2020 新东方在线高等数学基础（上）练习解答

第一章　极限与连续

1. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解:（按课上所讲, 容易看出需要分左右极限处理）

$$I_{右}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=0+1;$$

$$I_{左}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=2-1=1;$$

$\Rightarrow I=1.$

2. 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left[\cos(x-1)\right]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

$$解:I=\lim_{x\to1}\frac{\ln\left[\cos(x-1)\right]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

3. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

$$解:I=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}(*)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x+\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

另外,对$(*)$也可以直接使用洛必达法则.

4. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解:这是1^∞型, 直接有$I=e^A$,

其中$A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1+2^x}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln2}{2x}=\dfrac{1}{2}\ln2$,所以$I=e^{\frac{1}{2}\ln2}=\sqrt{2}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解:这是1^{∞}型,直接有$I=e^{A}$,

其中$A=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\left(2\cos 2t-\sin t\right)=2$,

所以$I=e^{2}$.

6. 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\left(ax+bx^{2}\right)}{x^{2}}=2$,则____.

$(A)a=1,b=-\frac{5}{2}$ $(B)a=0,b=-2$ $(C)a=0,b=-\frac{5}{2}$ $(D)a=1,b=-2$

解:$I=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^{2}+o\left(x^{2}\right)-\left(ax+bx^{2}\right)}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^{2}+o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}=2$,

$\Rightarrow 1-a=0,-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$,故$a=1,b=-\frac{5}{2}$,选（A).

7. 已知实数a,b满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$,求$a,b$的值.

解:$\begin{cases}x\to\infty\\ 带\dfrac{1}{x}\end{cases}$ 考虑倒带换$\frac{1}{x}=t$,则$I=\lim\limits_{t\to0^{+}}\left[\left(\frac{a}{t}+b\right)e^{t}-\frac{1}{t}\right]=\lim\limits_{t\to0^{+}}\frac{(a+bt)e^{t}-1}{t}$,

则此时分子$(a+bt)e^{t}-1\to0$（$t\to0^{+}$）（否则上述极限为∞),故$a=1$,

此时上述极限为$\frac{0}{0}$,使用洛必达法则,有$I=\lim\limits_{t\to0^{+}}\left[be^{t}+(1+bt)e^{t}\right]=b+1=2$,则$b=1$.

8. 已知当$x\to0$时, $\alpha(x)=kx^{2}$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$等价,则$k=$____.

解:$I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^{2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{kx^{2}}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arcsin x}{kx^{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{3}{4k}=1\Rightarrow k=\frac{3}{4}$.

9. 设$x_1=2, x_n=\dfrac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$（$n=2,3,\cdots$），证明$\{x_n\}$有极限，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：由$x_1=2$，知$x_2=\dfrac{3+4\times 2}{1+2}=\dfrac{11}{3}$，于是$x_2>x_1$；设$x_n>x_{n-1}$，

则$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3+4x_n}{1+x_n}-\dfrac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$故$x_{n+1}>x_n\ (n=1,2,\cdots)$，单调增；

$x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{1+x_n}=3+\dfrac{x_n}{1+x_n}<3+1=4$，有上界；所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

在$x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{1+x_n}$两端取极限，$\Rightarrow A=\dfrac{3+4A}{1+A}\Rightarrow A=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$（舍负），故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

10. 函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为____.

$(A)1$ $(B)2$ $(C)3$ (D)无穷多个

解：使$\sin\pi x=0$的点，$x=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots$都是间断点；

对于$\pm2,\pm3\ldots$，这些点使分子不为0，故这些点显然是第二类间断点；

对$x=0$，考查$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^3}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}\Rightarrow x=0$是可去间断点；

对$x=1$，考查$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow x=1$是可去间断点；

同理可知$x=-1$也是可去间断点，选（C）.

第二章　导数与微分

1.设$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}},x>0\\ x^2g\left(x\right),x\le 0\end{cases}$,其中$g\left(x\right)$是有界函数,则$f\left(x\right)$在$x=0$处 ____.

(A)极限不存在　　(B)极限存在,但不连续　　(C)连续,但不可导　　(D)可导

解:$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0;$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2g\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg\left(x\right)=0.$选（$D$).

其中左导数最后极限为0利用了″无穷小与有界变量乘积仍是无穷小″.

2.设$f\left(x\right)$对任意的x满足$f\left(1+x\right)=af\left(x\right)$,且$f'\left(0\right)=b$,其中$a,b$为非零常数,则 ____.

(A) $f\left(x\right)$在$x=1$处不可导　　　　(B) $f\left(x\right)$在$x=1$处可导, 且$f'\left(1\right)=a$

(C) $f\left(x\right)$在$x=1$处可导, 且$f'\left(1\right)=b$　　(D) $f\left(x\right)$在$x=1$处可导, 且$f'\left(1\right)=ab$

解: $f'\left(1\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{af\left(x-1\right)-af\left(0\right)}{x-1}=a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left(t\right)-f\left(0\right)}{t}=af'\left(0\right)=ab,$选（$D$).

这里第三个等号利用了$x-1=t$的换元.

3.设$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x},x\ne 0\\ 0,\qquad\quad x=0\end{cases}$,其中$\lambda$是使$x^{\lambda}$有意义的实数, $f\left(x\right)$的导函数在$x=0$处连续,

则λ的取值范围是 ____.

解: $f\left(x\right)$的导函数在$x=0$处连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=f'\left(0\right)$;

$x\ne 0$时, $f'\left(x\right)=\left(x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}\right)'=\lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x},$

则$\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}\right)$,根据"无穷小乘有界变量仍为无穷小″

此极限若存在,则$\lambda-1>0,\lambda-2>0$,即$\lambda>2$,且此时$\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=0$;

又$f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}$,根据"无穷小乘有界变量仍为无穷小″

此极限若存在,则$\lambda-1>0$,即$\lambda>1$,且此时$f'\left(0\right)=0$;

综述,当$\lambda>2$时,$\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=0$,且$f'\left(0\right)=0$,达到$\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=f'\left(0\right)$的目的.

4.设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t+e^t \\ y=\sin t \end{cases}$确定,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$_____.

解:$y'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$,则$y''=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\cos t}{1+e^t}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-\sin t\left(1+e^t\right)-\cos t\cdot e^t}{\left(1+e^t\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+e^t}$,$\Rightarrow y''\big|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

5.曲线$\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$在点$(0,0)$处的切线方程是____.

解:由$\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$,则$\sec^2\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=e^y\cdot y'$,故$y'(0)=-2$,

所以在$(0,0)$处的切线方程是$y-0=-2(x-0)$,即$y=-2x$.

6.设$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, x<0 \\ A, x=0 \\ ax^2+b, x>0 \end{cases}$,求常数$A,a,b$的值,使$f(x)$在$x=0$处可导, 并求$f'(0)$.

解:$f(x)$在$x=0$处可导,则$f(x)$在$x=0$处连续

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,即$0=b=A$;

而$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{\pi}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{\pi}{x}=0$,

且$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}ax=0,\forall a$;

$\Rightarrow A=b=0$,a是任意常数,$f'(0)=0$.

7.设$f(x)=\sin^4x-\cos^4x$,则$f^{(n)}(x)=$____.

解:$f(x)=\left(\sin^2x-\cos^2x\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=\sin^2x-\cos^2x=-\cos2x$,

$\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-\cos2x)^{(n)}=-2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

第三章　微分中值定理与导数的应用

1.证明$f\left(x\right)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$在$\left(0,+\infty\right)$内单调增加.

证　由 $f(x)=\exp\left\{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$,有 $f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

记 $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$,对于任意 $x\in(0,+\infty)$,有 $g'(x)=-\dfrac{1}{x(1+x)^2}<0$,故函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调减少. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]=0$,可见对任意 $x\in(0,+\infty)$,有 $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}>0$,从而 $f'(x)>0,x\in(0,+\infty)$. 于是函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加.

2.设$y=y\left(x\right)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定,求$y=y\left(x\right)$的极值点. 答案:$x=1$是极小值点.

解　对方程两边求导可得

$$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0, \tag{*}$$

令 $y'=0$,由(*)得 $y=x$,将此代入原方程有

$$2x^3-x^2-1=0,$$

从而可得唯一驻点 $x=1$. 对(*)式两边再求导,得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0,$$

因此 $y''\Big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$,故 $x=1$ 是 $y=y(x)$的极小值点.

3.将长为a的铁丝切成两段,一段围成正方形,一段围成圆形. 问这两段铁丝各长多少时,正方形与圆形的面积之和最小?答案:圆的周长为$x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$,正方形的周长为$y=\dfrac{4a}{4+\pi}$.

解　设圆形的周长为 x,则正方形的周长为 $a-x$,两图形的面积之和为

$$A=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$

$$A'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8}.$$

令 $A'=0$,得 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$,$A''=\dfrac{4+\pi}{8\pi}>0$,故当圆的周长为 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$,正方形的周长为 $a-x=\dfrac{4a}{4+\pi}$时,两图形的面积之和最小.

4.曲线$y=\left(x-5\right)x^{\frac{3}{2}}$的拐点的坐标为 ____.

解：$y'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{15}{2}x^{\frac{1}{2}},y''=\dfrac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{15}{4}x^{-\frac{1}{2}}$，由 $y''=0$，得 $x=1$，$y=-4$, 并且 $x>1$ 时

$y''>0$，$x<1$时 $y''<0$，所以拐点为$\left(1,-4\right)$

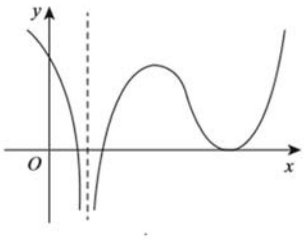
5.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图,则____.

(A)函数$f(x)$有2个极值点, 曲线$f(x)$有2个拐点

(B)函数$f(x)$有2个极值点, 曲线$f(x)$有3个拐点

(C)函数$f(x)$有3个极值点, 曲线$f(x)$有1个拐点

(D)函数$f(x)$有3个极值点, 曲线$f(x)$有2个拐点



解 如图 1－2－9 所示，x_1,x_3,x_5 为驻点，而在 x_1 和 x_3 两侧 $f'(x)$变号，为极值点；x_5 两侧 $f'(x)$不变号，则不是极值点；在 x_2 处一阶导数不存在，但在 x_2 两侧 $f'(x)$不变号，则不是极值点；在 x_2 处二阶导数不存在，在 x_4 和 x_5 处二阶导数为零，在这 3 个点两侧一阶导函数单调性发生变化，则都为拐点，故应选(B).

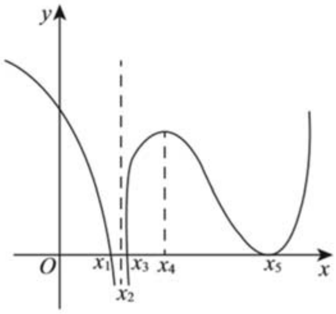


图 1－2－9

6.曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线条数为 ____.

$(A)0$　　$(B)1$　　$(C)2$　　$(D)3$

解 因为 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$，所以$\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，故 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的铅直渐近线，且是唯一的一条铅直渐近线.

又因为$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的水平渐近线.

综上可知，曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$有 2 条渐近线.

7.设$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$,求:（1）渐近线；（2）函数的增减区间及极值；（3）函数图像的凹凸区间及拐点；（4）作出其图形.

解：（1）因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，所以$x=0$ 为铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}$不存在，所以无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}-x=0$

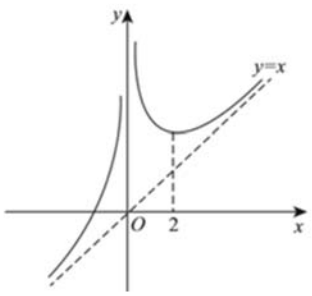
所以$y=x$ 是斜渐近线

（2）$y'=\left(\dfrac{x^3+4}{x^2}\right)'=1-\dfrac{8}{x^3}$，所以$(-\infty,0),[2,+\infty)$ 为单调增区间，$(0,2)$ 单调减区间，

所以$x=2$ 是极小值点，极小值为 3

（3）$y''=\dfrac{24}{x^4}>0$，所以在定义区间均为凹函数，无拐点。

（4）函数图像如图



8.证明$:xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},0<x<1.$

证明:（取对数）令$f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x},0<x<1;$

则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x-x^2-1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0,$故$f(x)$在$(0,1)$上单调减少,

从而$f(x)>f(1)>0,$则$\ln x-x>-\ln x-\dfrac{1}{x},$即$xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},0<x<1.$

9.证明:当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2.$

证 令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，易知 $\varphi(1)=0$.

由于

$$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\varphi'(1)=0,$$

$$\varphi''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\varphi''(1)=2>0,$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi'''(x)<0$；当 $1<x<+\infty$时，$\varphi'''(x)>0$，从而推知当 $x\in(0,+\infty)$时，$\varphi''(x)>0$.
由 $\varphi'(1)=0$ 推知当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $1<x<+\infty$时，$\varphi'(x)>0$.
再由 $\varphi(1)=0$ 推知当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

10.求方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数,其中k为参数.
答案:$k\le 1$时, 只有一个实根$x=0$;$k>1$时, 有且仅有3个实根.

解 令

$$f(x)=k\arctan x-x,$$

则 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的奇函数，且 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$.

当 $k-1\leqslant0$，即 $k\leqslant1$ 时，$f'(x)<0(x\neq0)$，$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少，方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=0$；

当 $k-1>0$，即 $k>1$ 时，在区间$(0,\sqrt{k-1})$内，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加，在区间$(\sqrt{k-1},+\infty)$内，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少，所以 $f(\sqrt{k-1})$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内的最大值，从而 $f(\sqrt{k-1})>f(0)=0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{k\arctan x}{x}-1\right)=-\infty$，所以由函数的零点定理知，存在 $\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$是奇函数及其单调性可知：当 $k>1$ 时，方程 $f(x)=0$ 有且仅有 3 个不同的实根

$$x=-\xi,x=0,x=\xi.$$

另解：$k\arctan x-x=0\Leftrightarrow k=\dfrac{x}{\arctan x}(x\neq 0)$，

令$f(x)=\dfrac{x}{\arctan x}$，由于$f(x)$是偶函数，只考虑$x>0$即可；

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}$，再令$g(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}$，

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}>0$，故$g(x)\nearrow$，

$\Rightarrow g(x)>g(0)=0$，从而$f'(x)>0$，则$f(x)\nearrow$，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；

$\Rightarrow -\infty<x<0$时，$f(x)>1$单减；$0<x<+\infty$时，$f(x)>1$单增.

所以$k>1$时，在$-\infty<x<0$和$0<x<+\infty$内各有一个实根，

而$x=0$也是原方程的根，故此时有三个实根；

而$k\leq 1$时，在$-\infty<x<0$和$0<x<+\infty$内没有实根，

而$x=0$也是原方程的根，故此时有一个实根.

11.设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上具有一阶连续导数，在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内二阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，证明：$\exists\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使$f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

证明 将ξ改写为x，

$$f'(x)+f''(x)\tan x=0\Leftrightarrow f''(x)+\frac{1}{\tan x}f'(x)=0,$$

据上分析，便可令$F(x)=f'(x)\cdot e^{\int\frac{1}{\tan x}dx}=f'(x)\sin x$，再去找函数值相等的两个点，$F(0)=f'(0)\sin 0=0$，但$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\dfrac{\pi}{2}=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$故两端点不可行，实际上$\sin x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调，故转而应该考虑$f'(x)$的另一个零点. 由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0$，$f(1)=3$，故根据介值定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得$f(\eta)=1$.

故存在$\tau\in\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\tau)=0$，于是有$\begin{cases}F(0)=0,\\F(\tau)=f'(\tau)\sin\tau=0\end{cases}\Rightarrow F'(\xi)=0,\xi\in(0,\tau)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

即$f''(\xi)\sin\xi+f'(\xi)\cos\xi=0$，故存在$\xi\in(0,\tau)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有$f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

第四章　不定积分

1.$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx=$____.

解　令 $\sqrt{2x-1}=t$，有

$$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx=\int e^t t\,dt=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C=(\sqrt{2x-1}-1)e^{\sqrt{2x-1}}+C,$$

其中 C 为任意常数.

2.求不定积分$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

解：$I=\int\frac{1}{x}dx-\int\ln(1-x)d\frac{1}{x}=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\int\frac{1}{x(1-x)}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln|x|+\ln(1-x)+C$

$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C.$

3.求不定积分$\int\frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx$.

解法 1　原式$=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,$$其中 C 为任意常数.

解法 2　原式$=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin x\,dx}{2(1-\cos^2x)(1+\cos x)}$

$$\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2}=-\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{3+u}{(1+u)^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{8}\left(\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right)+C=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C,$$

其中 C 为任意常数.

4.求不定积分$\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$.

解　原式$=\int e^{2x}\sec^2x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$=e^{2x}\tan x+C$，其中 C 为任意常数.

5.求不定积分$\int \frac{\arctan x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx.$

解：$I=\int \frac{\arctan x}{x^2}dx-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$=-\int \arctan x d\frac{1}{x}-\int \arctan x d\arctan x$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1+x^2-x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C.$

6.求不定积分$\int \frac{\mathrm{ar}\sin e^x}{e^x}dx.$

解 令 $\arcsin \mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln(\sin t)$，$\mathrm{d}x=\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t}\right)\\ &=-\frac{t}{\sin t}+\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=-\frac{t}{\sin t}+\ln|\csc t-\cot t|+C\\ &=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\ln\left|\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}\right|+C\\ &=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\ln(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})-x+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

7.求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

解法 1 直接用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int (\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}(\sqrt{x})\\ &=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\ &=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}\\ &=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

解法 2 先换元：令 $t=\sqrt{x}$，则

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \arcsin t\mathrm{d}t+4\int \ln t\mathrm{d}t,$$

而
$$\int \arcsin t\mathrm{d}t = t\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C_1,$$

$$\int \ln t\mathrm{d}t=t\ln t-\int \mathrm{d}t=t\ln t-t+C_2,$$

所以

$$\text{原式}=2t\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+4t\ln t-4t+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C,$$

其中 C 为任意常数.

8.设$f(x)=e^{-|x|}$，求不定积分$\int f(x)dx$，及满足$F(0)=0$的$f(x)$的原函数$F(x)$.

解 因分段函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}, & x<0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上的原函数 $F(x)$ 存在，则

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C_2, \quad x<0,\end{cases}$$

其中，C_1 与 C_2 是相关常数，下面确定常数 C_1,C_2 的关系.

原函数 $F(x)$ 显然可导，故 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，当然在 $x=0$ 处也连续，因此

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^{x}+C_2)=\lim_{x\to 0^+}(-\mathrm{e}^{-x}+C_1)=\lim_{x\to 0^+}F(x),$$

即有 $C_2=C_1-2$，若记 $C=C_1$，则 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}-2+C, & x<0,\end{cases}$ 由条件 $F(0)=0$，得 $C=1$，故满足 $F(0)=0$ 的原函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}-1, & x<0.\end{cases}$

第五章　定积分及反常积分

1.$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$____.

解　设$\sqrt{x}=t$,则

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}2t^2\cos t\mathrm{d}t=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t$$
$$=4t\cos t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=-4\pi.$$

2.$\int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}dx=$____.

解　令 $x^2=\sin t$,则 $x=0$ 时,$t=0$;$x=1$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$. 于是有

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}.$$

3.$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)dx=$____.

解　$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x$

$=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x$（奇偶性）

$=2\cdot\frac{1}{4}\pi\pi^2=\frac{\pi^3}{2}$.（定积分的几何意义）

4.设$f\left(x\right)$具有二阶连续导数,曲线$y=f\left(x\right)$过点$\left(0,0\right)$且与曲线$y=2^x$在点$\left(1,2\right)$处相切,则$\int_0^1 xf''\left(x\right)dx=$____.

解

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=f'(1)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)+f(0),$$

由题设 $f(0)=0,f(1)=2^1=2,f'(1)=(2^x)'\Big|_{x=1}=2\ln 2$.

因此 $$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=2\ln 2-2=2(\ln 2-1).$$

5.$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$____.

解 由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$,故$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$是反常积分.

令 $\arcsin x=t$,有 $x=\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

6.已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$,求常数$a$的值.

解

$$右边=-2\int_a^{+\infty}x^2\mathrm{d}e^{-2x}=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}xe^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$=2a^2e^{-2a}-(2xe^{-2x}+e^{-2x})\Big|_a^{+\infty}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a},$$

$$左边=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^{-\frac{x+a}{2a}}\right]^{-\frac{2ax}{x+a}}=e^{-2a},$$

于是有 $e^{-2a}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}$,解得 $a=0$ 或 $a=-1$.

7.设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, 1<x<e\\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, x\geq e\end{cases}$,若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛,则____.

$(A)\alpha<-2$　　$(B)\alpha>2$　　$(C)-2<\alpha<0$　　$(D)0<\alpha<2$

解 考虑积分$\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$,当$\alpha-1\leqslant 0$,即$\alpha\leqslant 1$时,为普通定积分,积分自然存在;当$\alpha-1>0$时,$\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$为无界函数的反常积分,且当$\alpha-1<1$,即$\alpha<2$时收敛,当$\alpha-1\geqslant 1$,即$\alpha\geqslant 2$时发散.

无穷区间上的反常积分

$$\int_e^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\ln^{\alpha}x}\Big|_e^{+\infty},$$

当$\alpha>0$时,此反常积分收敛,当$\alpha\leqslant 0$时,发散.

由以上分析知,若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,则有$0<\alpha<2$,故选(D).

8.(1)$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2dt=$____;　(2)$\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(x-t)^2dt=$____.

答案:(1)$-\int_0^{x^2}\cos t^2dt-2x^2\cos^4 x$;　(2)$\sin x^2$.

9.设$f\left(x\right)$连续,则下列函数中必是偶函数的是____.

$(A)\int_0^x f\left(t^2\right)dt$　　$(B)\int_0^x f^2\left(t\right)dt$　　$(C)\int_0^x t\left[f\left(t\right)-f\left(-t\right)\right]dt$　　$(D)\int_0^x t\left[f\left(t\right)+f\left(-t\right)\right]dt$

解　设 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t\\&\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)]\mathrm{d}(-u)\\&=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\mathrm{d}u=F(x),\end{aligned}$$

即 $F(x)$是偶函数,(D)是正确的.

同理可以证明(A),(C)均为奇函数. 而对(B)中的函数,因为$\int_0^{-x} f^2(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x -f^2(-u)\mathrm{d}u$,由所给条件不能推出为偶函数.

10.设$f\left(x\right)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin t\right|dt$.

（1）证明$f\left(x\right)$是以π为周期的周期函数；

（2）求$f\left(x\right)$的值域.

（Ⅰ）**证**

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

设 $t=u+\pi$,则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}u=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数.

（Ⅱ）**解**　因为$|\sin x|$在$(-\infty,+\infty)$内连续,注意到 $f(x)$的周期为 π,故只需在$[0,\pi]$上讨论其值域.

因为

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3\pi}{4}$,且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=\sqrt{2},\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}.$$

又

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,\quad f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\mathrm{d}t=1,$$

因而 $f(x)$的最小值是 $2-\sqrt{2}$,最大值是$\sqrt{2}$,故 $f(x)$的值域是$[2-\sqrt{2},\sqrt{2}\ ]$.

11.设$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上具有一阶连续导数,且$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$.证明:$\left|\int_0^1 f\left(x\right)dx\right|\le\frac{1}{4}M$,
其中$M=\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'\left(x\right)\right|$.

证明 将大区间$[0,1]$分成两个小区间$[0,x]$和$[x,1]$.

在$[0,x]$上对$f(x)$使用拉格朗日中值定理,得$f(x)-f(0)=f(x)=f'(\xi_1)x$,其中$\xi_1\in(0,x)$,于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)|x,$$

在$[x,1]$上对$f(x)$使用拉格朗日中值定理,得$f(1)-f(x)=-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$,其中$\xi_2\in(x,1)$,于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_2)|(1-x),$$

当$x\in[0,1]$时,记$M=\max|f'(x)|$,则

$$|f(x)|\leqslant Mx,$$
$$|f(x)|\leqslant M(1-x),$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant M\cdot\int_0^x t\mathrm{d}t+M\cdot\int_x^1(1-t)\mathrm{d}t=M\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right].\end{aligned}$$

其中,根据基本不等式,$\min\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right\}=\frac{1}{4}$,故得证.

第六章　　定积分的应用

1.由曲线$y=\frac{4}{x}$和直线$y=x$及$y=4x$在第一象限中围成的平面图形的面积为____. 答案:41n2.

2.设封闭曲线L的极坐标方程为$r=\cos 3\theta(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$,则$L$围成的图形的面积为 ____ .

解　曲线L:$r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$所围成的图形是“三叶玫瑰线”的一个“花瓣”,注意到图形关于极轴的对称性,其面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi}{12}.$$

3.设D是曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$,直线$x=a(a>0)$及x轴围成的平面图形,V_x,V_y分别是D绕x轴,y轴旋转一周所得旋转体体积,若$V_y=10V_x$,求a的值.

解
$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5},$$

$$V_y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\pi\int_0^{\sqrt[3]{a}} y^6\mathrm{d}y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\frac{\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}\text{或}V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

由$V_y=10V_x$,即$\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=10\cdot\frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$,解得$a=7\sqrt{7}$.

4.设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$下方,$x$轴上方的无界区域.

(1)求区域D绕x轴旋转一周所成旋转体体积$V(a)$;

(2)当a为何值时,$V(a)$最小?并求出最小值.

答案:(1)$V(a)=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$,(2)当$a=e$时,$V(a)$最小,$V(e)=\pi e^2$.

解　(Ⅰ)所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V(a)&=\pi\int_0^{+\infty} xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}(a^{-\frac{x}{a}})\\&=-\frac{a}{\ln a}\pi(xa^{-\frac{x}{a}})\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2.\end{aligned}$$

(Ⅱ)
$$V'(a)=2\pi\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}.$$

令$V'(a)=0$,得$\ln a=1$,从而$a=\mathrm{e}$. 当$1<a<\mathrm{e}$时,$V'(a)<0$,$V(a)$单调减少;当$a>\mathrm{e}$时,$V'(a)>0$,$V(a)$单调增加. 所以$a=\mathrm{e}$时V最小,最小体积为

$$V(\mathrm{e})=\pi\left(\frac{\mathrm{e}}{\ln\mathrm{e}}\right)^2=\pi\mathrm{e}^2.$$

5.曲线$y=\ln(1-x^2)$相应于$0\le x\le\frac{1}{2}$的一段弧长度为____. 答案:$\ln 3-\frac{1}{2}$.

第七章　　常微分方程

1.微分方程$xy'+y\left(\ln x-\ln y\right)=0$满足$y\left(1\right)=e^3$的解为$y=$____.

依题意：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，令$\dfrac{y}{x}=u$，则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{u\left(\ln u-1\right)}=\frac{dx}{x}$$

积分得$\ln\left(\ln u-1\right)=\ln x+C_1$ 即$\ln u-1=Cx$，带回$\dfrac{y}{x}=u$，得到

$\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$，由$y\left(1\right)=e^3$，得$C=2$，所以$\mathrm{y}=xe^{2x+1}$

2.(1）求微分方程$xy'+ay=1+x^2$满足$y\left(1\right)=1$的解$y\left(x,a\right)$,
其中a为常数,且$a\neq0,a\neq-2$.
(2）证明$\lim\limits_{a\to0}y\left(x,a\right)$是微分方程$xy'=1+x^2$的解.

(1)**解**　微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{a}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1+x^2}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{a}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x^{-a}\left(\int\frac{1+x^2}{x}x^a\mathrm{d}x+C\right)=x^{-a}\left(\frac{x^a}{a}+\frac{x^{a+2}}{a+2}+C\right)=\frac{1}{a}+\frac{x^2}{a+2}+Cx^{-a}.$$

由$y(1)=1$,得$C=\dfrac{a^2-2}{a(a+2)}$,故$y(x,a)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{x^2}{a+2}+\dfrac{a^2-2}{a(a+2)}x^{-a}$.

(2)**证明**　$\lim\limits_{a\to0}y(x,a)=\lim\limits_{a\to0}\left[\dfrac{a+2+ax^2-2x^{-a}}{a(a+2)}+\dfrac{a}{a+2}x^{-a}\right]=\lim\limits_{a\to0}\left(\dfrac{1+x^2+2x^{-a}\ln x}{2a+2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\ln x$.

设$y_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\ln x$,则$y_0'=x+\dfrac{1}{x}$,有$xy_0'=x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1+x^2$,故结论成立.

3.求微分方程$y''\left[x+\left(y'\right)^2\right]=y'$满足$y\left(1\right)=y'\left(1\right)=1$的特解.答案:$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为

$$p'(x+p^2)=p,$$

移项可得

$$p\mathrm{d}x-x\mathrm{d}p=p^2\mathrm{d}p,$$

即

$$\frac{p\mathrm{d}x-x\mathrm{d}p}{p^2}=\mathrm{d}p,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{p}\right)=\mathrm{d}p,$$

于是有 $\frac{x}{p}=p+C_1$. 因 $p\Big|_{x=1}=y'(1)=1$，得 $C_1=0$，故 $p^2=x$.

由 $y'(1)=1$ 知，应取 $p=\sqrt{x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x},$$

解得 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$. 又由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\frac{1}{3}$，故

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}.$$

4.设$p(x),q(x),f(x)$均是x的已知连续函数,$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的3个线性无关解,C_1与C_2是任意常数,则该非齐次线性微分方程的通解是_____.

$(A)(C_1+C_2)y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$　　$(B)(C_1+C_2)y_1+(C_2-C_1)y_2+(C_1-C_2)y_3$

$(C)C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$　　$(D)C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(C_1-C_2)y_3$

设 $p(x),q(x),f(x)(f(x)\neq 0)$ 为连续函数，考虑二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{①}$$

与对应的二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{②}$$

有下述论断：

(1)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个解，a,b,c 是常数，并设

$$y=ay_1(x)+by_2(x)+cy_3(x), \tag{③}$$

则③是方程①的解的充要条件是 $a+b+c=1$；③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(2)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个线性无关的解，a,b,c 中两个为任意常数，则③是方程①的通解的充要条件是 $a+b+c=1$；③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(C)选项中，$C_1+C_2-C_1+1-C_2=1$，根据(2)，故选(C).

5.设$y=y(x)$满足$\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2,y'(0)=-4 \end{cases}$,求反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)dx$.

解 解特征方程 $r^2+4r+4=0$，得 $r_1=r_2=-2$. 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

由初值条件得 $C_1=2,C_2=0$. 因此，微分方程的解为 $y=2\mathrm{e}^{-2x}$. 于是

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)=-\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

6.(2010数一,10分）求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解.

答案:$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$.

解 对应齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为

$$r^2-3r+2=0,$$

两个特征根分别为 $r_1=1, r_2=2$，齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

由于 $r_1=1$ 是 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程的单根，故可设非齐次方程的一个特解形式为

$$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x.$$

将

$$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x,$$
$$(y^*)'=[ax^2+(2a+b)x+b]\mathrm{e}^x,$$
$$(y^*)''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x,$$

代入原方程解得

$$a=-1, b=-2.$$

故所求通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x,\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

7.用变量代换 $x=\cos t$（$0<t<\pi$）化简微分方程 $\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$,
并求满足 $y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=2$ 的特解.

解

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

将 y', y'' 代入原方程，得

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0,$$

其特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm\mathrm{i}$，于是此方程的通解为

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t,$$

从而原方程的通解为

$$y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$，得 $C_1=2, C_2=1$，故所求方程的特解为

$$y=2x+\sqrt{1-x^2}.$$

8.设 $f\left(x\right)$ 连续，且 $\int_0^x f\left(x-t\right)dt=\int_0^x\left(x-t\right)f\left(t\right)dt+e^{-x}-1$，求 $f\left(x\right)$.

解 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. 由题设得

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1,$$

关于 x 求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$，易知 $f(0)=-1$. 因此 $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 从而

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

由 $f(0)=-1$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$.

9.设$f(x)$满足微分方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$.

（1）求$f(x)$的表达式；

（2）求曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$的拐点.

$$\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0,\\ f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x},\end{cases}$$

解得 $f'(x)-3f(x)=-2\mathrm{e}^{x}$，因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{3\int\mathrm{d}x}\left[\int(-2\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{-3\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{3x}\left(-2\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{3x},\end{aligned}$$

将其代入 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x}$，有

$$\mathrm{e}^{x}+9C\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{3x}=2\mathrm{e}^{x},$$

可得 $C=0$，于是 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$.

解法 2 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 对应的特征方程是 $r^2+r-2=0$，其根为 $r_1=1$，$r_2=-2$，故 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$，且

$$f'(x)=C_1\mathrm{e}^{x}-2C_2\mathrm{e}^{-2x},\quad f''(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+4C_2\mathrm{e}^{-2x},$$

代入 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x}$，有

$$C_1\mathrm{e}^{x}+4C_2\mathrm{e}^{-2x}+C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^{x},$$

从而知 $C_1=1$，$C_2=0$，即有 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$.

（Ⅱ）解

$$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+1,$$

$$y''=2x+2(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

因为当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$，又 $y(0)=0$，所以曲线的拐点为$(0,y(0))$，即点$(0,0)$.

10.设L是一条平面曲线,其上任意一点$P\left(x,y\right)$（$x>0$）到坐标原点的距离等于该点处切线在y轴上的截距,且L过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

（1）求曲线L的方程；（2）求L位于第一象限部分的一条切线,使该切线与L以及两坐标轴围成图形的面积最小.

解 (1)设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$,则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$,令 $u=\dfrac{y}{x}$,则此方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由 L 经过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,知 $C=\dfrac{1}{2}$. 于是 L 的方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$,即 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$.

(2)设第一象限内曲线 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$在点 $P(x,y)$处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即 $Y=-2xX+x^2+\dfrac{1}{4}\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$. 它与 x 轴及 y 轴的交点分别为$\left(\dfrac{x^2+\dfrac{1}{4}}{2x},0\right)$与$\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$,故所求面积为 $S(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)^2}{2x}-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x$.

对 x 求导,得 $S'(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4x^2\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)-\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{4x^2}\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)\left(3x^2-\dfrac{1}{4}\right)$.

令 $S'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时,$S'(x)<0$;当 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时,$S'(x)>0$,因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$是 $S(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$内的唯一极小值点,即最小值点,于是所求切线为 $Y=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}X+\dfrac{3}{36}+\dfrac{1}{4}$,即 $Y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}X+\dfrac{1}{3}$.