

高温作业专用服装设计

摘 要

如何根据环境条件设计相应的服装是专用服装设计面临的主要问题。本文通过建立一维复合介质热传导方程,对高温作业专用服中各分层间的传热过程进行模拟,确定不同环境条件下作业服中的温度分布。进而从降低研发成本、缩短研发周期的角度,求解约束条件下介质层的最优厚度,为实验测试提供参考。

关于问题一 从一般性热传导方程出发,将作业服各分层视为相互接触的平行无限大平板后,建立一维复合介质热传导方程。使用 *Crank – Nicholson* 方法进行求解并拟合附件 2 给出的实验数据,得到方程中涉及的实验室环境与 I 层、IV 层与假人皮肤之间的对流换热系数 h_I , h_{IV} 分别为 $117.41W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 、 $8.36W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 。进而将 h_I 、 h_{IV} 与附件 1 中提供的各分层参数代回原方程,在问题一提供的条件下进行求解,得到作业服各分层随时间与空间变化的温度分布。

关于问题二 考虑到经济性,II 层最优厚度意为满足约束条件的最小厚度,此时所需原材料最少。该问题为单变量非线性规划问题,利用问题一中建立的模型,在附件 1 给定的 II 层厚度范围内进行步长为 $2mm$ 的定步长搜索,在不同厚度取值下求解模型得到假人皮肤外侧温度随时间的变化。利用约束条件缩小搜索的范围,反复减小步长进行搜索,最终得到满足约束条件的 II 层最小厚度即最优厚度为 $17.6mm$,此时皮肤外侧温度超过 $44^\circ C$ 的时长为 $281s$ 。

关于问题三 II 层与 IV 层的最优厚度应使得研发成本和研发周期最小化。考虑到 IV 层为空隙层,求解过程中我们首先使 II 层厚度最小化,在这一前提下搜索满足约束条件且使得研发周期最小化的 IV 层厚度。与问题二类似,我们首先使用区域搜索算法初步确定满足约束条件的 II 层、IV 层厚度取值范围。通过循环遍历找到所有满足条件的两者厚度组合,根据优化目标求得最终结果,得到 II 层最小厚度与对应的 IV 层最优厚度分别为 $19.3mm$ 、 $6.4mm$,此时皮肤外侧温度超过 $44^\circ C$ 的时长为 $290s$ 。

最后,我们进行了灵敏性分析,发现一维复合介质热传导方程对厚度较为敏感,能够区分不同分层在实际隔热过程中发挥的不同作用;对环境的对流换热系数 h_I 不敏感,保证了 h_I 的拟合求解误差不会对模型的求解结果产生明显影响。

关键词 一维复合介质热传导方程 *Crank – Nicholson* 方法 非线性规划



1 问题重述

1.1 问题背景

高温作业服是重要的防护装备，可用于避免高温环境下工作人员的灼伤。在设计过程中，需要对作业服进行实验测试，以检验其实际防护效果。在测试前对作业服在实验室条件下的工作效果进行模拟可以降低研发成本，缩短测试周期，显得尤为重要。

1.2 题目重述

高温作业服通常由三层织物材料构成，分别记为 I、II、III 层。其中，I 层与外界环境接触，III 层与人体皮肤之间存在空隙层，记作 IV 层。测试过程中，实验室环境与用于实验的假人均保持恒温，且假人温度为 37°C ，作业服包裹在假人外侧。

根据上述条件，要研究以下三个问题：

- (1) 给定各分层密度、比热、热传导率、厚度等参数值或范围，环境温度为 75°C ，II 层厚度为 6 mm，IV 层厚度为 5 mm 以及在该条件下测量得到的假人皮肤外侧温度在 90 分钟内的变化情况，要求建立数学模型并计算各层温度分布，生成相应的 Excel 文件。
- (2) 给定环境温度为 65°C ，IV 层的厚度为 5.5 mm，要求确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。
- (3) 给定环境温度为 80°C ，要求确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44° 不超过 5 分钟。

2 模型假设

1. 不考虑热辐射的影响。
2. 将各层视为平行无限大带厚度的平板，即仅考虑在厚度方向上的温度变化。
3. 忽略 I 层、II 层、III 层、IV 层之间的接触热阻，即各层接触面两侧的温度连续。
4. 假设测试刚开始时各分层温度与假人温度相同。
5. 假设各分层内部不含热源。

3 符号说明

表1列出了本文需要的符号，文中出现的其它符号将在出现时进行解释。



表 1: 符号说明

符号	符号描述	单位
T_i	第 i 分层温度	$^{\circ}\text{C}$
ρ_i	第 i 分层密度	kg/m^3
t	时间	s
c_i	第 i 分层比热	$\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$
k_i	第 i 分层热传导率	$\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$
α_i	第 i 分层热扩散率	m^2/s
x_i	第 i 分层与第 $i+1$ 分层交界处坐标	mm
x	位置坐标	mm
d_i	各分层厚度	mm
h_I	实验室环境与 I 分层表面对流换热系数	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$
h_{IV}	IV 分层表面与假人皮肤对流换热系数	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$
T_s	实验室环境温度	$^{\circ}\text{C}$
T_w	假人皮肤外侧平衡温度	$^{\circ}\text{C}$
T_r	假人皮肤温度	$^{\circ}\text{C}$
T_0	第 i 分层初始温度	$^{\circ}\text{C}$

4 问题分析

4.1 问题一的分析

问题一本质上就是描述测试过程中实验环境与各层之间以及假人皮肤的传热过程，考虑建立热传导方程。实验室环境与 I 层之间以及 IV 层与皮肤之间存在对流换热，而题目提供的附件中缺少相应的对流换热系数 h_1 、 h_2 ，因而考虑利用皮肤外侧的温度数据（附件 2）计算得到它们，最终确定热传导方程组。具体步骤如下：

1. 列出各层满足的热传导方程，确定边界条件，此时方程中含有未知的对流换热系数 h_I 、 h_{IV} 。
2. 求解热平衡状态下的热传导方程，由于平衡时皮肤外侧温度已知，由此列出 h_I 与 h_{IV} 满足的关系式。
3. 对 h_I 进行赋值，可以得到皮肤外侧温度的模拟结果，改变 h_I 并将模拟结果与题目提供的数据（附件 2）进行比较。确定拟合结果最佳情况下的 h_I ，进而确定 h_{IV} 。
4. 将 h_I 、 h_{IV} 代入热传导方程，求解得到的温度分布。

4.2 问题二的分析

考虑到作业服的舒适性与经济性，在保证假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟的前提下应使得作业服更加轻便，节约材料，即 II 层最优厚度应理解为最小厚度。由于题目给定了 II 层厚度的范围，且问题二本质上为单变量非线性约束的优化问题，因而可以利用问题一建立的模型得到不同 II 层厚度下假人皮肤外侧温度的变化情况，在给定 II 层厚度范围内枚举搜索满足约束条件的最小值。



4.3 问题三的分析

问题三有两个变量，分别为 II 层厚度与 IV 层厚度，相比于问题二增加了一个变量。在现实生活中，IV 层并不影响研发成本，所以研发成本优化主要在于减小 II 层的厚度。此外，根据题目要求，需要缩短作业服的研发周期，那么我们可以寻求 II 层、IV 层厚度使得作业服能在更短的时间内达到稳态。在本题中，相比于缩短研发周期，我们给与成本的权重更高，即在满足 II 层的厚度尽可能小的情况下，再考虑更短的达到稳态的时间。先粗精度，大范围枚举搜索估算出两个厚度对符合条件的大致范围，再使用小步长找出所有的符合条件，即可得到其中的最优解。

5 模型建立

假人皮肤外侧的温度变化源于实验室环境与工作服各分层及假人皮肤之间的热交换，该过程可以用非稳态热传导方程进行描述。下面我们建立坐标系，依次确定各分层的热传导方程及相应的边界条件，最终给出模型。

5.1 热传导方程的确定

在三维等方向均匀介质中的热传导方程满足下式 [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} q \quad (1)$$

其中 α 、 c 、 ρ 分别为介质热扩散率、比热与密度。 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 描述温度随时间的变化， $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ 描述温度随空间的变化， $\frac{1}{c\rho} q$ 描述内部热源的影响。在作业服测试实验条件下，各分层内不含热源。由此式1化简为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

为了进一步简化模型，我们将各分层视为平行无限大平板，并建立坐标系如图1，此时只需要考虑在厚度方向（即 x 方向）上的温度变化。式2进一步化简为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



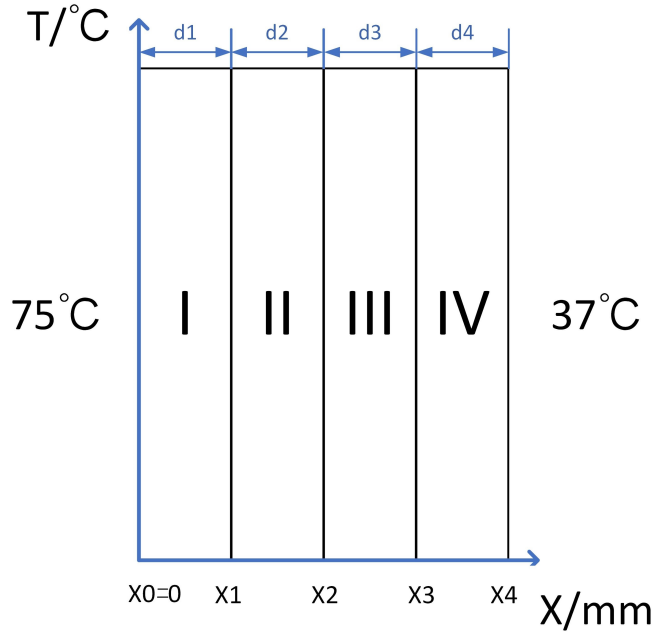


图 1: 模型示意图

对于不同分层，热扩散率 α_i 不同，相应地对于 i 分层热传导方程为：

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad (3)$$

5.2 边界条件与初始条件的确定

热量传递主要有三种方式：热传导、对流与热辐射。为了简便计算，我们忽略热辐射的影响。此时，问题变为典型的一维复合介质传热，满足如下边界条件 [4]：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i|_{x=x_i} = T_{i+1}|_{x=x_i}, (i = 1, 2, 3) \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} |_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} |_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3) \\ -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=x_0} + h_I T_1 |_{x=x_0} = h_I T_s \\ k_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=x_4} + h_{IV} T_4 |_{x=x_4} = h_{IV} T_r \\ x_i = \sum_{j=1}^i d_j, (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right. \quad (4)$$

从上到下，各等式描述分别为分层在交接面两侧温度连续，热流量相等，I 层与实验室环境之间、IV 层与假人皮肤之间均以对流方式换热。

假设测试开始时，各分层温度相同，则可以给出初始条件：

$$T_i(x, 0) = T_0, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$



5.3 模型的确定

至此，综合式3、4、5可以得到描述各分层温度分布及其随时间变化满足的一维复合介质热传导方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \\ T_i|_{x=x_i} = T_{i+1}|_{x=x_i}, (i = 1, 2, 3) \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial x}|_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x}|_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3) \\ -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}|_{x=x_0} + h_I T_1|_{x=x_0} = h_I T_s \\ k_4 \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=x_4} + h_{IV} T|_{x=x_4} = h_{IV} T_r \\ T_i(x, 0) = T_0, (i = 1, 2, 3, 4) \\ x_i = \sum_{j=1}^i d_j, (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right. \quad (6)$$

6 问题求解

6.1 模型参数数值确定

利用附件 1 可直接得到各分层的热传导率 k ，结合热扩散率的定义 $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ ，可进一步确定各分层热扩散率。至此，模型中只有 h_I 、 h_{IV} 仍为未知量。下面利用平衡状态获得 h_I 、 h_{IV} 满足的关系式，最终通过对 h_I 进行赋值，获得假人皮肤外侧的模拟结果对附件 2 中的数据进行拟合，拟合程度最佳时即为实验测试条件下的 h_I 。平衡条件下温度不再随时间变化，即： $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ 。显然，此时各层温度分布 T_i 的通解满足：

$$T_i = a_i x + b_i, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7)$$

其中， a_i, b_i 为未知数。将式7代入方程组6并化简可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} -(k_1 + h_I x_0) a_1 + h_I b_1 = h_I T_s \\ (k_4 + h_{IV} x_4) a_4 + h_{IV} b_4 = h_{IV} T_r \\ x_{i+1} a_i - x_{i+1} a_{i+1} + b_i - b_{i+1} = 0, (i = 1, 2, 3) \\ k_i a_i - k_{i+1} a_{i+1} = 0, (i = 1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (8)$$

再由平衡条件下皮肤外侧温度模拟结果与测量结果相等这一条件，得到：

$$T_4|_{x=x_4} = T_w \quad (9)$$

其中， T_w 为附件 2 给出的皮肤外侧平衡温度。

式8，式9组成了含有 10 个未知数，9 个方程的方程组，最终可以使用 MATLAB 中的 solve 函数将 h_{IV} 用 h_I 以及其它已知参数表示。由于表达式过于冗长，此处不作展示。至此，模型中的参数由 h_I 、 h_{IV} 减少为 h_I 。下面对 h_I 进行赋值，使用 Crank-Nicholson 方



法 [6] 对模型进行数值求解, 得到皮肤外侧温度变化后对附件 2 中的数据进行拟合, 确定最佳的 h_I 。

在 Crank-Nicholson 方法中, 定义格点 $T_{i,n}$, 使其满足 $x = x_{min} + ih$, $t = nk$ 。我们有如下差分方式:

$$\begin{cases} T = \frac{T_{i,n} + T_{i,n+1}}{2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{k} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,n} - T_{i-1,n} + T_{i+1,n+1} - T_{i-1,n+1}}{4h} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,n} - 2T_{i,n} + T_{i-1,n} + T_{i+1,n+1} - 2T_{i,n+1} + T_{i-1,n+1}}{2h^2} \end{cases} \quad (10)$$

将上式代入3令 $r = \frac{k}{2h^2}$, 化简可得:

$$-r\alpha T_{i+1,n+1} + (1 + 2r\alpha)T_{i,n+1} - r\alpha T_{i-1,n+1} = r\alpha T_{i+1,n+1} + (1 - 2r\alpha)T_{i,n+1} + r\alpha T_{i-1,n+1} \quad (11)$$

在方程11中, 令 $A_i = -r\alpha$, $B_i = 1 + 2r\alpha$, $C_i = r\alpha$, $D_i = r\alpha T_{i+1,n+1} + (1 - 2r\alpha)T_{i,n+1} + r\alpha T_{i-1,n+1}$ 。要注意的是, 由于热扩散率在不同材料层中不同, 因此, 这个方程是分段的, 每层的传热系数不同。假设 $N_i = \text{round}(\frac{d_i}{h})$ (d_i 为第 i 层厚度, $i = 1, 2, 3, 4$), 则:

当 $n = 1, 2, \dots, N_1$ 时, $\alpha = \alpha_1$;

当 $n = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2$ 时, $\alpha = \alpha_2$;

当 $n = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3$ 时, $\alpha = \alpha_3$;

当 $n = N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + 2, \dots, N$ 时, $\alpha = \alpha_4$ 。

由平衡时的能量守恒可知:

$$k_i \frac{\partial T}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T}{\partial x}$$

以第 I、II 层交界处为例, 化简后如下所示:

$$k_1 \frac{T_{N_1+1} - T_{N_1}}{h} = k_2 \frac{T_{N_1+2} - T_{N_1+1}}{h} \\ -k_1 T_{N_1} + (k_1 + k_2)T_{N_1+1} - k_2 T_{N_1+2} = 0$$

II、III 层、III、IV 层交界处同理可得:

$$-k_2 T_{N_1+N_2} + (k_2 + k_3)T_{N_1+N_2+1} - k_3 T_{N_1+N_2+2} = 0 \\ -k_3 T_{N_1+N_2+N_3} + (k_3 + k_4)T_{N_1+N_2+N_3+1} - k_4 T_{N_1+N_2+N_3+2} = 0$$

再根据边界条件:

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + h_I T \Big|_{x=x_0} = h_I T_s \\ k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} + h_{IV} T \Big|_{x=x_4} = h_{IV} T_r$$

可得:

$$-k_1 \frac{T_2 - T_1}{h} + h_I T_1 = h_I T_s \\ k_4 \frac{T_{I+1} - T_I}{h} + h_{IV} T_{I+1} = h_{IV} T_r$$



根据方程11，结合上述离散化的边界方程，我们可以列出矩阵方程组，如下所示：

$$\begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & & & \vdots \\ 0 & C_3 & B_3 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & A_{I-1} & \\ \vdots & & & C_I & B_I & A_I \\ 0 & \cdots & & C_{I+1} & B_{I+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,n+1} \\ T_{2,n+1} \\ \vdots \\ T_{I+1,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{I+1} \end{pmatrix}$$

在 MATLAB 中对该矩阵方程组进行求解，即可得到模型的数值解。图2即为在 110~120 $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 范围内改变 h_1 对附件 2 中的数据进行拟合得到的方均根误差变化曲线，方均根最小处对应的 h_I 为 **117.41** $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$

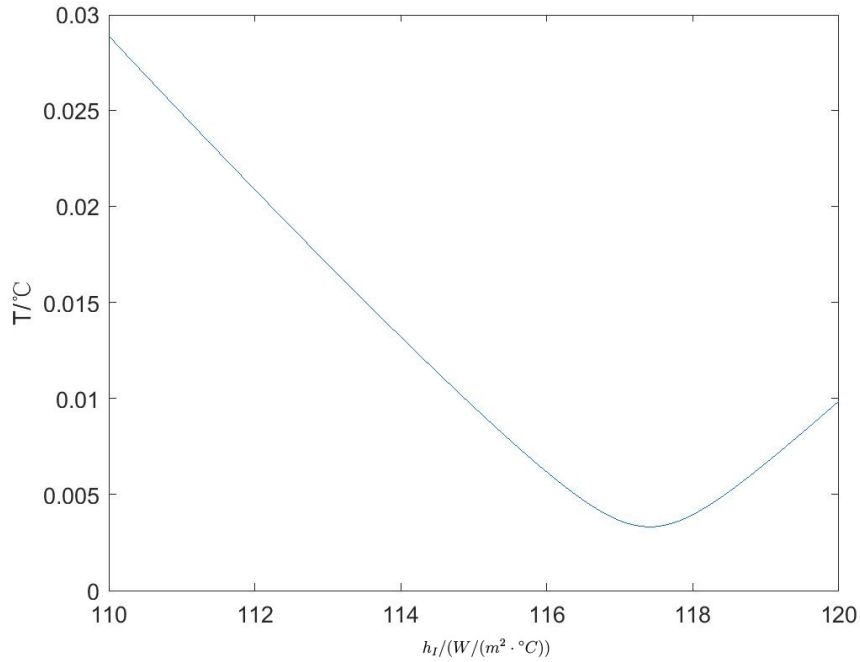


图 2: 方均根误差随 h_I 的变化曲线

图3为 h_I 取为该值时，皮肤外侧温度模拟结果与附件 2 在各个时间点之差，可以看到此函数一开始就达到最大值——接近 $0.025^\circ C$ ，随后下降进行震荡，但其最大幅度保持在 $0.01^\circ C$ 内，最后快速下降无限趋近于 $0^\circ C$ 。由此可见，用我们拟合得到的 h_I 解出的方程，与附件 2 给出的数据符合得很好。



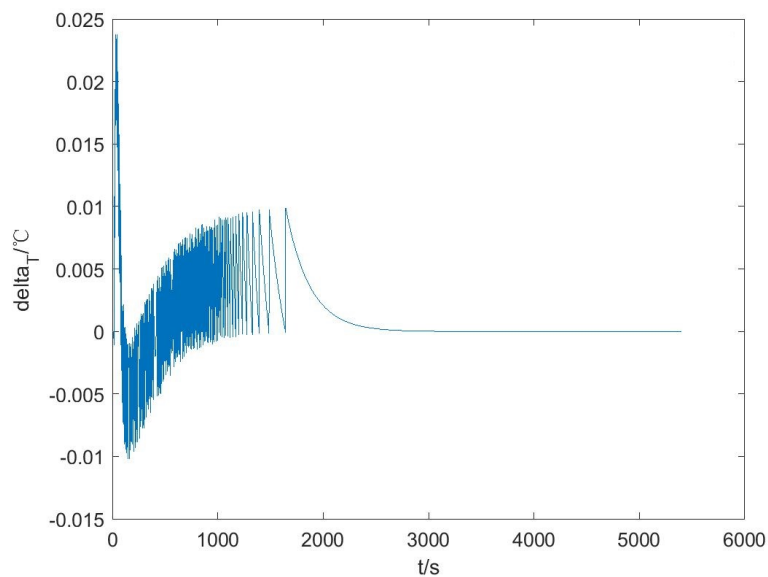


图 3: 模拟结果与附件 2 之差 ($h_I = 117.41W/(m^2 \cdot ^\circ C)$)

将 h_I 代入之前得到的 h_{IV} 关系式, 计算得 $h_{IV}=8.36W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 。至此, 模型中的所有参数取值已知, 可以用于计算温度分布。

6.2 问题一的求解

使用 Crank-Nicholson 方法对 $h_I=117.41W/(m^2 \cdot ^\circ C), h_{IV}=8.36W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 条件下的模型进行数值求解, 得到结果如图4。

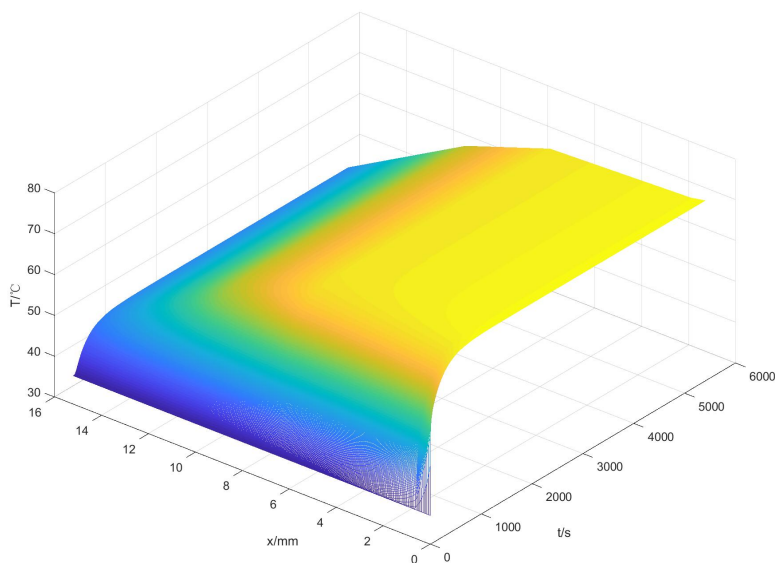


图 4: 温度分布



可以看到，在空间分布上从 I 层到 IV 层温度逐渐下降；在时间分布上，随着时间的推移各分层的温度均在上升，最终达到平衡，符合热传导的规律。取交界面为考察点，对图4在交界面对应的 x 坐标处进行截取，得到图5，此即为写入 problem1.xlsx 中的数据。

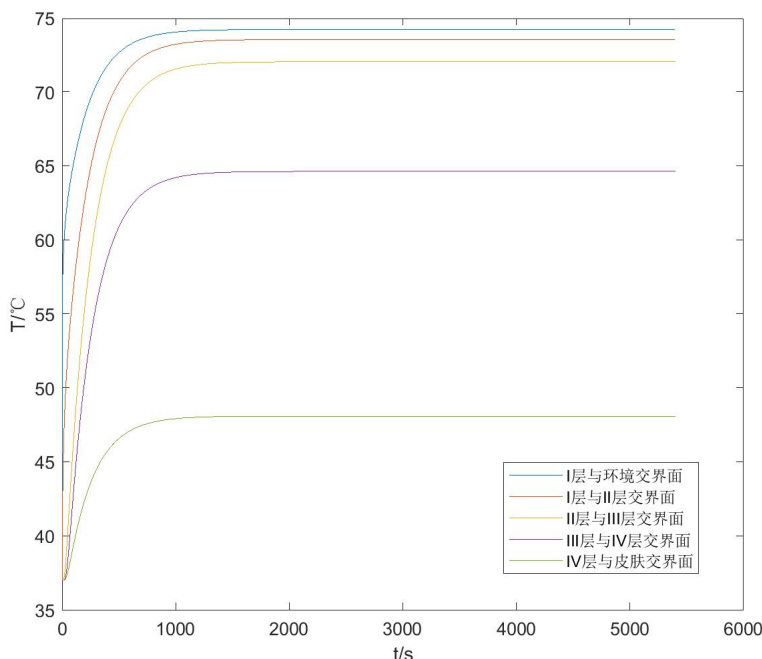


图 5: 交界面温度变化情况

6.3 问题二的求解

在问题二中，我们将最优厚度理解为满足题目约束条件的最小厚度。因为 II 层厚度越小，作业服的制作所需原材料越少，相应地研发成本越低。在问题一的求解基础上，我们已经得到了模型中重要的两个对流换热系数 h_I, h_{IV} 。模型中涉及的热传导率 k_i ，与热扩散率 α_i 均可由附件 1 中的参数计算得到。实验室环境温度、假人温度同样由题目给出。各分层的厚度方面只有 II 层厚度未知。因此，模型中的参数仅为 II 层厚度，一旦 II 层厚度 d_2 确定，模型的解就得以确定 [3]。

为了缩小考虑的范围，先在附件 1 给定的 d_2 取值区间内进行步长为 2mm 的定步长搜索。图6、图7分别为 60 分钟内假人皮肤外侧最大温度与 II 层厚度的关系，假人皮肤外侧温度超过 44°C 的时长与 II 层厚度的关系。



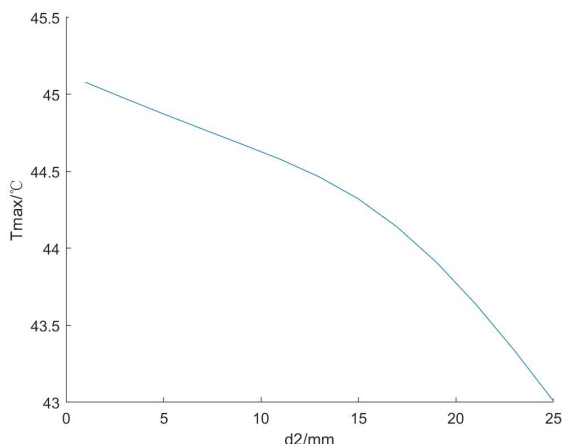


图 6: 最大温度与 II 层厚度关系

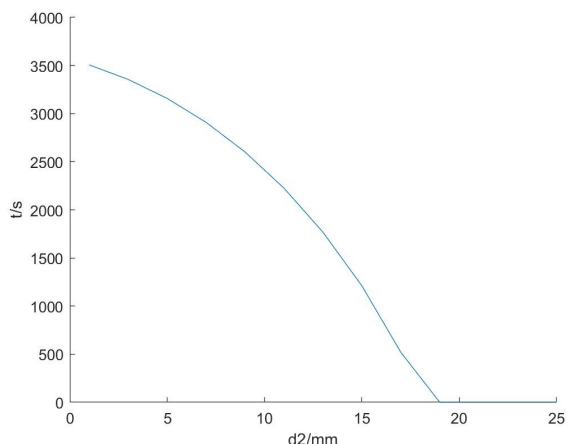


图 7: 温度超过 44°C 的时长与 II 层厚度关系

从图6、图7中可以看到，随着 II 层厚度的增加，最大温度与超过 44°C 时长呈单调递减。在附件 1 所给的 II 层厚度范围及时间内，假人皮肤表面外侧最大温度始终不会超过 47°C，则在确定 d_2 时只需要考虑超过 44°C 时长不超过 5 分钟产生的约束。进一步减小搜索步长与范围，最终在 17.3~17.9mm 范围内，以 0.05mm 步长搜索得到结果如图8。

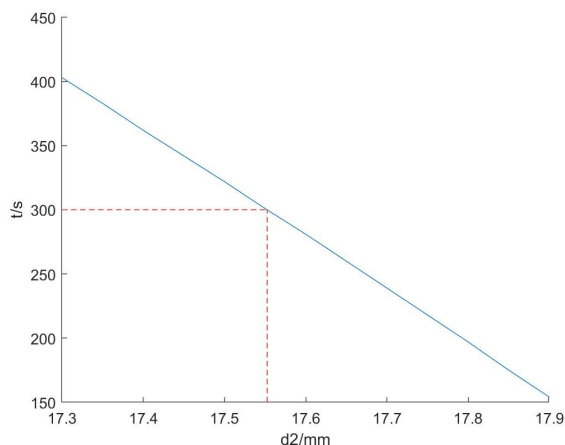


图 8: 温度超过 44°C 时长与 II 层厚度关系

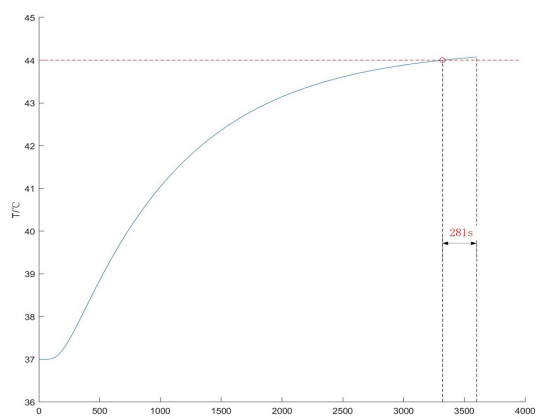


图 9: 皮肤外侧温度变化情况 ($d_2=17.6\text{mm}$)

由图8确定 II 层最优厚度为 **17.6mm**，此时皮肤外侧温度随时间的变化如图9所示，超过 44°C 的时长为 **281s**，短于 5 分钟，温度的最大值也小于 47°C，满足题目条件。

6.4 问题三的求解

第三问与第二问都为优化问题，不同之处在于第三问多了一个变量 IV 层的厚度。既然作为优化问题，我们首先定义优化的目标：尽可能地减少成本，在满足这个要求的前提下，再减少开发周期。反映到本题中即为材料层 II 的厚度应该尽可能的小，这是由于 IV 层为空气层，其不会被计算在隔热服的生产成本当中，所以只考虑材料层 II 的成本。为了减少研发周期，要使检测隔热服达到热平衡所需的平衡时间更短。在本题中，我们赋予



成本因素的权重更大，所以必须先满足 II 层厚度尽可能薄的情况，再选择不同的 IV 层厚度，使得隔热服测试时达到热平衡的所需平衡时间更短。

根据常识我们可以知道，隔热服的厚度越厚，其隔热效果越好。所以，为了初步确定 $(d2, d4)$ 的大致范围，以满足体表最高温度小于 47°C 且高于 44°C 的时间少于 5 分钟约束条件的 $(d2, d4)$ ，首先可将空气层 IV 的厚度定在最大值 6.4mm，然后如同第二问那样找出最小的 II 层厚度的大致下界，然后可开始运用如下示意的伪代码，区域搜索出所有满足题目条件的 $(d2, d4)$ 组：

Algorithm 1 区域搜索

Input: 第二层厚度范围边界: $D2_min, D2_max$, 第四层厚度范围边界: $D4_min, D4_max$, 第二层步长: $D2_delta$, 第四层步长: $D4_delta$

Output: 搜索矩阵, 符合条件输出 1, 否则输出 0

将第二层和第四层用步长分成若干份, 份数分别用 $length(D2)$ 和 $length(D4)$ 表示;

初始化搜索矩阵 $flag$, 行列数分别为初始化为 $length(D2)$ 和 $length(D4)$, 初始化为 0; $i \leftarrow 1; j \leftarrow length(D4)$;

```

1: while  $i < length(D2) \&\& j \geq 1$  do
2:   if 皮肤最高温度  $< 47^{\circ}\text{C} \&\&$  持续时间  $> 300s$  then
3:      $flag(i, j)$  即其同一列下方所有元素设为 1;
        $j --$ ;
4:   else
5:      $i ++$ ;
6:   end if
7: end while
8: return  $flag$ ;

```

为了更直观的显示符合条件的区域范围，可视化如下：

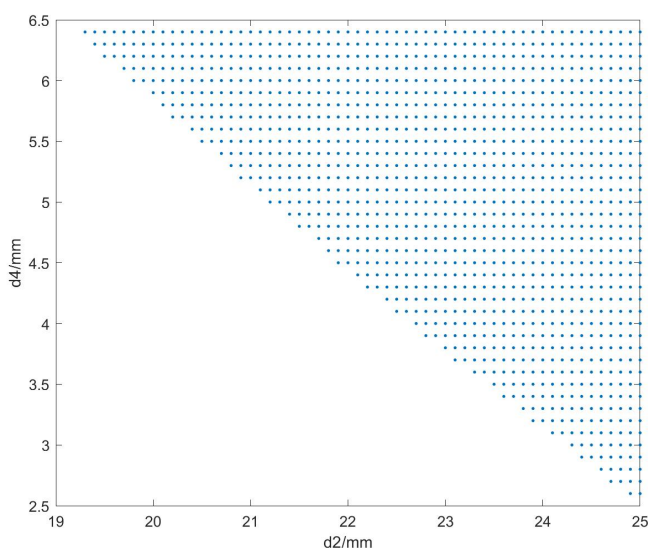


图 10: 符合条件的 $(d2, d4)$ 范围图



图10横轴为材料层 II 的厚度，纵轴为空气层 IV 的厚度，计算时两者的步长皆为 $0.1mm$ 。图中蓝色的点代表符合约束条件的 (d_2, d_4) 对，可进一步进行优化得到更精确的满足要求的点集范围，根据不同的优化目标能够得到不同的结果。根据我们定义的优化目标，即在保证 II 层厚度最小的条件下，选择 IV 层厚度使得平衡时间最短。图中最左上角的唯一点即为我们的目标解 $(d_2, d_4) = (19.3mm, 6.4mm)$ ¹⁰。在此条件下的皮肤外侧温度随时间变化如图11所示：

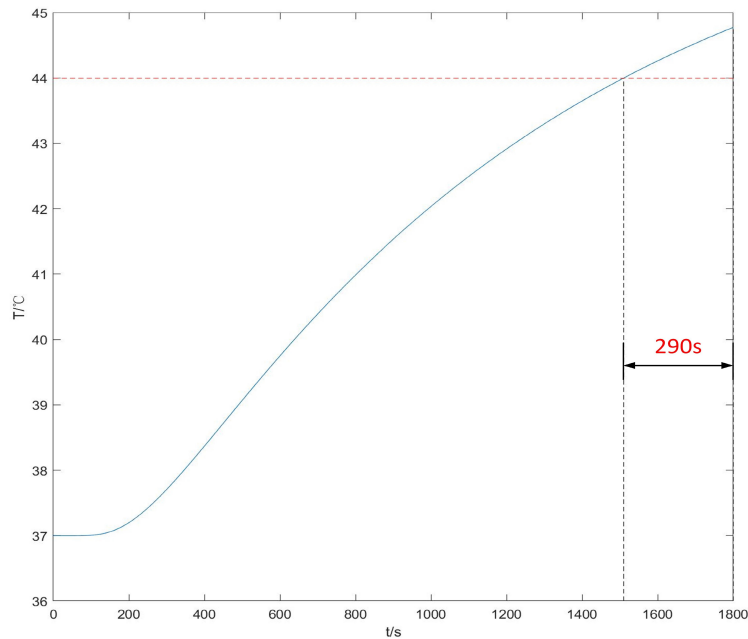


图 11: 皮肤外侧温度变化情况

如图11所示，在规定时间内，最高的体表温度低于 $47^{\circ}C$ ，且高于 $44^{\circ}C$ 所持续的时间为 290s，短于 5 分钟，满足题目所要求的两个条件。

7 模型评价

7.1 灵敏性分析

7.1.1 模型对各分层厚度的灵敏性

考虑到实际生产过程中，由于做工精度问题，各分层的厚度可能存在偏差，有必要分析一下我们所建立的模型对各分层厚度的敏感性。以问题一为例，分别考虑 I、II、III、IV 层厚度变化对皮肤外侧平衡温度的影响，以此来确定模型对各分层厚度的敏感性。对分层厚度先后进行 $\pm 0.5mm$ 范围内，步长为 $0.1mm$ 的调整，得到皮肤外侧平衡温度与各分层厚度变化关系如图12：

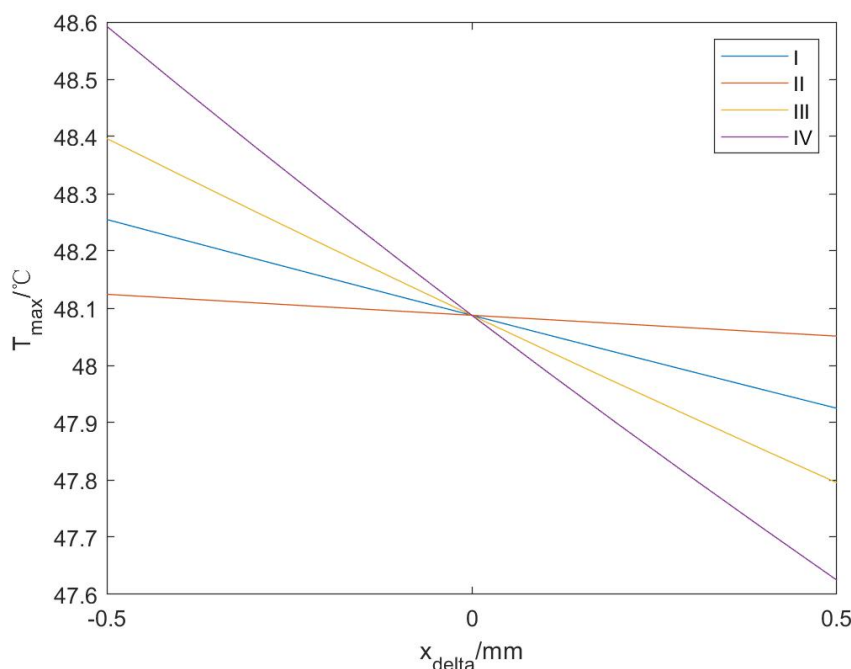


图 12: 皮肤外侧平衡温度与各分层厚度变化的关系

可以看出, IV 层(即空隙)的厚度对稳态温度的影响最大, 说明我们建立的模型对分层厚度较为敏感, 而且能够区分不同分层在实际隔热过程中发挥的不同作用。同时, 我们也能够理解作业服要与身体留有空隙的原因。

7.1.2 模型对 h_I (对流换热系数) 的灵敏性

在我们建立的模型中, 对流换热系数 h_I 根据附件 2 中的数据拟合得到, 存在一定的误差, 研究模型对 h_I 的灵敏性是从侧面研究结果的可靠性。

以问题二为例, 我们通过研究对流换热系数 h_I 对 II 层最优厚度的影响来进行灵敏性分析, 所得结果列于表2。

表 2: II 层最优厚度随 h_I 的变化

对流换热系数 h_I	113.41	114.41	115.41	116.41	117.41	118.41	119.41	120.41
II 层最优厚度 d_{2min}	17.5	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.7

从表2可以看出, 对流换热系数 h_I 的小范围变化对 II 层最优厚度影响不大, 说明我们的模型对 h_I 不敏感, h_I 的求解误差不会对最终结果产生明显影响。

7.2 优缺点分析

7.2.1 优点

1. 我们的模型在传热学理论的基础上, 使用有限差分方法数值计算出温度分布及随时间演化, 并与附件所给出数据吻合得非常好。



2. 对问题二，三的求解简单直观，计算效率高。
3. 对于问题三，求出了整个符合条件的区域，可自由针对不同优化目标得到不同结果。

7.2.2 缺点

1. 忽略了各分层介质的具体形状。
2. 忽略热辐射的影响，虽然简化了方程的求解但是所得到的模型在高温条件下误差会增大。
3. 使用数值方法求解偏微分方程组，可能引入误差。



参考文献

- [1] 杨世铭, 陶文栓. 传热学 [M]. 第四版, 北京: 高等教育出版社, (2006)
- [2] 张洪济. 热传导 [M]. 第一版, 北京: 高等教育出版社, (1992)
- [3] 陆金甫, 关治. 偏微分方程 [M]. 第二版, 北京: 清华大学出版社, (2005)
- [4] David W. Hahn. Heat conduction [M]. third edition, John Wiley and Sons, New York, (2012).
- [5] F.de Monte. "An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media" [J], *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, 45(6):1333-1343.
- [6] Fadugba S.E., Edogbanya O.H, Zelibe S.C. "Crank Nicolson method for solving parabolic partial differential equations" [J], *IJA2M*, 2013, 1(3):8-23.



附录

A 模型求解代码

A.1 问题一代码

```
% Matlab
% Q1.m
clear;
close all;
clc;

pho=[300;862;74.2;1.18];%密度
c=[1377;2100;1726;1005];%比热容
lamda=[0.082;0.37;0.045;0.028];%热导率
a=lamda./(pho.*c);%热扩散率

d=[0.6;6;3.6;5]*10^-3;%各层厚度

TT=273.15;%单位转换
T_in=37;%体温
T_out=75;%环境温度
T_s=48.08;%稳定温度

xmin=0;
xmax=sum(d);

N=5400;%总时间
h=0.05*10^-3;%空间步长
k=1;%时间步长
r=k/h^2;
I=round((xmax-xmin)/h);%空间间隔数

%% 构造线性方程组的系数矩阵
A=zeros(1,I);
B=zeros(1,I+1);
C=zeros(1,I);

N1=round(d(1)/h);
N2=round(d(2)/h);
N3=round(d(3)/h);
N4=round(d(4)/h);

for i=1:N1
A(i)=-a(1)*r;
```



```

B(i)=2+2*r*a(1);
C(i)=-r*a(1);
end

for i=N1+1:N1+N2
A(i)=-a(2)*r;
B(i)=2+2*r*a(2);
C(i)=-r*a(2);
end

for i=N1+N2+1:N1+N2+N3
A(i)=-a(3)*r;
B(i)=2+2*r*a(3);
C(i)=-r*a(3);
end

for i=N1+N2+N3+1:N1+N2+N3+N4
A(i)=-a(4)*r;
B(i)=2+2*r*a(4);
C(i)=-r*a(4);
end

T=zeros(I+1,N+1);
T(:,1)=(T_in+TT)*ones(I+1,1);%一开始整件衣服都是体温

T_xt=xlsread('C:\Users\wangc\Desktop\CUMCM正赛\2018\2018-A-
Chinese\CUMCM-2018-Problem-A-Chinese-Appendix.xlsx','附
件2','A3:B5403');

%% 寻找的最优拟合解h1
h_min=110;
h_max=120;
delta_h=0.1;
H1=h_min:delta_h:h_max;
delta=zeros(1,length(H1));

for j=1:length(H1)

h1=h_min+(j-1)*delta_h;

% h1=121.41;

k1=lamda(1);k2=lamda(2);k3=lamda(3);k4=lamda(4);
x1=d(1);x2=d(1)+d(2);x3=d(1)+d(2)+d(3);x4=d(1)+d(2)+d(3)+d(4);

```



```

t1=T_out+TT; t2=T_in+TT; t3=T_s+TT;

h5=-((h1*k2*k3*k4*t1)...
/(k1*k2*k3*k4 - h1*k1*k2*k3*x3 - h1*k1*k2*k4*x2 ...
- h1*k1*k3*k4*x1 + h1*k1*k2*k3*x4 + h1*k1*k2*k4*x3 ...
+ h1*k1*k3*k4*x2 + h1*k2*k3*k4*x1) ...
- (h1*k2*k3*k4*t3)...
/(k1*k2*k3*k4 - h1*k1*k2*k3*x3 - h1*k1*k2*k4*x2 ...
- h1*k1*k3*k4*x1 + h1*k1*k2*k3*x4 + h1*k1*k2*k4*x3 ...
+ h1*k1*k3*k4*x2 + h1*k2*k3*k4*x1))...
/(t2/k1 - t3/k1);

% h5=8.36;

AA=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);
AA(1,1)=lamda(1)/h+h1;
AA(1,2)=-lamda(1)/h;
AA(I+1,I)=-lamda(4)/h;
AA(I+1,I+1)=lamda(4)/h+h5;

AA(N1+1,N1)=-lamda(1);
AA(N1+1,N1+1)=lamda(1)+lamda(2);
AA(N1+1,N1+2)=-lamda(2);

AA(N1+N2+1,N1+N2)=-lamda(2);
AA(N1+N2+1,N1+N2+1)=lamda(2)+lamda(3);
AA(N1+N2+1,N1+N2+2)=-lamda(3);

AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-lamda(3);
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=lamda(3)+lamda(4);
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-lamda(4);

for n=1:k:N
D=zeros(I+1,1);
D(1)=h1*(T_out+TT);
D(I+1)=h5*(T_in+TT);
for i=2:1:N1
D(i)=r*a(1)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(1))*T(i,n)+r*a(1)*T(i+1,n);
end
for i=N1+1:1:N1+N2
D(i)=r*a(2)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(2))*T(i,n)+r*a(2)*T(i+1,n);
end
for i=N1+N2+1:1:N1+N2+N3
D(i)=r*a(3)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(3))*T(i,n)+r*a(3)*T(i+1,n);
end
end

```



```

for i=N1+N2+N3+1:1:N1+N2+N3+N4
D(i)=r*a(4)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(4))*T(i,n)+r*a(4)*T(i+1,n);
end
D(N1+1)=0;
D(N1+N2+1)=0;
D(N1+N2+N3+1)=0;
T(:,n+1)=AA\D;%解方程
end

% figure(1);
% mesh(0:k:N,1000*(0:h:sum(d)),(T-TT));
% ylabel('x/mm');
% xlabel('t/s');
% zlabel('T°C/');

delta(j)=sqrt(sum((T_xt(:,2)-T(end,:)+TT).^2)/length(T_xt(:,1)))
;%方均根误差
差
end
%% 绘制方均根误差图像，寻找最优拟合项
figure(2);
plot(H1,delta);
xlabel('h1/(W/(m°C)^2)');
ylabel('T°C/');
[~,position] = min(delta);
h1_p=H1(position);
disp(h1_p);
%%
% figure(2);
% plot(T_xt(:,1),T_xt(:,2)-(T(end,:)-TT));
% xlabel('t/s');
% ylabel('delta_T°C/');
% legend拟合函数与原数据相差('');
% hold on;
% plot(T_xt(:,1),);
% hold off;

% figure(3);
% plot(1000*(0:h:sum(d)),T(:,end)-T_0);
% xlabel('x/mm');
% ylabel('T°C/');
% legend结尾时刻温度随深度分布('')

%% 输出problem1.文件xlsx

```



```

% T_problem1=zeros(N+1,4);
% T_problem1(:,1)=T(1,:);
% T_problem1(:,2)=T(N1+1,:);
% T_problem1(:,3)=T(N1+N2+1,:);
% T_problem1(:,4)=T(N1+N2+N3+1,:);
% T_problem1=T_problem1-TT;
% % xlswrite('C:\Users\wangc\Desktop\CUMCM
    赛\2018\code\problem1.xlsx',T_problem1);
% figure(4);
% plot(0:k:N,T_problem1(:,1)',0:k:N,T_problem1(:,2)',0:k:N,
    T_problem1(:,3)',0:k:N,T_problem1(:,4)',0:k:N,T_xt(:,2)')
% legend('层与环境交界面I','层与层交界面III','层与层交界面IIII','层与层
    交界面IIIIV','层与皮肤交界面IV');
% xlabel('t/s');
% ylabel('TC/');

```

A.2 问题二代码

```

% Q2.m
clear;
close all;
clc;

%% 参数设定
pho=[300;862;74.2;1.18];
c=[1377;2100;1726;1005];
lamda=[0.082;0.37;0.045;0.028];
a=lamda./(pho.*c);

TT=273.15;
T_in=37;
T_out=65;
T_s=48.08;

h1=117.41;%第一问算出来的结果
h5=8.36;

N=3600;%time
h=0.05*10^-3;%delta x
k=1;%delta time
r=k/h^2;

%% 寻找层符合条件的最小厚度 II
D2_min=1;

```



```

D2_max=25;
D2_delta=2;
D2=D2_min:D2_delta:D2_max;

flags=zeros(4,length(D2));
flags(1,:)=D2;
for ii=1:length(D2)
d2=D2_min+(ii-1)*D2_delta;%这道题的变量单位,mm

d=[0.6;d2;3.6;5.5]*10^-3;
xmin=0;
xmax=sum(d);

I=round((xmax-xmin)/h);

A=zeros(1,I);
B=zeros(1,I+1);
C=zeros(1,I);

N1=round(d(1)/h);
N2=round(d(2)/h);
N3=round(d(3)/h);
N4=round(d(4)/h);

for i=1:N1
A(i)=-a(1)*r;
B(i)=2+2*r*a(1);
C(i)=-r*a(1);
end

for i=N1+1:N1+N2
A(i)=-a(2)*r;
B(i)=2+2*r*a(2);
C(i)=-r*a(2);
end

for i=N1+N2+1:N1+N2+N3
A(i)=-a(3)*r;
B(i)=2+2*r*a(3);
C(i)=-r*a(3);
end

for i=N1+N2+N3+1:N1+N2+N3+N4
A(i)=-a(4)*r;
B(i)=2+2*r*a(4);

```



```

C(i)=-r*a(4);
end

T=zeros(I+1,N+1);
T(:,1)=(T_in+TT)*ones(I+1,1);%一开始整件衣服都是体温

AA=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);
AA(1,1)=lamda(1)/h+h1;
AA(1,2)=-lamda(1)/h;
AA(I+1,I)=-lamda(4)/h;
AA(I+1,I+1)=lamda(4)/h+h5;

AA(N1+1,N1)=-lamda(1);
AA(N1+1,N1+1)=lamda(1)+lamda(2);
AA(N1+1,N1+2)=-lamda(2);

AA(N1+N2+1,N1+N2)=-lamda(2);
AA(N1+N2+1,N1+N2+1)=lamda(2)+lamda(3);
AA(N1+N2+1,N1+N2+2)=-lamda(3);

AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-lamda(3);
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=lamda(3)+lamda(4);
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-lamda(4);

for n=1:k:N
D=zeros(I+1,1);
D(1)=h1*(T_out+TT);
D(I+1)=h5*(T_in+TT);
for i=2:1:N1
D(i)=r*a(1)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(1))*T(i,n)+r*a(1)*T(i+1,n);
end
for i=N1+1:1:N1+N2
D(i)=r*a(2)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(2))*T(i,n)+r*a(2)*T(i+1,n);
end
for i=N1+N2+1:1:N1+N2+N3
D(i)=r*a(3)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(3))*T(i,n)+r*a(3)*T(i+1,n);
end
for i=N1+N2+N3+1:1:N1+N2+N3+N4
D(i)=r*a(4)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(4))*T(i,n)+r*a(4)*T(i+1,n);
end
D(N1+1)=0;
D(N1+N2+1)=0;
D(N1+N2+N3+1)=0;
T(:,n+1)=AA\D;
end

```



```

%% 检测是否符合题目的两个条件
T_skin=T(end,:)-TT;

count=0;
flag=false;
for j=1:length(T_skin)
    if T_skin(j)>44
        count=count+1;
    end
end

if (max(T_skin)>47) || (count>300)
    flag=true;
end

flags(2,ii)=flag;
flags(3,ii)=count;
flags(4,ii)=max(T_skin);
%%

% tc=281;
% figure(1);
% hold on;
% plot(0:1:3600,T_skin);
% plot(N-tc,T_skin(N+1-tc),'ro');
% plot([0 1.1*N],[T_skin(N+1-tc) T_skin(N+1-tc)],'--r');
% plot([N-tc N-tc],[36 T_skin(N+1-tc)],'--k');
% plot([N N],[36 T_skin(end)],'--k');
% xlabel('t/s');
% ylabel('T°C/');
% legend('d2_{min}=17.6条件下的体表温度mm');
end

%% 绘图部分
display(flags);
figure(1);
plot(D2,flags(3,:));
xlabel('d2/mm');
ylabel('t/s');
legend('超过 °C 时间与第44层厚度的关系II');

figure(2);
plot(D2,flags(4,:));
xlabel('d2/mm');

```




```

ylabel('Tmax°C/');
legend('最大温度与第层厚度的关系II');

% solve_equations.m
clear;
close all;
clc;

%% 参数声明
%syms a1 a2 a3 a4 b1 b2 b3 b4 变量%
syms h1 h5
syms k1 k2 k3 k4
syms x0 x1 x2 x3 x4
syms t1 t2 t3

%% 解线性方程组，其中含有1h1
A1=[k1 -k2 0 0 0 0 0 0
0 k2 -k3 0 0 0 0 0
0 0 k3 -k4 0 0 0 0
x1 -x1 0 0 1 -1 0 0
0 x2 -x2 0 0 1 -1 0
0 0 x3 -x3 0 0 1 -1
0 0 0 x4 0 0 0 1
-k1 0 0 0 h1 0 0 0];
B1=[0;0;0;0;0;0;0;t3;h1*t1];
X1=A1^-1*B1;
disp(simplify(X1));

%% 解线性方程组，其中含有2h5
A2=[k1 -k2 0 0 0 0 0 0
0 k2 -k3 0 0 0 0 0
0 0 k3 -k4 0 0 0 0
x1 -x1 0 0 1 -1 0 0
0 x2 -x2 0 0 1 -1 0
0 0 x3 -x3 0 0 1 -1
0 0 0 x4 0 0 0 1
0 0 0 k4+h5*x4 0 0 0 h5];
B2=[0;0;0;0;0;0;0;t3;h5*t2];
X2=A2^-1*B2;
disp(simplify(X2));

%% 任一同一变量相等，得到与关系式h1h5
eqn=X1(1)==X2(1);
solve(eqn,h5)

```



A.3 问题三代码

```
clear;
close all;
clc;
%% 参数设定
pho=[300;862;74.2;1.18];
c=[1377;2100;1726;1005];
lamda=[0.082;0.37;0.045;0.028];
a=lamda./(pho.*c);

TT=273.15;
T_in=37;
T_out=80;
T_s=48.08;

N=1800;%time
h=0.05*10^-3;%delta x
k=1;%delta time
r=k/h^2;

h1=117.41;
h5=8.36;

D2_min=18.9;
D2_max=19.3;
D2_delta=0.05;
D2=D2_min:D2_delta:D2_max;

D4_min=6.2;
D4_max=6.4;
D4_delta=0.05;
D4=D4_min:D4_delta:D4_max;

flags=zeros(length(D2),length(D4));

for ii=1:length(D2)
for jj=1:length(D4)
d2=D2_min+(ii-1)*D2_delta;
d4=D4_min+(jj-1)*D4_delta;
% d2=19.3;
% d4=6.4;

d=[0.6;d2;3.6;d4]*10^-3;
xmin=0;
```



```

xmax=sum(d);

I=round((xmax-xmin)/h);

A=zeros(1,I);
B=zeros(1,I+1);
C=zeros(1,I);

N1=round(d(1)/h);
N2=round(d(2)/h);
N3=round(d(3)/h);
N4=round(d(4)/h);

for i=1:N1
A(i)=-a(1)*r;
B(i)=2+2*r*a(1);
C(i)=-r*a(1);
end

for i=N1+1:N1+N2
A(i)=-a(2)*r;
B(i)=2+2*r*a(2);
C(i)=-r*a(2);
end

for i=N1+N2+1:N1+N2+N3
A(i)=-a(3)*r;
B(i)=2+2*r*a(3);
C(i)=-r*a(3);
end

for i=N1+N2+N3+1:N1+N2+N3+N4
A(i)=-a(4)*r;
B(i)=2+2*r*a(4);
C(i)=-r*a(4);
end
T=zeros(I+1,N+1);
T(:,1)=(T_in+TT)*ones(I+1,1);%一开始整件衣服都是体温

AA=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);
AA(1,1)=lamda(1)/h+h1;
AA(1,2)=-lamda(1)/h;
AA(I+1,I)=-lamda(4)/h;
AA(I+1,I+1)=lamda(4)/h+h5;

```



```

AA(N1+1,N1)=-lamda ( 1 ) ;
AA(N1+1,N1+1)=lamda ( 1 )+lamda ( 2 ) ;
AA(N1+1,N1+2)=-lamda ( 2 ) ;

AA(N1+N2+1,N1+N2)=-lamda ( 2 ) ;
AA(N1+N2+1,N1+N2+1)=lamda ( 2 )+lamda ( 3 ) ;
AA(N1+N2+1,N1+N2+2)=-lamda ( 3 ) ;

AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-lamda ( 3 ) ;
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=lamda ( 3 )+lamda ( 4 ) ;
AA(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-lamda ( 4 ) ;

for n=1:k:N
D=zeros ( I+1,1 ) ;
D(1)=h1*(T_out+TT) ;
D(I+1)=h5*(T_in+TT) ;
for i=2:1:N1
D(i)=r*a(1)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(1))*T(i,n)+r*a(1)*T(i+1,n) ;
end
for i=N1+1:1:N1+N2
D(i)=r*a(2)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(2))*T(i,n)+r*a(2)*T(i+1,n) ;
end
for i=N1+N2+1:1:N1+N2+N3
D(i)=r*a(3)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(3))*T(i,n)+r*a(3)*T(i+1,n) ;
end
for i=N1+N2+N3+1:1:N1+N2+N3+N4
D(i)=r*a(4)*T(i-1,n)+(2-2*r*a(4))*T(i,n)+r*a(4)*T(i+1,n) ;
end
D(N1+1)=0;
D(N1+N2+1)=0;
D(N1+N2+N3+1)=0;
T(:,n+1)=AA\D;
end

T_skin=T(end,:)-TT;

count=0;
flag=false ;
for j=1:length ( T_skin )
if T_skin ( j )>44
count=count+1;
end
end
end

```



```

tc=count;

if (max(T_skin)>47) || (count>300)
flag=true;
end

flags(ii,jj)=flag;

%% 绘图部分
% figure(1);
% plot(0:1:1800,T_skin);
% hold on;
% plot([0 N],[T_skin(N-tc) T_skin(N-tc)],'--r');
% plot([N-tc N-tc],[36 T_skin(N-tc)],'--k');
% plot([N N],[36 T_skin(end)],'--k');
% xlabel('t/s');
% ylabel('TC/');
% legend('(d2_{min},d4_{min})=(17.3mm,6.4mm)情况下的体表温度');

end
end

display(flags);

```

