算法设计与分析

作业（二）

姓　　名	熊恪峥
学　　号	22920202204622
日　　期	2022年2月28日
学　　院	信息学院
课程名称	算法设计与分析

作业（二）

目录

1 题2.2

由max的定义

$$f(x) \le \max(f(x), g(x))$$
$$g(x) \le \max(f(x), g(x))$$

则

$$f(x) + g(x) \le 2\max(f(x), g(x))$$

则有

$$\max(f(x), g(x)) \ge \frac{f(x) + g(x)}{2}$$

即

$$\max(f(x), g(x)) = \Omega(f(x), g(x)) \tag{1}$$

由非负性

$$\max(f(x), g(x)) \le f(x) + g(x)$$

即

$$\max(f(x), g(x)) = O(f(x) + g(x)) \tag{2}$$

由(1)和(1)可得

$$\max(f(x), g(x)) = \Theta(f(x) + g(x))$$

2 题2.9

必要性： 由$f(n) = \Theta(g(n))$得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k, 0 < k < \infty$$

则由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ne 0$$

得$f(n) = \Omega(g(n))$，由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ne \infty$$

得$f(n)=O(g(n))$

充分性： 由$f(n)=O(g(n))$且$f(n)=\Omega(g(n))$得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\neq\infty$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\neq 0$$

则$\exists k>0$且$k<\infty$使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=k$$

则$f(n)=\Theta(g(n))$

3 题3.1

正好雇佣一次，则第一位面试的必须是最好的面试者。则

$$P(\text{排在第1位的面试者是最好的面试者})=\frac{1}{n}$$

正好雇佣两次，则已知排在第一位的人一定会被雇佣，最好的面试者一定会被雇佣。因此，第一位不能是最好的的面试者，否则只能被雇佣一次。则设事件

$$E_i:\text{第一个来面试的人的排名是}i$$

其中i满足

$$i\leq n-1$$

则

$$P(E_i)=\frac{1}{n}$$

若第一个人的排名是i，只雇佣两个人要求第$2,3\dots,j-1$个面试者排名都不如第一个面试者，即最好的人必须在排名是$i+1,i+2\dots n-1,n$的人中第一个面试。设最好的人面试的次序是j，则事件

$$F:\text{第}2,3\dots,j-1\text{个面试者排名都不如第一个面试者}$$

则

$$\overbrace{i+1,i+2,\dots,n-1,n}^{\text{共}n-i\text{个人}}$$
$$\Rightarrow P(F|E_i)=\frac{1}{n-i}$$

注意到$E_1, \ldots, E_{n-1}$是独立事件，则由全概率公式

$$\begin{aligned} P(\text{恰好有两个人被雇佣}) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(F|E_i) \times P(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \\ &= O(\frac{\log n}{n}) \end{aligned}$$

正好雇佣n次，则所有候选人按排名单调递增进行面试。总共有$n!$种排列，则概率为

$$P(\text{恰好有}n\text{个人被雇佣}) = \frac{1}{n!}$$

4 题3.2

$FindMax$算法如算法1

算法 1 查找最大值，返回下标

```
1: procedure FindMax(A)
2:     max ← 1
3:     for j ← 2 to n do
4:         if A[j] > A[max] then
5:             max ← j
       return max
```

则max在位置k被赋予最大值时的概率为

$$P = \frac{1}{n}$$

如果$max = A[k]$则第3行的比较次数为$n-1$次，则平均的比较次数为

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \cdot k \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ &= \Theta(n) \end{aligned}$$

5 题3.4

设运算i的开销为c_i

$$c_i = \begin{cases} i & i\text{为2的整数幂} \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

则总开销为

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=1}^{n} c_i \\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor\ log_2 n\rfloor} 2^i + (n - \lfloor\ log_2 n\rfloor) \\
&= 2(n-1) + (n - \lfloor\ log_2 n\rfloor)
\end{aligned}
$$

则平均一次运算的开销为

$$\overline{c_i} = \frac{C}{n} = 3 + \frac{1}{n} + \frac{\lfloor\ log_2 n\rfloor}{n}$$

当n较大时

$$
\begin{aligned}
\overline{c_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} &= 3 + \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{\lfloor\ log_2 n\rfloor}{n}) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

6 题3.6

已知实际代价c_i为

$$c_i = \begin{cases} i & i\text{为2的整数幂} \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

对每一个操作收费\$3（$\hat{c}_i = 3$），并且

- 当i为2的整数幂，使用存款支付i
- 当i不是2的整数幂，支付费用\$1，并且增减存款\$2

可以得到表1

表格 1: 每次操作的代价与存款

i	代价	存款
1	1	2
2	2	3
3	1	5
4	4	4
5	1	6
...	...	...

由表1可知$\hat{c}_i = 3$满足

$$C = 3n = \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=0}^{n} c_i$$

则平均一次的开销为

$$\overline{c_i} = \frac{C}{n} = 3$$

7 题3.8

已知实际代价c_i为

$$c_i = \begin{cases} i & i\text{为2的整数幂} \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

根据势能法，有

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + D_i - D_{i-1} \\ &= \begin{cases} i + D_i - D_{i-1} & i\text{为2的整数幂} \\ 1 + D_i - D_{i-1} & i\text{不是2的整数幂} \end{cases} \end{aligned}$$

令$i = 2^j + k$，定义势函数$D_i = 2k$

$$D_i - D_{i-1} = \begin{cases} 0 - 2(2^j - 2^{j-1} - 1) = -i + 2 & i\text{为2的整数幂} \\ 2k - 2(k-1) = 2 & i\text{不是2的整数幂} \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + D_i - D_{i-1} \\ &= \begin{cases} i - i + 2 = 2 & i\text{为2的整数幂} \\ 1 + 2 = 3 & i\text{不是2的整数幂} \end{cases} \end{aligned}$$

求和可得

$$\begin{aligned} C = \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i &= \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2 + 3(n - \lfloor \log_2 n \rfloor) \\ &= 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 3(n - \lfloor \log_2 n \rfloor) \end{aligned}$$

平均一次的代价

$$\begin{aligned} \overline{c_i} = \frac{C}{n} &= \frac{2\lfloor \log_2 n \rfloor + 3(n - \lfloor \log_2 n \rfloor)}{n} \\ &\le \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{2\lfloor \log_2 n \rfloor}{n} + \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n} \\ &= 3 + 0 + 0 = 3 \end{aligned}$$