

巡检线路的排班

——2017年D题讲评

主讲人：北京工业大学 薛毅

2017全国数学建模讲评会

云南、昆明

2017年11月25日

巡检线路的排班——2017年D题讲评

- 题目
- 问题分析及问题1的求解
- 问题2的求解
- 问题3的求解
- 阅卷情况简述



1. 题目——巡检线路的排班

某化工厂有 26 个点需要进行巡检以保证正常生产，各个点的巡检周期、巡检耗时、两点之间的连通关系及行走所需时间在附件中给出。

每个点每次巡检需要一名工人，巡检工人的巡检起始地点在巡检调度中心（XJ0022），工人可以按固定时间上班，也可以错时上班，在调度中心得到巡检任务后开始巡检。现需要建立模型来安排巡检人数和巡检路线，使得所有点都能按要求完成巡检，并且耗费的人力资源尽可能少，同时还应考虑每名工人在一时间段内（如一周或一月等）的工作量尽量平衡。

表1 Excel表中的基本信息

位号	周期（分钟）	巡检耗时（分钟）
XJ-0001	35	3
XJ-0002	50	2
XJ-0003	35	3
XJ-0004	35	2
XJ-0005	720	2
XJ-0006	35	3
XJ-0007	80	2
XJ-0008	35	3
XJ-0009	35	4
XJ-0010	120	2
XJ-0011	35	3
XJ-0012	35	2
XJ-0013	80	5
XJ-0014	35	3
XJ-0015	35	2
XJ-0016	35	3
XJ-0017	480	2
XJ-0018	35	2
XJ-0019	35	2
XJ-0020	35	3
XJ-0021	80	3
XJ-0022	35	2
XJ-0023	35	3
XJ-0024	35	2
XJ-0025	120	2
XJ-0026	35	2

表2 Excel表中的连通关系

巡检点A	巡检点B	耗时（分钟）	巡检点A	巡检点B	耗时（分钟）
1	2	2	10	12	6
2	3	1	11	13	2
2	4	3	11	15	7
2	19	5	12	15	2
3	5	1	13	16	2
3	6	1	15	18	2
4	21	1	15	26	6
4	23	4	16	18	3
5	7	2	17	25	1
6	8	2	19	20	2
6	14	1	20	22	2
6	10	5	21	22	2
8	17	1	22	23	1
9	24	2	23	24	1
9	25	3	25	26	3
10	11	2			

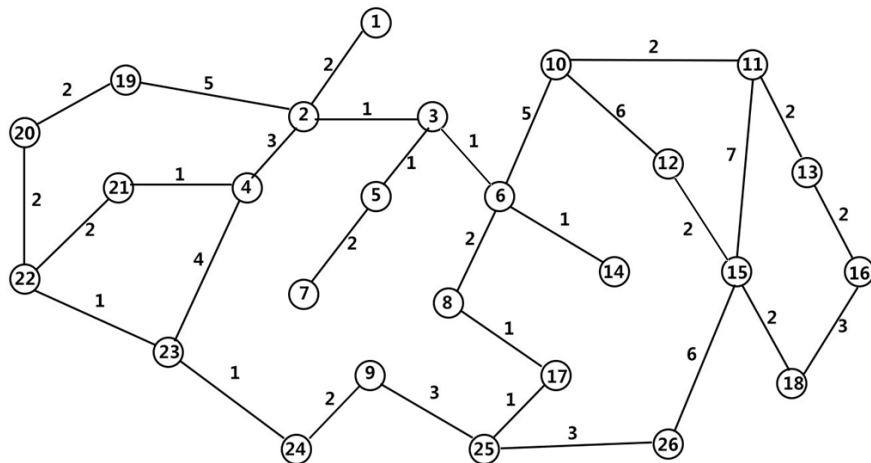


图1 Excel表中的连通图



问题1. 如果采用固定上班时间，不考虑巡检人员的休息时间，采用每天三班倒，每班工作8小时左右，每班需要多少人，巡检线路如何安排，并给出巡检人员的巡检线路和巡检的时间表。

问题3. 如果采用错时上班，重新讨论问题 1 和问题 2，试分析错时上班是否更节省人力。

问题2. 如果巡检人员每巡检 2 小时左右需要休息一次，休息时间大约是 5 到 10 分钟，在中午12时和下午 6 时左右需要进餐一次，每次进餐时间为 30 分钟，仍采用每天三班倒，每班需要多少人，巡检线路如何安排，并给出巡检人员的巡检线路和巡检的时间表。



2. 问题分析与模型建立

这个问题说的复杂一点是旅行商问题（Traveling Salesman Problem, TSP），或者是多旅行商问题（m-TSP），更严格的说，是车辆路径问题（Vehicle Routing Problem, VRP），而且还是带有时间窗口的车辆路径问题（Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW）。

如果这样考虑问题，这个问题将变得非常复杂。事实上，这个问题并没有这么复杂，因为它只有26个需要巡视的点，如果每个巡视点安排一个人的话，一个班至多是26个人。当然，没有那糟糕，如果一个人能巡视3~5个点的话，一个班也就是6~9个人。因此，只需要启发式算法就可能得到问题的计算结果。

2.1 巡检人员下限估计

为估计巡检人员数量的下限，先计算出旅行商问题所需要的时间（包括路程时间和巡检耗时）。对于只有26个城市的旅行商问题，无论是精确计算，还是近似计算都是不困难的。

可以考虑使用LINGO程序（见[1]）得到精确的计算结果（见图2），其中路程耗时68分钟和检查耗时67分钟，共计135分钟。

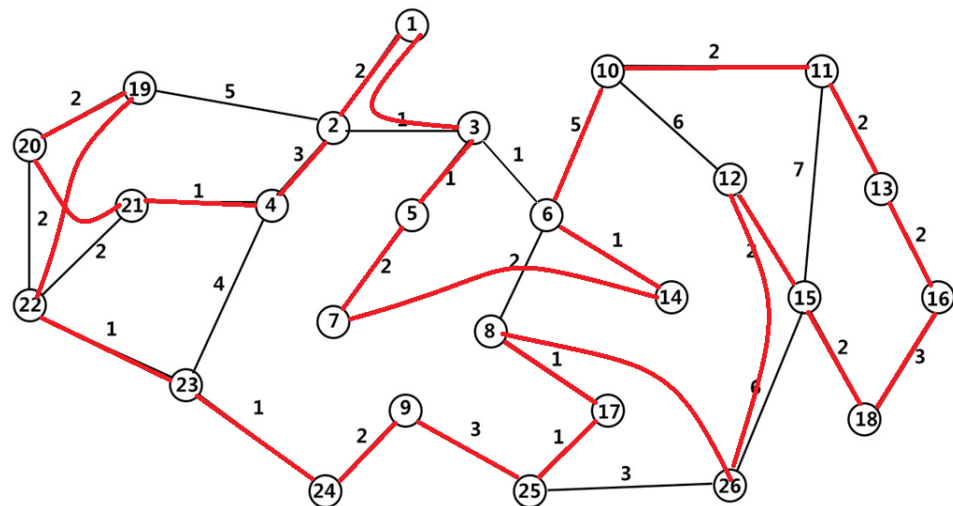


图2 26个点的TSP线路图



由于巡视点两次巡视的最小间隔时间是35分钟，且 $135/35=3.86$ ，因此，一个班至少需要4名工人。从图2（TSP图形）和题目要求（从22号点开始巡视）来看，只用4名工人巡视，肯定是不够的，应考虑增加1名工人，一个班使用5名工人。

从上述计算过程来看，实际上，并不需要精确求解TSP，只需近似计算，估计出一个下界即可。

例如，可以采用手工计算，也可以采用某些启发式算法，如最近领域法、最近插入法、最远插入法、最便宜插入法、任意插入法和交换两边改进方法等。

如果不打算自己手工编程，可以使用现成的软件，例如，R软件中的TSP函数（见[2]）就可以很好地解决这些问题，提供不同的参数，选择你喜欢的算法。



2.2 问题1的求解

现知道每个班需要5名工人，所以需要将巡视点划分成5个区域，每个区域最多包含6个点，最少也要有4个点，其目的是保证每个区域的工作量（巡视时间）尽量平衡。

由于题目要求，每位工人均从22号点开始巡视，因此，距22号点较近的点则多安排一些，而距22号较远的

点则少安排一些。为了完成这种需求的安排，需要计算从22号点至其余各点的最短路，这项工作可用Dijkstra（戴克斯特拉）算法完成。

当然，也不需要自己编程计算，直接调用R软件的`shortest.paths()`函数和`get.shortest.paths()`函数（见[2]）就可完成此问题，所绘图形如图3所示。

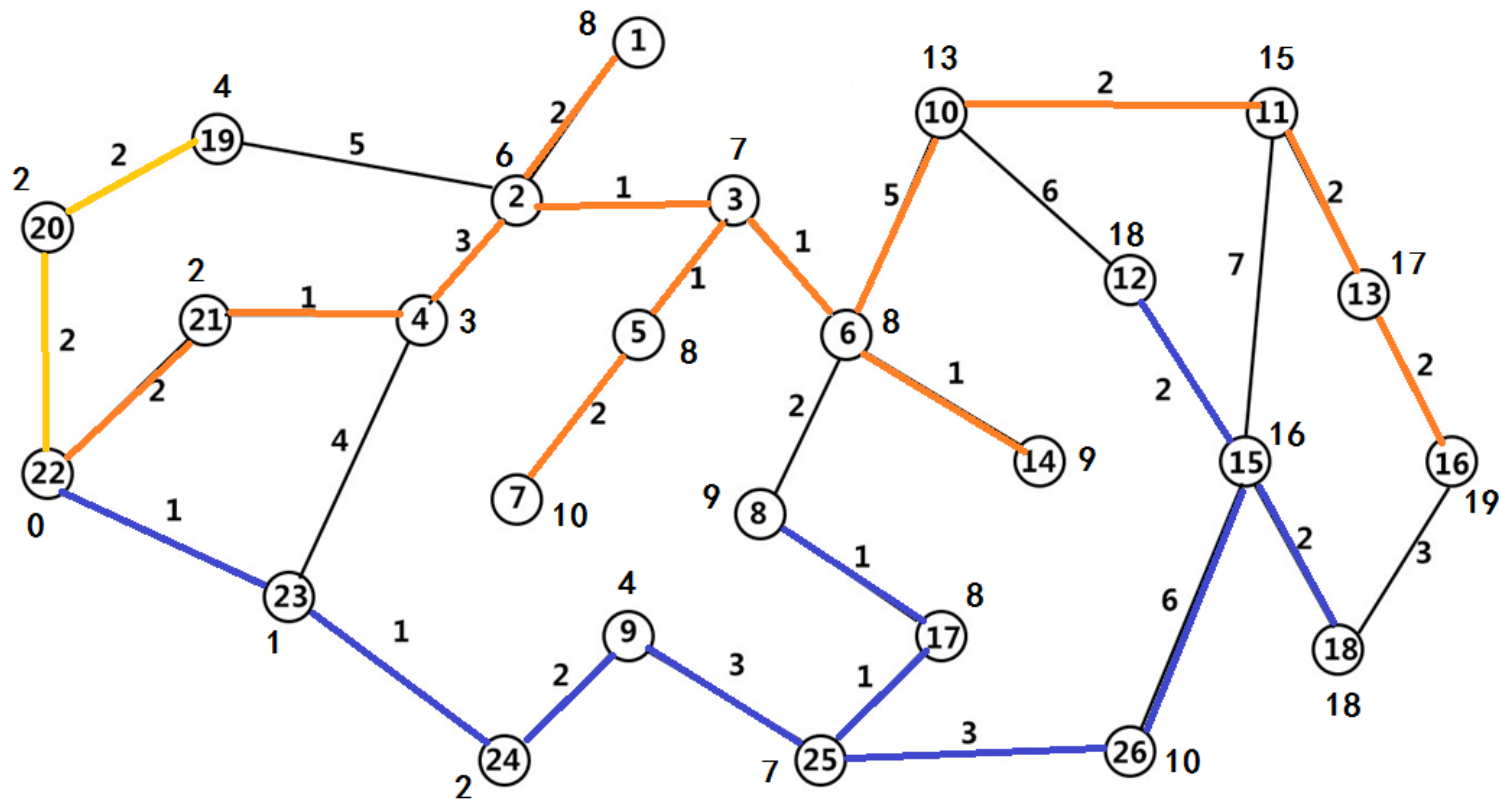


图3 22号点至其余各点的最短路



从图3出发，作如下尝试，将

- 22、20、19、2、4和21号点编为第一组；
- 23、24、9、8、17和25号点编为第二组；
- 1、3、6、14、5和7号点编为第三组；
- 26、15、18和12号点编为第四组；
- 11、13、16和10号点编为第五组。

每一组都找出相应TSP的结果，具体分组和相应的TSP图形如图4所示。

这种分组方式是为了满足题目的要求：

- 在规定的巡视时间间隔内完成巡视；
- 每位工人的工作量尽量平衡，巡视时间即不能过长，也不能过短。

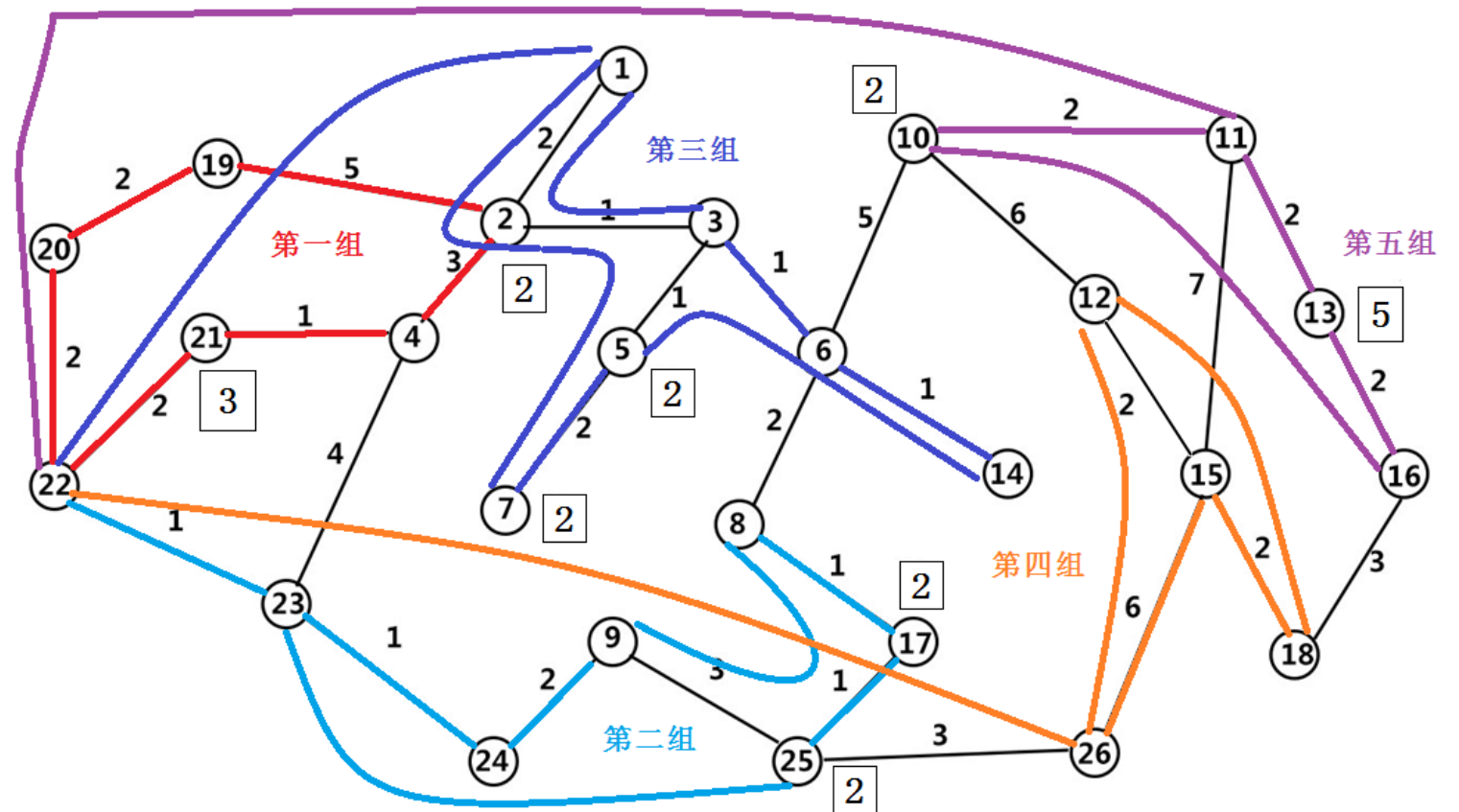


图4 巡检线路的分组情况, 5-TSP



下面给出具体的巡视路线和巡视时间：

- 第1组（22、20、19、2、4和21号点）的巡视周期是29分钟，而21号点的周期间隔是80分钟，可以两个35分钟巡视一次，所以此时巡视同期是27分钟。
- 第2组（23、24、9、8、17和25号点）的巡视，最长周期是32分钟、最短周期28分钟（17号点和25号点的时间间隔为分别为480分钟和120分钟）。
- 第3组（1、3、6、14、5和7号点）的巡视，最长周期是32分钟，最短周期19分钟（5号点和7号点的时间间隔分别为720分钟和80分钟）。
- 第4组（26、15、18和12号点）的巡视，周期长度是28分钟。
- 第5组（11、13、16和10号点）的巡视，周期长度是25分钟。

表3 第1组巡视的时间表（部分）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班								
1	22	35	8:00	8:02	8:35	8:37	9:10	9:12
2	20	35	8:04	8:07	8:39	8:42	9:14	9:17
3	19	35	8:09	8:11	8:44	8:46	9:19	9:21
4	2	50	8:16	8:18	8:51	8:53	9:26	9:28
5	4	35	8:21	8:23	8:56	8:58	9:31	9:33
6	21	80	8:24	8:27	---	---	9:34	9:37
7	22	35	8:29	8:29	9:01	9:01	9:39	9:39
中班								
1	22	35	16:00	16:02	16:35	16:37	17:10	17:12
2	20	35	16:04	16:07	16:39	16:42	17:14	17:17
3	19	35	16:09	16:11	16:44	16:46	17:19	17:21
4	2	50	16:16	16:18	16:51	16:53	17:26	17:28
5	4	35	16:21	16:23	16:56	16:58	17:31	17:33
6	21	80	16:24	16:27	---	---	17:34	17:37
7	22	35	16:29	16:29	17:01	17:01	17:39	17:39
晚班								
1	22	35	0:00	0:02	0:35	0:37	1:10	1:12
2	20	35	0:04	0:07	0:39	0:42	1:14	1:17
3	19	35	0:09	0:11	0:44	0:46	1:19	1:21
4	2	50	0:16	0:18	0:51	0:53	1:26	1:28
5	4	35	0:21	0:23	0:56	0:58	1:31	1:33
6	21	80	0:24	0:27	---	---	1:34	1:37
7	22	35	0:29	0:29	1:01	1:01	1:39	1:39

开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
14:17	14:19	14:51	14:53	15:25	15:27
14:21	14:24	14:55	14:58	15:29	15:32
14:26	14:28	15:00	15:02	15:34	15:36
14:33	14:35	15:07	15:09	15:41	15:43
14:38	14:40	15:12	15:14	15:46	15:48
---	---	15:15	15:18	---	---
14:43	14:43	15:20	15:20	15:51	15:51
22:17	22:19	22:51	22:53	23:25	23:27
22:21	22:24	22:55	22:58	23:29	23:32
22:26	22:28	23:00	23:02	23:34	23:36
22:33	22:35	23:07	23:09	23:41	23:43
22:38	22:40	23:12	23:14	23:46	23:48
---	---	23:15	23:18	---	---
22:43	22:43	23:20	23:20	23:51	23:51
6:17	6:19	6:51	6:53	7:25	7:27
6:21	6:24	6:55	6:58	7:29	7:32
6:26	6:28	7:00	7:02	7:34	7:36
6:33	6:35	7:07	7:09	7:41	7:43
6:38	6:40	7:12	7:14	7:46	7:48
---	---	7:15	7:18	---	---
6:43	6:43	7:20	7:20	7:51	7:51

表4 第2组巡视的时间表（部分）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班	22			8:00				
1	23	35	8:01	8:04	8:36	8:39	9:11	9:14
2	24	35	8:05	8:07	8:40	8:42	9:15	9:17
3	9	35	8:09	8:13	8:44	8:48	9:19	9:23
4	8	35	8:18	8:21	8:53	8:56	9:28	9:31
5	17	480	8:22	8:24	---	---	---	---
6	25	120	8:25	8:27	---	---	---	---
7	23	35	8:33	8:33	9:04	9:04	9:39	9:39
	22		15:55	白班下班时间				
中班	22			16:00				
1	23	35	16:01	16:04	16:36	16:39	17:11	17:14
2	24	35	16:05	16:07	16:40	16:42	17:15	17:17
3	9	35	16:09	16:13	16:44	16:48	17:19	17:23
4	8	35	16:18	16:21	16:53	16:56	17:28	17:31
5	17	480	16:22	16:24	---	---	---	---
6	25	120	16:25	16:27	---	---	---	---
7	23	35	16:33	16:33	17:04	17:04	17:39	17:39
	22		23:55	中班下班时间				
晚班	22			0:00				
1	23	35	0:01	0:04	0:36	0:39	1:11	1:14
2	24	35	0:05	0:07	0:40	0:42	1:15	1:17
3	9	35	0:09	0:13	0:44	0:48	1:19	1:23
4	8	35	0:18	0:21	0:53	0:56	1:28	1:31
5	17	480	0:22	0:24	---	---	---	---
6	25	120	0:25	0:27	---	---	---	---
7	23	35	0:33	0:33	1:04	1:04	1:39	1:39
	22		7:55	晚班下班时间				

离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
13:47	14:18	14:21	14:52	14:55	15:26	15:29
13:50	14:22	14:24	14:56	14:58	15:30	15:32
13:56	14:26	14:30	15:00	15:04	15:34	15:38
14:04	14:35	14:38	15:09	15:12	15:43	15:46
---	---	---	---	---	---	---
---	---	---	15:14	15:16	---	---
14:12	14:46	14:46	15:22	15:22	15:54	15:54
21:47	22:18	22:21	22:52	22:55	23:26	23:29
21:50	22:22	22:24	22:56	22:58	23:30	23:32
21:56	22:26	22:30	23:00	23:04	23:34	23:38
22:04	22:35	22:38	23:09	23:12	23:43	23:46
---	---	---	---	---	---	---
---	---	---	23:14	23:16	---	---
22:12	22:46	22:46	23:22	23:22	23:54	23:54
5:47	6:18	6:21	6:52	6:55	7:26	7:29
5:50	6:22	6:24	6:56	6:58	7:30	7:32
5:56	6:26	6:30	7:00	7:04	7:34	7:38
6:04	6:35	6:38	7:09	7:12	7:43	7:46
---	---	---	---	---	---	---
---	---	---	7:14	7:16	---	---
6:12	6:46	6:46	7:22	7:22	7:54	7:54

表5 第3组巡视的时间表（部分）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班	22			8:00				
1	1	35	8:08	8:11	8:43	8:46	9:18	9:21
2	3	35	8:14	8:17	8:49	8:52	9:24	9:27
3	6	35	8:18	8:21	8:53	8:56	9:28	9:31
4	14	35	8:22	8:25	8:57	9:00	9:32	9:35
5	5	720	8:28	8:30	---	---	---	---
6	7	80	8:32	8:34	---	---	9:40	9:42
7	1	35	8:40	8:40	9:05	9:05	9:48	9:48
	22		15:59					
中班	22			16:00				
1	1	35	16:08	16:11	16:43	16:46	17:18	17:21
2	3	35	16:14	16:17	16:49	16:52	17:24	17:27
3	6	35	16:18	16:21	16:53	16:56	17:28	17:31
4	14	35	16:22	16:25	16:57	17:00	17:32	17:35
5	5	720	16:28	16:30	---	---	---	---
6	7	80	16:32	16:34	---	---	17:40	17:42
7	1	35	16:40	16:40	17:05	17:05	17:48	17:48
	22		23:59					
晚班	22			0:00				
1	1	35	0:08	0:11	0:43	0:46	1:18	1:21
2	3	35	0:14	0:17	0:49	0:52	1:24	1:27
3	6	35	0:18	0:21	0:53	0:56	1:28	1:31
4	14	35	0:22	0:25	0:57	1:00	1:32	1:35
5	5	720	0:28	0:30	---	---	---	---
6	7	80	0:32	0:34	---	---	1:40	1:42
7	1	35	0:40	0:40	1:05	1:05	1:48	1:48
	22		7:59					

开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
14:25	14:28	14:59	15:02	15:33	15:36
14:31	14:34	15:05	15:08	15:39	15:42
14:35	14:38	15:09	15:12	15:43	15:46
14:39	14:42	15:13	15:16	15:47	15:50
---	---	---	---	---	---
---	---	15:21	15:23	---	---
14:47	14:47	15:29	15:29	15:59	回到22号点
22:25	22:28	22:59	23:02	23:33	23:36
22:31	22:34	23:05	23:08	23:39	23:42
22:35	22:38	23:09	23:12	23:43	23:46
22:39	22:42	23:13	23:16	23:47	23:50
---	---	---	---	---	---
---	---	23:21	23:23	---	---
22:47	22:47	23:29	23:29	23:59	回到22号点
6:25	6:28	6:59	7:02	7:33	7:36
6:31	6:34	7:05	7:08	7:39	7:42
6:35	6:38	7:09	7:12	7:43	7:46
6:39	6:42	7:13	7:16	7:47	7:50
---	---	---	---	---	---
---	---	7:21	7:23	---	---
6:47	6:47	7:29	7:29	7:59	回到22号点

[illegible]



表7 第5组巡视的时间表（部分）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班	22			8:00				
1	11	35	8:15	8:18	8:50	8:53	9:25	9:28
2	13	80	8:20	8:25	8:55	休息5分钟	9:30	9:35
3	16	35	8:27	8:30	9:02	9:05	9:37	9:40
4	10	120	8:36	8:38	---	---	---	---
5	11	35	8:40	8:40	9:09	9:09	9:44	9:44
	22		16:14					
中班	22			16:00				
1	11	35	16:15	16:18	16:50	16:53	17:25	17:28
2	13	80	16:20	16:25	16:55	17:00	17:30	17:35
3	16	35	16:27	16:30	17:02	17:05	17:37	17:40
4	10	120	16:36	16:38	---	---	---	---
5	11	35	16:40	16:40	17:09	17:09	17:44	17:44
	22		0:14					
晚班	22			0:00				
1	11	35	0:15	0:18	0:50	0:53	1:25	1:28
2	13	80	0:20	0:25	0:55	1:00	1:30	1:35
3	16	35	0:27	0:30	1:02	1:05	1:37	1:40
4	10	120	0:36	0:38	---	---	---	---
5	11	35	0:40	0:40	1:09	1:09	1:44	1:44
	22		8:14					

开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
14:32	14:35	15:06	15:09	15:40	15:43
14:37	休息5分钟	15:11	15:16	15:45	休息5分钟
14:44	14:47	15:18	15:21	15:52	15:55
---	---	15:27	15:29	---	---
14:51	14:51	15:31	15:31	16:14	回到22号点
22:32	22:35	23:06	23:09	23:40	23:43
22:37	22:42	23:11	23:16	23:45	23:50
22:44	22:47	23:18	23:21	23:52	23:55
---	---	23:27	23:29	---	---
22:51	22:51	23:31	23:31	0:14	回到22号点
6:32	6:35	7:06	7:09	7:40	7:43
6:37	6:42	7:11	7:16	7:45	7:50
6:44	6:47	7:18	7:21	7:52	7:55
---	---	7:27	7:29	---	---
6:51	6:51	7:31	7:31	8:14	回到22号点



3. 问题2的求解

3.1 休息时间

为了简化问题，先不用考虑“每巡视2小时左右休息大约5到10分钟”这一要求。

因为在问题1的求解过程中，5名工人在巡视过程中，多次出现5分钟的空余时间，这些空余时间可作休息时间。

3.2 进餐时间

在问题1的讨论中，每班需要5名工人，考虑两次进餐时间（1小时），就需要增加5小时，如果再考虑进餐的衔接时间，需要增加的时间还不止5小时，所以仅依赖于原来的5名工人而挤出进餐时间几乎是不可能的。

因此，需要增加1名工人让他在其他工人进餐时，完成巡视工作。



排班的方法是：

- 原来的排班时间不变；
- 5名工人的进餐时间安排在11时至13时之间，和17时至19时之间；
- 进餐时间为35分钟（最小的时间间隔），进餐时的巡视工作由第6名（机动）工人完成；
- 第6名（机动）工人的进餐时间可安排在他不替班的非工作时间。

表8至表12给出了部分排班的时间表（白班和中班），图中的黄色部分是可用于吃饭的时间。

第6名（机动）工人的巡视时间表，以及替换组的情况如表13所示。



表8 第1组巡视的时间表（部分，包含进餐时间）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班														
1	22	35	9:10	9:12	9:45	9:47	10:19	10:21	10:53	10:55	11:27	11:29	12:01	12:03
2	20	35	9:14	9:17	9:49	9:52	10:23	10:26	10:57	11:00	11:31	11:34	12:05	12:08
3	19	35	9:19	9:21	9:54	9:56	10:28	10:30	11:02	11:04	11:36	11:38	12:10	12:12
4	2	50	9:26	9:28	10:01	10:03	10:35	10:37	11:09	11:11	11:43	11:45	12:17	12:19
5	4	35	9:31	9:33	10:06	10:08	10:40	10:42	11:14	11:16	11:48	11:50	12:22	12:24
6	21	80	9:34	9:37	---	---	10:43	10:46	---	---	11:51	11:54	---	---
7	22	35	9:39	9:39	10:11	10:11	10:48	10:48	11:19	11:19	11:56	11:56	12:27	12:27
											吃饭时间			
中班														
1	22	35	17:10	17:12	17:45	17:47	18:19	18:21	18:53	18:55	19:27	19:29	20:01	20:03
2	20	35	17:14	17:17	17:49	17:52	18:23	18:26	18:57	19:00	19:31	19:34	20:05	20:08
3	19	35	17:19	17:21	17:54	17:56	18:28	18:30	19:02	19:04	19:36	19:38	20:10	20:12
4	2	50	17:26	17:28	18:01	18:03	18:35	18:37	19:09	19:11	19:43	19:45	20:17	20:19
5	4	35	17:31	17:33	18:06	18:08	18:40	18:42	19:14	19:16	19:48	19:50	20:22	20:24
6	21	80	17:34	17:37	---	---	18:43	18:46	---	---	19:51	19:54	---	---
7	22	35	17:39	17:39	18:11	18:11	18:48	18:48	19:19	19:19	19:56	19:56	20:27	20:27
					吃饭时间									
晚班														
1	22	35	1:10	1:12	1:45	1:47	2:19	2:21	2:53	2:55	3:27	3:29	4:01	4:03
2	20	35	1:14	1:17	1:49	1:52	2:23	2:26	2:57	3:00	3:31	3:34	4:05	4:08
3	19	35	1:19	1:21	1:54	1:56	2:28	2:30	3:02	3:04	3:36	3:38	4:10	4:12
4	2	50	1:26	1:28	2:01	2:03	2:35	2:37	3:09	3:11	3:43	3:45	4:17	4:19
5	4	35	1:31	1:33	2:06	2:08	2:40	2:42	3:14	3:16	3:48	3:50	4:22	4:24
6	21	80	1:34	1:37	---	---	2:43	2:46	---	---	3:51	3:54	---	---
7	22	35	1:39	1:39	2:11	2:11	2:48	2:48	3:19	3:19	3:56	3:56	4:27	4:27



表9 第2组巡视的时间表（部分，包含进餐时间）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班	22			8:00				
1	23	35	8:01	8:04	8:36	8:39	9:11	9:14
2	24	35	8:05	8:07	8:40	8:42	9:15	9:17
3	9	35	8:09	8:13	8:44	8:48	9:19	9:23
4	8	35	8:18	8:21	8:53	8:56	9:28	9:31
5	17	480	8:22	8:24	---	---	---	---
6	25	120	8:25	8:27	---	---	---	---
7	23	35	8:33	8:33	9:04	9:04	9:39	9:39
	22		15:55	白班下班时间				
中班	22			16:00				
1	23	35	16:01	16:04	16:36	16:39	17:11	17:14
2	24	35	16:05	16:07	16:40	16:42	17:15	17:17
3	9	35	16:09	16:13	16:44	16:48	17:19	17:23
4	8	35	16:18	16:21	16:53	16:56	17:28	17:31
5	17	480	16:22	16:24	---	---	---	---
6	25	120	16:25	16:27	---	---	---	---
7	23	35	16:33	16:33	17:04	17:04	17:39	17:39
	22		23:55	中班下班时间				
晚班	22			0:00				
1	23	35	0:01	0:04	0:36	0:39	1:11	1:14
2	24	35	0:05	0:07	0:40	0:42	1:15	1:17
3	9	35	0:09	0:13	0:44	0:48	1:19	1:23
4	8	35	0:18	0:21	0:53	0:56	1:28	1:31
5	17	480	0:22	0:24	---	---	---	---
6	25	120	0:25	0:27	---	---	---	---
7	23	35	0:33	0:33	1:04	1:04	1:39	1:39
	22		7:55	晚班下班时间				

开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
					11:30
10:20	10:23	10:54	10:57	11:28	11:31
10:24	10:26	10:58	11:00	11:32	11:34
10:28	10:32	11:02	11:06	11:36	11:40
10:37	10:40	11:11	11:14	11:45	11:48
---	---	---	---	---	---
---	---	---	---	11:50	11:52
10:48	10:48	11:22	11:22	11:58	11:58
10:49		吃饭时间			
18:20	18:23	18:54	18:57	19:28	19:31
18:24	18:26	18:58	19:00	19:32	19:34
18:28	18:32	19:02	19:06	19:36	19:40
18:37	18:40	19:11	19:14	19:45	19:48
---	---	---	---	---	---
---	---	---	---	19:50	19:52
18:48	18:48	19:22	19:22	19:58	19:58
2:20	2:23	2:54	2:57	3:28	3:31
2:24	2:26	2:58	3:00	3:32	3:34
2:28	2:32	3:02	3:06	3:36	3:40
2:37	2:40	3:11	3:14	3:45	3:48
---	---	---	---	---	---
---	---	---	---	3:50	3:52
2:48	2:48	3:22	3:22	3:58	3:58



表10 第3组巡视的时间表（部分，包含进餐时间）

	巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
白班	22													12:35
1	1	35	9:53	9:56	10:27	10:30	11:01	11:04	11:35	11:38	12:09	12:12	12:43	12:46
2	3	35	9:59	10:02	10:33	10:36	11:07	11:10	11:41	11:44	12:15	12:18	12:49	12:52
3	6	35	10:03	10:06	10:37	10:40	11:11	11:14	11:45	11:48	12:19	12:22	12:53	12:56
4	14	35	10:07	10:10	10:41	10:44	11:15	11:18	11:49	11:52	12:23	12:26	12:57	13:00
5	5	720	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
6	7	80	---	---	10:49	10:51	---	---	11:57	11:59	---	---	13:05	13:07
7	1	35	10:15	10:15	10:57	10:57	11:23	11:23	12:05	12:05	12:31	12:31	13:13	13:13
	22								12:19		吃饭时间（在1号点）			
中班	22							18:53						
1	1	35	17:53	17:56	18:27	18:30	19:01	19:04	19:35	19:38	20:09	20:12	20:43	20:46
2	3	35	17:59	18:02	18:33	18:36	19:07	19:10	19:41	19:44	20:15	20:18	20:49	20:52
3	6	35	18:03	18:06	18:37	18:40	19:11	19:14	19:45	19:48	20:19	20:22	20:53	20:56
4	14	35	18:07	18:10	18:41	18:44	19:15	19:18	19:49	19:52	20:23	20:26	20:57	21:00
5	5	720	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
6	7	80	---	---	18:49	18:51	---	---	19:57	19:59	---	---	21:05	21:07
7	1	35	18:15	18:15	18:57	18:57	19:23	19:23	20:05	20:05	20:31	20:31	21:13	21:13
	22		18:19		吃饭时间（在1号点）									
晚班	22													
1	1	35	1:53	1:56	2:27	2:30	3:01	3:04	3:35	3:38	4:09	4:12	4:43	4:46
2	3	35	1:59	2:02	2:33	2:36	3:07	3:10	3:41	3:44	4:15	4:18	4:49	4:52
3	6	35	2:03	2:06	2:37	2:40	3:11	3:14	3:45	3:48	4:19	4:22	4:53	4:56
4	14	35	2:07	2:10	2:41	2:44	3:15	3:18	3:49	3:52	4:23	4:26	4:57	5:00
5	5	720	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
6	7	80	---	---	2:49	2:51	---	---	3:57	3:59	---	---	5:05	5:07
7	1	35	2:15	2:15	2:57	2:57	3:23	3:23	4:05	4:05	4:31	4:31	5:13	5:13

表11 第4组巡视的时间表（部分，包含进餐时间）

[illegible]

表12 第5组巡视的时间表（部分，包含进餐时间）

[illegible]



表13 第6组（机动）的巡视时间表

巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间		巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	
22		上午	10:53	下午	17:10	接替第2组	11	35	12:50	12:53	19:08	19:11	接替第5组
23	35	10:54	10:57	17:11	17:14		13	80	12:55	13:00	19:13	19:18	
24	35	10:58	11:00	17:15	17:17		16	35	13:02	13:05	19:20	19:23	
9	35	11:02	11:06	17:19	17:23		26	35	13:16		19:34		
8	35	11:11	11:14	17:28	17:31		26	35	13:19	13:21	19:37	19:39	接替第4组
17	480	11:15	11:17	---	---		15	35	13:27	13:29	19:45	19:47	
25	120	11:18	11:20	---	---		18	35	13:31	13:33	19:49	19:51	
22	35	11:27		17:40		接替第1组	12	35	13:37	13:39	19:55	19:57	
22	35	11:27	11:29	17:45	17:47		22	35	13:57		20:15		
20	35	11:31	11:34	17:49	17:52								
19	35	11:36	11:38	17:54	17:56								
2	50	11:43	11:45	18:01	18:03								
4	35	11:48	11:50	18:06	18:08								
21	80	11:51	11:54	---	---								
1	35	12:00		18:13		接替第3组							
1	35	12:09	12:12	18:27	18:30								
3	35	12:15	12:18	18:33	18:36								
6	35	12:19	12:22	18:37	18:40								
14	35	12:23	12:26	18:41	18:44								
7	80	12:31	12:33	---	---								
11	35	12:44		18:52									



4. 问题3的求解

问题3是考虑错时上班能否更省人力。

4.1 上班时间

由前面的分析（巡视人员的下限和问题1），知道人员的下限是每班4人，而固定时间上班则需要每班5人。那么，是否能省下这1个人成为问题的关键。

如果能省，应在哪个地方省；如果不能省，这个问题也就没有讨论的必要了。

每个点的检查时间（共计67分钟）肯定是不能省，因此，要省也只能省下巡视中所花的路程时间。

巡视全部点（26个点）的最短路程这恰好是一个旅行商问题，由前面的计算已知，这个时间是68分钟。



那么巡视全部点的最短时间是135分钟。而题目要求，要在规定的时间间隔（最短为35分钟）内完成各点的巡视。

这样，只能换一种排班方法，让每名巡视工人完成一轮（26个点）的巡视，而每名工人的上班时间向后错35分钟，即在前一位工人开始巡视的35分钟之后，再安排另一名工人巡视。

对于巡视间隔要求大于35分钟的点，可以采用下面的方法处理：

- 无论哪一个点，一律在35分钟巡视一次，这样肯定满足题目的要求；
- 在满足巡视时间间隔要求的情况下，可以不巡视，但要在相应点处休息，休息的时间就是该点的巡视需要的时间。



因此，得到如下的排班方法：第1名工人在8:00开始巡视（上班或换班），第2名工人则在8:35开始巡视，第3名是9:10，第4名是9:45。而每位工人都走最优的旅行商路线。

注意到，每名巡视工人的间隔时间是35分钟，4名工人的间隔时间是140分钟，而一次26个点的旅行商问题的用时是135分钟。

如果第1名工人在第一轮巡视后，休息5分钟，那么他要在10:20开始第二轮的巡视，与第一轮巡视的第4名工人的巡视时间间隔正好相差35分钟。第2名工人第二轮巡视的开始时间是10:55，与第1名工人相差35分钟，以此类推。

由上述推导可知，4名工人足够满足巡视的要求，同时也达到了巡视人员要求的下界，是最优的。

表14 错时上班的时间表（部分）

巡视点	巡视周期	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间	开始时间	离开时间
22	35	8:00	8:02	8:35	8:37	9:10	9:12	9:45	9:47
19	35	8:06	8:08	8:41	8:43	9:16	9:18	9:51	9:53
20	35	8:10	8:13	8:45	8:48	9:20	9:23	9:55	9:58
21	80	8:17	8:20	8:52	8:55	9:27	9:30	10:02	10:05
4	35	8:21	8:23	8:56	8:58	9:31	9:33	10:06	10:08
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
24	35	10:08	10:10	10:43	10:45	11:18	11:20	11:53	11:55
23	35	10:11	10:14	10:46	10:49	11:21	11:24	11:56	11:59
22	35	10:15	10:15	10:50	10:50	11:25	11:25	12:00	12:00
22	35	10:20	10:22	10:55	10:57	11:30	11:32	12:05	12:07
19	35	10:26	10:28	11:01	11:03	11:36	11:38	12:11	12:13
20	35	10:30	10:33	11:05	11:08	11:40	11:43	12:15	12:18
21	80	10:37	10:40	11:12	11:15	11:47	11:50	12:22	12:25
4	35	10:41	10:43	11:16	11:18	11:51	11:53	12:26	12:28
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
24	35	12:28	12:30	13:03	13:05	13:38	13:40	14:13	14:15
23	35	12:31	12:34	13:06	13:09	13:41	13:44	14:16	14:19
22	35	12:35	12:35	13:10	13:10	13:45	13:45	14:20	14:20
22	35	12:40	12:42	13:15	13:17	13:50	13:52	14:25	14:27
19	35	12:46	12:48	13:21	13:23	13:56	13:58	14:31	14:33
20	35	12:50	12:53	13:25	13:28	14:00	14:03	14:35	14:38
21	80	12:57	13:00	13:32	13:35	14:07	14:10	14:42	14:45
4	35	13:01	13:03	13:36	13:38	14:11	14:13	14:46	14:48



4.2 换班时间

由于题目要求，上班或换班的地点只能是调度中心，也就是说，只能在完成一轮（26个点）巡视后才能换班。因此，每名工人的换班时间只能是140分钟的整数倍，选择合适的时间点，工作7个小时开始换班。

例如，第一班工作的4名工人上班的时间分别是8:00、8:35、9:10和

9:45，那么，第二班的4名工人的换班时间分别是15:00、15:35、16:10和16:45，第三班的4名工人的换班时间分别是22:00、22:35、23:10和23:45。

由于每天是24小时，而换班的时间是7小时，三班下来是21小时，所以每天的换班时间比前一天提前3小时。



也就是说，第一班的4名工人在第二天的换班时间分别是5:00、5:35、6:10和6:45；第二班的4名工人在第二天的换班时间分别是12:00、12:35、13:10和13:45；第三班的4名工人在第二天的换班时间分别是19:00、19:35、20:10和20:45。

以后的各天以此类推，每天提早3个小时换班。

一周7天，有7个24小时，恰好有8个21小时，所以这种换班方案一周重复一次。具体换班方案如表15所示。

4.3 中间休息

与问题2相同，这里不用考虑每2个小时左右休息5分钟的问题，因为这里面有太多的休息时间。例如，一轮巡视后，可休息5分钟。

表15 错时上班的换班时间表

第一班				第二班				第三班			
8:00	8:35	9:10	9:45	15:00	15:35	16:10	16:45	22:00	22:35	23:10	23:45
5:00	5:35	6:10	6:45	12:00	12:35	13:10	13:45	19:00	19:35	20:10	20:45
2:00	2:35	3:10	3:45	9:00	9:35	10:10	10:45	16:00	16:35	17:10	17:45
23:00	23:35	0:10	0:45	6:00	6:35	7:10	7:45	13:00	13:35	14:10	14:45
20:00	20:35	21:10	21:45	3:00	3:35	4:10	4:45	10:00	10:35	11:10	11:45
17:00	17:35	18:10	18:45	0:00	0:35	1:10	1:45	7:00	7:35	8:10	8:45
14:00	14:35	15:10	15:45	21:00	21:35	22:10	22:45	4:00	4:35	5:10	5:45
11:00	11:35	12:10	12:45	18:00	18:35	19:10	19:45	1:00	1:35	2:10	2:45



4.4 进餐时间

考虑进餐时间会使排班麻烦一些。首先由于进餐时间增加了4个小时，所以，不可能在一个班内由4名工人完成。与问题2一样，需要增加1名机动工人，顶替工人吃饭时的巡视。

由于题目要求，换班只能在22号点完成，也就是说，吃饭的换班时间也只能在22号点完成，也就是在完成

某一轮的巡视后，才可以考虑进餐。

还以第一班工作时间为例，考虑进餐时间的安排。

从8:35开始工作的第2名工人，在10:50完成第一轮的巡视，如果他不进餐，将在10:55开始第二轮的巡视，这时，可以考虑让他停止工作，选择吃午饭，他的工作由机动（第5名）工人替代完成。



在30分钟后，让11:25完成第一轮巡视的第3名工人休息进餐，而第2名工人来接替他，在11:30开始工作。

之后，第3名工作完成进餐后，接替12:05开始工作的第4名工人，让第4名工人吃午饭。

第4名工人午饭后，在12:40接替第1名工人的工作，第1名工人开始吃午饭。

第1名工人在午饭后就不工作了，需要等到下午18:30分，接替第2名工人的工作，直到这个班工作结束。在这中间也不考虑他吃晚饭的时间，因为他可以在18:30以前吃完晚饭。

此时(18:30)，第2名工人在吃晚饭，饭后(19:05)他接替第3位工人的工作。

19:05，第3名工人在吃晚饭，19:40接替第4位工人的工作。



20:15，第4位工人开始工作，接替第5位（机动）工人的工作。而机动工人则下班休息（这时不用考虑他是否吃晚饭），因为到第二天的10:50才接替第1位工人的工作，让第1位工人吃午饭。

这个过程较为复杂，详细排班请见错时上班的换班时间表，表16显示了Excel表中排班和换班的部分表格。

表16 增加吃饭时间的排班表

第1人	第2人	第3人	第4人	机动
8:00	8:35	9:10	9:45	
10:20	10:55	11:30	12:05	
	吃饭时间	吃饭时间	吃饭时间	
10:20	11:30	12:05		10:55
12:40	13:50	14:25		13:15
吃饭时间				
	13:50	14:25	12:40	13:15
	16:10	16:45	15:00	15:35
	18:30	19:05	17:20	17:55
	吃饭时间	吃饭时间		
18:30	19:05		17:20	17:55
20:50	21:25		19:40	20:15
			吃饭时间	
20:50	21:25	19:40	20:15	
23:10	23:45	22:00	22:35	
1:30	2:05	0:20	0:55	
3:50	4:25	2:40	3:15	
6:10	6:45	5:00	5:35	
8:30	9:05	7:20	7:55	
10:50	11:25	9:40	10:15	
吃饭时间	吃饭时间			
11:25		9:40	10:15	10:50



续表16-1 增加吃饭时间的排班表

第1人	第2人	第3人	第4人	机动
13:45		12:00	12:35	13:10
		吃饭时间	下班	
13:45	12:00	12:35		13:10
16:05	14:20	14:55		15:30
18:25	16:40	17:15		17:50
吃饭时间				
	16:40	17:15	18:25	17:50
	19:00	19:35	20:45	20:10
	吃饭时间	吃饭时间		
19:00	19:35	20:10	20:45	
21:20	21:55	22:30	23:05	
23:40	0:15	0:50	1:25	
2:00	2:35	3:10	3:45	
4:20	4:55	5:30	6:05	
6:40	7:15	7:50	8:25	
9:00	9:35	10:10	10:45	
			吃饭时间	
9:00	9:35	10:10		10:45
11:20	11:55	12:30		13:05
吃饭时间	吃饭时间	下班		
11:55	12:30		11:20	13:05

续表16-2 增加吃饭时间的排班表

第1人	第2人	第3人	第4人	机动
14:15	14:50		13:40	15:25
16:35	17:10		16:00	17:45
18:55	19:30		18:20	20:05
吃饭时间	吃饭时间		吃饭时间	
19:30	20:05	18:20	18:55	
21:50	22:25	20:40	21:15	
0:10	0:45	23:00	23:35	
2:30	3:05	1:20	1:55	
4:50	5:25	3:40	4:15	
7:10	7:45	6:00	6:35	
9:30	10:05	8:20	8:55	
11:50	12:25	10:40	11:15	
吃饭时间	吃饭时间		吃饭时间	
12:25		10:40	11:50	11:15
14:45		13:00	14:10	13:35
		吃饭时间		
14:45	13:00		14:10	13:35
17:05	15:20		16:30	15:55
19:25	17:40		18:50	18:15
吃饭时间			吃饭时间	
	17:40	18:50	19:25	18:15



5. 阅卷情况简述

本人参加了北京地区和全国的D题阅卷，下面就阅卷中遇到的问题谈一谈本人一点感受。

5.1 固定上班时间

问题1和问题2要求：固定时间上班，并且由巡检调度中心（22号点）开始巡检。

在通常情况下，三班倒的工作时间分别是8:00 ——16:00， 16:00 ——24:00和0:00 ——8:00。

这一点绝大多数的队都注意到了，所以基本上都采用8点、下午4点和凌晨0点开始上班的模式。当然，如果你认为有必要，采用其他时间开始上班也是正确的，只要是固定时间上班就可以。



但这个固定上班时间，是每个班组的固定上班时间，不是每个人的固定上班时间。

例如，一个班有5个人（5条巡视线路），则要求这5个人同时上班。这也是为什么要求大家一定从22号点开始的原因，大家需要集中一下（如布置工作或其他要求）。

有很多队理解成每名工人固定时

间上班，而上班时间是不同的，这样理解问题，巡检工作从22号点开始就无意义了，因为可以让22号点、23号、1号点、26号点和11号点都是从8点开始工作，而这些点开始上班的时间分别为8:00、7:59、7:52、7:50和7:45，这种方法相当于去掉从22号点开始的要求，降低了题目的难度。事实上，这种做法只需要4个人就够了。



还有一个小问题：每个班的巡检工作是否能在8小时内结束（并不要求一定在8小时内回到22号点），这个问题基本上没有学生讨论，但它应该是问题潜在的要求，因为在交接班时，应该简短地说明一下本班的巡检情况。

当然，并不需要见面交流，用一下现代通讯工具是可以的。

5.2 巡检线路与时间表

题目明确要求，给出巡检人员的巡检线路和巡检的时间表，但很多队只给出巡检线路图，并没有给出具体的巡检点的时间表。

由于没有巡检点的排班时间表，因此无法判断该队的结果是否正确，是否满足巡检要求。本质上没有完成题目要求，分数上也会打折扣的。



5.3 休息时间与进餐时间

问题2要求：每巡检2小时左右需要休息一次，休息时间大约是5到10分钟。在中午12时和下午6时左右需要进餐一次，进餐时间为30分钟。

实际上，如果每名巡检人员的排班时间较均匀，这里并不需要真的考虑休息时间的安排，因为在巡检中有大量的5分钟可以作为休息时间。

进餐时间不是固定的，否则，大家都在中午12时进餐，这样就需要再派其他的工人来顶替进餐时的空缺，需要的人数是原来的2倍，这显然过于浪费人力。

当进餐时间不固定时，只需要增加一名工人就够了，这名工人的工作是接替中午和晚上需要进餐的工人，这里的重点是具体的替班时间表。



5.4 错时上班的讨论

问题3是讨论错时上班是否更节省人力，如果不能更节省人力，这一问也就没有讨论的必要。有的队，讨论了半天还是不能更省人力。可以猜想，该队应该没有完成题目的要求。

实际上，更省人力是这个问题的重点，需要分析在哪些地方可以更省人力。

巡检时间肯定是不能省的，要省也只能是巡检路线，尽量少走重复路线。这自然会想到旅行商问题。但我们发现，很多专科学校没有培训过图论方面的相关知识。

经过验算，旅行商问题的解是135分钟，巡检点的最小间隔时间是35分钟，因此，需要4名工人就可以能完成工作。



排班方法有点像列车时刻表，每隔35分钟发一趟车。

这种处理方法大多数队已经注意到了，但很多队没有给出具体的时间表。也许学生已没有足够的答题时间了，也许根本就不知道如何计算。

问题3的难度是增加进餐时间，大多数队基本上都没有给出这一问题的讨论。

5.5 关于模型

我们很多的队希望给出一个“高大上”的模型，然后再用软件求解（如LINGO），但由于“高大上”的模型过于复杂，无法求解（或求解困难），这只能再借助于手工求解。

这样，这个模型实际上是没有用的，不如将精力放在问题的分析上，如采用“接地气”的启发式算法。



5.6 能否更省人力

有的队想出了更省人力的方法，例如，将进餐时间安排在工作时间之外。例如，对于固定上班的工人来说，将三班的工作时间安排为3:30——11:30、11:30——19:30、19:30——3:30（次日）。

第一班的工人下班后进餐，第二班的工人上班前吃午饭下班后吃晚饭，

第三班的工人在上班前吃晚饭，这样就不用考虑他们进餐时，不需要另外的人员替换他们，从而更省人力。

有的队确实是这样做的（只是时间略有不同），对于题目要求来说，这种方法无可厚非，但在实际操作中会产生新的问题——是否要吃早饭。

如果能将吃早饭的问题解决，这种结果无疑是最好的。

6. 结论

这个问题看似复杂，如使用TSP模型、VRP 模型，甚至是 m -TSP 模型或 VRPTW 模型，但由于需要处理的点数较少，可以运用最短路算法，结合启发式方法得到问题的计算结果：

- 固定上班時間，每班需要5人，一天共需要15人；
- 考慮進餐時間，增加一名機動工人作為替補，一天需要16人；
- 如果採用錯時上班，每班需要4人，一天共12人；
- 如再考慮進餐時間，再增加一人，每天需要13人。

参考文献

- [1] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件. 北京: 清华大学出版社, 2005.7
- [2] 薛毅. 数学建模基于R. 北京: 机械工业出版社, 2017.7

谢 谢!