目录

第一章 行列式习题练习解析

习题 1.1 计算 25431 的逆序数，计算 2731465 的逆序数.

【答案】$\tau(25431)=7$，$\tau(2731465)=8$.

【解析】从左至右，看每个数后面比它小的数的个数，因此对于 25431，逆序数为 $1+3+2+1=7$，对于 2731465，逆序数为 $1+5+1+1=8$.

习题 1.2 下列各项中，为某五阶行列式中带有正号的项是（　　）

A. $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$.　　　　B. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}$.

C. $a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52}$.　　　　D. $a_{15}a_{22}a_{31}a_{44}a_{53}$.

【答案】D

【解析】

由行列式的性质，若行列式的逆序数为偶数则为正号，若逆序数为奇数则为负号

由题目选项可知行号都是 12345，因此只需比较列数的逆序数即可

对 A 选项，逆序数为 $\tau(3,4,2,1,5)=2+2+1+0+0=5$

对 B 选项，逆序数为 $\tau(1,2,3,5,4)=0+0+0+1+0=1$

对 C 选项，逆序数为 $\tau(1,5,3,4,2)=0+0+1+1+3=5$

对 D 选项，逆序数为 $\tau(5,2,1,4,3)=4+1+0+1+0=6$

因此选 D。

习题 1.3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} m-a & a & a & \cdots & a \\ a & m-a & a & \cdots & a \\ a & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}$$

【答案】$\left[m+(n-2)a\right](m-2a)^{n-1}$

【解析】$D_n \overset{r_1+r_2+..r_n}{=} \begin{vmatrix} m-a & a & a & \cdots & a \\ a & m-a & a & \cdots & a \\ a & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} m+(n-2)a & m+(n-2)a & m+(n-2)a & \cdots & m+(n-2)a \\ a & m-a & a & \cdots & a \\ a & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}$$

$$= [m+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & m-a & a & \cdots & a \\ a & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,\ldots n}{\overset{c_i-c_1}{=}} [m+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & m-2a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & m-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & m-2a \end{vmatrix}$$

利用上三角行列式得：

$$D = \left[m + (n-2)a\right](m-2a)^{n-1}$$

习题 1.4 计算下列阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\vdots & \cdots & a_n & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_0 \end{vmatrix}, a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

【答案】$D_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i})$

【解析】由行列式的性质得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \vdots & \cdots & a_n & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{n+1}-\frac{b_1}{a_1}r_1-\frac{b_2}{a_2}r_2-\ldots-\frac{b_n}{a_n}r_n}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \vdots & \cdots & a_n & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n (a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i})$$

即有 $D_{n+1}=a_1 a_2 \cdots a_n (a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i})$

习题 1.5 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

【答案】$n!$

【解析】$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ \cdots \\ r_n+r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$

习题 1.6 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

【答案】$a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2})$

【解析】由行列式的性质得

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+r_2+\ldots r_n}{=}\begin{vmatrix} 1+2+3+\ldots+n+a & 1+2+3+\ldots+n+a & 1+2+3+\ldots+n+a & \cdots & 1+2+3+\ldots+n+a \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3\ldots n}{\overset{c_i-c_1}{=}}\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

由下三角行列式得

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}$$

习题 1.7 设$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中$A_{4j}(j=1,2,3,4)$是$|\mathbf{A}|$中元素$a_{4j}$的代数余子式.

【答案】6

【解析】由代数余子式的定义，$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1-r_4\\r_2-r_4\\r_3-r_4}}{=}\begin{vmatrix}0&-6&0&2\\0&0&2&3\\0&0&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

按第一列展开得

$$\begin{vmatrix}0&-6&0&2\\0&0&2&3\\0&0&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-6&0&2\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}=-(-6)\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}$$

所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=6$

习题 1.8 下列 n 阶行列式中，取值必为 -1 的是（　　）

A. $\begin{vmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix}1&1& & & \\ &1&1& & \\ & &\ddots&\ddots& \\ & & &1&1\\ & & & &1\end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots& &\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$

【答案】D

【解析】A 选项为副对角线行列式，其行列式值为

$$\begin{vmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot1\cdot1\ldots\cdot1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

B 选项，按上三角行列式得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

C 选项，按第一行展开得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}$$

D 选项,对行列式进行变换得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_n}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

故答案选择 D。

习题 1.9 四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ =（　　）

A. $(ad-bc)^2$　　B. $-(ad-bc)^2$　　C. $a^2d^2-b^2c^2$　　D. $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】B

【解析】

方法一：利用行列式的性质，对行列式进行变换

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ c & d & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=} \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

所以行列式为$-(ad-bc)^2$，选 B

方法二：按照行或列展开，按照第四行展开得到

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} d \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$= -c \cdot (-1)^{2+3} b \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^{2+1} a \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= bc(ad-bc) - ad(ad-bc) = -(ad-bc)^2$$

习题 1. 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

【答案】$1+(-1)^{n+1} a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$

【解析】对行列式直接按第一列展开可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + a_n \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{1+n} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

故原行列式的值为$1+(-1)^{1+n} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

习题 1.11 行列式$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$________________.

【答案】$1-a+a^2-a^3+a^4$

【解析】行列式可以直接按第一列展开

令

$$D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

则有

$$D_4=(1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

即

$$D_4=(1-a)D_3+a\left[(1-a)^2+a\right]$$

递推得

$$D_3=(1-a)D_2+a(1-a)\text{，}\quad D_2=(1-a)^2+a$$

则有

$$D_4=(1-a)^2D_2+a(1-a)^2+a\left[(1-a)^2+a\right]$$

$$=(1-a)^4+a(1-a)^2+a(1-a)^2+a\left[(1-a)^2+a\right]$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4$$

故行列式的值为$1-a+a^2-a^3+a^4$

习题 1.12 设有方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=1 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=1 \end{cases}$$

a,b,c满足什么条件时上述方程组有唯一解，并求出唯一解.

【答案】a,b,c互不相等时方程组有唯一解，

$$x_1=\frac{(c-1)(b-1)}{(c-a)(b-a)},x_2=\frac{(c-1)(1-a)}{(c-b)(b-a)},x_3=\frac{(1-b)(1-a)}{(c-b)(c-a)}$$

【解析】由题目得到方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$,则由克拉默法则，当系数行列式不等于 0 时方程组有唯一解,利用范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-b)(c-a)\neq 0$$

所以当a,b,c互不相等时，方程组有唯一解。

由克拉默法则得：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&b&c\\1&b^2&c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(c-1)(b-1)}{(c-a)(b-a)}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&c\\a^2&1&c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(c-1)(1-a)}{(c-b)(b-a)}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&1\\a^2&b^2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(1-b)(1-a)}{(c-b)(c-a)}$$

习题 1.13 已知a,b,c不全为零，证明齐次方程组

$$\begin{cases}ax_2+bx_3+cx_4=0\\ax_1+x_2=0\\bx_1+x_3=0\\cx_1+x_4=0\end{cases}$$

只有零解.

【解析】由题目得到该方程租对应的行列式为$\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}$，计算行列式可得

$$\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+(-a)r_2+(-b)r_3+(-c)r_4}\begin{vmatrix}-a^2-b^2-c^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-(a^2+b^2+c^2)\neq0$$

所以由克拉默法则得到该齐次方程租只有零解。

习题 1.14 证明：$D_n=\begin{vmatrix}4&3&&&&\\1&4&3&&&\\&1&4&3&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&4&3\\&&&&1&4\end{vmatrix}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

【解析】按第一行展开

$$D_n=\begin{vmatrix}4&3&&&&\\1&4&3&&&\\&1&4&3&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&4&3\\&&&&1&4\end{vmatrix}_n$$

$$=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&3&&&\\1&4&3&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&4&3\\&&&1&4\end{vmatrix}_{n-1}+3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3&&&\\&4&3&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&4&3\\&&&1&4\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=4D_{n-1}-3\begin{vmatrix}1&3&&&\\&4&3&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&4&3\\&&&1&4\end{vmatrix}_{n-1}=4D_{n-1}-3\cdot1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&3&&&&\\1&4&3&&&\\&1&4&3&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&4&3\\&&&&1&4\end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=4D_{n-1}-3D_{n-2}$$

所以得到递推关系 $D_n=4D_{n-1}-3D_{n-2}$

利用数学归纳法：

当 $n=1$ 时，$D_1=4=\dfrac{3^{1+1}-1}{2}$ 满足表达式

当 $n=2$ 时，有 $D_2=\begin{vmatrix}4&3\\1&4\end{vmatrix}$，验证满足 $D_2=13=\dfrac{3^{2+1}-1}{2}$ 满足表达式

假设 $n\le k\,(k\in N)$ 时等式满足，即 $D_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$，则当 $n=k+1$ 时有 $D_{k+1}=4D_k-3D_{k-1}$，

而由假设知 $D_k=\dfrac{3^{k+1}-1}{2},D_{k-1}=\dfrac{3^k-1}{2}$，所以

$$D_{k+1} = 4D_k - 3D_{k-1} = 2(3^{k+1} - 1) - \frac{3}{2}(3^k - 1) = \frac{3^{k+2} - 1}{2} = \frac{3^{(k+1)+1} - 1}{2}$$

满足该关系式

因此对于整数 $n(n \geq 1)$ 有 $D_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

第二章 矩阵习题练习解析

习题 2.1 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$

【解析】

设 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{E}+\mathbf{B}$

则 $B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

因此有

$$\mathbf{A}^n=(\mathbf{B}+\mathbf{E})^n=\mathbf{C}_n^0\mathbf{B}^n\mathbf{E}^0+\mathbf{C}_n^1\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{E}^1+\ldots+\mathbf{C}_n^{n-1}\mathbf{B}^1\mathbf{E}^{n-1}+\mathbf{C}_n^n\mathbf{B}^0\mathbf{E}^n$$

$$=\mathbf{C}_n^{n-1}\mathbf{B}^1\mathbf{E}^{n-1}+\mathbf{C}_n^n\mathbf{B}^0\mathbf{E}^n=n\mathbf{B}+\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

习题 2.2 已知矩阵 $\mathbf{A}=\mathbf{PQ}$，其中 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\mathbf{Q}=[2,-1,2],\mathbf{B}=\mathbf{PA}$

求矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^n$.

【解析】由题目知

$$\mathbf{A}=\mathbf{PQ}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}[2,-1,2]=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}$$

所以有 $\mathbf{A}^2=\mathbf{PQPQ}=2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}[2,-1,2]=\begin{bmatrix}4&-2&4\\8&-4&8\\4&-2&4\end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^n=(\mathbf{PQ})^n=\mathbf{PQPQPQ}\ldots\mathbf{PQ}=\mathbf{P}(\mathbf{QP})^{n-1}\mathbf{Q}=2^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left[2,-1,2\right]=\begin{bmatrix}2^n & -2^{n-1} & 2^n\\ 2^{n+1} & -2^n & 2^{n+1}\\ 2^n & -2^{n-1} & 2^n\end{bmatrix}$$

习题 2.3 设 $\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ 可逆，$\mathbf{A}=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$,其中 $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位矩阵，证明：（1）$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，（2）$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$.

【解析】

（1）已知 $\mathbf{A}=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$

因此有 $\mathbf{A}^T=\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\right]^T=\mathbf{E}^T-\mathbf{B}^T\left[(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\right]^T\mathbf{B}$

$$=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$$

即证 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$

（2）由题目有 $\mathbf{A}=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$

即有

$$\mathbf{A}^2=\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\right]\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\right]=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$$

$$=\mathbf{E}-2\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}$$

$$=\mathbf{E}-\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{A}$$

即证 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ 。

习题 2.4 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，若 $\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}\right|=a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=b$，则 $|2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=$（ ）

A. $2a-b$ B. $2b-a$ C. $-2a-2b$ D. $-2a+2b$

【解析】由行列式的性质知

$$|2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=2\left|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\right|=-2\left|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|$$

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}\right|=-\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=-\left|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=a$$

故 $\left|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=-a$

因此有$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\left|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|+|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=b$

推出$\left|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=b+a$

所以$|2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=-2\left|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=-2a-2b$

因此答案选择 C。

习题 2.5 设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 为 3 阶方阵，且 $\left|\mathbf{A}\right|=3$，$\left|\mathbf{B}\right|=2$，$\left|\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\right|=2$，则 $\left|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\right|=$ ________.

【解析】

$\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}\left(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{B}+\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{B}^{-1}$

所以$\left|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\right|=\left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}+\mathbf{A}^{-1}\right|\left|\mathbf{B}^{-1}\right|=3\times 2\times\dfrac{1}{2}=3$

故原行列式的值为 3.

【注】此题也可以其做法是一前一后添加 E，然后等价变换。

$$\left|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}\right|=\left|\mathbf{AE}+\mathbf{EB}^{-1}\right|=\left|\mathbf{ABB}^{-1}+\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\right|=\left|\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}^{-1}\right|=\left|\mathbf{A}\right|\left|(\mathbf{B}+\mathbf{A}^{-1})\right|\left|\mathbf{B}^{-1}\right|=3$$

习题 2.6 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T$，矩阵 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，则 $\left|a\mathbf{E}-\mathbf{A}^n\right|=$ ________.

【解析】

由题意得$\mathbf{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\ldots\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$

即
$$\mathbf{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}2^{n-1} & 0 & -2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0\\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{bmatrix}$$

所以有
$$a\mathbf{E}-\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & a & 0\\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\left|a\mathbf{E}-\mathbf{A}^n\right|=a\left[(a-2^{n-1})^2-2^{2n-2}\right]=a\left[a^2-2a\cdot 2^{n-1}+2^{2n-2}-2^{2n-2}\right]=a^2(a-2^n)$$

即原行列式的值为$a^2(a-2^n)$

习题 2.7 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^3=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3$，则 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=$ ________.

【解析】

因为$(\mathbf{A}-\mathbf{E})^3=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3$

所以$\mathbf{A}^3-3\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}-\mathbf{E}=\mathbf{A}^3+3\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+\mathbf{E}$

所以有$3\mathbf{A}^2+\mathbf{E}=\mathbf{0}$

$3\mathbf{A}^2-6\mathbf{A}+6\mathbf{A}-12\mathbf{E}+12\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{0}$

即有$3\mathbf{A}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})+6(\mathbf{A}-2\mathbf{E})+13\mathbf{E}=\mathbf{0}$

故$(3\mathbf{A}+6\mathbf{E})(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=-13\mathbf{E}$

所以$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=-\frac{1}{13}(3\mathbf{A}+6\mathbf{E})$

【注】对于$3\mathbf{A}^2+\mathbf{E}=\mathbf{0}$，还可以有以下的思考方式，根据所求的结论，凑出$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$项，即$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})(3\mathbf{A}+n\mathbf{E})=m\mathbf{E}$，用待定系数法定出$m,n$

习题 2.8 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，则$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=$__________.

【解析】由题意得

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{bmatrix},\text{其中}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix},\mathbf{C}=1$$

所以$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

习题 2.9 已知$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为三阶方阵，且满足$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{AB}$.

（1）判断$\mathbf{A}-\mathbf{E}$是否可逆，其中$\mathbf{E}$为三阶单位矩阵.

（2）若$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵$\mathbf{A}$.

【解析】

（1） 由$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{AB}$得$\mathbf{AB}-\mathbf{A}-\mathbf{B}=0$

$\mathbf{AB}-\mathbf{B}-\mathbf{A}+\mathbf{E}-\mathbf{E}=0$（凑出$\mathbf{A}-\mathbf{E}$），

得到$(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{B}-\mathbf{E})=\mathbf{E}$

所以$\mathbf{A}-\mathbf{E}$可逆且其逆矩阵为$\mathbf{B}-\mathbf{E}$

（2）由（1）得到$\mathbf{A}-\mathbf{E}$的逆矩阵为$\mathbf{B}-\mathbf{E}$

因此有$\mathbf{A}=\mathbf{E}+(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}$

利用分块矩阵求逆法则有

$$(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-3}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-3}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{vmatrix}$$

利用二阶矩阵快速求逆法得到

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$$ 所以有 $$(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\frac{1}{2}&\mathbf{0}\\-\frac{1}{3}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

所以有
$$\mathbf{A}=\mathbf{E}+(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

习题 2.10 设三阶方阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$满足$\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{E}$，其中$\mathbf{E}$为三阶单位矩阵，若$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则$|\mathbf{B}|=$___________.

【解析】

由题意$\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{E}$，因此有$(\mathbf{A}^2-\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{E}$

所以有$(\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{E}$

因为$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，所以$\mathbf{A}+\mathbf{E}$可逆

所以有$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{E}$即有$|\mathbf{A}-\mathbf{E}||\mathbf{B}|=1$

而$\left|\mathbf{A}-\mathbf{E}\right|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2$因此有$\left|\mathbf{B}\right|=\frac{1}{2}$

习题 2.11 已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&-3\\-1&4&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*=$（　　）

A. $\begin{bmatrix}14&3&12\\0&28&-5\\9&-2&16\end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix}7&-1&-3\\3&7&2\\12&5&8\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}7&3&12\\1&7&5\\-3&2&8\end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix}7&-3&12\\-1&7&-5\\-3&-2&8\end{bmatrix}$

【解析】

矩阵的伴随一般用定义法求，求解中注意两点，一是求解代数余子式时不要忘记符号，二是写伴随矩阵时注意顺序。

$\mathbf{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&-1\\-1&2\end{vmatrix}=8-1=7,\mathbf{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1\\1&2\end{vmatrix}=1$，同理求出

$\mathbf{A}_{13}=-3,\mathbf{A}_{21}=3,\mathbf{A}_{22}=7,\mathbf{A}_{23}=2,\mathbf{A}_{31}=12,\mathbf{A}_{32}=5,\mathbf{A}_{33}=8$

所以$\mathbf{A}^*=\begin{vmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{31}\\\mathbf{A}_{12}&\mathbf{A}_{22}&\mathbf{A}_{32}\\\mathbf{A}_{13}&\mathbf{A}_{23}&\mathbf{A}_{33}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}7&3&12\\1&7&5\\-3&2&8\end{bmatrix}$

故答案选择 C。

【备注】对于选择题，观察选项，特定的值排除，是加快做题速度的好方法，推荐考生在复习中注意积累，选择题中有些是可以运用举例或者特殊点排除很快给出答案的。此题只要抓住第一行第一，二元素口算验证下即可。

$\mathbf{A}_{11}=8-1=7,\mathbf{A}_{12}=(-1)^{1+2}(0-3)=3$选 C

习题 2.12 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为三阶方阵，$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$是其伴随矩阵，已知$\left|\mathbf{A}\right|=2$，$\left|\mathbf{B}\right|=3$，则$\left|(\mathbf{AB})^*\right|=$__________.

【解析】由基本公式$\left|\mathbf{A}^*\right|=\left|\mathbf{A}\right|^{n-1}$

$\left|(\mathbf{AB})^*\right| = |\mathbf{AB}|^{3-1} = (|\mathbf{A}||\mathbf{B}|)^2 = 36$

习题 2. 13 设 $\mathbf{A}$ 为3阶方阵，且 $|\mathbf{A}| = \dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*\right| =$ __________ .

【解析】

由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$

因此 $\left|(3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*\right| = \left|\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{A}^*\right| = \left|\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} - 2|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\right|$

$= \left|-\dfrac{2}{3}\mathbf{A}^{-1}\right| = (-\dfrac{2}{3})^3\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = -\dfrac{16}{27}$

习题 2. 14 设 $\mathbf{A}$ 是四阶矩阵，$|\mathbf{A}| = a \neq 0$，$\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $\left|\left|\mathbf{A}^*\right|\mathbf{A}\right| =$ __________ .

【解析】

由基本公式 $\left|\mathbf{A}^*\right| = |\mathbf{A}|^{n-1}, |k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$

$\left|\left|\mathbf{A}^*\right|\mathbf{A}\right| = \left|\mathbf{A}^*\right|^4|\mathbf{A}| = (|\mathbf{A}|^{4-1})^4|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{13} = a^{13}$

习题 2. 15 设 $\mathbf{A}$ 为 r 阶矩阵，$|\mathbf{A}| = 2$，$\left|2\mathbf{A}^*\right| = 32$，则 $\left|\mathbf{A}^*\right| =$ __________ .

【解析】

由基本公式 $\left|\mathbf{A}^*\right| = |\mathbf{A}|^{n-1}, |k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$

$\left|2\mathbf{A}^*\right| = 2^n\left|\mathbf{A}^*\right| = 2^n|\mathbf{A}|^{n-1} = 2^n \cdot 2^{n-1} = 32$，求解 $n = 3$

所以 $\left|\mathbf{A}^*\right| = |\mathbf{A}|^n\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = 2^{n-1} = 4$

习题 2. 16 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^{-1}$

【解析】

（1） 用分块矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{6}$$

所以，$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$

（2） 由题目对增广矩阵$(\mathbf{A},\mathbf{E})$进行初等行变换得

$$(\mathbf{A},\mathbf{E})=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div 6]{r_2\div 5}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}$$

因此有 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$

习题 2.17 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，则

$\mathbf{A}^{-1}=$ __________

【解析】利用分块矩阵的求逆

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

且对于对角矩阵有

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

所以对于矩阵 $\mathbf{A}$ 有

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

习题 2.18 设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，$\mathbf{A}^*$，$\mathbf{B}^*$ 分别是 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$，则 $\mathbf{C}$ 伴随矩阵 $\mathbf{C}^* =$（　　）

A. $\begin{bmatrix} |\mathbf{A}|\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{B}|\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} |\mathbf{B}|\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}|\mathbf{A}^* \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$

【解析】

由公式 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{C}^* = |\mathbf{C}|\mathbf{C}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$$

因此有 $\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$

所以答案选 D。

习题 2.19 设 $\mathbf{A}$ 为3阶矩阵，将 $\mathbf{A}$ 的第2行加到第1行得 $\mathbf{B}$，再将 $\mathbf{B}$ 的第1列的 -1 倍加到第2列得 $\mathbf{C}$，记 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则（　　）

A. $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$　　B. $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$　　C. $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$　　D. $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$

【解析】

因为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以有，$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此将矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 2 行加到第 1 行，相当于用 $\mathbf{P}$ 左乘 $\mathbf{A}$，即 $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}$

将 $\mathbf{B}$ 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列，相当于用 $\mathbf{P}^{-1}$ 右乘 $\mathbf{B}$,即有 $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$

故有 $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$，所以答案选择 B。

习题 2.20 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵，将 $\mathbf{A}$ 的第二列加到第一列得到矩阵 $\mathbf{B}$，再交换 $\mathbf{B}$ 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A} =$（　　）

A. $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$　　B. $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2$　　C. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$　　D. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}$

【解析】

按题意有 $\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{B} = \mathbf{E}$

$$\mathbf{AP_1}=\mathbf{B},\mathbf{P_2B}=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P_2}(\mathbf{AP_1})=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}$$

因此答案选择 D。

习题 2.21 设 $\mathbf{A}$ 为3阶矩阵，$|\mathbf{A}|=3$，$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\mathbf{A}$ 的第1行与第2行得到矩阵 $\mathbf{B}$，则 $|\mathbf{BA}^*|=$ ________.

【解析】-27

由于交换 $\mathbf{A}$ 的第1行与第2行得到矩阵 $\mathbf{B}$

因此有 $\mathbf{B}=\mathbf{E_{12}A}$

故有 $\mathbf{BA}^*=\mathbf{E_{12}A}\cdot\mathbf{A}^*=\mathbf{E_{12}}|\mathbf{A}|\mathbf{E}=3\mathbf{E_{12}}$

所以 $|\mathbf{BA}^*|=|3\mathbf{E_{12}}|=3^3|\mathbf{E_{12}}|=27\times(-1)=-27$

即答案为-27.

习题 2.22 已知 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\mathbf{PQ}=\mathbf{0}$，则 $t\neq 6$ 时，$R(\mathbf{P})=$ ________.

【解析】

$\mathbf{PQ}=\mathbf{0}$ 可得 $R(\mathbf{P})+R(\mathbf{Q})\leq 3$

$t\neq 6$，则对矩阵 $\mathbf{Q}$ 有 $r(\mathbf{Q})=2$，因此对于推出 $R(\mathbf{P})\leq 1$，

又因为 $\mathbf{P}$ 为三阶非零矩阵，$R(\mathbf{P})\geq 1$

因此 $R(\mathbf{P})=1$

习题 2.23 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix}$，若 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的秩为1，则 $a=$（ ）

A. 1　　B. -1　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. 3

【解析】

由$\mathbf{A}^*$的秩与$\mathbf{A}$的秩的关系可知，当$\mathbf{A}^*$的秩为1时，$\mathbf{A}$的秩为$n-1$

因此有$|\mathbf{A}|=0$

即$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{vmatrix}=(3a+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{vmatrix}=(3a+1)(1-a)^3$

所以

$a=-\frac{1}{3}$或1。显然当$a=1$时$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$此时$\mathbf{A}$的秩为 1

因此$a=-\frac{1}{3}$，答案选 C。

【注】此题做到此处已经结束，但是这里做一点补充，验证$a=-\frac{1}{3}$时，$\mathbf{A}$的秩为 3，首先

$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&1/3&1/3&1/3\\1/3&1&1/3&1/3\\1/3&1/3&1&1/3\\1/3&1/3&1/3&1\end{vmatrix}=0$，所以 A 的秩小于 4，又$\begin{vmatrix}1&1/3&1/3\\1/3&1&1/3\\1/3&1/3&1\end{vmatrix}=\frac{20}{27}\neq 0$，即存在

3 阶子式不为 0，A 的秩大于等于 3

所以 A 的秩为 3.

习题 2.24 设$\mathbf{A}$为$m\times n$型矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$型矩阵，$\mathbf{E}$为m阶单位矩阵，若$\mathbf{AB}=\mathbf{E}$，则（ ）

A. $R(\mathbf{A})=m,R(\mathbf{B})=m$ B. $R(\mathbf{A})=m,R(\mathbf{B})=n$

C. $R(\mathbf{A})=n,R(\mathbf{B})=m$ D. $R(\mathbf{A})=n,R(\mathbf{B})=n$

【解析】

因为 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 是 m 阶单位矩阵，所以有 $r(\mathbf{AB})=m$

由矩阵秩的性质知

$$r(\mathbf{AB})\le\min(r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B}))$$

故有

$$m\le r(\mathbf{A}),\quad m\le r(\mathbf{B})$$

另一方面，由于 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 型矩阵，又有

$$r(\mathbf{A})\le m\ \ r(\mathbf{B})\le m$$

由上二式得 $R(\mathbf{A})=m,R(\mathbf{B})=m$

因此答案选择 A。

第三章 向量习题练习解析

习题 3.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$r$维列向量，下列结论正确的是(　　)

A. 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关

B. 若对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关

C. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

D. 若$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关

习题 3.2 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$r$维列向量，下列结论不正确的是(　　)

A. 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关

B. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为$s$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关

习题 3.3 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分必要条件是（　　）

A. 存在全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$.

B. 存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$.

C. 对于任何一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$.

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量线性无关.

习题 3.4 下列向量组中，线性无关的是(　　)

A. $(1,2,3,4)^T,(2,3,4,5)^T,(0,0,0,0)^T$

B. $(1,2,-1)^T,(3,5,6)^T,(0,7,9)^T,(1,0,2)^T$

C. $(a,1,2,3)^T,(b,1,2,3)^T,(c,3,4,5)^T,(d,0,0,0)^T$

D. $(a,1,b,0,0)^T$，$(c,0,d,6,0)^T$，$(a,0,c,5,6)^T$

习题 3.5 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,t)^T,$$

且 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，则 $t=$________.

习题 3.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^T$，若此向量组的秩为 2，则 $t=$__________.

习题 3.7 设三阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，三维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^T$，已知 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\mathbf{0}$ 线性相关，$a=$_________.

习题 3.8 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a)^T$ 线性相关的充分条件是 $a=$________.

习题 3.9 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-3,-4,-7)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,2,0)^T.$$

的一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

习题 3.10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)^T$，试讨论当 a，b 为何值时，（1）$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一地线性表示；（2）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；（3）$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，但表示式不唯一.

习题 3.11 设矩阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 经行的初等变换变为矩阵 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关．则

A. $\boldsymbol{\beta}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

B. $\boldsymbol{\beta}_4$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，但表示法不唯一.

C. $\boldsymbol{\beta}_4$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，且表示法唯一.

D. $\boldsymbol{\beta}_4$能否由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示不能确定.

习题 3.12 设线性无关的向量组$\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_3$，$\mathbf{Z}_4$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，… ，$\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则必有（　　）

A. $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，… ，$\boldsymbol{\beta}_s$线性相关　　B. $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，… ，$\boldsymbol{\beta}_s$线性无关

C. $s \geq 4$　　D. $s < 4$

习题 3.13 已知向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^T$具有相同的秩，且$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，求$a,b$的值.

习题 3.14 设向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,a-3,1,-2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,8,b-1,3-b)^T$

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=(2,b+5,-2,4)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3,7,a-4,7-a)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2b+4,-1,2)^T$，

（1）问a,b取何值时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$，但（Ⅰ），（Ⅱ）不等价；

（2）问a,b取何值时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$，且（Ⅰ），（Ⅱ）等价.

习题 3.15 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则对于任意常数$k$必有（　　）

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

习题 3.16 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维列向量，记矩阵

$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果$|\mathbf{A}|=1$，那么$|\mathbf{B}|=$__________.

习题参考答案

习题 3.1【答案】B

【解析】：

A. 题中并未强调 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0

B. 正确，即线性无关的定义

C. 正确应为：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

D. 此式无论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性相关，都成立

习题 3.2【答案】B

【解析】：

A. 正确，向量组线性无关的定义

B. 错误，正确阐述：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathrm{s}$

D.选项是说 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量线性无关，那么其逆否命题，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在两个向量线性相关 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，成立，所以此说法也成立。

习题 3.3【答案】C

【解析】：

本题是线性相关与线性无关定义的考察，任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关。

于是可以看出 A. 错误 B. 错误 C. 正确.

D. 可举例说明 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意两个向量线性无关，但是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

习题 3.4【答案】D

【解析】：

A. 向量组中存在$\mathbf{0}$向量时，一定线性相关

B. $n+1$个r维向量一定线性相关

C. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$，所以$(a,1,2,3)^T,(b,1,2,3)^T,(c,3,4,5)^T,(d,0,0,0)^T$线性相关

D. $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} a & c & a \\ 1 & 0 & 0 \\ b & d & c \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，观察得$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$，所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\geq 3$, 同时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leq 3$, 于是$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$, 所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

习题 3.5【答案】$t=7$

【解析】：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow t=7$$

习题 3.6【答案】3

【解析】：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow t=3$$

习题 3.7【答案】$a=-1$

【解析】：

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$线性相关，则$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$对应元素成比例，即$\frac{a}{a}=\frac{2a+3}{1}=\frac{3a+4}{1} \Rightarrow a=-1$

习题 3.8【答案】$a=-1$或$a=2$

【解析】：$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow a=2 \text{ or } a=-1$

习题 3.9【答案】$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为其极大线性无关组，

无多余向量.

【解析】：

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&2\\2&-1&-3&1\\1&-5&-4&2\\3&-6&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&2\\0&-9&-1&-3\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

$\therefore r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为其极大线性无关组，无多余向量.

习题 3.10【答案】（1）当$a\neq-1$，b任意值时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$唯一地线性表示；

（2）当$a=-1$，$b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；

（3）$a=-1$，$b=0$时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，表示式不唯一.

【解析】：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right)$$

（1）当$a\neq-1$，b任意值时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\beta})=4$，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$唯一地线性表示；

（2）当$a=-1$，$b\neq 0$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；

（3）当$a=-1$，$b=0$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\beta})=2<4$，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，且不唯一。

习题 3.11【答案】C

【解析】：

由题意得：两向量组等价且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关可得

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性相关

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为向量组$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$的极大线性无关组

故$\boldsymbol{\beta}_4$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$表出，且表示方法唯一

习题 3.12【答案】C

【解析】：

向量组$\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_3$，$\mathbf{Z}_4$线性无关并且可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，… ，$\boldsymbol{\beta}_s$线性表示

表明向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$的个数不小于向量组$\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_3$，$\mathbf{Z}_4$的个数，即$s\geq 4$。

习题 3.13【答案】$a=15,b=5$

【解析】:

由题意可得：$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a&b\end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&10&20&3b\\0&0&0&5-b\end{array}\right)$$

由$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示可得$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)\quad\Rightarrow b=5$

又因为$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，所以可知$a=3b\quad\Rightarrow a=15$

习题 3.14

【解析】:

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a-3&8\\-1&1&b-1\\2&-2&3-b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&a-1&4\\0&0&b+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\b+5&7&2b+4\\-2&a-4&-1\\4&7-a&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1\\b+1&1&2b+2\\0&1-a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&2&2&3&1\\2&a-3&8&b+5&7&2b+4\\-1&1&b-1&-2&a-4&-1\\2&-2&3-b&4&7-a&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&2&3&1\\0&a-1&4&b+1&1&2b+2\\0&0&b+1&0&a-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两向量组等价，且秩相等，知

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\quad\Rightarrow a=1,b=-1$或$a\neq 1,b\neq -1$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两向量组不等价，但是秩相等，知

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\quad\Rightarrow a\neq 1,b=-1$或$a=1,b\neq -1$

习题 3.15【答案】A
【解析】：

A.和 B.两个选项，研究对象是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$

方法一：（用无关定义）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，

说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则有$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,k_i$不全为 0，$i=1,2,3$

设$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+l(k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0}$

则整理有$(l_1+lkk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2+lkk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(l_3+lkk_3)\boldsymbol{\alpha}_3+l\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，根据前面的结论$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，于是有

$\begin{cases}l_1+lkk_1=0\\l_2+lkk_2=0\\l_3+lkk_3=0\\l=0\end{cases}$，即$\begin{cases}l_1=0\\l_2=0\\l_3=0\\l=0\end{cases}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

方法二：（用分块矩阵）

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则有$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，

设

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)\begin{pmatrix}1&0&0&kk_1\\0&1&0&kk_2\\0&0&1&kk_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

，无论k,k_1,k_2,k_3取何值，$\begin{vmatrix}1&0&0&kk_1\\0&1&0&kk_2\\0&0&1&kk_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$，所以

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

C.和 D.两个选项，研究对象是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$

方法一：（用无关定义）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，

说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则有$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3, k_i$不全为 0，$i=1,2,3$

这里 需要对k的值进行分情况讨论：

(1) $k=0$

研究对象则为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$，由题目中条件$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，可得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关

(2) $k\neq 0$

设$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+l(\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0}$

则整理有$(l_1+lk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2+lk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(l_3+lk_3)\boldsymbol{\alpha}_3+lk\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，根据前面的结论$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，于是有$\begin{cases} l_1+lk_1=0 \\ l_2+lk_2=0 \\ l_3+lk_3=0 \\ lk=0 \end{cases}$，

这里前面已经说明$k\neq 0$，得到$\begin{cases} l_1=0 \\ l_2=0 \\ l_3=0 \\ l=0 \end{cases}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

所以综上分析。当$k=0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，当$k\neq 0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

方法二：（用分块矩阵）

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则有$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，

设

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

对于$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}=k$，

当$k=0$时，行列式的值为 0，所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)<r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关。

当$k\neq 0$时，行列式的值不为 0，所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$是否线性相关取决于$k$的取值，所以 C. D.选项不正确。

习题 3.16【答案】2

【解析】:

由题意易得

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

又由计算可知$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2$且$|\mathbf{A}|=1$，故答案为 2

第四章 线性方程组习题练习解析

习题 4.1 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解的充分条件是（　　）

A. $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关　　B. $\mathbf{A}$ 的列向量线性相关

C. $\mathbf{A}$ 的行向量线性无关　　D. $\mathbf{A}$ 的行向量线性相关

【解析】答案选 A。

$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 可以写成 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$，由于只有零解，所以由线性无关定义得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，即 $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关。

习题 4.2 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件不是（　　）.

A. $R(\mathbf{A})=n$　　B. $\mathbf{A}$ 的列秩为 n

C. $\mathbf{A}$ 的每个行向量都是非零向量　　D. 任意 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时，有 $\mathbf{Ax}\neq\mathbf{0}$

【解析】

选项 A. $R(\mathbf{A})=n$，说明 $|\mathbf{A}|\neq 0$，是 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件

选项 B. $\mathbf{A}$ 的列秩为 n，说明 $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关，$\Leftrightarrow \mathbf{A}x=0$ 只有零解，即 $|\mathbf{A}|\neq 0$，是 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件

选项 C. 并不能保证 $|\mathbf{A}|\neq 0$，所以不是 $\mathbf{A}$ 可逆的充分条件，但是是 $\mathbf{A}$ 可逆的必要条件

选项 D. 实质是 $Ax=0$ 只有零解的逆否命题，所以也满足条件

故选 C

习题 4.3 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\mathbf{A}$，若存在三阶矩阵 $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，则（　　）

A. $\lambda=-2$ 且 $|\mathbf{B}|=0$　　B. $\lambda=-2$ 且 $|\mathbf{B}|\neq 0$

C. $\lambda=1$ 且 $|\mathbf{B}|=0$　　D. $\lambda=1$ 且 $|\mathbf{B}|\neq 0$

【解析】

方法 1：

由题目条件，有$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$得到

$\mathbf{A}x=0$有非零解，故有

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$

所以有$\lambda=1$

因此有$R(\mathbf{A})=1$，而由$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$推出$R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leq 3$

所以得到$R(\mathbf{B})\leq 2$

因此有$|\mathbf{B}|=0$，故答案选 C。

方法 2：

由题目条件，有$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$得到$\begin{cases}R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leq 3\\ R(\mathbf{B})\geq 1\end{cases}$，所以$R(\mathbf{A})\leq 2$

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$$，得$\lambda=1$

当$\lambda=1$时，代回$\mathbf{A}$，得$R(\mathbf{A})=1$，所以$R(\mathbf{B})\leq 2<3$，$|\mathbf{B}|=0$

故答案选 C.

【注】这里$\mathbf{A}$为非零矩阵，所以必定$R(\mathbf{A})\geq 1$，$R(\mathbf{B})\leq 2<3$，即$|\mathbf{B}|=0$

习题 4.4 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，则$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系还可以是（　　）

A. $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4-\boldsymbol{\eta}_1$

B. $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$

C. $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$

D. $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$

【解析】

由题目知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，说明$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解空间秩为 4.

因此只需要从四个选项中选取 4 个$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解，并且保证他们是线性无关的解向量即可

所以先排除 B，因此 B 中有三个向量

而对于 A,C,D 中均为 4 个 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，因此只需要线性无关即可

$$(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4-\boldsymbol{\eta}_1)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

而 $\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

因此 A 选项的秩为 3，故 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4-\boldsymbol{\eta}_1$ 线性相关，不是方程组的基础解系

同理对于 C 选项有 $\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

秩为 3，故 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$ 线性相关，因此不是方程组的基础解系

对于 D 选项有

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

秩为 4，故 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关，为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，故选 D。

习题 4.5 齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+3x_4-x_5=0\\2x_2+x_3+2x_4+x_5=0\\x_4+3x_5=0\end{cases}$ 的基础解系是____________.

【解析】

方程组系数矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&3&-1\\0&2&1&2&1\\0&0&0&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{15}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{5}{2}\\0&0&0&1&3\end{bmatrix}$，$R(\mathbf{A})=3$，所以方程组的解空间秩为$n-R(\mathbf{A})=2$.

观察系数矩阵可以选定x_3,x_5为自由未知量，依次令$x_3=1,x_5=0$和$x_3=0,x_5=1$得方程组基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(\frac{15}{2},\frac{5}{2},0,-3,1)^T$.

习题 4.6 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中$a\neq0$，$b\neq0$，$n\geq2$，试讨论a，b为何值时，方程组仅有零解，有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

【解析】

由题目得方程组对应的系数行列式

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b&\ldots b\\b&a&b&\ldots b\\b&b&a&\ldots b\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\b&b&b&\ldots a\end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

（1） 当$a\neq b$且$a\neq(1-n)b$时，方程组只有零解。

（2） 当$a=b$时，对系数矩阵作初等行变换有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b&b&\ldots b\\b&a&b&\ldots b\\b&b&a&\ldots b\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\b&b&b&\ldots a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\ldots 1\\0&0&0&\ldots 0\\0&0&0&\ldots 0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots 0\end{bmatrix}$$

由于$n-R(\mathbf{A})=n-1$，取自由变量为$x_2,x_3,\ldots,x_n$得到基础解析为：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\ldots,0)^T,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\ldots,1)^T$$

所以方程组的通解为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，其中$k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}$为任意常数

（3） 当$a=(1-n)b$时，对系数矩阵作初等行变换，把r行的-1倍分别加至每一行，有

$$\begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \ldots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \ldots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & (1-n)b & b \\ b & b & b & \ldots & b & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -nb & 0 & 0 & \ldots & 0 & nb \\ 0 & -nb & 0 & \ldots & 0 & nb \\ 0 & 0 & -nb & \ldots & 0 & nb \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -nb & nb \\ b & b & b & \ldots & b & (1-n)b \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ b & b & b & \ldots & b & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于$R(\mathbf{A})=n-1$，因此有$n-R(\mathbf{A})=1$，即基础解系只有 1 个解向量，取自由变量为x,

则基础解系为$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots1)^{\mathrm{T}}$

故通解为$k\boldsymbol{\alpha}$，其中k为任意常数。

习题 4.7 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$$

有解，则常数a_1,a_2,a_3,a_4应满足条件____________

【解析】

线性方程租有解，故有$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})$

而$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{bmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&\sum_{i=1}^{4}a_i\end{bmatrix}$

所以当$\sum_{i=1}^{4}a_i=0$时，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})=3<4$

此时$\mathbf{A}x=\mathbf{b}$有无穷多解

故$a_1+a_2+a_3+a_4=0$

习题 4.8 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2-a\\3-2a&2-a&1\\2-a&2-a&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix}$，若方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解且不唯一，则$a=$__________.

【解析】

对增广矩阵做初等行变换得

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{bmatrix}1&1&2-a&1\\3-2a&2-a&1&a\\2-a&2-a&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2-a&1\\0&a-1&-2a^2+7a-5&3a-3\\0&0&-(a-3)(a-1)&a-3\end{bmatrix}$$

当$a\neq3,a\neq1$时，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})=3$方程组有唯一解;

当$a=1$时，代入矩阵得到$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$，可以看出，$R(\mathbf{A})\neq R(\mathbf{A},\mathbf{b})$，故原方程组无解

当$a=3$时，代入矩阵得到$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&2&-2&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$所以有$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})<3$，原方程组有无穷多解.

所以题目答案为$a=3$

习题 4.9 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\end{bmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）

A. $a\notin\Omega,\alpha\notin\Omega$　　　　B. $a\notin\Omega,\alpha\in\Omega$

C. $a\in\Omega,\alpha\notin\Omega$　　　　D. $a\in\Omega,\alpha\in\Omega$

【解析】

$\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})<n$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&\alpha\\1&4&a^2&\alpha^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&\alpha-1\\0&3&a^2-1&\alpha^2-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&\alpha-1\\0&0&a^2-3a+2&\alpha^2-3\alpha+2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a^2-3a+2=0\\ \alpha^2-3\alpha+2=0\end{cases}\Rightarrow a\in\Omega,d\in\Omega$$

习题 4.10 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相应齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解是

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　　　B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　　　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

【解析】

由解的结构知 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解等于 $\mathbf{Ax}=0$ 的通解加上 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的特解

而对于 A,B,C,D 中只有 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的特解

因此只需考虑 B 与 D 选项即可

对于 B 选项，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系，又

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$，可以看出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系

所以 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

对于 D 选项，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 $\mathbf{Ax}=0$ 的解，但无法确定其线性无关性，因此无法确定

为基础解系。

习题 4.11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的三个解向量，且秩 $R(\mathbf{A})=3$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$，$2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,0)^T$，则方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解是

______________.

【解析】

由题意知 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的未知数的个数为 4，而 $R(\mathbf{A})=3$

所以 $\mathbf{Ax}=0$ 基础解系中线性无关的解向量个数为 $n-R(\mathbf{A})=4-3=1$ 个

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的三个解向量

所以有 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\4\end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系

所以有 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为 $k\begin{bmatrix}1\\3\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$k$为任意常数

习题 4.12 已知向量 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}$，是方程组

$\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3.\end{cases}$ 的三个解.求该方程组的通解.

【解析】

由已知有 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}3\\6\\-3\\9\end{bmatrix}$ 是相应的齐次方程组的两个线性无关的解

所以 $n-R(\mathbf{A})\geq 2$，即 $R(\mathbf{A})\leq 2$

又因为系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & 2 & a_3 & a_4 \\ 4 & b_2 & 3 & b_4 \\ 3 & c_2 & 5 & c_4 \end{bmatrix}$$

有二阶子式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

故系数矩阵的秩≥2

所以系数矩阵的秩为 2，即齐次方程组的基础解系包含 2 个解向量

即 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ 是齐次方程组的基础解系

所以该方程组的通解为 $k_1(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1$， k_1, k_2 为任意常数.

【注】这里通解的形式不唯一，齐次方程的基础解向量只要保证线性无关，而方程组的特解可以是 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 中任意一个.

习题 4.13 k为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多组解？若有解时，求出其全部解.

【解析】

又题目已知条件有线性方程组的增广矩阵为 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

做初等变换 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k+1)(k-4) & k(k-4) \end{bmatrix}$

当 $(k+1)(k-4) \neq 0$，得到 $k \neq 4$， $k \neq -1$ ，此时 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$，方程组有唯一解，方程组的解为

$$x_1 = \frac{2k+k^2}{k+1}, x_1 = \frac{k^2+2k+4}{k+1}, x_3 = \frac{-2k}{k+1}$$

当 $k = 4$ 时， $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 3$ 时，方程组有无穷多解，

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{bmatrix}1 & 1 & k & 4\\ -1 & k & 1 & k^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以方程组的解为$k\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$，$k$为任意常数

当$k=-1$时，$R(\mathbf{A})\neq R(\mathbf{A},\mathbf{b})$时，方程组无解，得$k=-1$

习题 4.14 问a,b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\,,\\ x_2+2x_3+2x_4=1\,,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\,,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\,.\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多组解. 并求出其惟一解和一般解.

【解析】

利用初等行变换，对增广矩阵变化得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$$

（1） 当$a\neq 1$时，秩$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})=4$，原方程组有唯一解

利用克拉默法则求出唯一解为

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1},x_2=\frac{a-2b-3}{a-1},x_1=\frac{b+1}{a-1},x_4=0$$

（2）当$a=1$时，$R(\mathbf{A})=2$

当$b\neq -1$时，$R(\mathbf{A})\neq R(\mathbf{A},\mathbf{b})$原方程组无解

当$b=-1$时，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b})=2<4$，原方程组有无穷多组解，将$a=1$与$b=-1$带入求出通解为：

$$\mathbf{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_2\text{ 为任意常数.}$$

习题 4.15 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$当实数$a$取何值时，$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解.

【解析】

方法一：增广矩阵初等变换，

$$(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a(a+1)\end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，需满足$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})<4$，于是$\begin{cases}1-a^4=0\\-a(a+1)=0\end{cases}$，得$a=-1$

当$a=-1$时，将$(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})$做初等变换得到$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$, $R(\mathbf{A})=3$

齐次方程组的基础解系的秩为

$n-R(\mathbf{A})=4-3=1$

取x_4为自由未知量，得齐次方程组的基础解向量为$[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$[0,-1,0,0]^{\mathrm{T}}$为方程组一个特解，所以原方程组通解为$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T$,$k$为任意常数.

方法2：通过系数矩阵行列式的来讨论

按第一列展开，$|\mathbf{A}|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

(1) 当$|\mathbf{A}|=0$时，方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有可能有无穷多解

由（1）知$a=1$或-1

如果 $a=1$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$R(\mathbf{A})=3, R(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=4 \Rightarrow R(\mathbf{A})<R(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})$ 方程组无解，舍去

（2） 当 $a=-1$ 时

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=3$，方程组有无穷解，取 x_4 为自由变量，得方程组的通解为

$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T$, k为任意常数。

习题 4.16 已知齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ax_1+a^2x_3=0\\ax_2+a^2x_4=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 有公共解，求

a的值及所有公共解.

【解析】联立两个方程组得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ax_1+a^2x_3=0\\ax_2+a^2x_4=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\\1&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&a&0&a^2\\0&0&1&-1\\0&0&0&2a^2-a\end{bmatrix}$$

联立后的方程组要有非零公共解，则 $2a^2-a=0$，得 $a=0$或者$\frac{1}{2}$

当$a=0$时，系数可初等变换为$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

其秩为 2，得解空间的秩为 4-2=2，选定x_2,x_4为自由未知量，则方程组的解向量为$(1,-1,0,0)^T,(1,0,-1,-1)^T$，所以通解为$k_1(1,-1,0,0)^T+k_2(1,0,-1,-1)^T$，其中$k_1,k_2$为任意常数。

当$a=\frac{1}{2}$时，系数可初等变换为$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

其秩为 3，得解空间的秩为 4-3=1，选定x_4为自由未知量，则方程组的解向量为$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1)^T$，所以通解为$k(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1)^T$，其中$k$为任意常数。

习题 4.17 设四元齐次线性方程组

$$（\text{Ⅰ}）\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases},$$

且已知另一四元齐次线性方程组（Ⅱ）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^T，\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^T$$

（1） 求方程组（Ⅰ）的基础解系；（2）当a为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

【解析】

（1） 对方程组（I）的系数矩阵进行初等行变换

有$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$

得到方程组（I）的同解方程租

$$\begin{cases}x_1=5x_3-3x_4\\ x_2=-3x_3+2x_4\end{cases}$$

因此得到方程租（I）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^T$$

（2）由题设条件，方程租（II）的全部解为

$$x = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ (a+2)k_1 + 4k_2 \\ k_1 + (a+8)k_2 \end{bmatrix}$$ （k_1, k_2 为任意常数）

将上式带入方程组（I），得

$$\begin{cases} (a+1)k_1 = 0 \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0 \end{cases}$$

要使方程组（I）与（II）有非零公共解，只需要上述关于 k_1, k_2 的方程组有非零解

所以当 $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = 0$ 时，方程组（I）与（II）有非零公共解

得 $a = -1$.

此时可得方程组（I）与（II）全部非零公共解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$ （k_1, k_2 为不全为零任意常数）

习题 4.18 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 均是 r 阶矩阵，且秩 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$，证明方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 有非零公共解.

【证明】

构造齐次线性方程组

$$\begin{cases} \mathbf{A}x = \mathbf{0} \\ \mathbf{Bx} = \mathbf{0} \end{cases}$$

从而 $R\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \le R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$

所以方程组有非零解，即 $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{B}x = \mathbf{0}$ 有非零公共解。

习题 4.19 已知非齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，其中

（Ⅰ）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 16 \end{cases}$

则 $a =$ __________ .

【解析】

所谓两个方程组（I）与（II）同解，即（I）的解全是（II）的解，（II）的解也全是（I）的解，对（I）求出其通解

$$(3,2,0)^T+k(3,-1,1)^T$$

把 $x_1=3+3k, x_2=2-k, x_3=k$ 代入方程组（II），有

$$\begin{cases} a(3+3k)+4(2-k)+k=11 \\ 2(3+3k)+5(2-k)-ak=16 \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} (k+1)(a-1)=0 \\ k(1-a)=0 \end{cases}$$

因为 k 为任意常数，故 $a=1$，此时方程组（I）的解全是方程组（II）的解

再把 $a=1$ 代入方程组进行验证，当 $a=1$ 时，方程组（II）为

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3=11 \\ 2x_1+5x_2-x_3=16 \end{cases}$$

通过求解，得方程组（II）通解为 $(3,2,0)^T+k(3,-1,1)^T$

所以（I）与（II）必同解。

第五章 特征值与特征向量习题练习解析

习题5.1 设 $\mathbf{A}$ 为2阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的2维列向量，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\mathbf{A}$ 的非0特征值为_________.

习题5.2 矩阵 $\mathbf{A}$ 有零特征值是 $\mathbf{A}$ 不可逆的（　　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

习题5.3 若1是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&1&-2\end{bmatrix}$ 的特征值，则 $a=$__________

习题5.4 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{bmatrix}$ 有一特征值 0，则 $a=$__________，$\mathbf{A}$ 的另一特征值为__________.

习题5.5 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

习题5.6 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值、特征向量：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

习题5.7 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}\mathbf{A}^2)^{-1}$ 有一特征值等于（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

习题5.8　设3阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值是 $-1,1,2$，求行列式 $\left|(\mathbf{A}^T+2\mathbf{E})(\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E})\right|$

习题5.9　设三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $\left|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|$.

习题5.10　设 $\mathbf{A}$ 为三阶方阵，有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\beta},\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\mathbf{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

习题 5.11　设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\mathbf{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是（　　）

A. $\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$　　　B. $\mathbf{P}^{T}\boldsymbol{\alpha}$　　　C. $\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$　　　D．$(\mathbf{P}^{-1})^{T}\boldsymbol{\alpha}$

习题 5.12　已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & a\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$ ________

习题 5.13　与 n 阶单位矩阵 $\mathbf{E}$ 相似的矩阵是（　　）

A.数量矩阵 $k\mathbf{E}(k\neq 1)$　　　B.对角矩阵 $\mathbf{D}$（主对角元素不为 1）

C.单位矩阵 $\mathbf{E}$　　　D.任意 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$

习题 5.14　已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，那么下列阵中

（1）$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，　（2）$\begin{bmatrix}3 & 0\\ -6 & 1\end{bmatrix}$，　（3）$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，　（4）$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

与矩阵 $\mathbf{A}$ 相似的矩阵个数为

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

习题 5.15 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$，但 $\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$，证明 $\mathbf{A}$ 不能相似对角化.

习题 5.16　设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{E}=\mathbf{0}$，证明 $\mathbf{A}$ 相似于一个对角矩阵.

习题 5.17　设三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^T$，试求矩阵 $\mathbf{A}$.

习题 5.18 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵，并求出 $\mathbf{P}$ 和相应的对角矩阵.

习题 5.19　设矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}$，

（1）求 x 和 y 的值，

（2）求可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$.

习题 5.20　已知 $\mathbf{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，特征值是 $1,3,-2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,a)^T$ 分别是属于特征值 $\lambda=1$ 与 $\lambda=3$ 的特征向量，那么矩阵 $\mathbf{A}$ 属于特

征值$\lambda=-2$的特征向量是____________.

习题5.21　设$\mathbf{A}$是3阶实对称矩阵，秩$R(\mathbf{A})=2$，若$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，则$\mathbf{A}$的特征值是____________.

习题5.22 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，已知线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解但不唯一，试求（1）$a$的值；（2）正交矩阵$\mathbf{Q}$，使$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$为对角矩阵.

习题5.23　$\mathbf{A}$为三阶实对称矩阵，$R(\mathbf{A})=2$且$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$.

（1）求$\mathbf{A}$的特征值与特征向量.

（2）求矩阵$\mathbf{A}$.

习题5.24　设3阶对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$是$\mathbf{A}$的属于$\lambda_1$的一个特征向量，记$\mathbf{B}=\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E}$其中$\mathbf{E}$为3阶单位矩阵

（1）验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\mathbf{B}$的特征向量，并求$\mathbf{B}$的全部特征值与特征向量；

（2）求矩阵$\mathbf{B}$.

习题5.25　矩阵$\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$相似的充要条件是（　　）

A. $a=0,b=2$　　　　B. $a=0$，b任意常数

C. $a=2,b=0$　　　　D. $b=0$，a任意实数

习题5.26　证明：n阶矩阵$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{bmatrix}$相似.

习题参考答案

习题 5.1【答案】1

【解析】

由题意：$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0$，两边同时乘以矩阵 $\mathbf{A}$ 易得 $\mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2==2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2$。

将 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2$ 看成一整体，那么可以得到 $\mathbf{A}$ 的非零特征值为1

习题 5.2【答案】C

【解析】

由于$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，故若 $\mathbf{A}$ 有 0 特征值，则$|\mathbf{A}|=0$，可知 $\mathbf{A}$ 不可逆，

反之，若 $\mathbf{A}$ 不可逆，则$|\mathbf{A}|=0$， $\mathbf{A}$ 必定有零特征值。

习题 5.3【答案】$a=-4$

【解析】

因为 1 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，所以$|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，

$$|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -5 & 1-a & -3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -5 & 1-a & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a+4=0$$

所以$a=-4$

习题 5.4【答案】$a=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

【解析】

因$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，故若 A 有 0 特征值，则$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix}=0$，解得$a=1$

则$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$

解得 $\mathbf{A}$ 的另一个特征值为 2.

习题 5.5【答案】$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$；对应的特征向量为$(-1,-1,1)^T$.

【解析】

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0 \qquad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$$

代入可得

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

易得特征向量为：

$$x=(-1,-1,1)^T$$

习题 5.6【答案】特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2$；$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(1,0,0,1)^T$，$\lambda_4=-2$ 的特征向量为 $(1,-1,-1,-1)^T$.

【解析】

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&2-\lambda&0\\0&0&\lambda-2&2-\lambda\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^3(\lambda+2)=0$$

得到特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$\lambda\mathbf{E}\text{-}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

求解出特征向量为 $(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(1,0,0,1)^T$

当 $\lambda_4=-2$ 时，$\lambda\mathbf{E}\text{-}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&-1&-1&-1\\-1&-3&1&1\\-1&1&-3&1\\-1&1&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

求解出特征向量为 $(1,-1,-1,-1)^T$

习题 5.7【答案】B

【解析】

$\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}$ 是 $\mathbf{A}$ 的多项式的逆，其特征值为 $\frac{3}{\lambda^2}$ 代入 $\lambda=2$，得到答案 $\frac{3}{4}$

答案选（B）

习题 5.8【答案】90

【解析】

$$\left|(\mathbf{A}^T+2\mathbf{E})(\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E})\right|=\left|\mathbf{A}^T+2\mathbf{E}\right|\left|\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E}\right|$$

由 $\mathbf{A}$ 的特征值为-1，1，2，故 $\mathbf{A}^T+2\mathbf{E}$ 的特征值为 1，3，4

$\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E}$ 的特征值为 1，3，$\frac{5}{2}$，所以 $\left|(\mathbf{A}^T+2\mathbf{E})\right|=12$，$\left|(\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E})\right|=\frac{15}{2}$

$\left|(\mathbf{A}^T+2\mathbf{E})(\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{E})\right|=90$

习题 5.9【答案】$\left|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|=9$

【解析】

$\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}-2\mathbf{E}$ 的特征值为 $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}+3\lambda-2$，所以代入 λ 的值得到其特征值为-1，-3，3

所以 $\left|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|=9$

习题 5.10【答案】利用特征值与特征向量的定义与性质，及向量的线性表示，即可完成证明

【解析】

证明：因为 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$

所以 $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$

$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\beta}=A(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3$

设存在 3 个常数 k_1，k_2，k_3 使 $k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\beta}=0$

即 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3)=0$

整理得 $(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=0$

由于不同特征值的特征向量线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ $\boldsymbol{\alpha}_2$ $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$$

因此方程组仅有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$，命题得证

习题 5.11【答案】B.

【解析】

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，故有 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，假设 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{\mathrm{T}}$ 属于 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}$，则 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$，于是 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$，$\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}=\lambda(\mathbf{P}^T)^{-1}\boldsymbol{\beta}=\lambda(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}$，而 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，也就有 $\mathbf{A}(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}=\lambda(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}$，把 $(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\beta}$ 整体看成 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha}$

故应该选 B

习题 5.12【答案】$a=-1$

【解析】

当矩阵 $\mathbf{A}$ 有两个不同的特征值，则对应的特征向量必定线性无关，因此，题设条件中给定矩阵 $\mathbf{A}$ 只有一个线性无关的特征向量时，$\mathbf{A}$ 的特征值必是二重根

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -a\\ -1 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+15-a=(\lambda-4)^2 \quad 故\ a=-1$$

习题 5.13【答案】C

【解析】

相似必有相同的特征值，只能选 C

习题 5.14【答案】C.

【解析】

$\mathbf{A}$ 矩阵可以相似对角化，特征值为 1,3，只需从 4 个选项中寻找可以相似对角化的，且特征值为 1,3 的矩阵即可

（1）特征值为 1,3，可以相似对角化，所以与 $\mathbf{A}$ 相似

（2）特征值为 1,3，可以相似对角化，所以与 $\mathbf{A}$ 相似

（3）特征值为-1,5，不符合

（4）特征值为 1,3，可以相似对角化，所以与 $\mathbf{A}$ 相似

故（1）（2）（4）满足题目要求。

习题 5.15【答案】利用特征值的性质及 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，λ_0 为 $\mathbf{A}$ 的 k 重特征值，则有 $R(\lambda_0\mathbf{E}-\mathbf{A})=n-k$，可完成证明.

【解析】

证明：设 λ 是 $\mathbf{A}$ 的任意一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量，即 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，那么 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\lambda^3\boldsymbol{\alpha}$，又因为 $\mathbf{A}^3=0$，所以 $\lambda^3=0$ 可知 $\lambda=0$，即矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda=0$（n 个）

对于齐次线性方程组 $(0\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，由于

$R(0\mathbf{E}-\mathbf{A})=R(\mathbf{A})\geq 1$

那么 $n-R(0\mathbf{E}-\mathbf{A})\leq n-1$，所以 $\lambda=0$ 没有 n 个线性无关的特征向量

习题 5.16

【解析】

同上一题，利用特征值的性质与 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，λ_0 为 $\mathbf{A}$ 的 k 重特征值，则有 $R(\lambda_0\mathbf{E}-\mathbf{A})=n-k$，及矩阵秩的性质，可完成证明.但是也有区别，具体如下：

由 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{E}=0$ 有 $(2\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$，于是得到 $\mathbf{A}$ 的特征值为 2 或者 1

当 $\lambda=2$ 时，所对应的特征向量即为 $(2\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$ 的解向量，根据方程组秩的性质得线性无关的特征向量个数为 $n-R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})$

同理当 $\lambda=1$ 时，所对应的线性无关特征向量的个数为 $n-R(\mathbf{E}-\mathbf{A})$

而不同特征值对应的特征向量线性无关，于是 $\mathbf{A}$ 的全部线性无关的特征向量个数为 $n-R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+n-R(\mathbf{E}-\mathbf{A})=2n-[R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})]$

对于 $(2\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$，可以得到 $R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})\leq n$，

所以 $2n-[R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})]\geq n$

与此同时， $2n-[R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})]\leq n$

所以 $2n-[R(2\mathbf{E}-\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})]=n$，即 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量所以可以相似对角化。

习题 5.17【答案】$\mathbf{A}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & 0 & -2\\ 0 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}$

【解析】

由 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 不同特征值对应的特征向量，它们线性无关，利用分块矩阵，有 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3)$，因为矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，故

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

习题 5.18【答案】当 $k=0$ 时，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 为对角矩阵.

【解析】

（1）因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$

（2）当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，解线性方程组 $(-E-A)x=0$，有

$$-E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{bmatrix}$$

要使矩阵 A 相似于对角阵，则对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，必须要有两个线性无关的特征向量，所以

$r(-E-A)=3-2=1$，从而有 k=0，于是当 k=0时，有

$$-E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$，则对应的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=(-1,2,0)^T,\quad \xi_2=(1,0,2)^T$$

对于 $\lambda_3=1$，线性方程组 $(E-A)x=0$，有

$$E-A=\begin{bmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

对应的特征向量为

$$\xi_3=(1,0,1)^T$$

当k=0时，存在可逆矩阵

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

习题 5.19【答案】（1）$x=0$，$y=-2$；（2）$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

【解析】

（1）因为$\mathbf{A}$和对角阵$\mathbf{B}$相似，所以-1, 2，y 就是矩阵$\mathbf{A}$的特征值

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-x & -2\\ -3 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]$

知$\lambda=-2$是$\mathbf{A}$的特征值，因此必有$y=-2$

再由$\lambda=2$是$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$，知$(-1)+2+(-2)=x+1+(-2)$，得$x$=0

（2）由$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

对λ=−1，由$(-\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-2,1)^T$

对$\lambda=2$，由$(2\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$

对$\lambda=-2$，由$(-2\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^T$

那么，令$\mathbf{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$，有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

习题 5.20【答案】$(0,1,1)^T$.

【解析】

因为A为实对称阵，不同特征值的特征向量相互正交，设$\lambda=-2$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^T$那么

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 4-2-2a = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = x_1+2x_2-2x_3 = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 4x_1-x_2+ax_3 = 0 \end{cases}$$

可以先求出 a，再由

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}，得 \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^T$$

习题 5.21【答案】1,1,0.

【解析】

A 为三阶实对称阵，故 A 可相似对角化，所以 A 的秩等于其非零特征值的个数，由 $A^2=A$ 得到 A 的特征值为：1, 0，又因为 $r(A)=2$，故 A 的特征值为 1, 1, 0

习题 5.22【答案】（1）$a=-2$；（2）$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

【解析】

对方程且 $\mathbf{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵作初等行变换，有

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a-2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array}\right]$$

因为方程组有无穷多解，所以 $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})<3$，故 $a=-2$

$$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$

故 $\mathbf{A}$ 的特征值为：$\lambda_1=3$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=3$ 时，由 $(3\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 算得 λ_1 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^T$

当 $\lambda_2=0$ 时，由 $(0\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 算得 λ_2 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^T$

当 $\lambda_3=-3$ 时，$(-3\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，$\begin{bmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 算得 λ_3 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^T$

实对称矩阵的特征值不同时，其特征向量已经正交化，故只需单位化。

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

那么令 $\mathbf{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，得 $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&-3\end{bmatrix}$

习题 5.23【答案】（1）-1 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $(1,0,-1)^T$，1 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $(1,0,1)^T$，0 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $(0,1,0)^T$；（2）
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

【解析】

（1）由题设可知

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以由特征值与特征向量的定义知：$\lambda_1=1$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，其特征向量为 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，

$\lambda_2=-1$ 是 $\mathbf{A}$ 的又一个特征值，其特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^T$，又 $R(\mathbf{A})=2$，所以 $\mathbf{A}$ 的另外一个特征值为 $\lambda_3=0$，设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^T$，故 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=0$，依次对应的特征向量为：$(1,0,1)^T$，$(1,0,-1)^T$，$(0,1,0)^T$

（2）由 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{0})$ 有

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{0})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

习题 5.24【答案】（1）$\mathbf{B}$ 的特征值为 $-2,1,1$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$ 是特征值 $\mu=1$

对应的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T$ 是特征值 $\mu=-2$ 对应的特征向量；（2）$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$.

【解析】

（1）由 $\mathbf{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，知 $\mathbf{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$，那么

$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量

类似的，若 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda\boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda\boldsymbol{\alpha}_3$，有 $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_2=(\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_3=(\lambda_3^5-4\lambda_3^3+1)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$

因此，矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $\mu_1=-2$，$\mu_2=\mu_3=1$。

由矩阵 $\mathbf{A}$ 是对称阵，得矩阵 $\mathbf{B}$ 也是对称阵，设矩阵 $\mathbf{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^T$，那么因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，有

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1-x_2+x_3=0$$

所以矩阵 $\mathbf{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的线性无关的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^T$

因而，矩阵 $\mathbf{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量是 $(1,-1,1)^T$，

矩阵 $\mathbf{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $(1,1,0)^T,(-1,0,1)^T$

（2）由 $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$，$\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 有 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，那么

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

习题 5.25【答案】B

【解析】

这里 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是实对称矩阵，所以两个矩阵相似的充要条件是有相同的特征值，由 $\mathbf{B}$ 为对角矩阵，知 $\mathbf{B}$ 的特征值就是主对角线元素，即特征值为 2，b，0，

于是只需要 $\mathbf{A}$ 的特征值也是 2，b，0，则 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 一定相似.

$$\begin{aligned}|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&0&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&0&0\\-a&\lambda-b&-2a\\-1&-a&\lambda-2\end{vmatrix}\\&=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]\end{aligned}$$

从上式可以看出，只要 $2a^2=0$，即 a=0时，$\mathbf{A}$ 的特征值就一定为 0，2，b.

所以选 B

习题 5.26【答案】利用 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的特征值相同，且 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均可相似对角化，则 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相似，即可完成证明.

【解析】

证明：记$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{bmatrix}$

因$\mathbf{A}$是实对称阵必与对角阵相似

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=0$，知$A$的特征值为$n$，0，0，（n-1 个）

故
$$\mathbf{A}\sim\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}$$

又因$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=0$，知$B$的特征值为$n$，0，0，（n-1 个）

当$\lambda=0$时，$R(0\mathbf{E}-\mathbf{B})=R(\mathbf{B})=1$，那么$n-R(0\mathbf{E}-\mathbf{B})=n-1$即齐次方程组$(0\mathbf{E}-\mathbf{B})x=0$有 n-1 个线性无关的解，即$\lambda=0$时，矩阵$\mathbf{B}$有 n-1 个线性无关的特征向量，从而矩阵$\mathbf{B}$必与对角阵相似，即

$$\mathbf{B}\sim\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}$$

从而$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相似。

【注】如果 n 阶矩阵$\mathbf{A}$的秩$R(\mathbf{A})=1$，则$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$.

第六章 二次型习题练习解析

习题 6.1【答案】 $f=\left[x_1,x_2,x_3\right]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

习题 6.2【答案】 2

【解析】二次型的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

可求得 $r(A)=2$，所以二次型的秩为 2

习题 6.3【答案】 $c = 3$

【解析】二次型的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{bmatrix}$$

由于 $R(\mathbf{A})=2$，经初等变换可得 c=3

习题 6.4【答案】 $3y_1^2$.

【解析】

由于 A 的各行元素之和为 3，即

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以 λ=3是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，再由二次型 $x^T\mathbf{A}x$ 的秩为 1，可知 $R(\mathbf{A})=1$，故 $\lambda=0$ 是 $\mathbf{A}$ 的二重特征值，因此，正交变换下的标准型为 $3y_1^2$

习题 6.5【答案】 $a=b=0$

【解析】

由题意，二次型矩阵为$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$，其特征值为0，1，2

所以$\begin{cases}|\mathbf{A}|=0\\ |\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0\end{cases}$

由$|\mathbf{A}|=0$，即$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{vmatrix}=0$得$a=b$

由$|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，即$\begin{vmatrix}0 & -a & -1\\ -a & 0 & -b\\ -1 & -b & 0\end{vmatrix}=0$得$ab=0$

解得$a=b=0$.

最后验证当$a=b=0$时，2 也是$\mathbf{A}$的特征值，代入得$|2\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$，

所以$a=b=0$即为所求.

习题 6.6【答案】$c=2$；正交矩阵$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，标准形为

$f(x_1,x_2,x_3)=6y_1^2+6y_2^2$；

【解析】

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & c\end{bmatrix}$$

$$R(\mathbf{A})=2 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|=24(c-2)=0 \Rightarrow c=2$$

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-5 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)^2$，可求得$A$矩阵的特征值$\lambda=6$的特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^T$，$\lambda=0$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,2)^T$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ $\boldsymbol{\alpha}_2$ $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交单位化，

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$，单位化 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T$

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$，单位化 $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})^T$

$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,2)^T$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，故只需要单位化 $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}})^T$

故有 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}$ 其中 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

习题 6.7**【答案】**（1）$a=1,b=2$；（2）$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，在正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 下，有 $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$，且二次型的标准形为

$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$

【解析】

（1）二次型 f 的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}$$

设矩阵 $\mathbf{A}$ A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，由题设，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12\text{，解得 }a=1,b=2$$

（2）由矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得 $\mathbf{A}$ A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,1)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^T$$

对于 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组 $(-3\mathbf{E}-\mathbf{A})x=0$，得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-2)^T$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 两两正交，只需单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\0\\-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

可得 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，在正交变换下 $x=\mathbf{Q}y$ 下，有

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

故二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3_3^2$

习题 6.8【答案】(1)利用矩阵相乘及二次型的定义确定对应矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$；(2)只须利用特征值的定义证明 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 的特征值分别为 $2,1,0$ 即可.

【解析】

(1)记 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&=2x^T(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)x+x^T(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)x\\&=x^T(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)x\end{aligned}$$

又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)^T=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T+(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)^T=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 所以二次型 f 对应的矩阵 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$

（2）记 $\mathbf{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$，若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，所以

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}，\quad \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$$

于是 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，又

$$R(\mathbf{A})=R(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\le R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)+R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\le 2$$

所以 $\lambda_3=0$ 是 $\mathbf{A}$ 的另一特征值，故在 f 的正交变换下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2$

习题 6.9【答案】D

【解析】由规范形的定义不难得出 D 为正确选项

习题 6.10【答案】 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2-y_5^2$

【解析】

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2-y_5^2+0y_6^2$$

习题 6.11【答案】 $2,0$

【解析】

$$f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

方法一：特征值法

二次型的矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$， $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2=0$

得 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$

方法二：配方法

$$\begin{aligned}f&=2x_1^2+2(x_2+x_3)x_1+\frac{(x_2+x_3)^2}{2}-\frac{(x_2+x_3)^2}{2}+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3\\&=2(x_1+\frac{x_2+x_3}{2})^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3\\&=2(x_1+\frac{x_2+x_3}{2})^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2\end{aligned}$$

所以二次型的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0.

【注】此题用特征值法求解相对简单，但是也不要忘记利用配方法求解二次型的标准型.

习题 6.12【答案】 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

【解析】

矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 合同，说明二次型 $x^T\mathbf{A}x$ 与 $x^T\mathbf{B}x$ 有相同的正惯性指数，及相同的

负惯性指数由矩阵 B 的特征多项式

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-1)=0$$

得到矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值为 1,2，-1，于是 $x^T\mathbf{B}x$ 的正惯性指数为 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，从而二次型 $x^T\mathbf{A}x$ 的规范形应当是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

习题 6.13【答案】D.

【解析】

矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 合同 $\Leftrightarrow x^T\mathbf{A}x$ 与 $x^T\mathbf{B}x$ 有相同的正惯性指数，及相同的负惯性指数，而正负惯性指数又可以由特征值的正负来决定，因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0，故 p=1,q=1$$

本题 D 选项中 $\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$，故 $p=1,q=1$，所以选（D）

习题 6.14【答案】B

【解析】

二次型矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，计算 $\mathbf{A}$ 的特征值

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & 0\\ -3 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

解得其特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=4$，实对称矩阵相似的充要条件为其特征值相同，故选 B

习题 6.15【答案】利用正定的定义证明矩阵正定.

【解析】

$\mathbf{A}$ 为正定矩阵，得 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\mathbf{A}^*$ 也为是对称矩阵，又由 $\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵可得 $\mathbf{A}$ 的特征值均大于 0，而 $\mathbf{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 也均大于 0，故由正定的定义可知，$\mathbf{A}^*$ 也为正定矩阵

习题 6.16【答案】$t>2$

【解析】

二次型的矩阵为$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{bmatrix}$，由于$\mathbf{A}$正定，所以其顺序主子式均大于 0

所以 $\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}>0\Rightarrow t>2$

习题 6.17【答案】利用正定的定义证明矩阵正定.

【解析】

必要性：　由$\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$正定，则对于$\forall\mathbf{x}\neq 0$，有$\mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{ABx}>0$，即$\left(\mathbf{Bx}\right)^T\mathbf{A}\left(\mathbf{Bx}\right)>0$，而从题目中可知$\mathbf{A}$正定，所以在$\mathbf{x}\neq 0$时，$\mathbf{Bx}\neq 0$，也就是说$\mathbf{Bx}=0$只有零解，所以

$R\left(\mathbf{B}\right)=n$

充分性：先说明$\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$为实对称矩阵，$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{AB}\right)^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B}=\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$.

由$R\left(\mathbf{B}\right)=n$得当$\mathbf{x}\neq 0$时，$\mathbf{Bx}\neq 0$，且$\mathbf{A}$为正定矩阵，所以对于$\forall\mathbf{x}\neq 0$，

$\left(\mathbf{Bx}\right)^T\mathbf{A}\left(\mathbf{Bx}\right)>0$　即$\mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{ABx}>0$，所以$\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$为正定矩阵.

得证

习题 6.18【答案】A

【解析】

$\mathbf{A},\mathbf{B}$是 n 阶正定矩阵，所以$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$也是正定矩阵，所以$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$的特征值一定为正，故$\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$为正定矩阵，其他选项均无法保证其特征值均为正，故选 A

习题 6.19【答案】（1）　$\mathbf{P}^T\mathbf{DP}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}-\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}$,（2）$\mathbf{B}-\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$是正定矩阵

【解析】

（1）因为$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{E_m} & \mathbf{-A^{-1}C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E_n}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{E_m} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-C^TA^{-1}} & \mathbf{E_n}\end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{P^TDP}&=\begin{bmatrix}\mathbf{E_m} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-C^TA^{-1}} & \mathbf{E_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{C^T} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E_m} & \mathbf{-A^{-1}C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E_n}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B-C^TA^{-1}C}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

（2）因为$\mathbf{D}$是对称矩阵，知$\mathbf{P^TDP}$是对称矩阵，所以$\mathbf{B-C^TA^{-1}C}$是对称矩阵，又因为矩阵$\mathbf{D}$与$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B-C^TA^{-1}C}\end{bmatrix}$合同，且$\mathbf{D}$正定，知矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B-C^TA^{-1}C}\end{bmatrix}$正定，那么对

任意的向量$\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}\neq 0$，恒有$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}=\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{Y}>0$

所以矩阵$\mathbf{B}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$正定

习题 6.20【答案】（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$；（2）利用特征值均为正证明矩阵正定即可.

【解析】

（1）二次型$x^T\mathbf{A}x$在正交变换$x=\mathbf{Q}y$下的标准型为$y_1^2+y_2^2$，说明二次型矩阵$\mathbf{A}$的特征值为 1，1，0，又因为$\mathbf{Q}$的第 3 列是$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，说明$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$是矩阵$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda=0$的特征向量，因为$\mathbf{A}$是实对称阵，特征值不同的特征向量相互正交，设$\mathbf{A}$关于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即$x_1+x_3=0$

取$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^T$，那么$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量

由$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{0})$有

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{0})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

（2）首先$\mathbf{A}+\mathbf{E}$是实对称矩阵，再由于$\mathbf{A}$的特征值为 1，1，0，那么$\mathbf{A}+\mathbf{E}$的特征值为 2，2，1，均大于 0，所以$\mathbf{A}+\mathbf{E}$正定

习题 6.21【答案】$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{bmatrix}$，当$k\neq -2$且$k\neq 0$时，$\mathbf{B}$为正定矩阵.

【解析】

因$\mathbf{A}$为实对称矩阵，$\mathbf{B}=(k\mathbf{E}+\mathbf{A})^2$为实对称矩阵，所以$\mathbf{B}$一定可以相似对角化，只需求出$\mathbf{B}$的特征值即可

因$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，得$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$得$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda=2,\lambda=2,\lambda=0$

所以$\mathbf{B}$的特征值为：$(k+2)^2,(k+2)^2,k^2$

故 $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}(k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2\end{bmatrix}$，所以 $k\neq 0, k\neq -2$ 时，$\mathbf{B}$ 的特征值均为正，$\mathbf{B}$ 正定