算法设计与分析

作业（二）

姓　　名	熊恪峥
学　　号	22920202204622
日　　期	2022年2月28日
学　　院	信息学院
课程名称	算法设计与分析

作业（二）

目录

1 题3.1

正好雇佣一次，则第一位面试的必须是最好的面试者。则

$$P(\text{排在第1位的面试者是最好的面试者}) = \frac{1}{n}$$

正好雇佣两次，则已知排在第一位的人一定会被雇佣，最好的面试者一定会被雇佣。因此，第一位不能是最好的的面试者，否则只能被雇佣一次。则设事件

$$E_i : \text{第一个来面试的人的排名是}i$$

其中i满足

$$i \leq n-1$$

则

$$P(E_i) = \frac{1}{n}$$

若第一个人的排名是i，只雇佣两个人要求第$2, 3 \ldots, j-1$个面试者排名都不如第一个面试者，即最好的人必须在排名是$i+1, i+2 \ldots n-1, n$的人中第一个面试。设最好的人面试的次序是j，则事件

$$F : \text{第}2, 3 \ldots, j-1\text{个面试者排名都不如第一个面试者}$$

则

$$\overbrace{i+1, i+2, \ldots, n-1, n}^{\text{共}n-i\text{个人}}$$
$$\Rightarrow P(F|E_i) = \frac{1}{n-i}$$

注意到$E_1, \ldots, E_{n-1}$是独立事件，则由全概率公式

$$\begin{aligned}
P(\text{恰好有两个人被雇佣}) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(F|E_i) \times P(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&= O(\frac{\log n}{n})
\end{aligned}$$

正好雇佣n次，则所有候选人按排名单调递增进行面试。总共有$n!$种排列，则概率为

$$P(\text{恰好有}n\text{个人被雇佣}) = \frac{1}{n!}$$

2 题3.2

$FindMax$算法如算法1

算法 1 查找最大值，返回下标

```
1: procedure FindMax(A)
2:     max ← 1
3:     for j ← 2 to n do
4:         if A[j] > A[max] then
5:             max ← j
       return max
```

则max在位置k被赋予最大值时的概率为

$$P = \frac{1}{n}$$

如果$max = A[k]$则第3行的比较次数为$n-1$次，则平均的比较次数为

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \cdot k \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ &= \Theta(n) \end{aligned}$$

3 题3.4

设运算i的开销为c_i

$$c_i = \begin{cases} i & i\text{为2的整数幂} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则总开销为

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{n} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor log_2 n \rfloor} 2^i + (n - \lfloor log_2 n \rfloor) \\ &= 2(n-1) + (n - \lfloor log_2 n \rfloor) \end{aligned}$$

则平均一次运算的开销为

$$\frac{C}{n} = 3 + \frac{1}{n} + \frac{\lfloor log_2 n \rfloor}{n}$$

当n较大时

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{C}{n} &= 3+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{\lfloor\ log_2 n\rfloor}{n}) \\
&= 3
\end{aligned}
$$