



# 算法设计与分析

作业（三）

姓 名	熊恪峥
学 号	22920202204622
日 期	2022年3月7日
学 院	信息学院
课程名称	算法设计与分析

## 作业（三）

### 目录

<b>1 题4.2</b>	<b>3</b>
<b>2 题4.4</b>	<b>3</b>
<b>3 题4.6</b>	<b>3</b>
<b>4 题4.11</b>	<b>4</b>
<b>5 题4.12</b>	<b>4</b>
<b>6 Leetcode 144</b>	<b>5</b>
6.1 思路分析 . . . . .	5
6.2 运行结果 . . . . .	5
<b>7 Leetcode 236</b>	<b>7</b>
7.1 思路分析 . . . . .	7
7.2 运行结果 . . . . .	7
<b>A 附录：编程题代码</b>	<b>9</b>

## 1 题4.2

算法1使用多数投票算法查找出现次数最多的元素。

---

**算法 1** 查找数组中出现次数最多的元素

---

**Output:** 元组 $(m, c)$ ，其中 $m$ 是出现最多的元素， $c$ 是出现次数

```

1: procedure FINDMOST( $A$ )
2:    $c \leftarrow 0$ 
3:    $m \leftarrow 0$ 
4:   for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
5:     if  $c == 0$  then
6:        $c \leftarrow 1$ 
7:        $m \leftarrow A[j]$ 
8:     if  $A[j] == m$  then
9:        $c \leftarrow c+1$ 
10:    else
11:       $c \leftarrow c-1$ 
12:   $c \leftarrow 0$ 
13:  for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
14:    if  $A[j] == m$  then
15:       $c \leftarrow c+1$ 
16:  return  $(m, c)$ 

```

---

该算法前10行使用投票法找到出现次数最多的元素，然后统计出现的次数。时间复杂度是 $O(n)$ ，空间复杂度是 $O(1)$ 。

## 2 题4.4

$Perm(m)$ 的循环不变式是

$L_m =$  每次执行 $Perm(m)$ 前， $P[1 \dots m-1]$ 是 $m-1$ 个元素的一个排列。

**初始:** 当 $m=1$ 时， $P[1 \dots 0]$ 中是0个元素的排列，即空集。

**归纳:** 调用 $Perm(m)$ 时， $P[1 \dots m-1]$ 是 $m-1$ 个元素的一个排列，算法 $Perm(m)$ 将 $P[j]$ 中放入第 $m+1 \dots n$ 中的一个元素，得到 $m$ 个数字的排列。

**终止:** 当 $m=n$ 时，即 $m=n+1$ 执行前， $P[1 \dots n]$ 是 $n$ 个元素的一个排列。

## 3 题4.6

**初始:**  $GeneratingPerm2$ 第一次调用 $Perm2(n)$ 时， $P[1 \dots n]$ 有 $n$ 个0。

**归纳:** 若调用 $Perm2(m)$ 时有 $m$ 个0， $Perm2(m)$ 先在其中一个0的位置以 $m$ 替代0，然后调用 $Perm2(m-1)$ ，此时有 $m-1$ 个0。

因此在每一次调用 $Perm2(m)$ 时 $P$ 中都有 $m$ 个0。

$Perm(2)$ 中的 $for$ 循环将每一个0的位置以 $m$ 替代0然后调用 $Perm2(m-1)$ ，因此 $Perm2(m-1)$ 调用了 $m$ 次。

#### 4 题4.11

令

$$n = 2^m$$

则

$$S(m) = T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + 1 = 2S(\frac{m}{2}) + 1$$

猜测  $S(m) = O(m)$ ，则需要证  $S(m) \leq cm - b$

当  $m = 1$ ， $S(m) = 1 \leq c - b$ ，当  $c \geq 1 + b$ 。

若  $S(\frac{m}{2}) \leq c\frac{m}{2} - b$ ，则

$$\begin{aligned} S(m) &= 2S(\frac{m}{2}) + 1 \\ &= 2c\frac{m}{2} + 1 - 2b \\ &\leq cm - b \end{aligned}$$

当

$$b \geq 1$$

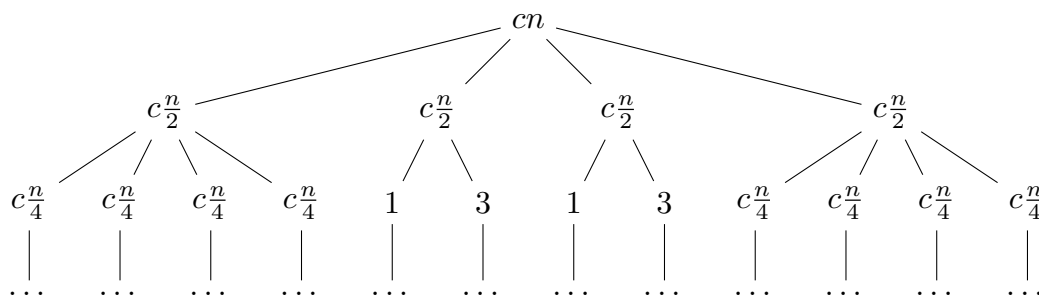
所以

$$S(m) \leq cm \iff S(m) = O(m)$$

则

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m) = O(\log n)$$

#### 5 题4.12



由树状图可得  $k = \log_2 n$

则

$$\begin{aligned}
 & cn + 4 \cdot \frac{1}{2}n + 16 \cdot \frac{1}{16}n + \dots \\
 &= n \sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i \\
 &= n \frac{2(1-n)}{1-2} \\
 &= 2n^2 - 2n
 \end{aligned}$$

因此

$$T(n) = O(n^2)$$

证明：  $T(n) \leq kn^2 - bn$

当  $n = 1$ ,  $T(n) = c \leq k - b$ , 当  $k \geq c + b$

若  $T(\frac{n}{2}) < k(\frac{n}{2})^2 - b\frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq 4k(\frac{n}{2})^2 - b\frac{n}{2} + cn \\
 &= kn^2 - (\frac{b}{2} - c)n \\
 &\leq kn^2 - bn
 \end{aligned}$$

当

$$b \leq 2c$$

## 6 Leetcode 144

### 6.1 思路分析

求先序遍历，就先输出根节点的值，然后对左右子树分别进行先序遍历。运行结果如图6.2。代码如1，递归的终止条件是左右子树都是空。具体实现见附录：编程题代码。

### 6.2 运行结果

图 1: 运行结果

**Success** [Details >](#)

Runtime: **38 ms**, faster than **66.26%** of Python3 online submissions for Binary Tree Preorder Traversal.

Memory Usage: **13.9 MB**, less than **39.13%** of Python3 online submissions for Binary Tree Preorder Traversal.

Next challenges:

[Binary Tree Inorder Traversal](#)

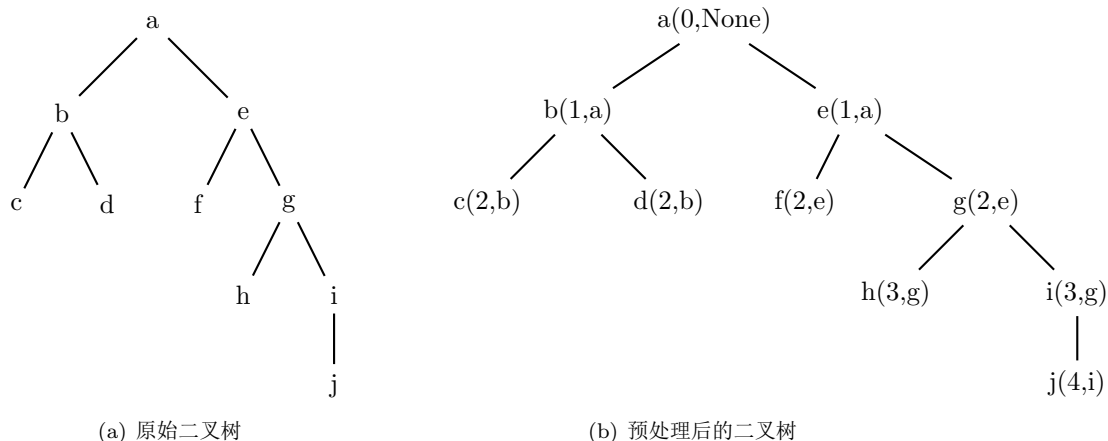
[Verify Preorder Sequence in Binary Search Tree](#)

[N-ary Tree Preorder Traversal](#)

Show off your acceptance:



图 2: 一棵二叉树



## 7 Leetcode 236

LCA是一种有各种算法的问题。常见的方法比如使用了并查集的Tarjan算法能较快地给出多组LCA查询的答案。但我写了一个暴力的算法，因为我想体验一下暴力算法的写法。

### 7.1 思路分析

首先假设有如图2(a)所示的二叉树，假设我们对点 $h$ 和 $d$ 求LCA，那么我们先对节点递归地标注高度，并求出节点的父节点，然后得到2(b)，之后按照如下方法进行迭代

- 先让高度较低（高度值较大的节点沿父节点方向向上移动到两个节点处在同一层
- 两节点同时向上移动直到首次达到相等

然后就得到了LCA是 $a$ 的答案。按照这个思路实现代码2，具体见附录：编程题代码。

### 7.2 运行结果

运行结果如图7.2。可以发现暴力算法确实运行较慢，而且并不比Tarjan算法好写，看来还是写Tarjan算法比较好。

图 3: 运行结果

**Success** [Details >](#)

Runtime: **125 ms**, faster than **27.41%** of Python3 online submissions for Lowest Common Ancestor of a Binary Tree.

Memory Usage: **28.8 MB**, less than **5.83%** of Python3 online submissions for Lowest Common Ancestor of a Binary Tree.

Next challenges:

- Lowest Common Ancestor of a Binary Search Tree
- Smallest Common Region
- Lowest Common Ancestor of a Binary Tree II
- Lowest Common Ancestor of a Binary Tree III
- Lowest Common Ancestor of a Binary Tree IV
- Step-By-Step Directions From a Binary Tree Node to Another

Show off your acceptance: [f](#) [t](#) [in](#)



## A 附录：编程题代码

代码 1: 求先序遍历

```
1 class Solution:
2     def __init__(self):
3         self.list = []
4
5     def traversal(self, root: Optional[TreeNode]):
6         if root is None:
7             return
8
9         self.list.append(root.val)
10        self.traversal(root.left)
11        self.traversal(root.right)
12
13    def preorderTraversal(self, root: Optional[TreeNode]) -> List[int]:
14        self.traversal(root)
15        return self.list
```

代码 2: 求LCA

```
1 class Solution:
2     def __init__(self):
3         self.heights = dict()
4
5     def height(self, root: 'TreeNode', anc: Optional[TreeNode], h):
6         root.ancestor = anc
7         self.heights[root] = h
8
9     if root.left is not None:
10        self.height(root.left, root, h + 1)
11
12    if root.right is not None:
13        self.height(root.right, root, h + 1)
14
15    def lowestCommonAncestor(self, root: 'TreeNode', p: 'TreeNode', q: 'TreeNode') -> 'TreeNode':
16        self.height(root, None, 1)
17
18        if self.heights[p] == self.heights[q]:
19            while p.val != q.val:
20                p = p.ancestor
21                q = q.ancestor
22
23        return p
24
25        (low, high, high_h) = (p, q, self.heights[q]) if self.heights[p] > self.heights[q]
26        else (q, p, self.heights[p])
27
28        while self.heights[low] > high_h:
29            low = low.ancestor
30
31        while not (low is None) and not (high is None) and low.val != high.val:
32            low = low.ancestor
33            high = high.ancestor
```

33

34

`return low`