公交线路选择问题的查询方案设计

国防科技大学：吴颢、欧阳君沛、肖玺

摘　　要

本文首先依据对公交乘客出行心理调查的统计结果，分析了影响乘客选择路线的主要因素顺次为：换乘次数、时间耗费、费用耗费。在对这些因素综合考虑的基础上提出了3种优化方案，分别是：① 换乘最少+用时最短；② 用时最短+换乘最少；③ 换乘最少+费用最少。

通过分析公交网络的特点，将问题转化为图论模型，并引入步行矩阵，通过对Floyd最短路算法的改造，创造性地给出了最佳乘车路线选择的求解方法。

通过编程技巧上的处理，大大提高了计算效率，在直达矩阵事先建立并存储于机器内的前提下，计算一对给定站点之间在给定目标下的最优路线需时仅为1～2秒，已能满足实时查询的需要。

对于给定的6对站点，计算得到了三种方案下的最优解。

对于第三问，通过步行矩阵与直达矩阵之间的Floyd运算，对增加步行条件下的公交路线选择问题，给出了一个极具可操作性的处理方案。

最后我们对具有道路阻塞信息下的最优线路选择问题提出了一种很方便的处理方法。

一、 问题分析

一个良好的公交线路查询系统的查询结果应该简洁明了,能够帮助查询者迅速做出决定。因此一个优良的公交线路查询系统,必须能帮助利用公交查询者快速地进行出行路径、换乘路线等选择,以提高查询者的便利性和高效性,这就需要对出行者出行路径的选择因素进行综合考虑,体现在数学模型上就形成了路径选择模型。

从题目中可知，该模型的核心是如何对路线进行选择，并且题目要求该模型应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。查询者的各种不同需求可以理解为乘客选择公交路线时受到的若干个因素的影响：换乘次数、出行路程 、出行用时、出行费用。换乘次数是指乘客在完成一次出行过程中所换车的次数。出行路程则包括车上路程和车外路程，车外路程指的是乘客为了到某个乘车点乘车而步行的路程，比如说从起点步行到上车站台的路程、中途换车所步行的路程以及从下车站台步行到终点的路程。出行用时指乘客在一次出行过程中所需的时间，它也包括车上和车外部分，车外用时除了在车外距离部分步行所用的时间外还包括在车站等车的时间。出行费用指的是乘客在完成一次出行过程中所花的车费。实际上这几个因素是相互影响的，例如出行路程和出行用时，出行距离远了出行时间也会相应增加。

查询者的各种不同需求无非是在选择公交线路时优先考虑某个因素，其次再考虑其他因素。比如优先考虑换乘次数最短的公交线路，当有若干条换乘次数相同的线路存在时，再考虑路程最短的线路，依次类推。在参照了某市的一个公交乘客出行心理调查统计结果（见文献[1]）后可以得到图1：

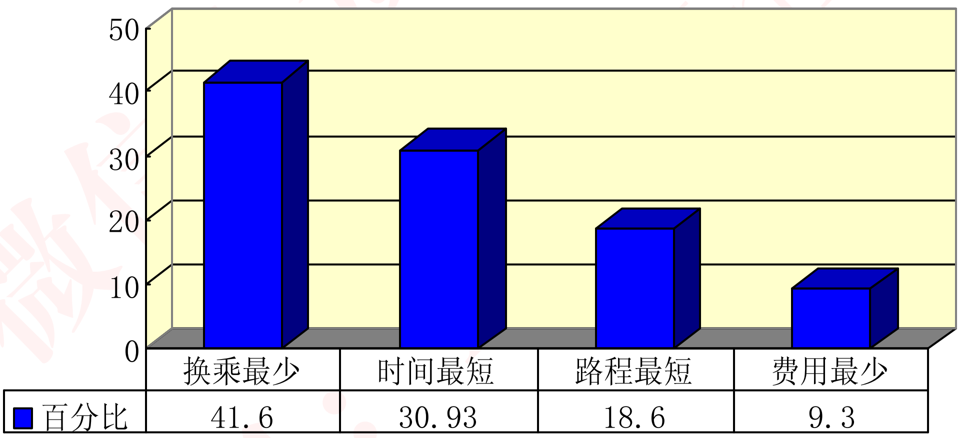

图1. 公交乘客出行心理分析图

从图1 中可以看到有41.16%的乘客在选择出行路径时首先考虑的是换乘最少；其次考虑时间最短，有30.93%的乘客将其作为首要条件；而将路程最短和费用最少作为出行时考虑的首要条件的乘客分别只占18.60%和9.3%。由此可见换乘次数是乘客选择公交线路时考虑的主要因素，而其次考虑的因素是出行时间。

由于出行路程和出行时间是相互影响的，两者成正向关系，所以可以认为乘客因为路程较短而选择某条公交线路时，实际上考虑的是该线路所用的时间较少或费用较低，因此出行路程这个因素对乘客选择的影响实际上已经包含在了出行时间与费用这两个因素对乘客的影响里面，所以在求解问题时可以只考虑**换乘次**

数、出行用时、出行费用三个因素，并且重点考虑换乘次数这个因素。

考虑到乘客的交通需求心理，换乘次数过多,容易使乘客产生烦躁情绪。因此,我们将在模型中仅考虑**3次或3次以下换乘的乘车方案。**如果3次换乘仍不能到达，再进行更高次的换乘方案搜索。幸运的是，对实例中的6对站点，我们都找到了3次换乘以下的最佳路线。

我们面对的是一个多目标的优化问题。处理多目标优化问题的一种常用方法是将多个目标分别加权后合成为一个目标，从而将问题转化为单目标问题求解。出于以下两点考虑，我们认为这样一种加权合成的方法在这里并不合适：1、权系数不好定，例如少换乘一次相当于节省多少乘车时间，又相当于节省多少乘车费用，不大好确定；2、因为每个乘客根据自己的情况会有一个首要目标，加权处理后的结果未必是他最满意的。我们根据乘客考虑的主要、次要因素的不同将选择最佳路线的标准按照第一目标优先+第二目标优先并且必须包含换乘次数，于是分为3个方案：**① 换乘最少+用时最短；② 用时最短+换乘最少；③ 换乘最少+费用最少**。分别按照这3个方案进行建模并通过计算对路线进行选择，每条路线可以得出3种方案下不同的最佳线路，从而满足了查询者的各种不同需求。

问题（2）和问题（1）类似，只需在计算问题（1）的模型中将地铁路线考虑进去，让乘客在选择路线时同样可以选择地铁路线即可。

问题（3）比问题（2）又增加了已知所有站点之间的步行时间这个条件，由于并没有给出所有站点之间的步行时间的确切数据，只能按照前两问的思想方法建立一个理论模型对任意两站点之间线路进行选择。

公交线路选择问题，已有许多人研究过，从文献资料上看（[1]~[5]），使用最多的是图论方法，一般是化为最短路问题。由于公交网络比较容易由图的方式来描述，而且图论中已有比较好的算法，经对问题的初步分析后我们也拟采用图论方法来解决此问题。

二、 模型假设

- 任两个站点之间总能通过有限次换乘互相到达。这是基于公交网络图的连通性，对发展已经比较成熟的公交系统如北京公交系统，应该能满足。
- 环线的两个方向均有发车。
- 在 1、2 问中，只考虑同名站点处的换乘。事实上，由于不知道站点间的位置关系或距离远近，也无法考虑不同名站点间的换乘。
- 公汽站点等车时间均为 3 分钟，地铁站点等车时间均为 2 分钟。
- 不考虑道路拥堵及车辆故障问题，即公汽两相邻站点间的运行时间总是 3 分钟，地铁两相邻站点间的运行时间总是 2.5 分钟。
- 在同一公汽站点换乘时，也需步行一段路程，设平均步行时间为 2 分钟。
- 出行者的初始位置总是位于某公交站点处。

三、 符号说明

$A_F = (a_{ij}^F)_{n\times n}$————直达费用矩阵，元素 (a_{ij}^F) 即从 i 站点直达到 j 站点最小乘车费用

$A_T = (a_{ij}^T)_{n\times n}$————直达时间矩阵，元素 (a_{ij}^T) 即从 i 站点直达到 j 站点最小乘

车时间（特指站与站之间公汽行驶时间）。

A = $(a_{ij})_{n\times n}$=$(a_{ij}^T+t_i)$————改进的直达时间矩阵，元素(a_{ij})即从 i 站点直达到 j 站点最小乘车时间（含站与站之间公汽行驶时间及在起始站的等车时间）。

B$^{(0)}$ = $(b_{ij}^{(0)})_{n\times n}$————步行时间矩阵，元素$(b_{ij}^{(0)})$即从 i 站点步行到 j 站点所花时间。

四、 模型建立与求解

1、图论模型

根据问题分析中的讨论，我们考虑建立图论模型来解决公交线路选择问题。首先对问题进行图论描述。

建立一个赋权图，由于公汽线路分上行线与下行线，所以应该用有向图来描述，其中的点为站点，两个站点间如果有公交车直达，则用弧相连，弧的起点为起始站，终点为到达站。弧（i，j）上的权 a_{ij} 表示由 i 站点到 j 站点乘公交车直达的最短时间，它可以通过以下方式得到：将由 i 站点能够直达 j 站点的所有公交线路列出，再在其中比较得到两站点之间的中间站点最少的线路，于是得到了 i 到 j 的最短直达时间，同时为了后面最佳线路选择的需要，记录下在此最短时间内能够由 i 到 j 的所有线路的编号。

我们将以上得到的有向图记作 G（V，E，T），其中 V 为顶点集合，E 为弧的集合，T 为弧上的权的集合，称 G 为直达时间图。

若我们要考虑的是费用最省，在上述图中将权由最短时间改为最小费用即可，此时的权集合记为 F，得到有向赋权图 G（V，E，F），此时称 G 为直达费用图。

建立以上图的描述后，最优线路选择问题可以转化为图论中的最短路问题，这样我们就可以利用图论中的一些有效算法，如 Dijkstra 算法、Floyd 算法等来解决问题。但是，当考虑时间为首要目标的情形时，由于还要考虑换乘时间，所以不是一个纯粹的最短路问题。

2、矩阵描述

对应上面建立的两个图，为了方便编程计算的需要，我们分别考虑它们的矩阵描述。

对应直达费用图 G（V，E，F），我们建立矩阵 A_F= $(a_{ij}^F)_{n\times n}$，其中 a_{ij}^F 是弧（i，j）上的权，表示由 i 站点乘公交车直达 j 站点的最小费用，当弧（i，j）不存在时，令 $a_{ij}^F=\infty$（在实际计算时，设为一个充分大的数），特别，a_{ii}=0。

对应直达时间图 G（V，E，T），我们建立矩阵 A_T= $(a_{ij}^T)_{n\times n}$，其中 a_{ij}^T 是弧

（i，j）上的权，表示由 i 站点到 j 站点乘公交车直达的最短时间，同样，当弧（i，j）不存在时，令 $a_{ij}^F=\infty$，特别，a_{ii}=0。

为了表达上更方便，我们再建立一个矩阵 A= $(a_{ij})_{n\times n}$=$(a_{ij}^T+t_i)$,其中 a_{ij}^T 仍表示由 i 站点到 j 站点乘公交车直达的最短时间，而 t_i 则表示在 i 站点的等车时间，根据题目附录 1 所给的数据可以得知：

$$t_i=\begin{cases}3, & \text{若 i 是公汽站点}\\ 2, & \text{若 i 是地铁站点}\end{cases}$$

3、第一问模型与求解

在问题分析中，我们讨论确定了三个优化方案，并且在上面建立了问题的图论模型，下面讨论对该模型的求解。

3.1 关于 Floyd 运算与换乘时间的讨论

要求两个公汽站点之间的最短时间，相当于求直达时间图 G（V，E，T）中对应的两点之间的最短路，我们拟采用图论中已有的求任意两点间最短路的 Floyd 算法求解。由文献[7]中的描述，Floyd 算法的关键步骤是引入了一个矩阵间的运算“⊙”，我们称之为“Floyd 运算”，其定义如下：

设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$ A ⊙ B = $(c_{ij})_{n\times n}$，其中

$$c_{ij}=\min\left\{a_{ik}+b_{kj}\middle|k=1,2,\cdots,n\right\} \qquad (1)$$

由（1）可知，若 A 是一个有向权图 G 的权矩阵，则 A ⊙ A 中的元素 c_{ij} 表示图 G 中从 i 点到 j 点至多经过 1 个顶点的最短路的长度。同理，A ⊙ A ⊙ A 中的元素 d_{ij} 表示图 G 中从 i 点到 j 点至多经过 2 个顶点的最短路的长度。更多次运算的意义也类似，因此 Floyd 算法为我们寻找公交最优路经提供了一种比较合适的方法。Floyd 算法还有许多其它描述，我们选用（1）式的描述是为了编程的方便。

考虑直达时间矩阵 A_T= $(a_{ij}^T)_{n\times n}$， 这时图 G 中两点之间的最短路的长度，只是相应的两个站点之间乘公交车的最短“乘车”时间，未包括途中的换乘时间，所以未必是这两个站点间乘公交车所需的最短时间，故不能直接求图 G 中的最短路，但 Floyd 算法的基本思路还可以运用，只是要将换乘时间考虑进去。为此我们再建立一个矩阵 A= $(a_{ij})_{n\times n}$=$(a_{ij}^T+t_{ij})$,其中 a_{ij}^T 仍表示由 i 站点到 j 站点乘公交车直达的最短时间，而 t_{ij} 则表示在 i 站点的等车时间，根据题目附录 1 所给的

数据可以得知：

$$t_{ij}=\begin{cases}0 & 若i=j\\ 3 & 若i\neq j，且i是公汽站点\\ 2 & 若i\neq j，且i是地铁站点\end{cases} \qquad (2)$$

在本问中，t_{ij}=0 或 3 分钟。

由于换乘时间由等车时间与步行时间两部分组成，将等车时间 t_{ij} 放入 A 中后，再考虑换乘时间就只要考虑步行时间了，而公汽站点处换乘的平均步行时间为 2 分钟，作步行矩阵 B 如下：B 中对角线元素都是 0，其它元素都是 2。引入步行矩阵 B 以后，如果某两站点间不能直达，则 A+B 中的对应元素表示第一次换乘到达换乘站点前所用的时间，所以根据 Floyd 运算的性质我们知道，（A+B）⊙ A 中的元素就表示两站点间至多一次换乘到达所需要的时间。往下可以继续进行以上步骤，直到目标达到最优为止。

后来我们还发现将步行矩阵 B 改变一下定义，以上方法还可以应用于第三问的解决，算是一个意外收获。

3.2 对优化方案①：“换乘最少+用时最短”的求解

我们的思路是首先考虑换乘次数最少，再在换乘次数最少的条件下求用时最短。设要求由 i 站点到 j 站点的最优路线，考虑公汽直达时间矩阵 A（已包含等车时间）及步行矩阵 B，取定一个充分大的正数 M 表示∞，求解步骤如下：

首先令 h=0

Step1：若 $a_{ij}<M$，则表示 i 能够直达 j，换乘次数为 0，转 Step4；否则，转 Step2。

Step2：作 Floyd 运算（A+B）⊙ A，结果记作 $A^{(1)}$,同时记录所有换乘站点信息，令 h=h+1，

若 $a_{ij}^{(1)}<M$，则表示 i 能够经过 1 次换乘到达 j，转 Step4；否则，转 Step3

Step3：作 Floyd 运算（$A^{(h)}$+B）⊙ A, 结果记作 $A^{(h+1)}$，同时记录所有换乘站点信息，令 h=h+1，

若 $a_{ij}^{(h)}<M$，则表示 i 能够经过 h 次换乘到达 j，转 Step4；否则，转 Step3。

Step4： 输出 h 及换乘站点信息，转 Step5。

Step5：根据输出的换乘站点信息，求出所对应的公交线路，并根据第 2 指标—时间最短来确定最优路线并输出，Stop。

根据第 1 条假设，在公交直达时间图中任两个站点之间是连通的，以上步骤

必然在有限步内完成。我们将以上步骤概括为图 2 中的流程图。

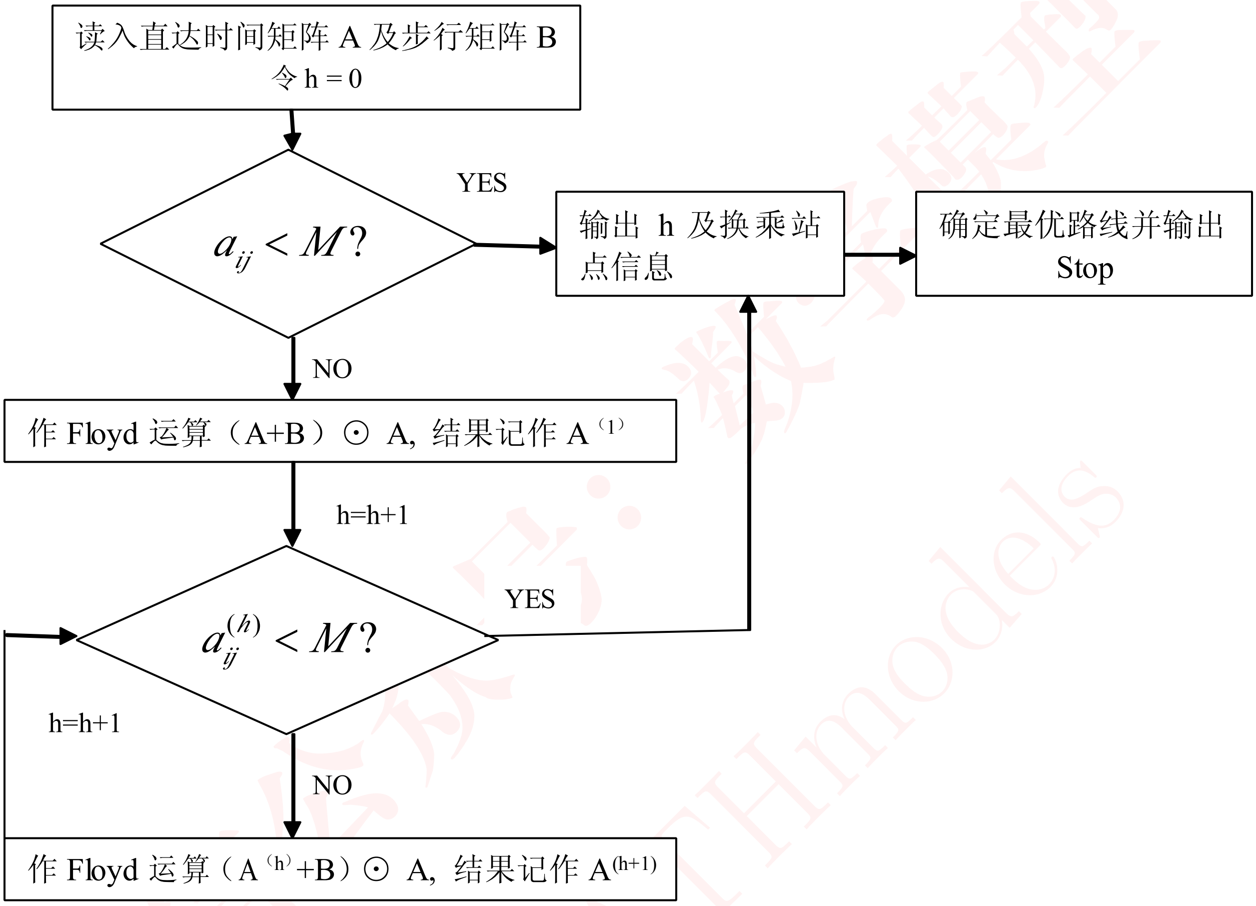

图 2　对优化方案①求解的流程图

3.3、　对优化方案②："用时最短+换乘最少"的求解

我们首先考虑用时最短，再在用时最短的条件下求换乘次数最少。设要求由 i 站点到 j 站点的最优路线，仍考虑公汽直达时间矩阵 A（已包含等车时间）及步行矩阵 B，取定一个充分大的正数 M 表示∞，求解步骤如下：

首先令 h=0

Step1：作 Floyd 运算（A+B）⊙ A，结果记作 $A^{(1)}$,同时记录所有换乘站点信息，令 h=h+1，

若 $A^{(1)}$=A，则表明换乘 1 次已不能减少乘车总时间，从而 a_{ij} 就是 i 站点到j

站点的最短乘车时间（包含等车时间），转 Step4

否则，转 Step2。

Step2：作 Floyd 运算（$A^{(h)}+B$）⊙ A，结果记作 $A^{(h+1)}$，同时记录所有换乘站点信息，令 h=h+1，

Step3：若 $A^{(h)}=A^{(h-1)}$，　则表示再换乘已不能减少乘车时间，　转 Step4；否则，转 Step2。

Step4：　输出 h 及换乘站点信息，转 Step5。

Step5：根据输出的换乘站点信息，求出所对应的公交线路，并根据第 2 指标—换乘次数最少来确定最优路线并输出，Stop。

对以上步骤用流程图 3 来描述。

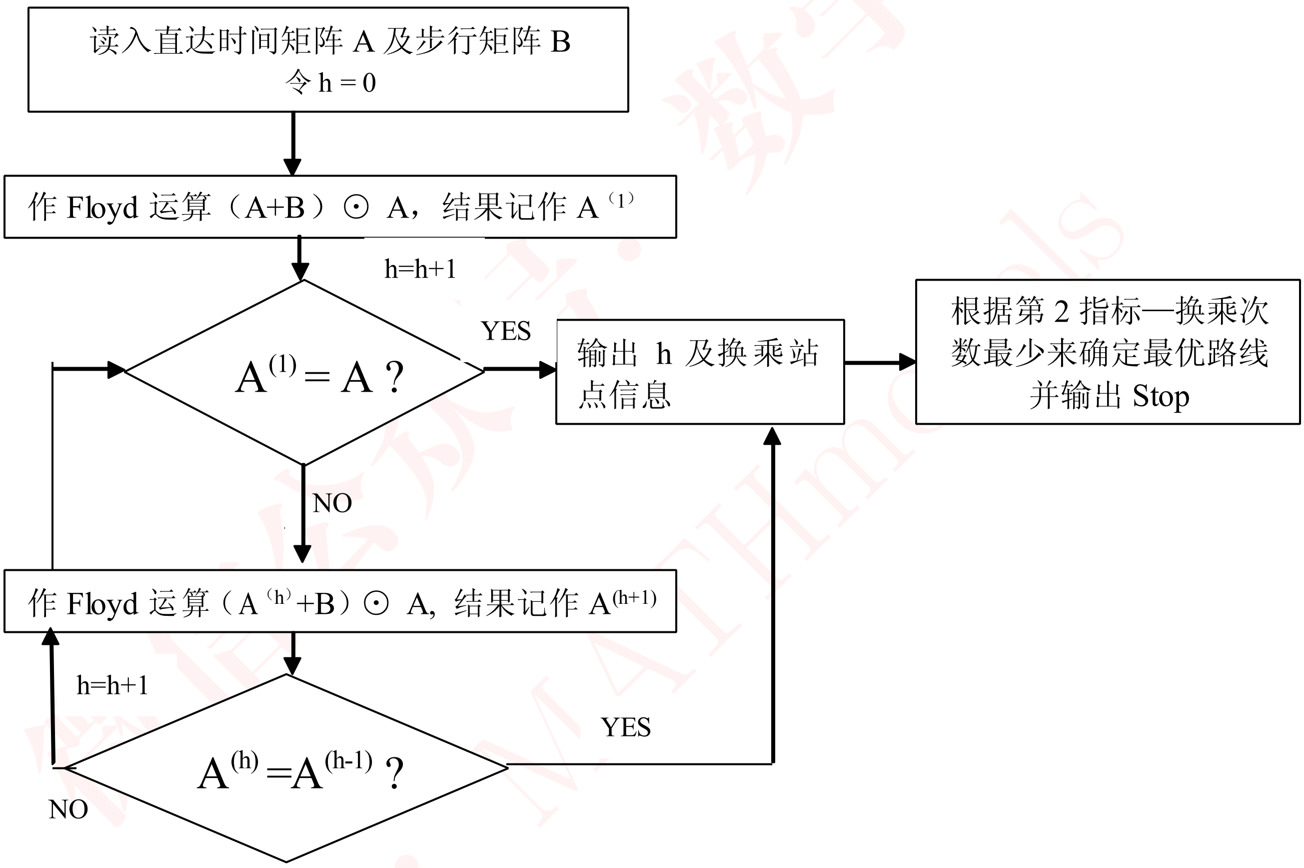

图 3　对优化方案②求解的流程图

3.4、对优化方案③ “换乘最少+费用最少”的求解

由于此时第一目标与方案①相同，故基本步骤同 3.2，需要修改的只是 Step5。

Step5：根据输出的换乘站点信息，求出所对应的公交线路，并根据第 2 指标—费用最少来确定最优路线并输出，Stop。

3.5 关于查询算法的实时性考虑

在本例的算法描叙中，我们通过类似 Floyd 的算法框架能够求出任意两站点间的 3 种目标下的最佳路线，但复杂度较高，为 O(n^3)。针对实时查询系统中一般是对 2 点之间进行查询的特性，我们在实现中为了优化算法的效率，采用了固定查询线路的起点 A，求出 A 点到其它所有点的最佳路线。这样时间复杂度是 O(n^2)的。在实际测试中，把直达矩阵事先调入程序后，对于给定的站点 A，B 间最佳路线的求取，我们能够在 1~2 秒内求出。这样已经能够满足实时查询系统的需要。

如果要追求更快的查询速度，我们可以算出所有点对之间的最佳路线并存入数据库。用户即可更方便快捷的得到查询结果。

同样，在内存使用方面，我们采取了只保存必要的矩阵(当前矩阵)和相关信息的优化策略，使得在一般微机的内存下也可以顺利运行。

4、第二问模型与求解

我们试图将第一问中的方法仍运用于第二问，于是首先面临要解决的问题是扩充直达时间矩阵 A_T，使其包含地铁站点。

首先考虑直达时间矩阵的扩充。设公汽站点总数与地铁站点总数分别为 n 与 m。$A_1=(a_{ij}^1)_{n\times n}$为公汽站点间的直达时间矩阵（未包含等车时间），$A_2=(a_{ij}^2)_{m\times m}$为地铁站点间的直达时间矩阵（未包含等车时间），令

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

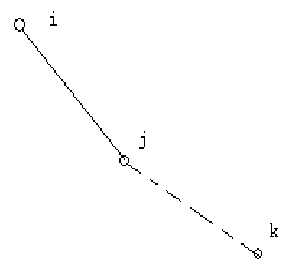

图4

下面讨论 A 中其他元素的确定。如图 4，设 i，j 是同一条公汽线路上的两个站点，i 能直达 j，且 j 是地铁站点 k 的一个地面公汽换乘站，则在矩阵 A 中令 $a_{ik}=a_{ij}+4$，其中 4（分钟）是 j 到 k 的步行时间；反之，若 j 能到达 i，则令 $a_{ki}=4+a_{ji}$。这样处理后，A 已扩充完毕。然后再对 A 中元素 a_{ij} 处加上一个等车时间 t_{ij}，它表示在 i 站点的等车时间

$$t_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{若i=j} \\ 3 & \text{若i}\neq\text{j，且i是公汽站点} \\ 2 & \text{若i}\neq\text{j，且i是地铁站点} \end{cases}$$

加上等车时间后的矩阵仍记为 $A=(a_{ij})$，并且仍称为直达时间矩阵。

直达费用矩阵的扩充要简单得多，只要将地铁票价信息加上就可以了。

步行矩阵 B 也要作相应的扩充。设 $B=(b_{ij})_{(n+m)\times(n+m)}$，其中 b_{ij} 表示在 i 站点换

乘所需的步行时间，且$b_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n+m)$。以下均假设$i\neq j$。由于公汽与地铁间换乘的步行时间在 A 的扩充中已加上，故只需考虑公汽与公汽、地铁与地铁之间的换乘步行时间，由题目附录 1 知，它们都是 2 分钟。所以当$i,j\leq n$时，$b_{ij}=2$（公汽站点间换乘步行时间）；当$i\leq n$且$j>n$,或$i>n$且$j\leq n$时，$b_{ij}=0$（公汽与地铁间换乘步行时间在 A 中已考虑）；当$i,j\geq n+1$时，若i是地铁 1、2 号线之间的换乘站，则$b_{ij}=2$（地铁与地铁间换乘步行时间），否则$b_{ij}=0$。至此步行矩阵扩充完毕。

以下解法与第一问完全相同。

5、第三问模型

在本问中我们仅考虑公汽站点，对地铁站点作第二问中同样的处理后也可以应用本模型求解。

建立步行时间矩阵 B ＝ $(b_{ij})_{n\times n}$，b_{ij}表示已知的由站点 i 步行到站点 j 所需的时间（单位：分钟），其中$b_{ii}=0$。

对于同名站点间换乘时需要 2 分钟步行时间的假设，在此问中会造成一定的矛盾。矛盾来自于我们不知道 B 中的元素b_{ij}是指的从 i 站点到达 j 站点处的具体哪一个同名站点的时间，因为在名为 j 的站点处有若干同名站点，并且它们之间可能有 2 分钟路程的距离。所以我们在本问中只好假设**同名站点间换乘不需要步行时间**。当然这违反了题目的基本设定，但不这样做我们感觉无法处理，只好当作是一种近似处理。

A ＝ $(a_{ij})_{n\times n}$表示乘车直达时间矩阵，注意其中每个元素都已包含等车时间 3 分钟。

以下我们先递归地定义一列矩阵。

记 D（0）＝ B

记 D（1）＝ B ⊙ A＝ $(d_{ij}^{(1)})$，其中“⊙”表示 Floyd 运算，则$d_{ij}^{(1)}$表示采用“先步行，再乘车”方式从站点 i 到站点 j 所需的最短时间，其中也包含了不步行而直接乘车的方式。显然$d_{ij}^{(1)}\leq a_{ij}, i,j=1,\cdots,n$。

记 D（2）＝ D（1）⊙ B ＝ $(d_{ij}^{(2)})$，则$d_{ij}^{(2)}$表示采用“步行+乘车+步行”方

式从站点 i 到站点 j 所需的最短时间，显然 $d_{ij}^{(2)} \le d_{ij}^{(1)}, i, j = 1, \cdots, n$。

记 D（3） =D（2）⊙ A= $(d_{ij}^{(3)})$。

一般地，记

D（2m+1）= D（2m）⊙ A = $(d_{ij}^{(2m+1)})$

D（2m+2）= D（2m+1）⊙ B= $(d_{ij}^{(2m+2)})$

m = 0，1，2，…

显然有 $d_{ij}^{(k+1)} \le d_{ij}^{(k)}, i, j = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, n$

以下分别讨论换乘次数最少、时间最短两个优化目标下的模型。至于步行时间最短，就是前面两问得到的结果，这里也不再讨论。

设起点站为 i，终点站为 j。

1、 换乘次数最少

如果对步行时间不加限制，则换乘次数为 0，但这个结果显然没有实际意义，所以我们必须对步行时间加以一定的限制。从人们通常的心理来看，每次步行不宜超过 1 站地许多，我们取为≤600 米，若步行速度设为 5 公里/小时，则对应的时间大约为≤7 分钟，于是我们将步行矩阵 B 中大于 7 分钟的数字都改为∞，仍记为 B。

依次计算 D（1），D（2），… 直到 $d_{ij}^{(k)}$ <∞为止。

如果 k 是奇数，设 k=2m+1，则最小换乘次数为 m；
如果 k 是偶数，设 k=2m+2，则最小换乘次数也为 m。

2、 时间最短

矩阵 A、B 意义同上，其中 1 次步行时间仍限制为 7 分钟。
依次计算 D（1），D（2），… 直到 D（k）=D（k-1）为止，这时如果再往下叠代计算，结果已不会再变化了，故由 D（k）矩阵的意义知道，这时 $d_{ij}^{(k)}$ 就表示考虑步行条件下从 i 站点到 j 站点的最小乘车时间。

五、 实例结果

[说明]在以下表格中
1、方案 ①：第一目标：换乘最少，第二目标：用时最短。
方案 ②：第一目标：用时最短，第二目标：换乘最少。
方案 ③：第一目标：换乘最少，第二目标：费用最少。
方案 *：该路线是方案②的参考路线。
其中参考路线的选择标准是若增加一定量的时间（如 5 分钟），可以使换乘次数减少 1 次，则该线路作为参考路线给出。
2、 时间的单位为分钟，费用的单位为元。

问题（1）实例结果

起始站→终点站	方案	换乘次数	时间	费用	线　　路 [注]括弧中的数是该段路程所耗时间（含等车时间）或费用
S3359→S1828	①	1	104	3	S3359->S1784(96.0)　坐 L436 路公汽上行线 S1784->S1828(6.0)　坐 L167 路公汽上行线
	②	2	67	3	S3359->S1746(12.0)　坐 L324 路公汽上行线 S1746->S1784(45.0)　坐 L485 路公汽下行线 S1784->S1828(6.0)　坐 L167 路公汽上行线
	③	1	140	3	S3359->S0304(2.0)　坐 L469 路公汽上行线 S0304->S1828(1.0)　坐 L217 路公汽下行线

S1557→S0481	①	2	109	3	S1557->S1919(39.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S3186(12.0)　坐 L189 路公汽上行线 S3186->S0481(54.0)　坐 L460 路公汽下行线
	②	3	102	4	S1557->S1919(39.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S3186(12.0)　坐 L189 路公汽上行线 S3186->S0902(33.0)　坐 L091 路公汽上行线 S0902->S0481(12.0)　坐 L254 路公汽上行线
	③	2	109	3	S1557->S1919(1.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S0902(1.0)　坐 L417 路公汽上行线 S0902->S0481(1.0)　坐 L254 路公汽上行线

S0971→S0485	①	1	131	3	S0971->S2184(63.0)　坐 L013 路公汽上行线 S2184->S0485(66.0)　坐 L417 路公汽上行线
	②	2	106	3	S0971->S2517(51.0)　坐 L013 路公汽上行线 S2517->S2159(42.0)　坐 L290 路公汽下行线 S2159->S0485(9.0)　坐 L469 路公汽上行线
	③	1	152	3	S0971->S0872(1.0)　坐 L119 路公汽上行线 S0872->S0485(2.0)　坐 L417 路公汽下行线

S0008→S0073	①	1	86	2	S0008->S0291(57.0)　坐 L159 路公汽上行线 S0291->S0073(27.0)　坐 L058 路公汽上行线
	②	3	66	3	S0008->S0630(27.0)　坐 L159 路公汽上行线 S0630->S0483(15.0)　坐 L231 路公汽上行线 S0483->S0525(9.0)　坐 L328 路公汽上行线 S0525->S0073(9.0)　坐 L103 路公汽上行线
	*	2	70	3	S0008->S1383(6.0)　坐 L043 路公汽上行线 S1383->S2184(48.0)　坐 L290 路公汽下行线 S2184->S0073(12.0)　坐 L345 路公汽上行线
	③	1	86	2	S0008->S0291(1.0)　坐 L159 路公汽上行线 S0291->S0073(1.0)　坐 L058 路公汽上行线

S0148→S0485	①	2	109	3	S0148->S0036(45.0)　坐 L308 路公汽上行线 S0036->S2210(48.0)　坐 L156 路公汽上行线 S2210->S0485(12.0)　坐 L417 路公汽上行线
	②	3	105	4	S0148->S3604(48.0)　坐 L308 路公汽上行线 S3604->S2361(9.0)　坐 L081 路公汽上行线 S2361->S2210(30.0)　坐 L156 路公汽上行线 S2210->S0485(12.0)　坐 L417 路公汽上行线
	③	2	127	3	S0148->S3604(1.0)　坐 L308 路公汽上行线 S3604->S0248(1.0)　坐 L021 路公汽下行线 S0248->S0485(1.0)　坐 L469 路公汽上行线

S0087→S3676	①	1	68	2	S0087->S3496(36.0)　坐 L454 路公汽上行线 S3496->S3676(30.0)　坐 L209 路公汽上行线
	②	2	49	3	S0087->S0088(6.0)　坐 L021 路公汽上行线 S0088->S0427(33.0)　坐 L231 路公汽上行线 S0427->S3676(6.0)　坐 L097 路公汽上行线
	③	1	68	2	S0087->S3496(1.0)　坐 L454 路公汽上行线 S3496->S3676(1.0)　坐 L209 路公汽上行线

问题（2）实例结果

起始站→终点站	方案	换乘次数	时间	费用	线　　路 [注]括弧中的数是该段路程所耗时间（含等车时间）或费用
S3359→S1828	①	1	104	3	S3359->S1784(96.0)　坐 L436 路公汽上行线 S1784->S1828(6.0)　坐 L167 路公汽上行线
	②	2	67	3	S3359->S1746(12.0)　坐 L324 路公汽上行线 S1746->S1784(45.0)　坐 L485 路公汽下行线 S1784->S1828(6.0)　坐 L167 路公汽上行线
	③	1	140	3	S3359->S0304(2.0)　坐 L469 路公汽上行线 S0304->S1828(1.0)　坐 L217 路公汽上行线

S1557→S0481	①	2	109	3	S1557->S1919(39.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S3186(12.0)　坐 L189 路公汽上行线 S3186->S0481(54.0)　坐 L460 路公汽下行线
	②	3	102	4	S1557->S1919(39.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S3186(12.0)　坐 L189 路公汽上行线 S3186->S0902(33.0)　坐 L091 路公汽上行线 S0902->S0481(12.0)　坐 L254 路公汽上行线
	③	2	109	3	S1557->S1919(1.0)　坐 L084 路公汽上行线 S1919->S0902(1.0)　坐 L417 路公汽上行线 S0902->S0481(1.0)　坐 L254 路公汽上行线

S0971→S0485	①	1	131	3	S0971->S2184(63.0)　坐 L013 路公汽上行线 S2184->S0485(66.0)　坐 L417 路公汽上行线
	②	3	98	6	S0971->S0567(21.0)　坐 L094 路公汽上行线 从 S0567 公汽站步行到 D01 地铁站(4.0) D01->D15(37.0)　坐 T1 路地铁上行线 从 D15 地铁站步行到 S2534 公汽站(4.0) S2534->S2210(18.0)　坐 L156 路公汽上行线 在 S2210 公汽站换乘步行(2.0) S2210->S0485(12.0)　坐 L417 路公汽上行线
	*	2	99	5	S0971->S0567(21.0)　坐 L094 路公汽上行线 从 S0567 公汽站步行到 D01 地铁站(4.0) D01->D21(52.0)　坐 T1 路地铁上行线 从 D21 地铁站步行到 S0464 公汽站(4.0) S0464->S0485(18.0)　坐 L104 路公汽上行线
	③	1	152	3	S0971->S0872(1.0)　坐 L119 路公汽上行线 S0872->S0485(2.0)　坐 L417 路公汽上行线

S0008→S0073	①	1	86	2	S0008->S0291(57.0)　坐 L159 路公汽上行线 S0291->S0073(27.0)　坐 L058 路公汽上行线
	②	3	56.5	5	S0008->S2534(21.0)　坐 L200 路公汽上行线 从 S2534 公汽站步行到 D15 地铁站(4.0) D15->D12(9.5)　坐 T1 路地铁下行线 D12->D25(9.0)　坐 T2 路地铁下行线 从 D25 地铁站步行到 S0525 公汽站(4.0) S0525->S0073(9.0)　坐 L103 路公汽上行线
	*	2	58	5	S0008->S3874(24.0)　坐 L150 路公汽下行线 从 S3874 公汽站步行到 D30 地铁站(4.0) D30->D25(17.0)　坐 T2 路地铁下行线 从 D25 地铁站步行到 S0525 公汽站(4.0) S0525->S0073(9.0)　坐 L103 路公汽上行线
	③	1	86	2	S0008->S0291(1.0)　坐 L159 路公汽上行线 S0291->S0073(1.0)　坐 L058 路公汽上行线

S0148→S0485	①	2	90.5	5	S0148->S1487(15.0) 坐 L024 路公汽下行线 从 S1487 公汽站步行到 D02 地铁站(4.0) D02->D21(49.5) 坐 T1 路地铁上行线 从 D21 地铁站步行到 S0464 公汽站(4.0) S0464->S0485(18.0) 坐 L104 路公汽上行线
	②	3	89.5	6	S0148->S1487(15.0) 坐 L024 路公汽下行线 从 S1487 公汽站步行到 D02 地铁站(4.0) D02->D15(34.5) 坐 T1 路地铁上行线 从 D15 地铁站步行到 S2534 公汽站(4.0) S2534->S2210(18.0) 坐 L156 路公汽上行线 S2210->S0485(12.0) 坐 L417 路公汽上行线
	③	2	127	3	S0148->S3604(1.0) 坐 L308 路公汽上行线 S3604->S0248(1.0) 坐 L021 路公汽下行线 S0248->S0485(1.0) 坐 L469 路公汽上行线

S0087→S3676	①	0	30	3	从 S0087 公汽站步行到 D27 地铁站(4.0) D27->D36(22.0) 坐 T2 路地铁上行线 从 D36 地铁站步行到 S3676 公汽站(4.0)
	②	0	30	3	从 S0087 公汽站步行到 D27 地铁站(4.0) D27->D36(22.0) 坐 T2 路地铁上行线 从 D36 地铁站步行到 S3676 公汽站(4 分钟)
	③	1	68	2	S0087->S3496(1.0) 坐 L454 路公汽上行线 S3496->S3676(1.0) 坐 L209 路公汽上行线

结果分析评价：根据各方案下的最佳乘车路线来分析，方案③与方案中①比较起来，该方案下的最佳路线总是劣于或包含在方案①中。从实际意义上来分析也是如此，因为在单一票价下换乘次数的多少将直接决定乘车的费用，即使采用分段计费，又由于最短时间的保证，只要用单一票价费用换算成该线路下足够长路线，我们就可认为方案①给出的路线也就是费用最少的路线。因此，方案③价值不大。类似，

方案④：第一目标：时间最少，第二目标：费用最少。

方案⑤：第一目标：费用最少，第二目标：换乘最少。

方案⑥：第一目标：费用最少，第二目标：时间最少。

出于实际意义的考虑，讨论价值也不大。

六、 模型的进一步讨论

在实际公交系统运行过程中，有时某些路段的交通阻塞问题也是必须考虑的因素，而应用我们上面使用的方法可以很方便地处理这个问题。假设已知某些路段会发生程度不同的交通阻塞，并且根据历史数据记录对各个路段的阻塞程度有一个估计，则只需要在建立直达时间矩阵时对包含这些路段的线路的行车时间根据估计阻塞程度作相应的放大即可。

七、 模型优缺点

优点：

1、图论模型对问题的描述意义清晰，将问题转化为最短路问题后便于应用图论算法进行求解。

2、针对问题的特点，引入 Floyd 运算与步行矩阵，为算法的思路描述及编程实现提供了很好的基础。在此基础上提出了改进的 Floyd 算法， 该算法具有较高的计算效率。

3、运用大量编程技巧，进一步提高计算效率，计算速度大致能满足实时查询的需要。

4、对于第三问，通过步行矩阵与直达矩阵之间的Floyd运算，对增加步行条件下的公交路线选择问题，给出了一个极具可操作性的处理方案。

5、对具有道路阻塞信息下的最优线路选择问题提出了一种基于本文模型的很方便的处理方法。

缺点：

第三问费用最省的目标下未能提供一个令人满意的模型

参考文献：

[1] 杨新苗等，基于GIS的公交乘客出行路径选择模型，东南大学学报，第6期，87～91，2000

[2] 张林峰等，公交网络换乘矩阵的分析与算法，系统工程，第6期，92～96，2003

[3] 马良河等，城市公交线路网络图的最短路与乘车路线问题，数学的实践与认识，第6期，38～44，2004

[4] 汤筠筠等，公交出行查询系统中出行路径选择模型的研究，合肥工业大学学报，第10期，1227～1230，2004

[5] 何胜学等，公交网络最优路径的一种改进求解算法，上海理工大学学报，第1期，63～67，2006

[6] 王朝瑞，图论，北京，人民教育出版社，1981

[7] 肖位枢，图论及其算法，北京，航空工业出版社，1993