МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра вычислительной математики

МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебно-методическое пособие
по курсу Вычислительная математика

МОСКВА 2004

УДК 517.9

Составитель В.В. Демченко

Рецензент доктор физико-математических наук,
профессор *А.М. Тер-Крикоров*

Метод Рунге-Кутты решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика / Сост.: В.В. Демченко. – М.: МФТИ, 2004. – 20 с.

Кратко рассмотрены способы получения метода Рунге-Кутты и представления их в виде таблиц Бутчера. Предложены задачи для решения на ЭВМ.

Предназначено для студентов 3-го курса ФАКИ Московского физико-технического института.

УДК 517.9

МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебно-методическое пособие
по курсу Вычислительная математика

Составитель ***Демченко Владимир Владимирович***

Редактор *О.П. Котова.* Корректор *И.А. Волкова*
Подписано в печать 19.03.04. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25. Уч.- изд. л. 1,25. Тираж 100 экз. Заказ № ф-124.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем «ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка 4
2. Метод Рунге-Кутты 5
3. Вывод формул метода Рунге-Кутты 4-го порядка 7
4. Таблицы Бутчера 12
5. Оценка погрешности численного решения 15
6. Лабораторная работа на ЭВМ 16
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 17
ПРИЛОЖЕНИЕ 18

ВВЕДЕНИЕ

При изучении самых разнообразных явлений окружающего мира, имеющих отношение как к точным, так и к гуманитарным наукам, исследователи сталкиваются в ряде случаев с тем, что функциональные зависимости между величинами находятся из уравнений, в которых присутствуют производные от искомых функций. Наиболее простыми среди них являются те, что содержат только производные первого порядка и могут быть записаны в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где y – искомая функция, x – независимая переменная, $f(x, y)$ – непрерывная функция от x и y. Однако получить аналитическое решение этого уравнения для достаточно произвольной функции f не удается, и только для некоторых частных случаев, с которыми можно ознакомиться в справочной литературе, например, [1], [2], решение задачи представляется в виде конкретной функции.

В связи с быстрым развитием электронной вычислительной техники в последние десятилетия появилась возможность использовать приближенные математические методы для решения подобного рода задач. Один из таких подходов называется методом Рунге-Кутты и объединяет целую группу модификаций, связанных способом их получения.

1. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Для простоты рассмотрим двумерное пространство переменных x и y и некоторое открытое множество G, принадлежащее ему. Пусть на этом открытом множестве определена непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ и задано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (1)$$

Согласно теореме существования и единственности для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$, определенное на некотором интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, такое, что точки $(x, y(x)) \in G$ и $y'_x \equiv f(x, y(x))$, причем это решение будет единственным. Задача для уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y^0$ (задача Коши) состоит в нахождении функции $y(x)$, обращающей и уравнение (1), и начальное условие в тождество. Допустим, что значения, которые принимает независимое переменное x, принадлежат интервалу (X_0, X_N) и запишем задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y^0 \\ X_0 \langle x \langle X_N \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Разобьём отрезок $[X_0, X_N]$ на N частей так, что $x_{n+1} - x_n = h_n$, $n = \overline{0 \div N-1}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда разбиение равномерное, т.е. все $h_n = h = \dfrac{X_N - X_0}{N} = \text{const}$, $n = \overline{0 \div N-1}$. Назовем точки $x_n = X_0 + nh$, $n = \overline{0 \div N}$ узлами сетки, а множество точек $\{x_n\}_h$ – сеткой. Если каждой точке x_n, $n = \overline{0 \div N}$, принадлежащей сетке $\{x_n\}_h$, поставлено в соответствие некоторое число y_n, $n = \overline{0 \div N}$, то множество значений $\{y_n\}_h$ будем называть сеточной функцией, определенной на сетке $\{x_n\}_h$.

2. Метод Рунге-Кутты

Приведенный ниже способ построения сеточной функции по дифференциальной задаче (2) называется методом Рунге-Кутты.

Положим, что величина сеточной функции в узле $x_0 = X_0$ равняется начальному условию из (2) $y_0 = y^0$, а её значения в следующих узлах сетки $n = \overline{1 \div N}$ будем находить последовательно по формуле

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y(x_n) + h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\left(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j\right),$$
$$n = \overline{0 \div N-1}, \qquad (3)$$

где

$$f_1 = f(x_n, y_n) = f_1(x_1, z_1),$$
$$f_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} f_1) = f_2(x_2, z_2),$$
$$f_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h a_{31} f_1 + h a_{32} f_2) = f_3(x_3, z_3),$$
$$f_4 = f(x_n + c_4 h, y_n + h a_{41} f_1 + h a_{42} f_2 + h a_{43} f_3) = f_4(x_4, z_4),$$

. . . .

$$f_s = f\left(x_n + c_s h, y_n + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} f_j\right) = f_s(x_s, z_s),$$

$$x_s = x_n + c_s h; \quad z_s = y_n + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} f_j ,$$

где a_{sj}, b_i, c_s – константы, которые подлежат определению.

Предполагается, что $y(x_n)$ уже известно и имеет конкретное значение. При нахождении y_1 в качестве $y(x_n)$, $n = 0$ берется $y(x_0) = y_0 = y^0$ и т.д.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(h) = y(x_n + h) - y(x_n) - h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i(x_i, z_i) =$$
$$= \sum_{k=0}^{s} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad 0 \le \theta \le 1 \qquad (4)$$

и определим порядок точности (сходимости) метода.

Определение. Разностный метод Рунге-Кутты (РК), задаваемый соотношениями (3), имеет q порядок точности (сходимости), если $\varphi(0) = \varphi_h'(0) = \ldots = \varphi_h^{(q)}(0) = 0$, а $\varphi_h^{(q+1)}(0) \ne 0$, $q \le S$.

Покажем, как определяются коэффициенты a_{ij}, b_i, c_i на примере метода РК четвертого порядка точности.

3. Вывод формул метода Рунге-Кутты 4-го порядка

Вычислим первые четыре производные по h от функции $\varphi(h)$ из (4), полагая $S = 4$ и дифференцируя её как сложную функцию:

$$\varphi_h'(h) = y_x' - \sum_{i=1}^{4} b_i f_i(x_i, z_i) - h\sum_{i=1}^{4} b_i \left[f_i(x_i, z_i)\right]_h' ,$$
$$\varphi_{hh}''(h) = y_{xx}'' - 2\sum_{i=1}^{4} b_i \left[f_i(x_i, z_i)\right]_h' - h\sum_{i=1}^{4} b_i (f_i)_{hh}'' , \qquad (5)$$
$$\varphi_{hhh}'''(h) = y_{xxx}''' - 3\sum_{i=1}^{4} b_i \left[f_i(x_i, z_i)\right]_{hh}'' - h\sum_{i=1}^{4} b_i (f_i)_{hhh}''' ,$$
$$\varphi_{hhhh}^{IV}(h) = y_{xxxx}^{IV} - 4\sum_{i=1}^{4} b_i \left[f_i(x_i, z_i)\right]_{hhh}''' - h\sum_{i=1}^{4} b_i (f_i)_{hhhh}^{IV} .$$

В формулы (5) входят производные от искомой функции $y(x_h + h)$ до четвертого порядка включительно. Выразим их через производные от $f(x, y)$ из правой части дифференциального уравнения (2):

$$y_x' = f, \quad y_{xx}'' = f_x' + f_y' f ,$$
$$y_{xxx}''' = f_{xx}'' + 2 f_{xy}'' f + f_{yy}'' f^2 + f_y' f_x' + (f_y')^2 f , \qquad (6)$$
$$y_{xxxx}^{(IV)} = f_{xxx}''' + 3 f_{xxy}''' f + 3 f_{xyy}''' f^2 + f_{yyy}''' f^3 + f_{xy}''(3 f_x' + 5 f_y' f) +$$
$$+ f_{yy}''(3 f_x' f + 4 f_y' f^2) + f_{xx}'' f_y' + (f_y')^2 (f_x' + f_y' f) .$$

Также потребуются первые три производные по h от функций $f_i(x_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Первые производные:

$$(f_1)'_h = 0, \quad (f_2)'_h = (f_2)'_{x_2} c_2 + (f_2)'_{z_2} a_{21} f_1 ,$$

$$(f_3)'_h = (f_3)'_{x_3} c_3 + (f_3)'_{z_3} \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right],$$

$$(f_4)'_h = (f_4)'_{x_4} c_4 +$$

$$+ (f_4)'_{z_4} \left[a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h a_{42} (f_2)'_h + h a_{43} (f'_3)_h\right].$$

Вторые производные:

$$(f_1)''_{hh} = 0,$$

$$(f_2)''_{hh} = (f_2)''_{x_2 x_2} c_2^2 + 2 (f_2)''_{x_2 z_2} c_2 a_{21} f_1 + (f_2)''_{z_2 z_2} a_{21}^2 f_1^2,$$

$$(f_3)''_{hh} = (f_3)''_{x_3 x_3} c_3^2 + 2 (f_3)''_{x_3 z_3} c_3 \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right] +$$

$$+ (f_3)''_{z_3 z_3} \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right]^2 +$$

$$+ (f_3)'_{z_3} \left[2 a_{32} (f_2)'_h + h a_{32} (f_2)''_{hh}\right],$$

$$(f_4)''_{hh} = (f_4)''_{x_4 x_4} c_4^2 +$$

$$+ 2 (f_4)''_{x_4 z_4} c_4 \left[a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h a_{42} (f_2)'_h + h a_{43} (f_3)'_h\right] +$$

$$+ (f_4)''_{z_4 z_4} \left\{a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h\left[a_{42} (f_2)'_h + a_{43} (f_3)'_h\right]\right\}^2 +$$

$$+ (f_4)'_{z_4} \left\{2 a_{42} (f_2)'_h + 2 a_{43} (f_3)'_h + h\left[a_{42} (f_2)''_{hh} + a_{43} (f_3)''_{hh}\right]\right\}.$$

Третьи производные:

$$(f_1)'''_{hhh} = 0,$$

$$(f_2)'''_{hhh} = (f_2)'''_{x_2 x_2 x_2} c_2^3 + 3 (f_2)'''_{x_2 x_2 z_2} c_2^2 a_{21} f_1 + 3 (f_2)'''_{x_2 z_2 z_2} c_2 a_{21}^2 f_1^2 +$$

$$+ (f_2)'''_{z_2 z_2 z_2} a_{21}^3 f_1^3 ,$$

$$(f_3)'''_{hhh} = (f_3)'''_{x_3 x_3 x_3} c_3^3 + 3 (f_3)'''_{x_3 x_3 z_3} c_3^2 \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right] +$$

$$+ 3 (f_3)'''_{x_3 z_3 z_3} c_3 \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right]^2 +$$

$$+ (f_3)'''_{z_3 z_3 z_3} \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right]^3 +$$

$$+ 3 (f_3)''_{x_3 z_3} c_3 \left[2 a_{32} (f_2)'_h + h a_{32} (f_2)''_{hh}\right] +$$

$$+ 3 (f_3)''_{z_3 z_3} \left[a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + h a_{32} (f_2)'_h\right] \times$$

$$\times \left[2 a_{32} (f_2)'_h + h a_{32} (f_2)''_{hh}\right] +$$

$$+ (f_3)'_{z_3} \left[3 a_{32} (f_2)''_{hh} + h a_{32} (f_2)'''_{hhh}\right],$$

$$(f_4)'''_{hhh} = (f_4)'''_{x_4 x_4 x_4} c_4^3 +$$

$$+ 3 (f_4)'''_{x_4 x_4 z_4} c_4^2 \left[a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h a_{42} (f_2)'_h + h a_{43} (f_3)'_h\right] +$$

$$+ 3 (f_4)'''_{x_4 z_4 z_4} c_4 \left[a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h a_{42} (f_2)'_h + h a_{43} (f_3)'_h\right]^2 +$$

$$+ (f_4)'''_{z_4 z_4 z_4} \left[a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h a_{42} (f_2)'_h + h a_{43} (f_3)'_h\right]^3 +$$

$$+ 3 (f_4)''_{x_4 z_4} c_4 \left\{2 a_{42} (f_2)'_h + 2 a_{43} (f_3)'_h + h\left[a_{42} (f_2)''_{hh} + a_{43} (f_3)''_{hh}\right]\right\} +$$

$$+ 3 (f_4)''_{z_4 z_4} \left\{a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 + h\left[a_{42} (f_2)'_h + a_{43} (f_3)'_h\right]\right\} \times$$

$$\times \left\{2 a_{42} (f_2)'_h + 2 a_{43} (f_3)'_h + h\left[a_{42} (f_2)''_{hh} + a_{43} (f_3)''_{hh}\right]\right\} + (f_4)'_{z_4} \times$$

$$\times \left\{3 a_{42} (f_2)''_{hh} + 3 a_{43} (f_3)''_{hh} + h\left[a_{42} (f_2)'''_{hhh} + a_{43} (f_3)'''_{hhh}\right]\right\}.$$

Для получения разностного метода РК первого порядка согласно определению из пункта 2 нужно в первое выражение из (5) подставить $h = 0$ и приравнять $\varphi_h'(0) = 0$, учитывая, что $y_x' = f$ из (6). Так как это равенство должно выполняться для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ из правой части уравнения (1), необходимо, чтобы коэффициенты $b_i, i = 1 \div 4$ удовлетворяли соотношению

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \qquad (f). \tag{7}$$

Условие (7) должно быть выполнено для всех четырех стадийных $S = 4$ схем РК первого порядка из (3). Задавая три из четырех коэффициентов b_i, $i = 1 \div 4$, получим семейство схем РК первого порядка, но можно использовать имеющуюся свободу выбора коэффициентов для построения схем более высокого порядка точности. Потребуем, чтобы $\varphi_{hh}''(0) = 0$ в (5) для любых f_x', f_y' из второго уравнения (6):

$$2b_2c_2 + 2b_3c_3 + 2b_4c_4 = 1 \qquad (f_x'). \tag{8}$$

$$2b_2a_{21} + 2b_3(a_{31} + a_{32}) + 2b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43}) = 1 \quad (f_y'f). \tag{9}$$

Аналогично случаю схем $(S = 4)$ РК первого порядка (3) все схемы $(S = 4)$ РК второго порядка точности (3) должны удовлетворять условиям (7), (8) и (9), что дает возможность предложить семейство схем второго порядка точности, т.к. число определяемых коэффициентов $(a_{ij}, b_i, c_i, i = 1 \div 4, j = 1 \div i - 1)$ превышает количество уравнений. Для коэффициентов схем $(S = 4)$ РК третьего порядка (3), которые удовлетворяют условию $\varphi_{hhh}'''(0) = 0$, должны выполняться равенства:

$$3\left(b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2\right) = 1 \qquad (f_{xx}''), \tag{10}$$

$$3\left[b_2c_2a_{21} + b_3c_3(a_{31} + a_{32}) + b_4c_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})\right] = 1 \quad (f_{xy}''f), \tag{11}$$

$$3\left[b_2a_{21}^2 + b_3(a_{31} + a_{32})^2 + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})^2\right] = 1 \qquad (f_{yy}''f^2), \tag{12}$$

$$6\left[b_3c_2a_{32} + b_4(c_2a_{42} + c_3a_{43})\right] = 1 \qquad (f_x'f_y'), \tag{13}$$

$$6\left\{b_3a_{32}a_{21} + b_4\left[a_{42}a_{21} + a_{43}(a_{31} + a_{32})\right]\right\} = 1 \quad \left[(f_y')^2 f\right]. \tag{14}$$

Требуя для выполнения $\varphi_h^{IV}(0) = 0$ того, чтобы коэффициенты при произвольных

f_{xxx}''', $f_{xxy}'''f$, $f_{xyy}'''f^2$, $f_{yyy}'''f^3$, $f_{xy}''f_x'$, $f_{xy}''f_y'f$, $f_{yy}''f_x'f$, $f_{yy}''f_y'f^2$, $f_{xx}''f_y'$, $(f_y')^2 f_x'$, $(f_y')^3 f$

обращались в ноль, приходим к ещё одиннадцати уравнениям для коэффициентов, которым удовлетворяют четырехстадийные $(S = 4)$ методы РК четвертого порядка (3):

$$4\left(b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3\right) = 1 \qquad (f_{xxx}'''). \tag{15}$$

$$4\left[b_2c_2^2a_{21} + b_3c_3^2(a_{31} + a_{32}) + b_4c_4^2(a_{41} + a_{42} + a_{43})\right] = 1 \qquad (f_{xxy}'''f). \tag{16}$$

$$4\left[b_2c_2a_{21}^2 + b_3c_3(a_{31} + a_{32})^2 + b_4c_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})^2\right] = 1 \qquad (f_{xyy}'''f^2). \tag{17}$$

$$4\left[b_2a_{21}^3 + b_3(a_{31} + a_{32})^3 + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})^3\right] = 1 \quad (f_{yyy}'''f^3). \tag{18}$$

$$8\left[b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)\right] = 1 \qquad (f_{xy}''f_x'). \tag{19}$$

$$24\{b_3a_{32}(a_{21}c_3 + c_2a_{21}) + b_4[a_{42}c_2a_{21} + a_{43}c_3(a_{31} + a_{32}) + c_4a_{42}a_{21} + c_4a_{43}(a_{31} + a_{32})]\} = 5 \qquad (f_{xy}''f_y'f). \tag{20}$$

$$8\left[b_3(a_{31} + a_{32})a_{32}c_2 + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)\right] = 1 \qquad (f_{yy}''f_x'f). \tag{21}$$

$$3\{2b_3(a_{31}+a_{32})a_{32}a_{21}+b_3a_{32}a_{21}^2+2b_4(a_{41}+a_{42}+a_{43})\times$$
$$\times[a_{42}a_{21}+a_{43}(a_{31}+a_{32})]+b_4[a_{42}a_{21}^2+a_{43}(a_{31}+a_{32})^2]\}=1 \quad (22)$$
$$(f''_{yy}f'_yf^2).$$

$$12[b_3a_{32}c_2^2+b_4(a_{42}c_2^2+a_{43}c_3^2)]=1 \qquad (f''_{xx}f'_y). \quad (23)$$

$$24b_4a_{43}a_{32}c_2=1 \qquad [(f'_y)^2 f'_x]. \quad (24)$$

$$24b_4a_{43}a_{32}a_{21}=1 \qquad [(f'_y)^3 f]. \quad (25)$$

Выполнение равенств (7) – (25) необходимо для того, чтобы четырехстадийные методы Рунге-Кутты (РК), задаваемые формулами (3), имели четвертый порядок точности. Девятнадцать уравнений (7) – (25) содержат только четырнадцать неизвестных коэффициентов $(a_{ij}, b_i, c_i, \quad i=1\div 4, j=1\div i-1)$ и, казалось бы, система уравнений переопределена и у неё не может существовать решений, определенных в обычном смысле. Но оказывается, что часть уравнений в этой системе линейно зависима и число линейно независимых уравнений меньше числа искомых коэффициентов, т.е. можно предложить целое семейство 4-стадийных методов РК четвертого порядка.

4. Таблицы Бутчера

Следуя [3], удобно представлять модификации методов РК в виде таблиц Бутчера следующего вида:

c_1	0
c_2	$a_{21}\ 0$
.	
.	…………0
c_s	$a_{s1}a_{s2}\dots a_{ss-1}\,0.$
	$b_1\,b_2\,\dots\dots b_{s-1}b_s$

где коэффициенты $a_{ij}, b_i, c_i, \quad i=1\div s;\ j=1\div i-1$ те же, что и в выражениях (3) для S-стадийного метода РК. Приведем несколько наиболее употребительных методов РК 2, 3 и 4–порядков точности, представленных в виде таблиц Бутчера.

2-стадийные методы РК второго порядка точности

1) Модифицированный метод Эйлера

$$f_1=f(x_n,y_n),\ \ f_2=f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f_1\right),\ \ y_{n+1}=y_n+hf_2\,.$$

0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

2) Метод Эйлера с пересчетом

$$f_1=f(x_n,y_n),\ \ f_2=f(x_n+h, y_n+hf_1),\ \ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_1+f_2)$$

0	0	
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3-стадийные методы РК третьего порядка точности

1) Метод Хойна

$$f_1=f(x_n,y_n),\ \ f_2=f\left(x_n+\frac{h}{3}, y_n+\frac{h}{3}f_1\right),$$

$$f_3=f\left(x_n+\frac{2}{3}h; y_n+\frac{2}{3}hf_2\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(f_1 + 3f_3).$$

0	0		
1/3	1/3	0	
2/3	0	2/3	0
	1/4	0	3/4

2)

$$f_1 = f(x_n, y_n), \quad f_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf_1\right),$$

$$f_3 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{h}{3}f_1 + hf_2\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(f_1 + 2f_2 + f_3).$$

0	0		
2/3	2/3	0	
2/3	–1/3	1	0
	1/4	2/4	1/4

3)

$$f_1 = f(x_n, y_n), \quad f_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_1\right),$$

$$f_3 = f(x_n + h, y_n - hf_1 + 2hf_2),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3).$$

0	0		
1/2	1/2	0	
1	–1	2	0
	1/6	4/6	1/6

Классический 4-стадийный метод РК четвертого порядка точности

$$f_1 = f(x_n, y_n), \quad f_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_1\right),$$

$$f_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_2\right), \quad f_4 = f(x_n + h, y_n + hf_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4).$$

0	0			
1/2	1/2	0		
1/2	0	1/2	0	
1	0	0	1	0
	1/6	2/6	2/6	1/6

5. Оценка погрешности численного решения

Важнейшим вопросом численного интегрирования задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является оценка погрешности полученного решения. Непосредственное вычисление в узлах сетки нормы разности двух решений, аналитического и численного, не всегда возможно, так как дифференциальная задача в общем случае не интегрируется до конца. Получить приближенное представление о допущенной погрешности можно, если известен порядок точности используемого численного метода. В этом случае сначала решают разностную задачу на сетке с шагом $2h$, а затем повторно – на сетке с шагом h. Обозначим сеточную функцию, полученную на сетке с шагом $2h$, через $y^{(2h)}$, а на сетке h – $\bar{y}^{(h)}$. След решения дифференциальной задачи на сетке $2h$ пусть будет y^*, а след $\bar{y}^{(h)}$ на сетке $2h$ – $y^{(h)}$. Тогда справедливы два равенства:

$$y^{(2h)} = y^* + C(2h)^k, \qquad (26)$$
$$y^{(h)} = y^* + C\,h^k,$$

где k – порядок точности выбранного метода. Вычитая из первого уравнения (26) второе, имеем

$$y^{(2h)} - y^{(h)} \approx C h^k \left(2^k - 1\right)$$

или

$$C h^k \approx \frac{y^{(2h)} - y^{(h)}}{2^k - 1}. \tag{27}$$

Вводя в конечномерном пространстве, соответствующем сетке $2h$, одну из возможных норм, получаем оценку

$$\left\| y^{(h)} - y^* \right\| \approx \frac{\left\| y^{(2h)} - y^h \right\|}{2^k - 1} \le \varepsilon, \tag{28}$$

где ε – требуемая точность. Если условие (28) не выполняется, то в два раза увеличиваем число узлов сетки, одновременно уменьшая шаг сетки, и снова проверяем условие (28) на новой сетке. Так поступаем до тех пор, пока не будет выполнена оценка (28).

6. Лабораторная работа на ЭВМ

При выполнении лабораторной работы происходит освоение одного из методов численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, приобретается практический опыт решения математических задач с использованием ЭВМ и способов оценки погрешности, совершенствуются навыки применения алгоритмических языков высокого уровня для написания программ и их отладки, осуществляется проверка теоретических положений численного анализа на конкретных примерах.

В лабораторной работе предлагается решить следующие задачи:

1. Разработать алгоритм решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения одним из методов Рунге-Кутты и написать программу, реализующую его на одном из алгоритмических языков высокого уровня.
2. Отладить программу и провести расчеты до достижения заданной точности.

При разработке алгоритма необходимо предусмотреть возможность:

1) изменения области интегрирования,
2) задания других начальных условий,
3) проведения расчетов на последовательно удваиваемых сетках,
4) вывода в одиннадцати равноудаленных точках, расположенных равномерно на отрезке интегрирования, значений сеточных функций, полученных на сетках с шагами $2h$ и h, а также их разности в тех же точках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука-Физматлит, 1971. – 576 с.
2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
3. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найти указанным методом решение задачи Коши на заданном интервале в одиннадцати равноудаленных точках с указанной точностью ε.

Задание 1

Метод Рунге-Кутты 4 порядка точности:

$x \in (1,\ 2);\ \varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&2x^2yy'_x + y^2 = 2x^3 + x^2,\\&y(1) = 1.\end{aligned}\right\}$$

Задание 2

Метод Рунге-Кутты 3 порядка; $x \in (0,\ 1)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&(x^2y - 1)y'_x + xy^2 - 1 = 0,\\&y(0) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Задание 3

Метод Эйлера с пересчетом $x \in (1,\ 1{,}1)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&(6xy + x^2 + 3)y'_x + 3y^2 + 2xy + 2x = 0,\\&y(1) = -1.\end{aligned}\right\}$$

Задание 4

Модифицированный метод Эйлера; $x \in (1,\ 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&(xy - x^2)y'_x + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0,\\&y(1) = 1 + \sqrt{2}.\end{aligned}\right\}$$

Задание 5

Метод Эйлера с пересчетом $x \in (1,\ 1{,}2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&x(2x^2y \cdot \ln(y) + 1)y'_x = 2y,\\&y(1) = 1.\end{aligned}\right\}$$

Задание 6

Модифицированный метод Эйлера; $x \in (0,\ 1)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&y'_x - xy^2 - 3xy = 0,\\&y(0) = -3.\end{aligned}\right\}$$

Задание 7

Метод Рунге-Кутты 3 порядка; $x \in (1,\ 1{,}2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&2xyy'_x - y^2 + 5x = 0,\\&y(1) = 1.\end{aligned}\right\}$$

Задание 8

Метод Рунге-Кутты 4 порядка точности:

$x \in (1,\ 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&xy'_x + xy^2 - y = 0,\\&y(1) = 2.\end{aligned}\right\}$$

Задание 9

Метод Рунге-Кутты 3 порядка; $x \in (1,\ 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&x(2x - 1)y'_x + y^2 - (4x + 1)y + 4x = 0,\\&y(1) = 2.\end{aligned}\right\}$$

Задание 10

Метод Рунге-Кутты 4 порядка точности;

$x \in (1,\ 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&2x^2y'_x - 2y^2 - 3xy + 2x = 0,\\&y(1) = 0{,}5.\end{aligned}\right\}$$

Задание 11

Модифицированный метод Эйлера; $x \in (1,\ 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned}&xy'_x - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0,\\&y(1) = -3.\end{aligned}\right\}$$

Задание 12

Метод Эйлера с пересчетом $x \in (1, 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned} &x^2\left(y_x' + y^2\right) + 4xy + 2 = 0,\\ &y(1) = -1. \end{aligned}\right\}$$

Задание 13

Метод Рунге-Кутты 4 порядка точности;

$x \in (1, 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned} &\left(y - x^2\right)y_x' = x,\\ &y(1) = 1{,}5. \end{aligned}\right\}$$

Задание 14

Метод Рунге-Кутты 3 порядка; $x \in (1, 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned} &yy_x' + y^2 + 4x(x+1) = 0,\\ &y(1) = 12. \end{aligned}\right\}$$

Задание 15

Модифицированный метод Эйлера; $x \in (1, 2)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned} &x^3y_x' - x^4y^2 + x^2y + 20 = 0,\\ &y(1) = 4. \end{aligned}\right\}$$

Задание 16

Метод Эйлера с пересчетом $x \in (2, 3)$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$\left.\begin{aligned} &x^2(x-1)y_x' - y^2 - x(x-2)y = 0,\\ &y(2) = 4. \end{aligned}\right\}$$