目录

1 数项级数

1.1 级数的敛散性

定义 1.1. 给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

称为**常数项无穷级数**或**数项级数**（也常简称**级数**），其中 u_n 称为数项级数的**通项**或**一般项**.

数项级数的前 n 项之和，记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

称它为数项级数的**第 n 个部分和**，也简称**部分和**.

定义 1.2. 若数项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S（即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$），则称数项级数**收敛**，称 S 为数项级数的**和**，记作

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad \text{或} \quad S = \sum u_n$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称数项级数**发散**.

例 1.1. 讨论等比级数（几何级数）

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

的敛散性（$a \neq 0$）

解 $q \neq 1$ 时，级数的第 n 个部分和

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

因此，

(*i*) 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. 此时级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(*ii*) 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$, 级数发散.

(*iii*) 当 $q = 1$ 时，$S_n = na$, 级数发散.

当 $q = -1$ 时，$S_{2k} = 0, S_{2k+1} = a, k = 0, 1, 2, \dots$，级数发散.

总之，$|q| < 1$ 时，级数收敛；$|q| \geqslant 1$ 时，级数发散.

定理 1.1. （级数收敛的柯西准则）
级数收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p，都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon. \tag{1}$$

级数发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0(>N)$ 和 p_0，有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\geq\varepsilon_0. \tag{2}$$

推论 若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

当一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 u_n 不收敛于零时，由推论可知该级数发散.

例 1.2. 证明**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\dots$$

是发散的.

证 由

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

无法用推论推出调和级数发散. 但令 $p=m$ 时，有

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}|&=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&\geq\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任何正整数 N，只要 $m>N$ 和 $p=m$ 就有（2）式成立，所以调和级数是发散的.

定理 1.2. 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，则对任意常数 c，d，级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛，且

$$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n.$$

定理 1.3. 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

定理 1.4. 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

1.2 正项级数

1.2.1 正项级数收敛性的一般判别原则

定理 1.5 (比较原则). 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数，如果存在某正数 N，对一切 $n>N$ 都有

$$u_n \leq v_n$$

则

（i）若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；

（ii）若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 也发散.

推论 设

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \tag{2}$$

是两个正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

则

（i）当 $0 < l < +\infty$ 时，级数（*1*）（*2*）同时收敛或同时发散；

（ii）当 $l = 0$ 且级数（*2*）收敛时，级数（*1*）也收敛；

（iii）当 $l = +\infty$ 且级数（*2*）发散时，级数（*1*）也发散.

1.2.2 比式判别法和根式判别法

定理 1.6 (拉朗贝尔判别法，或称比式判别法). 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及常数 q（$0 < q < 1$）.

（i）若对一切 $n > N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛.

（ii）若对一切 $n > N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

推论 1（比式判别法的极限形式）若 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \tag{3}$$

则

(i) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

若 $q=1$，这时用比式判别法不能对级数的敛散性作出判断，因为它可能是收敛的，也可能是发散的.

若某级数的（3）式的极限不存在，则可应用上、下极限来判别.

推论 2 设 $\sum u_n$ 为正项级数.

(i) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$，则级数收敛；

(ii) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$，则级数发散.

定理 1.7 (柯西判别法，或称根式判别法). 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及正常数 l,

(i) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\le l<1,$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

推论 1（根式判别法的极限形式）若 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{4}$$

则

(i) 当 $l<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $l>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

若（4）式的极限不存在，则可根据根式 $\sqrt[n]{u_n}$ 的上极限来判断.

推论 2 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

则当

(i) $l<1$ 时级数收敛；

(ii) $l>1$ 时级数发散.

若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q.$$

这说明凡能由比式判别法鉴别收敛性的级数，也能由根式判别法来判断.

1.2.3 积分判别法

定理 1.8. 设 f 为 $[1, +\infty)$ 上的减函数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充分必要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ 收敛.

1.3 一般项级数