公交线路选择方案

摘要

本文以最优路线选择为目标函数，根据查询者的各种需求构建不同的约束条件，从实际情况出发，建立起不同的最佳路线选择模型，并结合题中所给的公交线路数据利用 Mathematica 进行求解，最终分别给出满足查询者各种不同需求的最佳路线。

在模型求解中，我们从求取换乘次数 n 入手，把原始数据分割重组为换乘 n 次的可选乘车线路集合 $U_n\ (n=1,2...)$，然后代入不同模型中的目标函数，求得相应条件下的最优解；而且结合原理图给出了求解 $U_n\ (n=1,2...)$ 的具体算法。

在模型一（公汽系统换乘模型）中，我们把乘车人群按需求分为时间 T 最短和费用 C 最少两种，分别给出约束条件，进而在集合 $U_n\ (n=1,2...)$ 中筛选出满足相应需求的最优解。

对于模型二（公交系统换乘模型），由于地铁的引入，大大增加了模型求解的复杂度，所以我们大胆的将地铁看作一路新的公汽线路，并且把在各地铁站可进行换乘的公汽站分别视为该新公汽线路的站点，然后用与模型一类似的求解方法，求出引入地铁后的相应最优解。

在模型三中，给出了步行与直达的混合出行模式，仿照 Dijkstra 算法，可以求得任意两点间换乘次数最少的出行方式；

最后，我们对模型进行了客观的评价，并将模型扩展到与各种路径探索有关或能抽象为线路选择的问题中去，如在网络上求解信息的最佳传送路径，天然气的配送的最优线路等等，扩大了模型的使用范围。

关键词

换乘次数　迪杰斯特拉算法　混合出行模式　最佳路线

问题重述

近年来，北京市公交系统有了很大的发展，越来越多的人选择乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽和地铁等）出行；由于公交线路数量的增多，人们也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司欲开发一个公交线路选择的自主查询系统；为满足查询者的各种不同需求，从实际情况出发，建立合理的数学模型解决以下问题：

1. 仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。用此模型并结合所给数据，求出指定六对起始站→终到站之间的最佳路线；
2. 同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。
3. 假设又知道所有站点之间的步行时间，给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

模型假设

1. 同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘(无需支付地铁费)；
2. 已知所有站点之间的步行时间；
3. 无论地铁线路间是否换乘，所付费用均为 3 元；
4. 题中所讨论的乘车时间从起始站上车开始计时，在终到站下车停止计时。

符号说明

S_i　编号为 i 的公汽站点　$(i=1,2,...3957)$

S_{start}　起始站　$S_{start}\in\{S_i \mid i=1,2...3957\}$

S_{end}　终到站　$S_{end}\in\{S_i \mid i=1,2...3957\}$

D_j　编号为 j 的地铁站点　$(j=1,2...39)$

L_x　编号为 x 的公汽线路　$(x=1,2...520)$

L_D　已看作一条特殊公汽线路的地铁线路（将 T_1 和 T_2 当作一条线路处理）

L 所有公汽线路的集合 $L=\{L_x \mid x=1,2,\ldots 520\}$

U_n 换乘 n 次的可选乘车线路集合 $(n=1,2\ldots)$

U_{sum} 所有可选乘车线路的总集合

$Line_k$ 可选乘车线路集合中第 k 种换乘方案 $(k=1,2\ldots 520$且$Line_k \in U_{sum})$

t_S 相邻公汽站平均行驶时间（包括停站时间）

t_D 相邻地铁站平均行驶时间（包括停站时间）

$n_{S,K}$ 在第 k 种换乘方案中乘坐公汽一次所经过的公汽站总站数（首站不算在内）

$n_{D,K}$ 在第 k 种换乘方案中乘坐地铁一次所经过的公汽站总站数（首站不算在内）

$n_{SS,K}$ 在第 k 种换乘方案中公汽换乘公汽的次数

$n_{DD,K}$ 在第 k 种换乘方案中地铁换乘地铁的次数

$n_{SD,K}$ 在第 k 种换乘方案中公汽换乘地铁的次数

$n_{DS,K}$ 在第 k 种换乘方案中地铁换乘公汽的次数

t_{SS} 公汽换乘公汽平均耗时

t_{DD} 地铁换乘地铁平均耗时

t_{SD} 公汽换乘地铁平均耗时

t_{DS} 地铁换乘公汽平均耗时

C_S 公汽单一票价

C_D 地铁单一票价

n_{min} 在一种换乘方案中最少换乘次数

问题分析

该问题主要是为查询者提供任意两个公交站点之间的可选择乘车方案；并从可选方案中，筛选出在满足查询者特定需求前提下的最佳方案。

结合生活中的实际情况，我们将公交线路都看作是有方向的，即使同一路车 L_x 的上下行也看作不同的乘坐路线；将环线公汽的反方向行车路线也定义为其同一车次的下行车。只要按照一定条件下，找出一种算法，用运计算机求出该条件下可选乘车线路集合，再结合由乘客不同需求所产生的目标函数对所给数据进行筛选，就可以很好的解决问题。

模型建立

由模型分析可知，如果从求取乘客需要换乘次数 n 的角度出发，当任意给出一对起始站 S_{start} 和终到站 S_{end} 时，就能够在所有公汽线路的集合 L 中，通过 Mathematica 编程实现，找到每个换乘次数 n 和其所对应的可选乘车线路集合 $U_n(n=1,2...)$，然后分别在 $U_n(n=1,2...)$ 的范围中讨论各种需求的情况，最终给出满足各种换乘次数 n 且满足其他需求的最佳路线。

在换乘次数 n 和其相应可选乘车集合 U_n 已求的前提下，我们把乘车人群的需求分为两种：要求时间 T 最短和要求费用 C 最少；然后针对两种需求列出以集合 U_n 为变量的目标函数。

针对不同的可选用交通工具，我们把最佳路线的选择问题，归结为以下两个模型：

模型一（公汽系统换乘模型）

目标函数一：满足最短时间需求

$$Line_{best}^{(t)} = Get(U,T)$$

$$s.t.\quad T = \underset{Line_k \in U_{sum}}{Min}\left\{n_{SS,K}\,g\,t_S + n_{SS}\,g\,t_{SS}\right\}$$

说明：

1. 函数 $Get(U,T)$ 在可选乘车线路总集合 U_{sum} 中，选取到达时间为 T 的线路

2. $Line_{best}^{(t)}$ 花费时间最短的最优线路

目标函数二：满足最小费用需求

$$Line_{best}^{(c)} = Get(U,C)$$

$$s.t.\ \begin{cases} C = Min \sum_{h=1}^{n_{SS,K}+1} C_S^{(h)} \\ C_S^{(h)} = \begin{cases} h=1, & Line_k^{(h)} \in L_{single} \ \ or \ \ Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & 0 \le n_{S,K}^{(h)} \le 20; \\ h=2, & Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & 21 \le n_{S,K}^{(h)} \le 40; \\ h=3, & Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & n_{S,K}^{(h)} \ge 41. \end{cases} \end{cases}$$

说明：

1. 函数 $Get(U,C)$ 在可选乘车线路总集合 U_{sum} 中，选取总费用为 C 的线路
2. $C_S^{(h)}$ 乘公汽在第 h 段时所需费用，$h = 1,2,...n_{SS,K}+1$；
3. $n_{S,K}^{(h)}$ 第 h 段中经过的公汽站数；
4. L_{single} 单一票制的公汽线路集合；
5. L_{sect} 分段计价的公汽线路集合；
6. 由于公汽换乘 $n_{SS,K}$ 次，所以共乘了 $n_{SS,K}+1$ 条公汽线路。

模型二（公交系统换乘模型）

目标函数一：满足最短时间需求

$$Line_{best}^{(t)} = Get(U,T)$$

$$s.t.\quad T = \underset{Line_k \in U_{sum}}{Min} \{ n_{S,K} g t_S + n_{D,K} g t_D + n_{SD,K} g t_{SD} + n_{SS,K} g t_{SS} + n_{DS,K} g t_{DS} + n_{DD,K} g t_{DD} \}$$

目标函数二：满足最小费用需求

$$Line_{best}^{(c)} = Get(U, C)$$

$$s.t.\begin{cases} C = Min\left\{\sum_{h=1}^{n_{SS,K}+1} C_S^{(h)} + sgn(n_{D,K}) \cdot C_D\right\} \\ C_S^{(h)} = \begin{cases} h=1, & Line_k^{(h)} \in L_{single} \ \ or \ \ Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & 0 \le n_{S,K}^{(h)} \le 20; \\ h=2, & Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & 21 \le n_{S,K}^{(h)} \le 40; \\ h=3, & Line_k^{(h)} \in L_{sect}, & n_{S,K}^{(h)} \ge 41. \end{cases} \\ sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \end{cases}$$

说明：

1．$sgn(x)$ 是符号函数，当 $x = n_{D,K} > 0$ 时，即需乘坐地铁，所以要附加乘坐地铁所用的车费 3 元（单一票价）；当 $x = n_{D,K} \le 0$ 时，即不需乘坐地铁，所以 $sgn(n_{D,K}) \cdot C_D = 0$，没有附加的地铁费用。

2．式中其他相应符号含义同模型一中说明。

模型求解

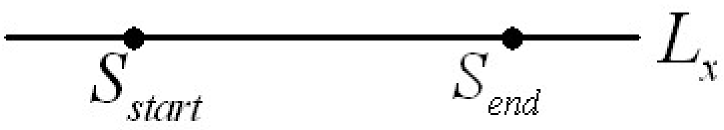
（一）可以选乘的公交线路集合 U_n 的求解方法

给出起始站 S_{start} 和终到站 S_{end} 之后，按照换乘次数 n 对原始公汽线路集合进行分类讨论，然后根据不同的 n 选择恰当的算法，利用 Mathematica 编程实现，在所有公汽线路集合 $L = \{L_x \mid x = 1, 2, ...520\}$ 中，找出每个 n 对应的所有可以选乘的公交线路集合 U_n（求解 n 和 U_n 的具体算法流程，详见附录 1）。

现给出不同 n 情况下的具体算法：

1）.当 $n = 0$ 时，即可以直达的情况：

在所有公汽线路的集合 $L=\{L_x \mid x=1,2,...520\}$ 中判断是否有 S_{start} 和 S_{end} 同时位于同一条公汽线路 L_x 中的情况，如果有，则记录该路公汽 L_x；原理如下图：

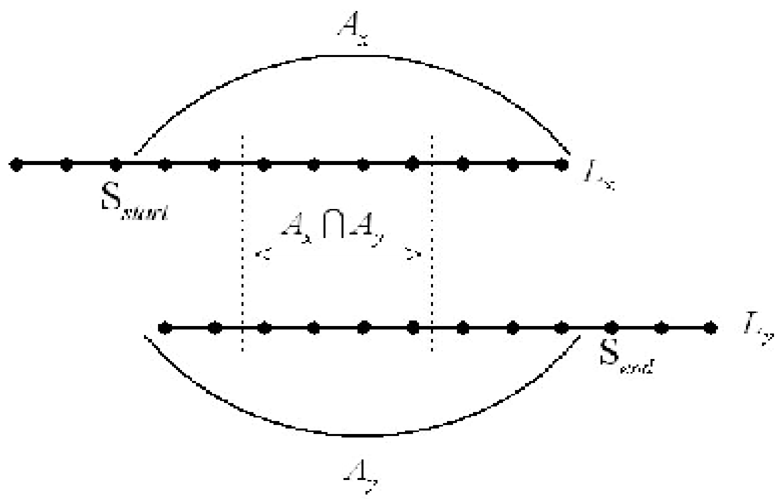


2）.当 $n=1$ 时，即需要换乘 1 次的情况：

（1）找到所有包含 S_{start} 的公汽线路 L_x，并将 L_x 中 S_{start} 之后的站点记为集合 A_x；

(2) 同理找到所有包含 S_{end} 的公汽线路 L_y，并将 L_y 中 S_{end} 之前的站点极为集合 A_y；

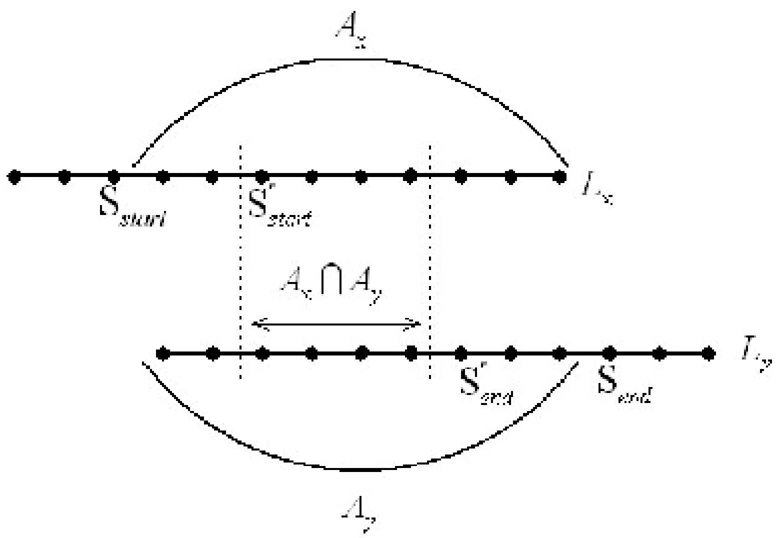
（3）判断 A_x 和 A_y 是否有交集，如果有，则相同站点即为可换乘站，并且线路 L_x 为第一次乘坐的公汽，L_y 为第二次乘坐的公汽；原理如下图：



3）.当 $n=2$ 时，即需要换乘 2 次的情况：

（1）首先按照 2）中的方法，找到集合 A_x 和 A_y；

（2）然后将 A_x 中任意一站看作新的 S_{start}"，将 A_x 中任意一站看作新的 S_{end}"，再按照 1）中的方法，判断集合 A_x 和 A_y 中是否有可以直达的线路，如果有，就说明 S_{start} 和 S_{end} 之间可以通过换乘两次到达；原理如下图：



与上述$n=2$的情形类似，在此基础上，继续利用$n=1$，可求得$n=3$时的集合U_3，依此类推，最终可求得每个n对应的所有可以选乘的公交线路集合U_n，

形如：

$$\begin{cases} n=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U_0 \\ n=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U_1 \\ \qquad\qquad\ldots\ldots \\ n=k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U_k \\ \qquad\qquad\ldots\ldots \end{cases};$$

（二）目标函数的求解方法

然后在所得的可选乘车线路集合$U_n (n=1,2...)$中，找出$U_{n_{\min}}$和$U_{n_{rest}}$，

其中：

$$n_{min} = \mathop{Min}_{U_n \neq f} n \quad , \quad U_{n_{rest}} = U_{sum} - U_{n_{\min}} \ ;$$

从而在$U_{n_{\min}}$和$U_{n_{rest}}$中分别筛选出符合目标函数的最优解，得出相应的最佳路线；

形如：

$$\begin{cases} U_{n_{\min}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} Min\ T_{n_{\min}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{线路1} \\ Min\ C_{n_{\min}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{线路2} \end{cases} \\ U_{n_{rest}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} Min\ T_{n_{rest}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{线路3} \\ Min\ C_{n_{rest}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{线路4} \end{cases} \end{cases};$$

线路 1 和线路 2 就是需要满足换乘次数最少条件下的各种最优解；

如果再将在 $U_{n_{\min}}$ 和 $U_{n_{rest}}$ 中所得的 $Min\ T_n$ 或 $Min\ C_n$ 分别进行比较，又可以得到截至 n 同时满足时间或费用要求的最佳线路，即得到了满足在换乘次数不超过 n 的前提下，时间最少或费用最少的最佳路线，这里称之为全局最优解 $Best\ Min\ T_k$ 或 $Best\ Min\ C_k$；

形如：

$$\left.\begin{aligned} &Min\ T_{n_{\min}} \ldots\ldots\ldots\ldots\text{线路1} \\ &Min\ T_{n_{rest}} \ldots\ldots\ldots\ldots\text{线路3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots Best\ Min\ T_k \ldots\ldots\ldots\text{最佳路线}\mathrm{k}_T$$

$$\text{或}\quad \left.\begin{aligned} &Min\ C_{n_{\min}} \ldots\ldots\ldots\ldots\text{线路2} \\ &Min\ C_{n_{rest}} \ldots\ldots\ldots\ldots\text{线路4} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots Best\ Min\ C_k \ldots\ldots\ldots\text{最佳路线}\mathrm{k}_C$$

理论上讲，可以求得任意指定换乘次数 n 下的 U_n，然后求得各个 $Min\ T_n$ 和 $Min\ C_n$，进而又可得到全局最优解 $Best\ Min\ T_k$ 和 $Best\ Min\ C_k$。当然，随着 n 的增大，所得可以选乘的公交线路集合 U_n 中元素个数也随之增大，求解复杂程度也随之增大。结合实际情况考虑，可以忍受出行换乘次数超过 3 次的人群是较小的人群，所以这里取 $n \le 2$。

模型一（公汽系统换乘模型）

在只考虑公汽线路的情况下，对于问题一中给出的 6 对不同的公汽站，分别用表格表示出满足不同人群需要的最佳线路，包括：

1）在换乘次数最小的条件下，满足时间最短需求的最佳线路和满足所需费用最小的最佳线路；

2）在不局限于换乘次数最小的条件下，时间最短线路和费用最小线路。

查询者可以通过所给出的线路，进一步选择同时符合几种需求的线路。

表格说明：

1）若解出的时间最短线路和费用最小线路均为同一线路，则在同一表格中表示。

2）上行线路：简称“上”；下行线路：简称“下”。

3）时间单位：分钟；费用单位：元。

（1）S3359-S1828

表 1：换乘次数最小条件下的最优解：

最佳线路（时间：101；费用：3）					
起始站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S3359	L436 下	S1784	L167 下	S1828	1
			L217 下		1

表 2：不局限于换乘次数最小下的最优解：

最佳线路（时间：64；费用：3）							
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S3359	L015 下,L123 上,L132 下,L352 下,L336 上,L436 上,L474 下	S2903	L485 下	S1784	L167 下，L217 下	S1828	2
	L324 下,L469 下,L484 下	S2027	L485 下	S1784	L167 下，L217 下		
	L324 下,L484 下	S2027	L485 下	S1784	L167 下，L217 下		

（2）S1557-S0481

表 3：换乘次数最少条件下的最优解：

最佳线路（时间：106，费用：3）							
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S1557	L084 下	S1919	L189 下	S3186	L460 下	S0481	2
	L363 下						

不局限于换乘次数最小下的最优解，同表 3。

（3）S0971-S0485

表 4：换乘次数最少条件下的最优解：

最佳线路（时间：128；费用：3）						
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	终到站	换乘次数
S0971	L013 下	S2184	L417 下行	S0485	S0485	1

表 5：不局限于换乘次数最小下的最优解：

最佳线路（时间：103；费用：3）								
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	换乘站	终到站	换乘次数
S0971	L013 下	S2517	L290 下	S2159	L469 上	S4085	S4085	2

（4）S0008-S0073

表 6：换乘次数最少条件下的最优解：

<table>
<tr><td colspan="6">最佳线路（时间：83；费用：2）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td rowspan="14">S0008</td><td>L463 下</td><td>S2083</td><td>L057 上</td><td rowspan="14">S0073</td><td rowspan="14">1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">L355 下</td><td>S2263</td><td rowspan="3">L345 上</td></tr>
<tr><td>S3917</td></tr>
<tr><td>S2303</td></tr>
<tr><td rowspan="10">L159 下</td><td>S0291</td><td rowspan="6">L058 下</td></tr>
<tr><td>S2559</td></tr>
<tr><td>S0491</td></tr>
<tr><td>S2683</td></tr>
<tr><td>S3315</td></tr>
<tr><td>S3614</td></tr>
<tr><td>S2559</td><td>L464 上</td></tr>
<tr><td>S0400</td><td rowspan="3">L474 上</td></tr>
<tr><td>S2633</td></tr>
<tr><td>S3053</td></tr>
</table>

表 7：不局限于换乘次数最小下的最优解：

最佳线路（时间：67；费用：3）								
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	换乘站	终到站	换乘次数
S0008	L043 下	S1383	L290 下	S2184	L345 上	S0073	S0073	2

（5）S0148-S0485

表 8：换乘次数最少条件下的最优解：

<table>
<tr><td colspan="8">最佳线路（时间：106；费用：3）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">S0148</td><td rowspan="3">L308 上</td><td rowspan="3">S0036</td><td rowspan="3">L156 下</td><td>S2210</td><td rowspan="3">L417 上</td><td rowspan="3">S0485</td><td>2</td></tr>
<tr><td>S3332</td><td>2</td></tr>
<tr><td>S3351</td><td>2</td></tr>
</table>

不局限于换乘次数最小下的最优解，同表 8。

（6）S0087-S3676

表 9：换乘次数最少条件下的最优解：

最佳线路（时间：65；费用：2）					
起始站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S0087	L454 上	S3496	L209 下	S3676	1

表 10：不局限于换乘次数最小下的最优解：

<table>
<tr><td colspan="8">最佳线路（时间：46；费用：3）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td rowspan="6">S0087</td><td>L021 下</td><td rowspan="6">S0088</td><td rowspan="6">L231 上</td><td rowspan="6">S0427</td><td>L097 上</td><td rowspan="6">S3676</td><td rowspan="6">2</td></tr>
<tr><td>L021 下</td><td>L462 下</td></tr>
<tr><td>L206 上</td><td>L097 上</td></tr>
<tr><td>L206 上</td><td>L462 下</td></tr>
<tr><td>L454 下</td><td>L097 上</td></tr>
<tr><td>L454 下</td><td>L462 下</td></tr>
</table>

模型二（公交系统换乘模型）

在第二问中，要同时考虑地铁和公汽的所有线路，解决问题一中的问题。

地铁各站又有很多可以互相换乘的公汽车站，且不分顺序；如果具体的考虑各种换乘情况组合，将是相当庞大的工作量。

这里考虑到模型一的求解，是基于所有公汽线路集合 $L=\{L_x \mid x=1,2,...520\}$ 的搜索；如果将地铁线路视为公汽线路 L_x 中的一条，各地铁站附近的换乘公汽站看作这条新公汽线路的普通公汽站，并将地铁线路并入原先的公汽线路集合 $L=\{L_x \mid x=1,2,...520\}$ 中，用模型一的求解方法，同样可以求得模型二中的可以选乘的公交线路集合 U_n，进而结合目标函数求得最优线路。大大简化了模型二的求解过程。

同时考虑公汽与地铁线路，由于模型一中已求解出仅考虑公汽线路的最佳线路，所以在此模型中，我们首先求出乘车线路中需乘坐地铁时的最佳线路，然后与模型一中只考虑公汽线路的最佳线路做出比较，并评价说明，选择同时考虑公汽与地铁线路的最佳线路。

（1）S3359-S1828

表 11：

<table>
<tr><td colspan="10">线路（时间：84.5；费用：5）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td>S3359</td><td>L015 上</td><td>S3068,D08</td><td>T1</td><td>D12</td><td>T2</td><td>D38,S3262</td><td>L041 上</td><td>S1828</td><td>3</td></tr>
</table>

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更短，费用更少。

（2）S1557-S0481

表 12：

线路（时间：116.5；费用：5）							
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S1557	L084 下	S0978,D32	T2	D24,S0537	L516 上	S0481	2

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更短，费用更少。

（3）S0971-S048

表 13：

<table>
<tr><td colspan="8">线路（时间：96；费用：5）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td rowspan="10">S0971</td><td rowspan="5">L094 上</td><td rowspan="5">S0567，D01</td><td rowspan="10">T1</td><td>D21,S0466</td><td>L051 上</td><td rowspan="10">S0485</td><td rowspan="10">2</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L104 上</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L395 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0466</td><td>L450 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L469 下</td></tr>
<tr><td rowspan="5">L119 下</td><td rowspan="5">S0567，D01</td><td>D21,S0466</td><td>L051 上</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L104 上</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L395 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0466</td><td>L450 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L469 下</td></tr>
</table>

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更长，但费用较少。

（4）S0008-S0073

表 14：

线路（时间：53.5；费用：5）									
起始站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	换乘站	线路	终到站	换乘次数
S0008	L200 上	S2534,D15	T1	D12	T2	D25,S0525	L103 上	S0073	3

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更长，但费用较少。

（5）S0148-S0485

表 15：

<table>
<tr><td colspan="8">线路（时间：87.5；费用：5）</td></tr>
<tr><td>起始站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>换乘站</td><td>线路</td><td>终到站</td><td>换乘次数</td></tr>
<tr><td rowspan="5">S0148</td><td rowspan="5">L24 下</td><td rowspan="5">S1487，D02</td><td rowspan="5">T1</td><td>D21,S0466</td><td>L051 上</td><td rowspan="5">S0485</td><td rowspan="5">2</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L104 上</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L395 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0466</td><td>L450 下</td></tr>
<tr><td>D21,S0464</td><td>L469 下</td></tr>
</table>

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更长，但费用较少。

（6）S0087-S3676

表 16：

线路（时间：20；费用：3）			
起始站	线路	终到站	换乘次数
S0087,D27	T2	D36,S3676	0

与模型一求出的最优解相比，模型一时间更长，但费用可以较少。

在以上两个模型所得出的最佳线路中，查询者可以通过个人的需求和喜好选择不同的最佳线路。也可以在满足某种需求的条件下来选择其中能够较好满足其他需求的公交线路。

模型评价

优点分析

我们结合实际情况，简洁的对人们的可能需求建立了两个目标函数，然后对这种需求进行对比讨论，给出最佳路线，原理简单，结果可靠。

本题中两个模型的具体算法大体相同，都是基于 Mathematica 对站点集合的搜索；模型二中由于地铁的引入，大大增加了可换乘种类，使分析各种换乘组合变的比较困难，所以我们大胆的将地铁看作公汽线路中的一路，把与地铁有关的公汽站视为一个集合，与模型一中的所有公汽线路的集合 $L=\{L_x \mid x=1,2,...520\}$ 共同构成一个新的集合，再利用程序对新的集合进行搜索，这样就无需再考虑各种复杂的换乘组合了，简化了模型。

缺点分析

模型的不足在于，为了求得更加准确的全局最优解，就要知道尽可能多的换乘方案，这就需要在按照换乘数分类求解换乘方案的算法中，尽可能的提高 n 的值；而随着 n 的增大，算法的求解复杂度也越发的大，当 n 超过 3 时，求解可以选乘的公交线路集合 U_n 的程序运行起来需要较长的时间。

模型扩展

本题的实质是路线选择，题干是在陆路具体的交通工具上展开的，而我们的模型是将具体的公交线路抽象为数字 L_x，再对抽象的数据集合进行处理，最终得出最优可行解；

所以我们的模型不仅仅局限于解决公交系统中最佳路线选择问题，还可以推广到与各种路径探索有关或能抽象为线路选择的问题中去，如在网络上求解信息的最佳传送路径，天然气的配送的最优线路等等；只要根据具体的需求，将目标函数和约束条件做相应的更改，用同样的算法就可以求得所要的最优解，很好的实现了模型的转接。

问题三的回答

问题分析

考虑到加入步行的可能，使得出行的情况复杂化。考虑到人们一般的出行习惯，步行时间不能太久，在这里假设限制最大的步行时间为Δt。由于有了步行的机动性，大多数人们不太可能考虑过多的乘车换乘，在这种前提下，采用类似迪杰斯特拉算法的方式我们建立的模型三基于步行与乘车直达的混合出行模式，保证不换乘、最省运费，但可能会浪费一些时间；在不满足步行与乘车直达的出行模式时，考虑用换乘公汽或地铁的出行模式。

模型假设

Set1　　到S_{start}的步行时间小于Δt的站点S的集合（包括S_{start}），

Set2　　到S_{end}的步行时间小于Δt的站点S的集合（包括S_{end}）。

$F(S_1,S_2)$　步行从S_1到S_2的出行方式，

$L_x(S_1,S_2)$　乘直达车从S_1到S_2的出行方式。

模型建立

$$Line=\begin{cases}F(S_{start},S)+L_x(S,S_{end})\ \text{(先步行再乘车)}\ldots\ldots\text{在满足}S\in\text{Set1且}S\text{与}S_{end}\text{之间有直达} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{车的情况下}S\text{为离}S_{start}\text{最近的站点} \\ L_x(S_{start},\ S)+F(S,S_{end})\ \text{(先乘车再步行)}\ldots\ldots\text{在满足}S\in\text{Set2且}S\text{与}S_{start}\text{之间有直达} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{车的情况下}S\text{为离}S_{end}\text{最近的站点} \\ \text{采用模型一、二求出出行方式}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{其它情形}\end{cases}$$

模型求解

步 1：判断 S_{start} 到 S_{end} 之间是否可以乘车直达，

可以，选择路线即为 $L_x(S_{\text{start}}, S_{end})$ ；

否则，转步 2；

步 2：若 Set1 和 Set2 均为空， 采用模型一、二求出出行方式；

否则，

相应取非空的 Set1 或 Set2 中到 S_{start} 或 S_{end} 的步行时间最小的 S，转步 3；

步 3：判断 S 到相应的 S_{end} 或 $\mathrm{S}_{\text{start}}$ 之间是否可以乘车直达，

可以，选择路线 $F(S_{start}, S)$步行+$L_x(S, S_{end})$乘车直达

或$L_x(S_{start}, S)$步行+$F(S, S_{end})$乘车直达 ；

否则，将 S 从 Set1 或 Set2 中删除，转步 2。

上面的模型是先步行再换乘直达车或先乘直达车再步行的方式，两者的乘车、步行组合方式不同，但是算法的本质是相同的。

模型评价

所求结果尽量保证不换乘、最省运费，但可能会浪费一些时间；当到离出发点最近的步行站点的时间大于 Δt 时，要考虑模型一、二来解。

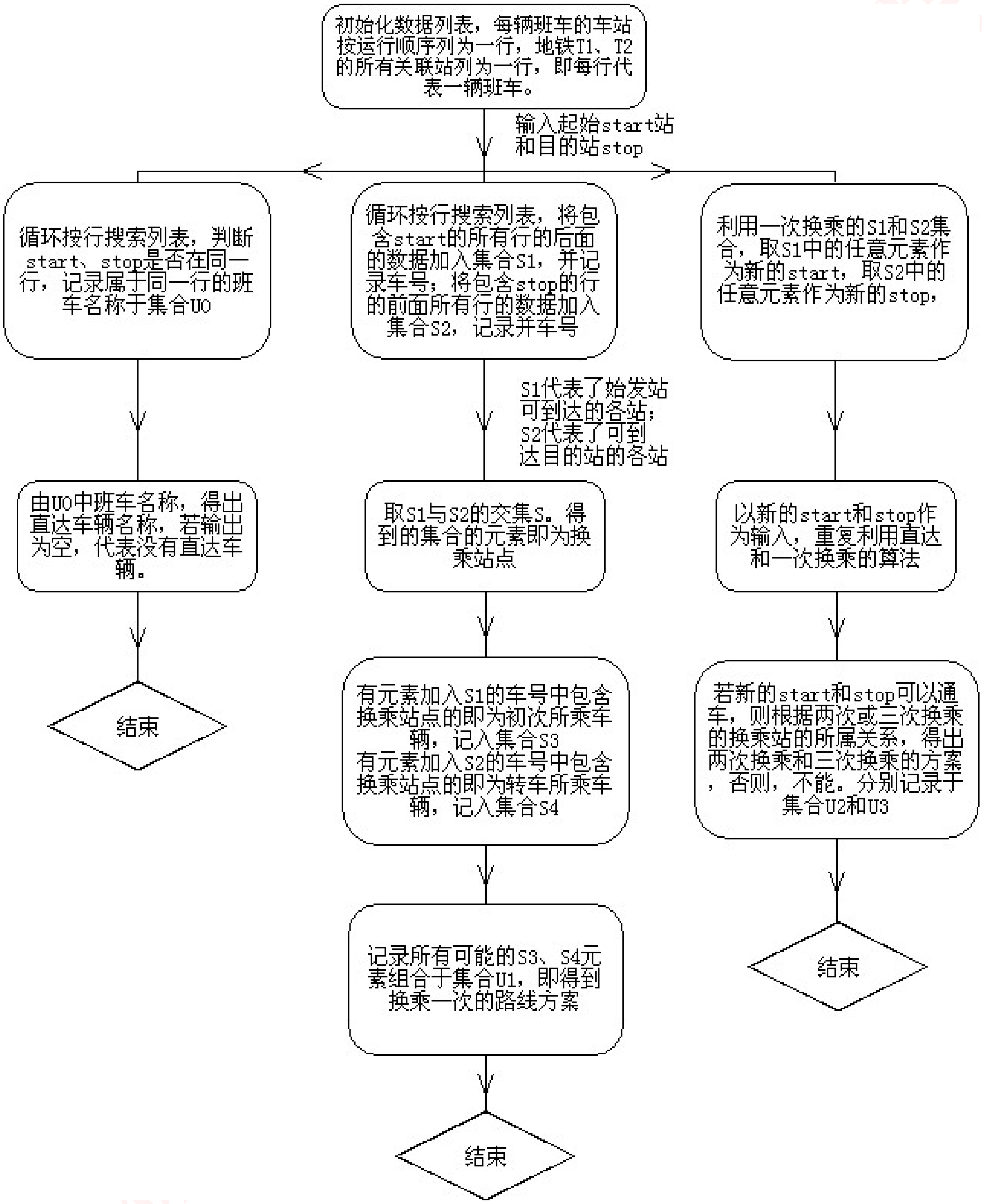
参考文献：

[1] 姜启源，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003；

[2] 李尚志，数学实验（第二版），北京：高等教育出版社，2004。

附录：

求解 n 和 U_n 的具体算法流程图。



注：此流程图只给出了求解直达、一次换乘及两次换乘可选乘车路线的流程；可在此基础上求得任意次换乘下的可选乘车路线。