对方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边求微分得

$$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)$$

即

$$(\varphi'+1)dz=(-\varphi'+2x)dx+(-\varphi'+2y)dy$$

所以当 $\varphi'\neq -1$ 时，有

$$dz=\frac{(-\varphi'+2x)dx+(-\varphi'+2y)dy}{\varphi'+1}$$

（2）由（1）知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(-\varphi'+2y)}{\varphi'+1}$

所以

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1}{x-y}(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1})=\frac{1}{x-y}\frac{-2y+2x}{\varphi'+1}=\frac{2}{\varphi'+1}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{(\varphi'+1)^2}\frac{\partial\varphi'(x+y+z)}{\partial x}=-\frac{2(1+\frac{\partial z}{\partial x})\varphi''}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2(1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'})\varphi''}{(\varphi'+1)^2}$$

$$=-\frac{2(1+\varphi'+2x-\varphi')\varphi''}{(\varphi'+1)^3}=-\frac{2(1+2x)\varphi''}{(\varphi'+1)^3}$$

习题 20 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du.

【答案】$du=(f_x'+f_z'\frac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx+(f_y'-f_z'\frac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy$.

【解析】$u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，所以 $du=f_xdx+f_ydy+f_zdz$，又 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，对方程两边求微分得

$$d(xe^x-ye^y)=d(ze^z)$$

即

$$(x+1)e^xdx-(y+1)e^ydy=(z+1)e^zdz$$

故

$$dz=\frac{(x+1)e^xdx-(y+1)e^ydy}{(z+1)e^z}$$

将其代入到 du 的表达式中得到

$$du=(f_x+f_z\frac{1+x}{1+z}e^{x-z})dx+(f_y-f_z\frac{1+y}{1+z}e^{y-z})dy$$

习题 21 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 确定， f 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}$ 等于__________.

【答案】 y

【解析】方程两边同时关于 x 和 y 求偏导得

$$z'_x=f+xf'\cdot(-2z\cdot z'_x)$$

$$1+z'_y=xf'\cdot(2y-2z\cdot z'_y)$$

联立求得

$$z'_x=\frac{f}{1+2xzf'}\ z'_y=\frac{2xyf'-1}{1+2xzf'}$$

所以有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xf}{1+2xzf'}+\frac{2xyzf'-z}{1+2xzf'}=\frac{y+z}{1+2xzf'}+\frac{2xyzf'-z}{1+2xzf'}$$
$$=\frac{y+2xyzf'}{1+2xzf'}==\frac{y(1+2xzf')}{1+2xzf'}=y$$

习题 22 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【答案】$(1,0)$ 为函数的极大值点，极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$；$(-1,0)$ 是极值点，极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

【解析】分别对 x,y 求偏导得

$$f'_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$f'_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

令 $f'_x=f'_y=0$ 得驻点 $x=\pm1,y=0$

继续求二阶偏导数得

$$f''_{xx}=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$f''_{xy}=-y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$f''_{yy}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y^2-1)$$

代入 $x=\pm1,y=0$ 得，当 $x=1,y=0$ 时，$AC-B^2=2e^{-1}>0$，且 $A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$，则 $x=1,y=0$ 为极大值点，极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$

$x=-1,y=0$ 时，$AC-B^2=2e^{-1}>0$，且 $A=2e^{-\frac{1}{2}}>0$ 故 $x=-1,y=0$ 为极小值点，极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$

习题 23 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

【答案】极小值 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$.

【解析】先对 x 求一阶偏导得

$$f_x=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=e^{2x}(1+2x+2y^2+4y)$$

$$f'_y = e^{2x}(2y+2)$$

令 $f'_x = f'_y = 0$ 得 $(\frac{1}{2}, -1)$

继续求二阶偏导数得

$$f''_{xx} = 2e^{2x}(1+2x+2y^2+4y)+2e^{2x} = 4e^{2x}(1+x+y^2+2y)$$

$$f''_{xy} = e^{2x}(4y+4)$$

$$f''_{yy} = 2e^{2x}$$

代入点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 得 $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 = 4e^2 > 0$ 且 $A>0$，所以 $(\frac{1}{2}, -1)$ 为极限值点，极小值为 $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$

习题 24 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

【答案】极大值 $f(-3,2)=31$；极小值 $f(1,0)=-5$.

【解析】先对 x 求偏导，得

$$f_x = 3x^2+6x-9$$

再对 y 求偏导，得

$$f_y = -3y^2+6y$$

令 $f_x=0, f_y=0$，解得 $x_1=-3, x_2=1$，$y_1=0, y_2=2$

求二阶导得

$$f_{xx}=6x+6，\ f_{xy}=0，\ f_{yy}=-6y+6$$

在点 $(1,0)$ 处 $AC-B^2=12\cdot 6=72>0$，因此此时取极小值，极小值为 -5

在点 $(1,2)$ 处 $AC-B^2=12\cdot(-6)=-72<0$，不取极值

在点 $(-3,0)$ 处，$AC-B^2=(-12)\cdot 6=-72<0$，无极值

在点 $(-3,2)$ 处，$AC-B^2=-12\cdot(-6)=72>0, A=-12<0$，因此此时取极大值 31

所以 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 得到极大值为 -5，极小值为 31.

习题 25 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5, \end{cases}$ 求 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点.

【答案】曲线 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点，依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

【解析】设所求点为 $M(x,y,z)$，则 M 到 xoy 的距离为 z

设

$$F(x,y,z)=z+\lambda_1(x^2+y^2-2z^2)+\lambda_2(x+y+3z-5)$$

则令

$$\begin{cases} F_x = 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 & (1) \\ F_y = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 & (2) \\ F_z = 1 - 4\lambda_1 z + 3\lambda_2 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 & (4) \\ x + y + 3z - 5 = 0 & (5) \end{cases}$$

对上方程，将式(1)与式(2)整理得到

$$2\lambda_1 x = -\lambda_2 \qquad ①$$

$$2\lambda_1 y = -\lambda_2 \qquad ②$$

当$\lambda_1 \neq 0$时，两式相比得到$\dfrac{x}{y}=1$即

$$x=y \qquad ③$$

③带入方程组式 (5) 得到

$$2x+3z-5=0 \text{ 即 } z=\frac{5-2x}{3} \qquad ④$$

将③、④带入方程组式 (4) 得到

$$x^2+x^2-2\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2=0$$

解得

$$x=1, y=1, z=1，\quad x=-5, y=-5, z=5$$

当$\lambda_1=0$时，由(1)得$\lambda_2=0$，代入(3)方程组不成立

所以距离最远的点为$(-5,-5,5)$，距离最近的点为$(1,1,1)$

习题 26 求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值和最小值.

【答案】最大值为72，最小值为6

【解析】作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$$

首先，求解其驻点

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 & (3) \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 & (5) \end{cases}$$

对上方程，将式(1)与式(2)整理得到

$$(2+2\lambda)x = -\mu \quad ①$$

$$(2+2\lambda)y = -\mu \quad ②$$

当$\lambda \neq -1$，$\mu \neq 0$时，两式相比得到

$$\frac{x}{y} = 1 \text{即} x = y \quad ③$$

③带入方程组式(5)得到

$$2x + z - 4 = 0 \text{即} z = 4 - 2x \text{④}$$

将③④带入方程组式(4)得到

$$x^2 + x^2 - (4 - 2x) = 0$$

解方程组得$(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2)$，$(x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$

当$\lambda = -1$时，代入(1)有$\mu = 0$，代入(3)，得$z = -\frac{1}{2}$，再代入(4)，出现矛盾，无法求出x, y, z因此$u(x_1, y_1, z_1) = 6, u(x_2, y_2, z_2) = 72$

所以求得最大值为72，最小值为6

习题27 求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程.

【答案】切线方程为$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$，法平面方程为$x - z = 0.$

【解析】对两个方程两边同时关于x求导得

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = 0$$

$$1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$$

代入$x = 1, y = -2, z = 1$得$\frac{dy}{dx} = 0$，$\frac{dz}{dx} = -1$.所以切线的方向向量是

$$(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = (1, 0, -1).$$

所以切线的方程是$x - 1 = \frac{y+2}{0} = 1 - z$.

法平面的方程是$(x-1)+0-(z-1)=0$，即$x-z=0$.

习题 28 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________.

【答案】$2x+4y-z=5$

【解析】由题目可得

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$，所以曲面在任意点$(x,y,z)$处的切平面的法向量为$(2x,2y,-1)$.

故切平面与平面$2x+4y-z=0$平行，所以$\frac{2x}{2}=\frac{2y}{4}=\frac{(-1)}{(-1)}$，所以$x=1, y=2$.所以切点坐标是$(1,2,5)$.切线的法向量是$(2,4,-1)$.所求切平面的方程是

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

即$2x+4y-z-5=0$.

习题 29 曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$在点$(1,-2,2)$处的法线方程为________

【答案】$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$

【解析】令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$则

$$F'_x=2x, F'_y=4y, F'_z=6z$$

法线向量$n=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,4y,6z)=(2,-8,12)$

法线方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12}$，即$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$

习题 30 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(1,2,3)}=$________.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】由题目$\mathbf{grad}\,u=(\frac{x}{3},\frac{y}{6},\frac{z}{9})$，故有$\mathbf{grad}\,u\big|_{(1,2,3)}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=(\mathbf{grad}\,u)\cdot\vec{n}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

习题 31 求 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处，沿抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】 先求抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向方向的切线向量 $\vec{r}$ ，由 $y^2=4x$ 得到 $2ydy=4dx$ 即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$，在点 $(1,2)$ 处的这个切线的斜率 $k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=1$，所以该切线与 x 轴正向方向的夹角 $\theta=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，所以抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向方向的切线向量 $\vec{r}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，由方向导数计算公式得：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta=\left.\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{x+y}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{x+y}\right]\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

所以函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

习题 32 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求 $\mathbf{grad}f(1,-1,2)$.

【答案】 $\mathbf{grad}f(1,-1,2)=(2,-2,4)$

【解析】 由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$， $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$，得 $\mathbf{grad}f(1,-1,2)=(2,-2,4)$.

第十章 重积分习题解析

习题 1.设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=x\iint\limits_D f(x,y)dxdy+y^2$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 所围的区域，则 $f(x,y)=$__________.

【答案】 $f(x,y)=\dfrac{\pi a^4}{4}x+y^2$

【解析】设 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，两边同时积分得 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D Axdxdy+\iint\limits_D y^2dxdy$

由对称性知

$$\iint\limits_D Axdxdy=0,$$

又由轮换对称性得

$$\iint\limits_D y^2dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

又

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2rdr=\frac{\pi a^4}{4}$$

则 $A=0+\dfrac{\pi a^4}{4}=\dfrac{\pi a^4}{4}$，

所以 $f(x,y)=\dfrac{\pi a^4}{4}x+y^2$

.

习题 2. 设 $I_1=\iint\limits_D \dfrac{x+y}{4}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{x+y}{4}}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}dxdy$，且 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$，则有（　　）

A. $I_1<I_2<I_3$　　　　B. $I_2<I_3<I_1$

C. $I_3<I_1<I_2$　　　　D. $I_3<I_2<I_1$

【答案】A.

【解析】由题目知被积函数为 $\dfrac{x+y}{4}$ 的幂，因此要看 $\dfrac{x+y}{4}$ 与 1 的关系；

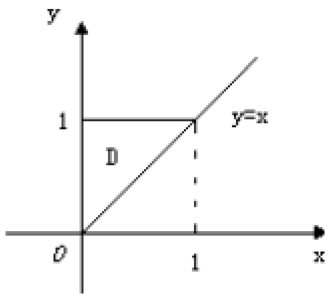
而区域D是以$(1,1)$为圆心以$\sqrt{2}$为半径的圆，而点$(1,1)$到直线$x+y=0$和$x+y=4$的距离为$\sqrt{2}$

即在区域D的内部有$0<\dfrac{x+y}{4}<1$，从而有$\dfrac{x+y}{4}<\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}<\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}$故选 A。

习题 3.计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}dxdy$，其中$D$是由直线$y=x, y=1, x=0$所围成的平面区域.

【答案】$\dfrac{2}{9}$.

【解析】把积分转化为先x后y的累次积分，



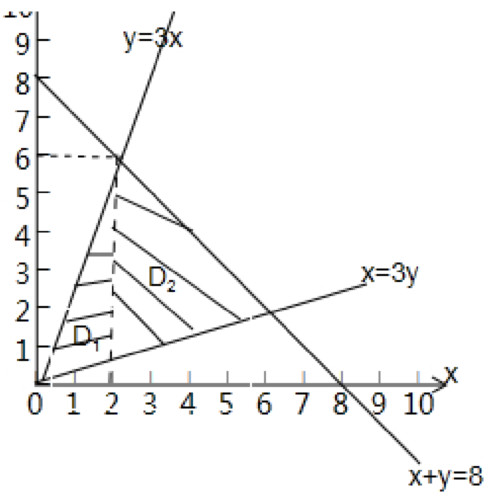
所以有

$$I=\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y \sqrt{y^2-xy}dx=-\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}(y^2-xy)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=y}dy=\frac{2}{9}$$

习题 4. 设平面区域D由直线$x=3y$，$y=3x$及$x+y=8$围成，计算$\iint\limits_D x^2dxdy$.

【答案】$\dfrac{416}{3}$.

【解析】积分区域如图



积分区域：$D_1:\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2,\dfrac{x}{3}\le y\le 3x\right\}$ $D_2:\left\{(x,y)\middle|2\le x\le 6,\dfrac{x}{3}\le y\le 8-x\right\}$

$$\iint\limits_{D}x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy=\int_0^2x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\int_0^2\frac{8x^3}{3}dx+\int_2^6(8x^2-\frac{4}{3}x^3)dx=\frac{416}{3}$$

习题 5.计算二重积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$ 及曲线 $x=y^2$ 所围成的闭区域.

【答案】$1-\sin 1$.

【解析】曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，于是积分区域为 $D:\left\{(x,y)\middle|y^2\le x\le y,0\le y\le 1\right\}$，从而积分化为

$$\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_{y^2}^{y}dx=\int_0^1\sin ydy-\int_0^1y\sin ydy=1-\sin 1$$

习题 6. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}ydxdy$，其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

【答案】$\iint\limits_{D}ydxdy=4-\dfrac{\pi}{2}$.

【解析】

$$\int_0^2dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}ydx=\int_0^2y(2-\sqrt{2y-y^2})dy$$

$$=\int_0^2 (2y - y\sqrt{2y-y^2})dy$$
$$=4-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

令$1-y=\sin t$，则

$$\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(1-\sin t)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 td\cos t=\frac{\pi}{2}$$

所以$\int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} ydx = 4-\frac{\pi}{2}$

习题 7. 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$,其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

【答案】$\frac{\pi}{8}(\pi-2)$.

【解析】利用极坐标：

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1-r^2}{\sqrt{1-r^4}}dr^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr^4\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}-0)+\frac{\pi}{4}(0-1)=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

习题 8. 设函数$f(x,y)$连续，则$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$（　　　）

A. $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$

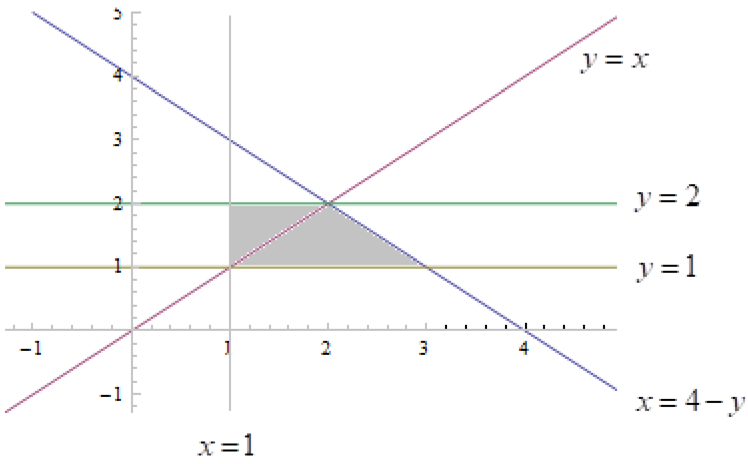
B. $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$

C. $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$

D. $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

【答案】C

【解析】画出积分区域



先定 y 的范围，由阴影区域可知 y 的范围为从1到2
再定x的范围，画一条平行于x轴的水平线，水平线从 $x=1$ 穿入，从 $x=4-y$ 这条斜线穿出，因此x的范围为从1到 $4-y$ 。

所以该积分区域化为 $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$

习题 9. 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr =$（　　）

A. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x^2+y^2)dy$

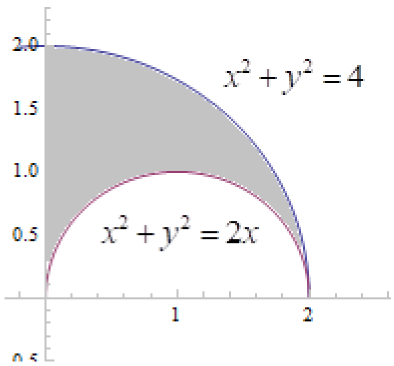
B. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$

C. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x^2+y^2)dx$

D. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

【答案】B

【解析】画出积分区域，



$r=2$ 表示圆心为$(0,0)$ 半径为2的圆，所以

$$r=2\cos\theta\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2x$$

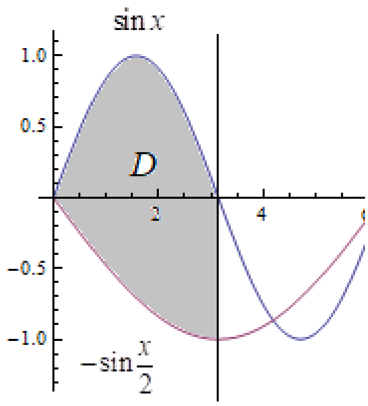
由极坐标积分形式可知

所以积分化为 $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dx$

习题 10. 改变二次积分 $\int_0^{\pi} dx \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$ 的积分次序.

【答案】$\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$.

【解析】画出积分区域



由图可知积分区域可分成 D_1 和 D_2 两部分

对于 D_1 先确定 y 的范围是从 0 到 1

再确定 x 的范围，画一条水平线，从 $x = \arcsin y$ 穿进，从 $x = \pi - \arcsin y$ 穿出

对于 D_2 先确定 y 的范围是从 0 到 -1，

再确定 x 的范围，画一条水平线，从 $x = -2\arcsin y$ 穿进，从 $x=\pi$ 穿出

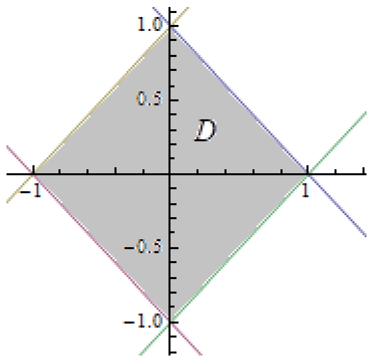
所以有原积分交换积分次序后为 $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

习题 11. 计算 $\iint\limits_D (|x| + ye^{x^2})\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 由曲线 $|x|+|y|=1$ 所围成.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】首先要去掉绝对值符号，讨论 x 与 0 的大小关系

积分区域如图：



因此结合积分区域奇偶性得：$\iint_D ye^{x^2}d\sigma = 0$

所以

$$\iint_D (|x| + ye^{x^2})d\sigma = \iint_D |x| d\sigma,$$

又由对称性得

$$\iint_D |x| d\sigma = 4\iint_{D_{11}} xd\sigma,$$

其中 D_{11} 为 D 在第一象限的部分，又

$$4\iint_{D_{11}} xd\sigma = 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xdy = \frac{2}{3}$$

所以

$$\iint_D (|x| + ye^{x^2})\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3}$$

习题 12. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

【答案】$\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy = \frac{14}{15}$.

【解析】画出积分区域，$x=\sqrt{1+y^2}$，即 $x^2-y^2=1$，为双曲线的右支，与直线 $x-\sqrt{2}y=0$ 交点为 $(\sqrt{2},1)$；与 $x+\sqrt{2}y=0$ 交点为 $(\sqrt{2},-1)$，因此积分区域关于 x 轴对称，设第一象限部分为 D_1，故原积分化为

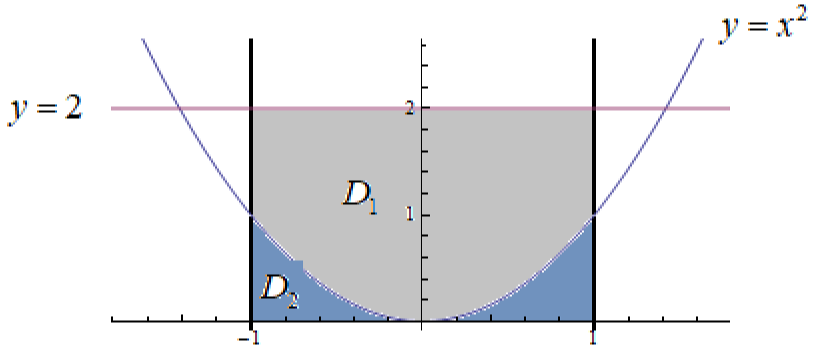
$$\iint_D (x+y)^3 dxdy = 2\iint_{D_1}(x^3+3xy^2)dxdy$$

$$2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dx = 2\int_0^1\left(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4}\right)dy = \frac{14}{15}$$

习题 13. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$，计算二重积分 $I=\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$.

【答案】$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$

【解析】本题首先要去掉绝对值，讨论 y 与 x^2 的大小关系，因此得到积分区域如图，两个积分区域都关于 y 轴对称



$$I=\iint_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy+2\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy=2\int_0^1\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx+2\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx$$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$，得

$$\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\cos^4 tdt+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$$

习题 14(数学一). 设有一物体，占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

【答案】$M=\iiint_\Omega \rho dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})dy=\int_0^1(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})dx$$

$$=\frac{3}{2}.$$

习题 15（数学一）. 计算 $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

所围成的四面体。

【答案】$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-x-y,0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\}$（图$10-42$），于是

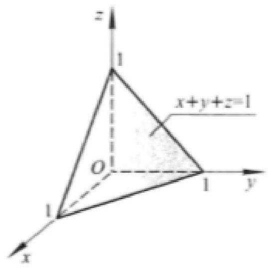


图 10－42

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{y}{8}-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]_0^{1-x}dx$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{1-x}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

习题 16（数学一）. 计算$\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz$，其中$\Omega$为球面$x^2+y^2+z^2=1$及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域。

【答案】解法一 利用直角坐标计算。由于

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},0\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz$$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}.$$

解法二 利用球面坐标计算，由于

$$\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\le r\le 1,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(r^3sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^5dr$$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.$$

习题 17（数学一）．计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域。

【答案】解法一 由 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=R^2$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$（图10−43），

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h,(x,y)\in D_{xy}\}$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left[h^2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy-\frac{h^2}{R^2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\right]$$

$$=\frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2-\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^3d\rho=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

解法二 用过点 $(0,0,z)$、平行于 xOy 面的平面截得 Ω 平面圆域 D_z，其半径为 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Rz}{h}$，面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2}z$（图10−43）

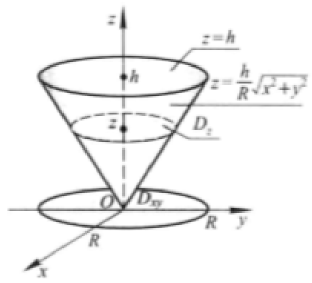


图 10－43

$$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_{xy},0\le z\le h\}.$$

于是 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^h zdz\iint\limits_{D_z} dxdy$

$$=\int_0^h z\cdot\frac{\pi R^2}{h^2}z^2dz=\frac{\pi R^2}{4h^2}\cdot h^4=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

解法三 用球面坐标进行计算，在球面坐标系种，圆锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 的方程为 $\varphi=\alpha(=\arctan\frac{R}{h})$，平面 $z=h$ 的方程为 $r=h\sec\varphi$，因此 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\alpha,0\le r\le h\sec\varphi.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{h\sec\varphi}r^3dr$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\frac{h^4\sin\varphi}{4\cos^3\varphi}d\varphi=-\frac{\pi h^4}{2}\int_0^{\alpha}\frac{d(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\pi h^4}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\left(\text{代入}\alpha=\arctan\frac{R}{h}\right)$$

$$=\frac{\pi h^4}{2}\left(\frac{R^2+h^2}{h^2}-1\right)=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

习题 18（数学一）. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

（2）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域。

【答案】（1）由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，得

$$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2)\text{，即}x^2+y^2=1.$$

从而知Ω在xOy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$（图$10-44$）.利用柱面坐标，$\Omega$可表示为

$$\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi,$$

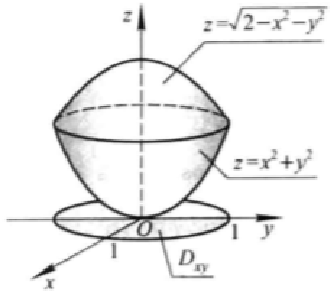


图 10－44

于是

$$\iiint_\Omega zdv=\iiint_\Omega z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1=\frac{7}{12}\pi.$$

（2）由$x^2+y^2=2z$及$z=2$消去z得$x^2+y^2=4$，从而知Ω在xOy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.利用柱面坐标，$\Omega$可表示为

$$\frac{\rho^2}{2}\le z\le 2,0\le\rho\le 2,0\le\theta\le 2\pi,$$

于是

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)dv=\iiint_\Omega\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3(2-\frac{\rho^2}{2})d\rho=2\pi\left[\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right]_0^2=\frac{16}{3}\pi.$$

习题 19（数学一）. 利用球面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=1$所围成的闭区域;

（2）$\iiint_\Omega zdv$，其中Ω闭区域由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2,x^2+y^2\le z^2$所确定。

【答案】（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr$$

$$=2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi.$$

（2）在球面坐标系中，不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，即 $x^2+y^2+z^2\le 2az$，变为 $r^2\le 2ar\cos\varphi$，即 $r\le 2a\cos\varphi$；$x^2+y^2\le z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi\le r^2\cos^2\varphi$，即 $\tan^2\varphi\le 1$，亦即 $\varphi\le\frac{\pi}{4}$.因此可表示为

$$0\le r\le 2a\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},$$
$$0\le\theta\le 2\pi\text{（图}10-45\text{）}.$$

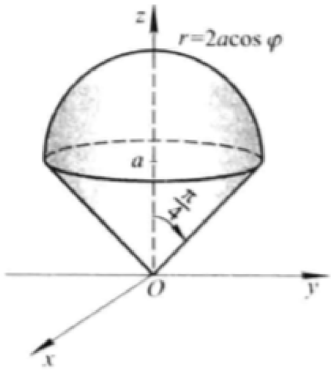


图 10－45

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4d\varphi$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

习题 20（数学一）. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

【答案】由 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，解得 $x^2+y^2=1$.从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\le 1$.于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\}.$$

因此

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]dxdy \text{（用极坐标）}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho d\rho$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

注 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果：

$$V=\int_1^{\sqrt{2}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z^2}dxdy+\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)dz+\pi\int_0^1 zdz$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

习题 21（数学一）. 利用三重积分计算曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积。

【答案】利用柱面坐标计算.曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 得柱面坐标方程分别 $z=\rho$ 为和 $z=\rho^2$ 。消去 z，得 $\rho=1$，故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho\le 1$（图 10−49）.因此

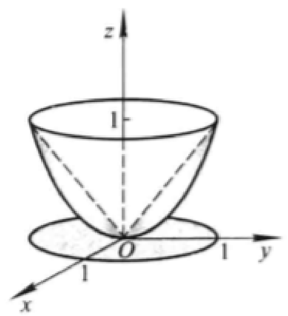


图 10－49

$$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid\rho^2\le z\le\rho,0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}.$$

于是

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dv = \iiint\limits_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

第十一章 曲线积分与曲面积分（数学一）习题解析

1. 计算下列对弧长的曲线积分：

（1）$\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

（2）$\int\limits_\Gamma \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从0变到2的这段弧；

（3）$\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\le t\le 2\pi)$.

【答案】（1）L 由线段 $OA: y=0(0\le x\le a)$，圆弧

$\overset{\frown}{AB}: x=a\cos t, y=a\sin t(0\le t\le \dfrac{\pi}{4})$ 和线段 $\overset{\frown}{OB}: y=x(0\le x\le \dfrac{a}{\sqrt{2}})$ 组成（图11−1）

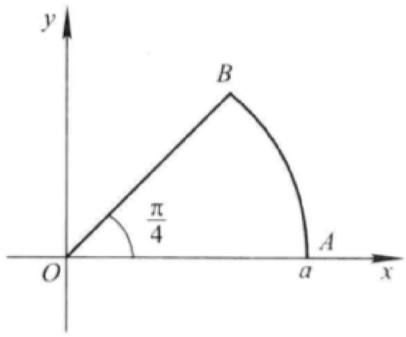


图 11－1

$$\oint\limits_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^a-1,$$

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a dt=\frac{\pi}{4}ae^a,$$

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{OB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}dx=e^a-1,$$

于是 $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=e^a-1+\dfrac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=e^a(2+\dfrac{\pi a}{4})-2.$

（2） $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt$

$=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t-e^t\cos t)^2+(e^t)^2}dt$

$=\sqrt{3}e^t dt,$

$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^2 \frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt$

$=\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}dt=[-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$.

（3） $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=atdt$

$\int_L (x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$

$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

2. 计算下列对坐标的曲线积分：

（1） $\oint_L xydx$ ，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）；

（2） $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ （按逆时针方向绕行）；

（3） $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz$ ，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

（4） $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ ，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

【答案】（1） $L=L_1+L_2$，其中

$L_1: x=a+a\cos t, y=a\sin t, t$ 从 0 变到 π ,

$L_2: x=x, y=0, x$ 从 0 变到 $2a$,

因此 $\oint_L xydx=\int_{L_1}xydx+\int_{L_2}xydx$

$=\int_0^{\pi}a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'dt+\int_0^{2a}0dx$

$$=-a^3(\int_0^{\pi}\sin^2 tdt+\int_0^{\pi}\sin^2 td\sin t)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

（2）圆周的参数方程为： $x=a\cos t, y=a\sin t, t$ 从0变到2π ，所以

$$\oint_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)(a\cos t)]dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}-a^2dt=-2\pi.$$

（3） $\int_{\Gamma}x^2dx+zdy-ydz=\int_0^{\pi}[(k\theta)^2k+a\sin\theta(-a\sin\theta)-a\cos\theta a\cos\theta]d\theta$

$$=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)d\theta=\frac{1}{3}\pi^3k^3-\pi a^2.$$

（4） $L: x=x, y=x^2, x$ 从-1 变到 1， 故

$$\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]dx$$

$$=2\int_0^1(x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$， L 的方向为逆时针方向.

【答案】 $P=\frac{y}{2(x^2+y^2)}$， $Q=\frac{-x}{2(x^2+y^2)}$. 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}=0.$$

在 L 内作逆时针方向的 ε 小圆周

$I: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta(0\le\theta\le 2\pi)$,

在以 L 和 I 为边界的闭区域 D_{ε} 上利用格林公式得

$$\oint_{L+l^-}Pdx+Qdy=\iint_{D_{\varepsilon}}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

即 $\oint_L Pdx+Qdy=-\oint_{l^-}Pdx+Qdy=\oint_l Pdx+dy.$

因此 $\oint_L\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\oint_l\frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{2\varepsilon^2}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=-\pi.$

4. 计算曲线积分 $\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为在抛物线

$2x=\pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧；

【答案】

由于 $P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$N$ 为 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$（图 11－7），得

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cdot dx+\int_0^1\left(1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{\pi^2}{4}y^2\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

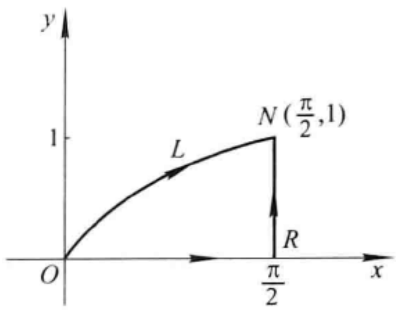


图 11－7

5. 计算曲线积分 $(0,0)$ $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

【答案】

.

由于 $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $(1,0)$，N 为 $(1,1)$（图 11－8），得

$$\text{原式}=\int_0^1x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2y)dy$$

$$=\frac{1}{3}-1-\int_0^1\frac{1-\cos 2y}{2}dy$$

$$=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2.$$

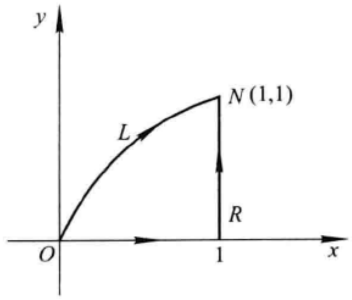


图 11－8

6. 验证下列在整个平面内是某一函数的全微分，并求这样一个此函数

（1） $4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy$

（2） $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$

【答案】（1）因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x,y)dx,Q(x,y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x,y)$ 的全微分.（为了区分积分上限 x,y，这里将 x,y 分别记为 t，p）

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}4\sin t\sin 3p\cos tdt-3\cos 3p\cos 2tdp+C$$

$$=\int_0^x 0dt+\int_0^y -3\cos 3p\cos 2xdp+C=-\cos 2x\sin 3y+C.$$

（2） $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$

解 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x,y)dx,Q(x,y)dy$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$u(x,y)=\int_0^x 2tdt+\int_0^y(2p\sin x-x^2\sin p)dp+C$$

$$=y^2\sin x+x^2\cos y+C.$$

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)=x^2+y^2$

【答案】抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2+y^2=2$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$. 又

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

利用极坐标得

$$=\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}d\rho$$

$$\underline{\underline{\rho=\frac{1}{2}\tan t}}\ 2\pi\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 tdt$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)d(\sec t)=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{596}{15}=\frac{149}{30}\pi.$$

8. 计算下列对面积的曲面积分：

（1）$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z\geq h(0<h<a)$的部分；

（2）$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分.

【答案】（1）在Σ上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.在xOy面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq a^2-h^2\}.$$

由于积分曲面Σ关于yOz面和zOx面均对称，故有

$$\iint_{\Sigma}xdS=0,\iint_{\Sigma}ydS=0,$$

于是 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint_{\Sigma}zdS$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\iint_{D_{xy}}dxdy=a\pi(a^2-h^2).$$

（2）Σ如图$11-9$所示，Σ在xOy面上的投影区域D_{xy}为圆域$x^2+y^2\leq 2ax.$由于Σ关于zOx面对称，而函数xy和yz关于y均为奇函数，故

$$\iint_{\Sigma} xydS = 0, \iint_{\Sigma} yzdS = 0.$$

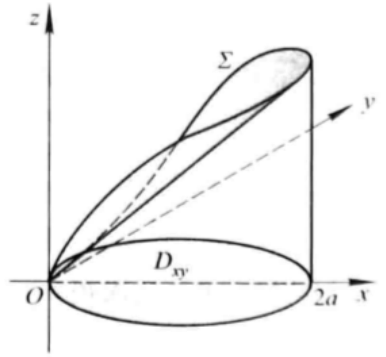


图 11－9

于是

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS = \iint_{\Sigma} zxdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho d\rho$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

9. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\mu = z$.

【答案】$\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$.

$z_x = x, z_y = y$. 故 $dS=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$. 因此

$$M = \iint_{\Sigma} zdS = \iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}d\rho$$

$$\underline{\underline{t=\rho^2}}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}dt\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)\right]=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

10. 计算下列对坐标的曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的下半部分的下侧；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}zdxdy+xdydz+ydzdx$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

【答案】（1）Σ在xOy面上的投影区域$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$，在$\Sigma$上，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.因$\Sigma$取下侧，故

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta\cdot\int_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho$$

$$\underline{\underline{\rho=R\sin t}}\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos tdt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\cdot(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3})=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

（2）由于柱面$x^2+y^2=1$在xOy面上的投影为零，因此$\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=0$.又

$D_{yz}=\{(y,z)\,|\,0\le y\le 1,0\le z\le 3\}$，$D_{zx}=\{(x,z)\,|\,0\le z\le 3,0\le x\le 1\}$（图$11-10$），因$\Sigma$取前侧，所以

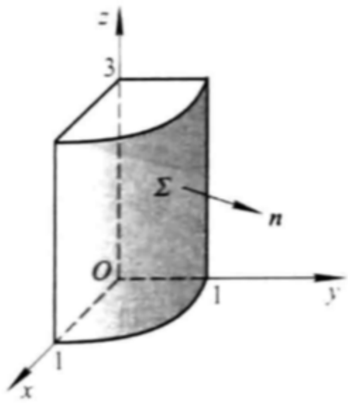


图 11－10

原式$=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+\iint\limits_{\Sigma} ydzdx$

$=\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}dydz+\iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2}dzdx$

$=\int_0^3 dz\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy+\int_0^3 dz\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

$=2\cdot 3[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y]_0^1$

$=\frac{3}{2}\pi.$

11. 利用高斯公式计算曲面积分：

（1）$\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中$\Sigma$为上半球体$0\le z\le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le a^2$的表面的外侧；

（2）$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是界于$z=0$和$z=3$之间的圆柱体$x^2+y^2\le 9$的整个表面的外侧.

【答案】（1）原式$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$=\iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+x^2+y^2\right)dv$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$

$=2\pi\cdot 1\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{2}{5}\pi a^5.$

（2）原式$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv$

$=3\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3=81\pi.$

12. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint\limits_{\Gamma} ydx+zdy+xdz$，其中$\Gamma$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，若从$x$轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向；

（2）$\oint\limits_{\Gamma} 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中$\Gamma$是圆周$x^2+y^2+z^2=9, z=0$，若从$z$轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向.

【答案】（1）取Σ为平面$x+y+z=0$的上侧被Γ所围成的部分，则Σ得面积为πa^2，

Σ的单位法向量为

$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$（图11−12）

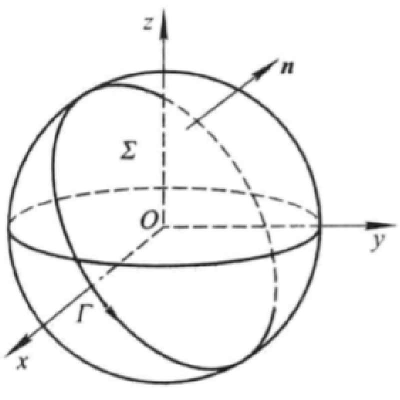


图 11 − 12

由斯托克斯公式，

$$\oint\limits_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}})dS=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS$$

$$=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

（2）Γ 即为面上的圆周 $x^2+y^2=9$，取 Σ 为圆域 $x^2+y^2\le 9$ 的上侧，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=9\pi.$$

13. 求下列向量场的散度：

（1）$A=(x^2+yz)i+(y^2+xz)j+(z^2+xy)k$；

（2）$A=e^{xy}i+\cos(xy)j+\cos(xz^2)k$.

【答案】（1）$P=x^2+yz,Q=y^2+xz,R=z^2+xy,$

$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z.$$

（2）$P=e^{xy},Q=\cos(xy),R=\cos(xz^2),$

$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2).$$

14. 求下列向量场的旋度：

（1）$A=(z+\sin y)i-(z-x\cos y)j$；

（2）$A=x^2\sin yi+y^2\sin(xz)j+xy\sin(\cos z)k$.

【答案】（1）$rotA=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix}=i+j+(\cos y-\cos y)k$

$$=i+j.$$

（2） $rot A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$

$=[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]i-y\sin(\cos z)j$

$+[y^2 z\cos(xz)-x^2\cos y]k.$

第十二章 无穷级数（数学一、三）习题解析

1.判定级数（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{9^n}$；$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n}$的收敛性.

【答案】（1）这是一个等比级数，公比为$q=-\frac{8}{9}$，于是$|q|=\frac{8}{9}<1$，所以此级数收敛；（2）这是一个等比级数，公比$q=\frac{3}{2}>1$，所以此级数发散.

2.判定级数（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$；（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$的收敛性.

【答案】（1）因为$u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$，　而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故所给级数发散；

（2）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+5n+4}=1$，　而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故所给级数收敛；

（3）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi$，　而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，故所给级数收敛；

（4）当$0<a\le 1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}\ne 0$，所以肯定发散

当$a>1$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}$与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}$同敛散，

而当$a>1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$当$a>1$时收敛，　当$0<a\le 1$时发散.

3.判定级数（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$的收敛性.

【答案】（1）级数的一般项为$u_n=\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$.因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

所以级数发散；

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(\frac{n+1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$，所以级数收敛；

（3）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=2\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{e}<1$，所以级数收敛；

（4）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$，所以级数收敛.

4.判定级数（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$；（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$，（其中 $a_n\to a(n\to\infty),a_n,b,a$ 均为正数）的收敛性.

【答案】（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$， 所以级数收敛；

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$， 所以级数收敛；

（3）因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\frac{1}{9}<1\ ,$$

所以级数收敛；

（4）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$，所以当 $b<a$ 时级数收敛， 当 $b>a$ 时级数发散.

5.判定下列级数是否收敛？如果是收敛的， 是绝对收敛还是条件收敛？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$.

【答案】（1）这是一个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$， 其中 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，因为显然 $u_n\geq u_{n+1}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$， 所以此级数是收敛的.又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p<1$ 的 p 级数， 是发散的，所以原级数是条件收敛的.

（2）这是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$， 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$.因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$ 是收敛的， 所以原级数也收敛， 并且绝对收敛.

6.求下列幂级数的收敛域.

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

【答案】（1）$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$，故收敛半径为$R=3$.

因为当$x=3$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的；当$x=-3$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，也是收敛的，所以收敛域为$[-3,3)$.

（2）$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$，故收敛半径为$R=\frac{1}{2}$.

因为当$x=\frac{1}{2}$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$，是收敛的；当$x=-\frac{1}{2}$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$，也是收敛的，所以收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

（3）这里级数的一般项为$u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

因为$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}|=x^2$，由比值审敛法，当$x^2<1$，即$|x|<1$时，幂级数绝对收敛；当$x^2>1$，即$|x|>1$时，幂级数发散，故收敛半径为$R=1$.

因为当$x=1$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$，是收敛的；当$x=-1$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$，也是收敛的，所以收敛域为$[-1,1]$.

（4）这里级数的一般项为$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

因为$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}|=\frac{1}{2}x^2$，由比值审敛法，当$\frac{1}{2}x^2<1$，即$|x|<\sqrt{2}$时，幂级数绝对收敛；当$\frac{1}{2}x^2>1$，即$|x|>\sqrt{2}$时，幂级数发散，故收敛半径为$R=\sqrt{2}$.因为当$x=\pm\sqrt{2}$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$，是发散的，所以收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

7.利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

【答案】（1）设和函数为$S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

则 $$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}]'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1).$$

提示：由 $\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$ 得 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx$.

（2）容易求得此级数的收敛半径为1，收敛域$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=x^2(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2})',$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x^3}{1-x}$.又 $(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2})'=(\frac{x^3}{1-x})'=\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$，故原级数的和函数

$$s(x)=x^2\cdot\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}(-1<x<1).$$

8.将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间

（1）$\sin^2 x$；（2）$(1+x)\ln(1+x)$；（3）$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

【答案】（1）因为$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以 $$\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

（2）因为$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\le 1)$；

所以 $$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}]x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\le 1).$$

（3）因为$\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ (-1\le x\le 1)$,

所以 $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot(2n)!}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n+1}\ (-1\le x\le 1).$$

9.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

【答案】 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$,

而 $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n\ (|\frac{x+4}{3}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}\ (-7<x<-1);$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n\ (|\frac{x+4}{2}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}\ (-6<x<-2).$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n\ (-6<x<-2).$$

10.下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π ，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为:

（1） $f(x)=3x^2+1(-\pi\le x\le\pi)$；（2） $f(x)=e^{2x}(-\pi\le x\le\pi)$.

【答案】（1）因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nxdx=(-1)^n\frac{12}{n^2}\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nxdx=0\ (n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (-\infty<x<+\infty).$$

（2）因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nxdx=\frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nxdx=-\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\ (n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx),\quad(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

11.将函数 $f(x)=2x^2$ $(0\leq x\leq\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

【答案】

解 （1）展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,\pi],\\ -2x^2, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

是$f(x)$的奇延拓,又$\Phi(x)$是$\varphi(x)$的周期延拓函数,则$\Phi(x)$满足收敛定理的条件而在$x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$处间断,又在$[0,\pi]$上$\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi)$上收敛于$f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx,\quad x\in[0,\pi).$$

对 $f(x)$ 作偶延拓，则 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$， 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{8}{n^2}\ (n=1,2,\cdots),$$

故余弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \ (0 \le x \le \pi).$$

12.将函数 $f(x)=1-x^2(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$（一个周期内的表达式），展开成傅里叶级数

【答案】因为 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数，所以 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$，而

$$a_0=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{1/2}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \ (n=1,2,\cdots),$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x, \ x\in(-\infty,+\infty).$$

13.将函数 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<\dfrac{l}{2} \\ l-x, \dfrac{l}{2}\le x\le l \end{cases}$，分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数，$\Phi(x)$ 处处连续，又满足收敛定理的条件，且在 $[0,l]$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$，则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos n\pi\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t = (-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}} t\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l}\left[1+(-1)^{n-1}\right]\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

当 $n=2k$ 时，$b_{2k}=0$；当 $n=2k-1$ 时，

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x\in[0,l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数. $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件，且在 $[0,l]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x\right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l - x = t$，则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

当 $n = 2m - 1$ 时，$a_{2m-1} = 0$；当 $n = 2m$ 时，

$$\begin{aligned}a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2m)^2}[(-1)^m - 1]\\ &= \begin{cases}0, & m = 2k,\\ \dfrac{l}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m = 2k-1\end{cases}\quad (k = 1,2,\cdots).\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l},\quad x\in[0,l].$$