例 1.17 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}.$$

（1）求第 4 行各元素余子式之和；（2）求第 4 行各元素代数余子式之和.

解: $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

$=(-1)A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=-7\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=7\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=7\cdot4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}$

$=-28.$

解: $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

$=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

设行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&5&6&7\\1&1&2&2\end{vmatrix}=-6$，求$A_{41}+A_{42}$与$A_{43}+A_{44}$.

解: $D=A_{41}+A_{42}+2A_{43}+A_{44}=-6$

$3A_{41}+3A_{42}+4A_{43}+4A_{44}$

$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&5&6&7\\3&3&4&4\end{vmatrix}=0.$

$\therefore$ 令 $A_{41}+A_{42}=x$, $A_{43}+A_{44}=y$

$\begin{cases}x+2y=-6\\3x+4y=0\end{cases}$ $\therefore$ $x=12$, $y=-9$

例 1.22 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵，证明 $|\mathbf{A}|=(n+1)a^n$.

证：$A_n = 2a \cdot \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \cdots & \\ & \cdots & & 2a & 1 \\ & \cdots & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & \cdots & & \\ & 2a & 1 & \cdots & \\ & a^2 & 2a & \cdots & \\ & \cdots & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)}$

$= 2a(A_{n-1}) - a^2 (A_{n-2})$

(1) $A_1 = 2a$ $\quad A_2 = 3a^2$

(2) 假设：$A_n = (n+1)a^n$

$A_{n-1} = n \cdot a^{n-1}$

(3) $\because A_{n+1} = 2a \cdot A_n + a^2 A_{n-1}$

$= 2(n+1) \cdot a^{n+1} - n a^{n+1}$

$= (n+2) \cdot a^{n+1}$ 符合预期.

$\therefore$ 证毕.

例 1.26 设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} 2ax_1 + x_2 = 1 \\ a^2x_1 + 2ax_2 + x_3 = 0 \\ a^2x_2 + 2ax_3 + x_4 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^2x_{n-2} + 2ax_{n-1} + x_n = 0 \\ a^2x_{n-1} + 2ax_n = 0 \end{cases}$$

问当a为何值时，该方程组有惟一解，并求 x_1．

解：
$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & \cdots & & \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & & 2a & 1 \\ \cdots & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)\cdot a^n$$

若方程有唯一解则 $a \neq 0$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \\ a^2 & 2a & \cdots & & \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & 2a & 1 \\ \cdots & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & \cdots & \\ a^2 & 2a & \cdots & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = n\cdot a^{n-1}$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{n\cdot a^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$，$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，则$\mathbf{A}^n=$ ________.

解：$A^n=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T\cdots\alpha\cdot\beta^T$

$=\alpha\cdot(\beta^T\cdot\alpha)^{n-1}\cdot\beta^T$

$\beta^T\cdot\alpha=(1,\frac{1}{2},0)\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2$

$\therefore A^n=2^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=2^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

例 2.11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均为四维列向量，$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)$，$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$，且$|\mathbf{A}|=1$，$|\mathbf{B}|=2$，则$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=$（　　）

解：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_1,\ \alpha_3+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2|$

$$=|\alpha_1,\ \alpha_2+\cancel{\alpha_1},\ \alpha_3+\cancel{\alpha_2},\ \beta_1+\beta_2|+|\alpha_3,\ \cancel{\alpha_2}+\alpha_1,\ \cancel{\alpha_3}+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2|$$

$$=2|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1+\beta_2|$$

$$=2\left(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\beta_2|\right)$$

$$=2(|A|+|B|)=6$$

例 2.16 已知 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}-\mathbf{AB}$ 都是可逆矩阵，证明 $\mathbf{E}-\mathbf{BA}$ 可逆.

证：
$$E-BA=(A^{-1}-B)\cdot A$$
$$=A^{-1}(A\cdot A^{-1}-AB)\cdot A$$
$$=A^{-1}(E-AB)\cdot A.$$
$$\therefore |E-BA|=|A^{-1}|\cdot|E-AB|\cdot|A|\neq 0.$$
∴ 可逆

例 2.19 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$，$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&0&1\end{bmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{X}$，使 $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$

解：$AXB=C$

$\therefore X=A^{-1}C\cdot B^{-1}$

$|A|=6-5=1$

$|B|=\begin{vmatrix}-1&0&2\\2&2&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2\times2}\begin{vmatrix}-1&2\\-1&1\end{vmatrix}=2$

$\therefore A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\begin{vmatrix}3&-1\\-5&2\end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-5&-6&-3&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow---$

$B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$

$\therefore X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$=\begin{vmatrix}3&-1\\-5&2\end{vmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&6&8\\1&-10&-13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&-10&7\\3&20&-14\end{bmatrix}$

例 2.21 已知 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 为三阶方阵，且满足 $2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{E}$，其中 $\mathbf{E}$ 为三阶单位矩阵

（1）求 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$

（2）若 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{A}$.

解：(1) $2\cdot B=AB-4A$

$4A=(A-2E)\cdot B.$

$(A-2E)\cdot\frac{1}{4}BA^{-1}=E$

$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{4}BA^{-1}$

$2B=A(B-4E)$

$2B-2(B-4E)=A(B-4E)-2(B-4E)$

$8E=(A-2E)(B-4E)$

$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E).$

(2) $2B=AB-4A$

$\therefore A=2B\cdot(B-4E)^{-1}$

$$(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}-4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}-4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\therefore A=2\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 8 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

例 2.22 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异 $(n\geq 2)$，$\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则（　　）

A. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{A}$　　　　B. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n+1}\mathbf{A}$

C. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$　　　　D. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n+2}\mathbf{A}$

例 2.23 设 $\mathbf{A}$ 是任一 $n(n\geq 3)$ 阶方阵，$\mathbf{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(k\mathbf{A})^*$ 等于（　　）

A. $k\mathbf{A}^*$　　B. $k^{n-1}\mathbf{A}^*$　　C. $k^n\mathbf{A}^*$　　D. $k^{-1}\mathbf{A}^*$

解：(1) $(A^*)^* = (|A|\cdot A^{-1})^*$

$$= \left||A|\cdot A^{-1}\right|\cdot(|A|\cdot A^{-1})^{-1}$$

$$= |A|^n\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A$$

$$= |A|^{(n-2)}\cdot A$$

(2) $(kA)^* = |kA|\cdot(kA)^{-1}$

$$= k^n\cdot|A|\cdot\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$$

$$= k^{n-1}A^*$$

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}^n=$ ______.

解：$A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&E\end{bmatrix}$，$A_1=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$

$\therefore A^n=\begin{bmatrix}A_1^n&0\\0&E\end{bmatrix}$

$\because A_1=3E+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$\therefore A_1^n=C_n^0(3E)^n+C_n^1(3E)^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\underbrace{C_n^2(3E)^{n-2}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2}_{}$ $\overset{0}{\shortparallel}$

$=3^nE+n\cdot3^{n-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}$

$\therefore A^n=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$