1 Постановка задачі

Необхідно знайти визначений інтеграл для функції $f(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 - 3x - 1$ на інтервалі $[0;2]$, користуючись методом трапецій та методом Сімсона та порівняти точність вказаних методів в залежності від кількості ітерацій.

2 Аналітичний розв'язок задачі

$$\int_0^2 (x^4 + x^3 + 7x^2 - 3x - 1)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - +\frac{3}{2}x^2 - x\Big|_0^2 = 21.0667$$

3 Алгоритм методу чисельного інтегрування

Вибираючи значення n будемо користуватись наступною формулою для метода трапецій:

$$I_n = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right),\ h = \frac{b-a}{n}$$

При цьому похибка обчислень згідно теорої не має перевищувати:

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|, \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{nh^3}{12}$$

В нашому випадку: $f''(x) = 12x^2 + 6x + 14, \max_{x\in[0,2]} |f''(x)| = f''(2) = 74$
Метод Сімсона будуємо за настпуною формулою:

$$I_{Simps,n} = \sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] =$$
$$= \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + ... + 4f(b-h) + f(b)]$$

При цьому похибка обчислень згідно теорої не має перевищувати:

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{288}h^3 \max_{x\in[a,b]} |f^{(3)}(x)|$$

В нашому випадку: $f^{(3)}(x) = 24x + 6, \max_{x\in[0,2]} \left|f^{(3)}(x)\right| = f^{(3)}(2) = 54$

4 Результати експерименту

Результати роботи методів в залежності від n були виведені у файл, було отримано наступні значення. Для метода трапецій:

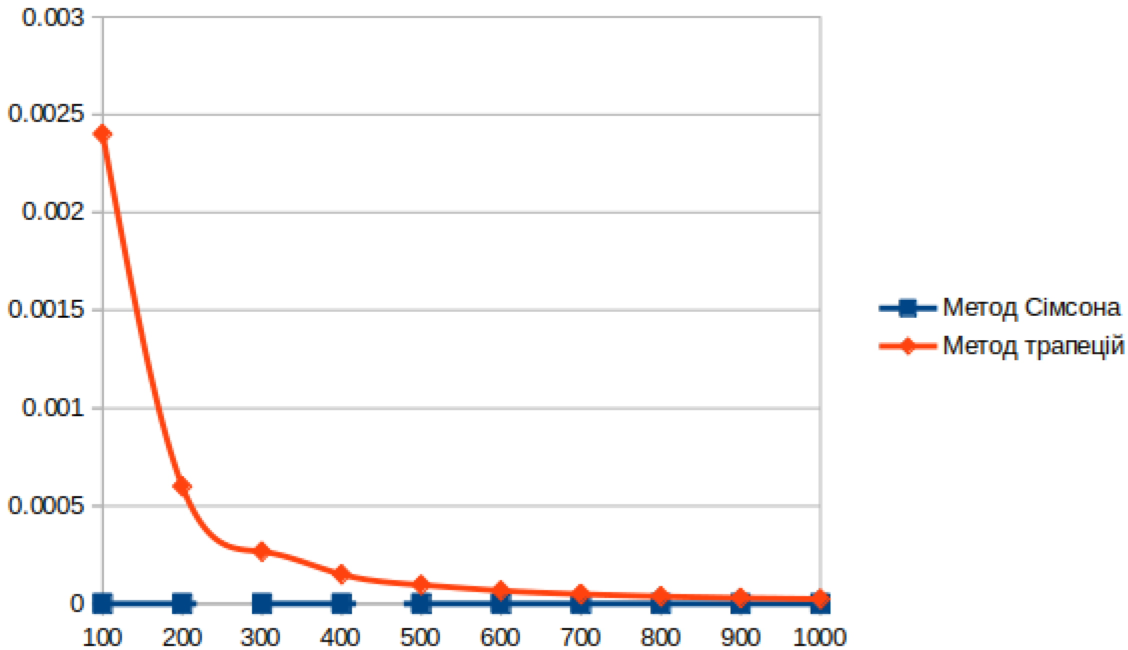
n	Оцінене значення	Похибка	Теоретична похибка
100	21.069066656	0.0023999893333041	0.004933333333333334
200	21.067266666000005	0.0005999993333354325	0.0012333333333333335
300	21.066933333201654	0.00026666653498352844	0.0005481481481481482
400	21.066816666625005	0.00014999995833520074	0.00030833333333333337
500	21.066762666649616	9.599998294618217E-05	0.00019733333333333332
600	21.06673333332511	6.666665844079489E-05	0.00013703703703703705
700	21.06671564625406	4.897958739036312E-05	0.00010068027210884355
800	21.066704166664067	3.7499997397105744E-05	7.708333333333334E-05
900	21.066696296294676	2.9629628006233588E-05	6.090534979423868E-05
1000	21.066690666665604	2.3999998933987854E-05	4.933333333333333E-05

Для метода Сімсона:

n	Оцінене значення	Похибка	Теоретична похибка
100	21.066666709333337	4.266666664420882E-08	3E-06
200	21.066666669333333	2.666663334593977E-09	3.75E-07
300	21.066666667193424	5.267537517283927E-10	1.1111111111111114E-07
400	21.06666666683334	1.666684568135679E-10	4.6875E-08
500	21.06666666673493	6.825828791079402E-11	2.4E-08
600	21.066666666699593	3.292299766144424E-11	1.3888888888888892E-08
700	21.066666666684444	1.7774226535038906E-11	8.746355685131195E-09
800	21.06666666667709	1.042010921992187E-11	5.859375E-09
900	21.066666666673168	6.497913318526116E-12	4.115226337448559E-09
1000	21.066666666670944	4.273914555597003E-12	3E-09

5 Аналіз роботи програми та висновки

Створимо графіки похибок:



Бачимо, що точність методів стрімко зростає по мірі росту n, а також, що метод Сімсона є значно точніший метода трапецій.

6 Лістинг програми

```
using System;

namespace Integration
{
    public class Function
    {
        public static double a = 0;
        public static double b = 2;
        public static double F(double x)
        {
            return x * x * x * x + x * x * x + 7 * x * x - 3 * x - 1;
        }
        public static double MaxFSecondDerevative()
        {
```

```
            // 12x^2 + 6x + 14, x0 = 2
            return 74;
        }
        public static double MaxFThirdDerevative()
        {
            // 24x + 6
            return 54;
        }
        public static double MaxFFourthDerevative()
        {
            // 24
            return 24;
        }
        public static double IntF(double x)
        {
            return x * x * x * x * x / 5 + x * x * x * x / 4 + 7 * x * x * x / 3 - 3 * x * x / 2 - 1 * x;
        }
        public static double IntFDef()
        {
            return IntF(b) - IntF(a);
        }
    }
}
```

```
using System;
using System.IO;

namespace Integration
{
    class Integration
    {
        public delegate double Func(double x);
        public static double IntegrateTrapeze(double a, double b, int n, Func f)
        {
            var h = (b - a) / n;
            var sum = 0.5 * (f(a) + f(b));
            for (int i = 1; i < n; i++)
                sum += f(a + i * h);
            return sum * h;
        }
        public static double IntegrateSimson(double a, double b, int n, Func f)
        {
            var h = (b - a) / n;
            var sum = (f(a) + 4 * f(a + h) + f(b));
            for (int i = 1; i < n / 2; i++)
                sum += 2 * f(a + (2 * i) * h) + 4 * f(a + (2 *
```

```
    i + 1) * h);
            return sum * h / 3;
        }

        public static void TestIntegrationTrapeze()
        {
            StreamWriter outp = new StreamWriter("
    output_trapeze.txt");
            var real = Function.IntFDef();
            outp.WriteLine("Real value: {0}", real);
            outp.WriteLine("n\testimated value\tdifference\
    tdifference theory");
            for(int i = 100; i <= 1000; i+=100)
            {
                var h = (Function.b - Function.a) / i;
                var res = Integration.IntegrateTrapeze(Function
    .a, Function.b, i, Function.F);
                outp.WriteLine("{0}\t{1}\t{2}\t{3}", i, res,
    Math.Abs(real - res), Function.MaxFSecondDerevative() * i *
     h * h * h / 12);
            }
            outp.Close();
        }
        public static void TestIntegrationSimson()
        {
            StreamWriter outp = new StreamWriter("output_simson
    .txt");
            var real = Function.IntFDef();
            outp.WriteLine("Real value: {0}", real);
            outp.WriteLine("n\testimated value\tdifference\
    tdifference theory");
            for(int i = 100; i <= 1000; i+=100)
            {
                var h = (Function.b - Function.a) / i;
                var res = Integration.IntegrateSimson(Function.
    a, Function.b, i, Function.F);
                outp.WriteLine("{0}\t{1}\t{2}\t{3}", i, res,
    Math.Abs(real - res),
                    Function.MaxFThirdDerevative() * (Function.
    b - Function.a) * h * h * h / 288);
            }
            outp.Close();
        }
    }
}
```

```
  using   System;

namespace Integration
```

```
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Integration.TestIntegrationTrapeze();
            Integration.TestIntegrationSimson();
        }
    }
}
```