目录

1 数项级数

1.1 级数的敛散性

定义 1.1. 给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \dots$$

称为**常数项无穷级数**或**数项级数**（也常简称**级数**），其中 u_n 称为数项级数的**通项**或**一般项**.

数项级数的前 n 项之和，记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称它为数项级数的**第 n 个部分和**，也简称**部分和**.

定义 1.2. 若数项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S（即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$），则称数项级数**收敛**，称 S 为数项级数的**和**，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \dots \quad \text{或} \quad S = \sum u_n$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称数项级数**发散**.

例 1.1. 讨论等比级数（几何级数）

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \dots$$

的敛散性（$a \neq 0$）

解 $q \neq 1$ 时，级数的第 n 个部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

因此，

(*i*) 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. 此时级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(*ii*) 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$，级数发散.

(*iii*) 当 $q = 1$ 时，$S_n = na$，级数发散.

当 $q = -1$ 时，$S_{2k} = 0, S_{2k+1} = a, k = 0, 1, 2, \dots$，级数发散.

总之，$|q| < 1$ 时，级数收敛；$|q| \geqslant 1$ 时，级数发散.

定理 1.1. （级数收敛的柯西准则）
级数收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p，都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon. \tag{1}$$

级数发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0(>N)$ 和 p_0，有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\geq\varepsilon_0. \tag{2}$$

推论 若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

当一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 u_n 不收敛于零时，由推论可知该级数发散.

例 1.2. 证明**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\dots$$

是发散的.

证 由

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

无法用推论推出调和级数发散. 但令 $p=m$ 时，有

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}|&=|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}|\\&\geq|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}|\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任何正整数 N，只要 $m>N$ 和 $p=m$ 就有（2）式成立，所以调和级数是发散的.

定理 1.2. 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，则对任意常数 c，d，级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛，且

$$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n.$$

定理 1.3. 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

定理 1.4. 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

1.2 正项级数