算法设计与分析

作业（三）

姓　　名	熊恪峥
学　　号	22920202204622
日　　期	2022年3月7日
学　　院	信息学院
课程名称	算法设计与分析

作业（三）

目录

1 题4.2

算法1使用多数投票算法查找出现次数最多的元素。

算法 1 查找数组中出现次数最多的元素

Output: 元组(m, c)，其中m是出现最多的元素，c是出现次数

1: **procedure** FINDMOST(A)
2: $\quad c \leftarrow 0$
3: $\quad m \leftarrow 0$
4: $\quad$ **for** $j \leftarrow 1$ to n **do**
5: $\quad\quad$ **if** $c == 0$ **then**
6: $\quad\quad\quad c \leftarrow 1$
7: $\quad\quad\quad m \leftarrow A[j]$
8: $\quad\quad$ **if** $A[j] == m$ **then**
9: $\quad\quad\quad c \leftarrow$c+1
10: $\quad\quad$ **else**
11: $\quad\quad\quad c \leftarrow$c-1
12: $\quad c \leftarrow 0$
13: $\quad$ **for** $j \leftarrow 1$ to n **do**
14: $\quad\quad$ **if** $A[j] == m$ **then**
15: $\quad\quad\quad c \leftarrow$c+1
$\quad$ **return** (m,c)

该算法前10行使用投票法找到出现次数最多的元素，然后统计出现的次数。时间复杂度是$O(n)$，空间复杂度是$O(1)$。

2 题4.4

$Perm(m)$的循环不变式是

$$L_m = \text{每次执行}Perm(m)\text{前，}P[1\dots m-1]\text{是}m-1\text{个元素的一个排列。}$$

初始： 当$m=1$时，$P[1\dots 0]$中是0个元素的排列，即空集。

归纳： 调用$Perm(m)$时，$P[1\dots m-1]$是$m-1$个元素的一个排列，算法$Perm(m)$将$P[j]$中放入第$m+1\dots n$中的一个元素，得到m个数字的排列。

终止： 当$m=n$时，即$m=n+1$执行前，$P[1\dots n]$是n个元素的一个排列。

3 题4.6

初始： $GeneratingPerm2$第一次调用$Perm2(n)$时，$P[1\dots n]$有n个0。

归纳： 若调用$Perm2(m)$时有m个0，$Perm2(m)$先在其中一个0的位置以m替代0，然后调用$Perm2(m-1)$，此时有$m-1$个0。

因此在每一次调用$Perm2(m)$时P中都有m个0。

$Perm(2)$中的for循环将每一个0的位置以m替代0然后调用$Perm2(m-1)$，因此$Perm2(m-1)$调用了m次。

4 题4.11

令

$$n = 2^m$$

则

$$S(m) = T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + 1 = 2S(\frac{m}{2}) + 1$$

猜测$S(m) = O(m)$，则需要证$S(m) \leq cn - b$

当$m = 1$，$S(m) = 1 \leq c - b$，当$c \geq 1 + b$。

若$S(\frac{m}{2}) \leq c\frac{m}{2} - b$，则

$$\begin{aligned} S(m) &= 2S(\frac{m}{2}) + 1 \\ &= 2c\frac{m}{2} + 1 - 2b \\ &\leq cm - b \end{aligned}$$

当

$$b \geq 1$$

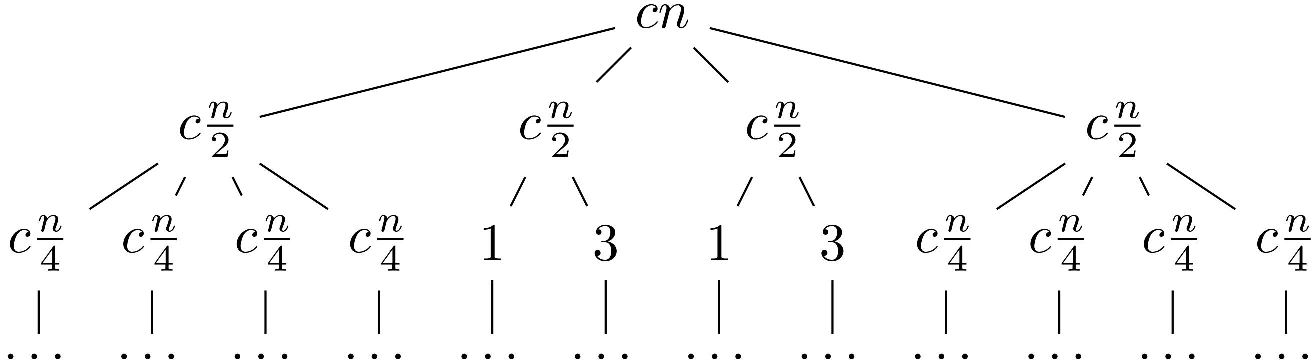
所以

$$S(m) \leq cm \iff S(m) = O(m)$$

则

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m) = O(\log n)$$

4.1 题4.12



由树状图可得$k = \log_2 n$

则

$$
\begin{aligned}
& cn + 4 \cdot \frac{1}{2} n + 16 \cdot \frac{1}{16} n + \dots \\
& = n \sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i \\
& = \frac{2(1-n)}{1-2} \\
& = 2n^2 - 2n
\end{aligned}
$$

因此

$$T(n) = O(n^2)$$

证明： $T(n) \leq kn^2 - bn$

当$n = 1$，$T(n) = c \leq k - b$，当$k \geq c + b$

若$T(\frac{n}{2}) < k(\frac{n}{2})^2 - b\frac{n}{2}$

$$
\begin{aligned}
T(n) & \leq 4k(\frac{n}{2})^2 - b\frac{n}{2} + cn \\
& = kn^2 - (\frac{b}{2} - c)n \\
& \leq kn^2 - bn
\end{aligned}
$$

当

$$b \leq 2c$$