算法设计与分析

作业（十）

姓　　名	熊恪峥
学　　号	22920202204622
日　　期	2022年5月25日
学　　院	信息学院
课程名称	算法设计与分析

作业（十）

目录

1 题11.2

Proof. 先证充分性。

若$LongestPathLength$为多项式时间可解的问题，设时间复杂度为$\mathcal{O}(P(n))$，则解决$LongestPath$问题可等价于判定

$$LongestPathLength(G,u,v) \neq \infty$$

这个方法的时间复杂度就是$\mathcal{O}(P(n)+1)=\mathcal{O}(P(n))$，因此$LongestPath$问题多项式时间可解。

再证必要性。

若$LongestPath$为多项式时间可解的问题，设时间复杂度为$\mathcal{O}(P(n))$，则算法1 可以解决$LongestPathLength$问题。

算法 1 解决$LongestPathLength$

procedure LongestPathLength(p,k,n)
  for $i=1\to|\mathcal{V}|$ **do**
    if *not* LongestPath(G,u,v,i) **then**
      return $i-1$

$LongestPathLength$的内层循环次数不超过$|\mathcal{V}|$，它的时间复杂度是$\mathcal{O}(|\mathcal{V}|P(n))$，因此是多项式时间可解的。

□

2 题11.3

假设TSP问题是多项式时间可解的，求出回路的权值只需要在算法给出的顶点序列中累加对应边的权值。如算法2。

算法 2 解决$TSPLength$

procedure TSPLength(G)
  $\mathcal{V}=TSP(G)$
  $len\leftarrow 0$
  for $i=1\to|\mathcal{V}|$ **do**
    $len\leftarrow len+w[\mathcal{V}[i],\mathcal{V}[i-1]]$
  $len\leftarrow len+w[\mathcal{V}[|\mathcal{V}|-1],0]$
  return len

3 题11.4

优化问题：找出一条从u到u的简单回路，使得这条回路的权值和w最大。

判定问题：是否存在一条从u到u的简单回路，这条回路的权值和至少为w。

它的语言如(1)。

$$LongestPath=\{<G,u,w>: G(V,E)\text{是无向图}, u\in V, \text{存在从}u\text{开始的回路，它的权值和不少于}w\} \tag{1}$$

4 题11.7

若$HamCycle$多项式时间可解，设时间复杂度是$\mathcal{O}(P(n))$，注意到哈密顿回路的每个顶点都连着两条边。可以对顶点v枚举所有与之相连的边集合E_v，找出两条边使得$G'(V,(E-E_v)\cup\{e_i,e_j\})$是哈密顿图。并沿着这两条边的另一顶点枚举，直到对所有顶点枚举完成。所有找出的边就是哈密顿回路的边。这个过程的时间复杂度是$\mathcal{O}(|V|^2P(n))$，也是多项式的。之后就可以沿着这些边列出所有的顶点。

5 题11.16

先证01整数规划问题是NP的。

Proof. 01整数规划问题的判定问题是给定矩阵A_{mn}、x和b，是否有$Ax\le b$。

给定矩阵A_{mn}、x和b，判断是否$Ax\le b$需要进行一次矩阵乘法和n次整数比较。可以在多项式时间完成。

因此01整数规划问题是NP的。 □

然后证明01整数规划问题是NP-Hard的。要证01整数规划问题是NP-Hard的，就要证明存在一个NP-Complete问题，它可以多项式时间约简到01整数规划问题。可以证明01INT$\le_p$3-CNF-SAT

Proof. 由于$x_i\in\{0,1\}$,有

$$0\le x_i\le 1$$

则每一个合取范式可以根据以下规则写成不等式$\sum_i c_i\ge 1$：

- 以原变量形式出现的x_i以$c_i=x_i$的形式出现在不等式里
- 以反变量形式出现的x_j以$c_i=1-x_j$的形式出现在不等式里

为了变为小于号，不等式两边加上负号，有(2)

$$-\sum_i c_i\le -1 \tag{2}$$

以上过程可以在多项式时间内完成。将(2)整理成按照题目所给的形式如(3)

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \left(a_{ij}=\begin{cases}-1 & \exists x_j\in CNF_i\\ 1 & \exists \bar{x_j}\in CNF_i\\ 0 & otherwise\end{cases}\right)\\ b &= \left(b_i=-1+\sum_j \max(0,a_{ij})\right)\end{aligned} \tag{3}$$

这个过程显然能在$\mathcal{O}(P(m,n))$的时间内完成。因此该约简过程可以在多项式时间内完成。

因此，01整数规划问题是NP-Hard的。 □

综上，01整数规划问题是NP-Complete的。