机器学习概率基础 (0)

参考资料: PRML 1.2

一、最基本的概念 (讨论连续型变量)

① 概率密度

- x 位于区间 (a,b) 的概率 $P(x\in(a,b)) = \int_a^b p(x)dx$
- 概率密度需满足 $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 \end{cases}$

② 期望与协方差

- 在概率分布 $p(x)$ 下, 函数 $f(x)$ 的平均值称为 $f(x)$ 的期望 (Expection)

  连续变量: $E[f] = \int p(x) f(x)\,dx$

  离散变量: $E[f] = \sum_x p(x) f(x)$

- 方差 (variance) 度量了 $f(x)$ 在均值 $E[f(x)]$ 附近变化性的大小.

  $$\cdot\, Var[f] = E[(f(x) - E[f(x)])^2] = E[f^2(x)] - E[f(x)]^2$$

  $$\cdot\, Var[x] = E[x^2] - E[x]^2$$

- 对于两个随机变量 x, y, 定义协方差 (covariance), 表示在多大程度上 x, y 会共同变化。如果 x 和 y 相互独立, 那么它们的协方差为 0.

$$\begin{aligned} cov[x,y] &= E[(X - E(x))(Y - E(Y))] \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(x) + E(x)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(x)E(Y) - E(Y)E(x) + E(x)E(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{cov[x,y] = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

③ 贝叶斯概率 (Bayesian)

贝叶斯定理: $P(w|D) = \dfrac{P(D|w)\cdot P(w)}{P(D)}$

- 其中 $P(w|D)$ 称为后验概率, 在观测到 D 之后估计 w 的不确定性.

- $p(D|w)$ 称为似然函数，表示在不同参数向量 w 下，观测数据出现的可能性的大小。