

人口增长模型的预测设计

1. 摘要

本文建立了三个人口增长预测模型，对中国人口增长的中短期（15 年）和长期（20-50 年）趋势分别做出了预测，并指出了每个模型的优点和不足之处。

模型一认为人口的增长是由死亡率、育龄妇女生育率、新生婴儿中男女比例、人口分布的年龄层次性共同作用的结果，在充分考虑这些因素与时间的相关性后，比较得出模型 1.3 为最佳模型。（单位：十亿）

预测(模型 1.3)

时间	2006	2008	2010	...	2020	2033	2041
人口总数	1.30014	1.30217	1.32463	...	1.42981	1.47342	1.4107

模型二首先建立了一个微分方程，根据自然增长率和平均增长率预测出人口增长形势，然后在其基础上建立了动态变化模型，在人口流动相对静止的前提下运用了相关数据，预测出人口增长趋势，由于农村人口向市镇转移，以及农村城镇化，在改进的模型中加入了转移变量，使人口比例更趋于真实数据，由此得到更精确的人口预测。

预测(模型 2.3)

时间	2006	2008	2010	...	2020	2033	2041
人口总数	1.32143	1.34812	1.37367	...	1.42981	1.47342	1.4107

灰色模型对于没有出现突变的数据预测比较准确，对于出现跳跃的数据预测则不太理想。因此，我们仅将灰色模型作为一个比较模型，不再赘述。

预测(灰色模型)

时间	2006	2008	2010	...	2020	2033	2041
人口总数	1.30014	1.30217	1.32463	...	1.42981	1.47342	1.4107

最后通过预测数据及误差对这三个模型进行了比较，发现模型 1.3 和模型 2.3 预测效果都不错，但模型 2.3 误差较小，更为完善。

关键字： 人口预测 地区差异 人口的结构系数



2. 问题重述

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》（附录1）还做出了进一步的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录2就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考相关数据或搜索相关文献补充新的数据，建立中国人口增长的数学模型，并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出模型中的优点与不足之处。

3. 问题分析

题目要求我们从中国的实际情况和人口增长的特点出发，建立一个人口增长的模型，并由此对我国人口的增长的中短期和长期趋势做出预测以及给出模型的评价。

问题的特点在于数据量大分类复杂，可挖掘的指标值多，难点在于要抓住对未来人口增长趋势起决定性作用的信息，给出最贴近实际的人口增长趋势模型。

所给的附件的信息主要分为数据和政策，由于政策的不可预测性，我们将不予以考虑。数据主要是由01-05年市、镇、乡男女的死亡率，95-05育龄妇女的生育率、新出生婴儿的男女比例所构成。能否建立合理的模型取决于对这些数据的处理。

中国的人口很大，这是中国人口最基本的一个特点。由于科技水平、医疗水平的提高，人口的死亡率会下降。随着时代的进步，人们的生育观念的转变，人口的出生率也会下降。低的生育率和低得死亡率导致中国的老龄化进程加速。某些地区的人还残留着重男轻女的思想，这就使得出生人口男女比例升高。我们在建立模型时应考虑到这些。

4. 模型假设与符号说明

4.1 模型假设

- 1) 假设人口的流通只限于本国之间，即我国没有人口迁移到别的国家，其他国家的人也没有迁移到我国。
- 2) 假设没有发生战争、自然灾害、瘟疫等一些类似事件。
- 3) 本文中所说的某年的人口是指这一年年末的人口。其中，认为当年年末的人口与下一年年年初的人口相同

4.2 符号说明

$F(t)$ 第 t 年的总人口

$\hat{F}(t)$ 第 t 年新出生的总人口

$\tilde{F}(t)$ 第 t 年死亡的总人口



$x_i(t)$ 第 t 年 i 区女性人口数量

b 总女性人口占总人口的比例

$r_i(t)$ 第 t 年 i 区育龄妇女的生育率

$s_k(t)$ 第 t 年 k 阶段人口的死亡率

$d_i(t)$ 第 t 年 i 区新生儿中女婴比例

$l_k(t)$ 第 t 年 k 阶段人口的结构系数

其中, 当 $i = 1, 2, 3$ 时, 表示市、镇、乡;
 $k = 1, 2, 3$ 时, 表示处于 $0 \sim 14$ 阶段、 $15 \sim 64$ 阶段、 65 以上阶段

$Y^{(0)}$ 原始数据列

$Y^{(1)}$ $Y^{(0)}$ 的累加数据列

a 发展系数

u 灰色作用量

$z^{(1)}(k)$ $y^{(0)}(k)$ 和 $y^{(1)}(k-1)$ 的均值

\hat{a} 由两个带估参数 a 和 u 构成的向量

α 自然增长率

α_i 第 i 年的人口增长率

$\bar{\alpha}$ 平均增长率

K 生命系数

F 单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值

br_i 第 i 年总人口的出生率

wr_i 第 i 年总人口的死亡率

$b_{ij}(e)$ 第 i 年第 j 区 e 岁人的出生率

$v_{ij}(e)$ 第 i 年第 j 区 e 岁人所占该区总人数的比率

$n_i(j)$ 第 i 年第 j 区的总人数

$wr_{ij}(e)$ 第 i 年第 j 区 e 岁人的死亡率



$X_i(t)$ 第 t 年 i 岁人口数

$Y_i(t)$ 第 t 年 j 岁女性人口数

$w(t)$ 第 t 年人口的总死亡率

w_i 第 i 岁全部人口的死亡率

w_i'' 第 i 岁女性人口的死亡率

$f(t)$ 第 t 年的育龄妇女统计值

g_i i 岁女性的生育率

μ_i 第 i 年女婴出生所占比例

$L_i(t)$ 第 t 年第 i 区人口占总人口的比例

5. 模型的建立及求解

5.1 模型一（原始数据均采用 01 年的）

人口的增长主要与出生率和死亡率相关。依此，我们确定人口数量就是由新增的人口、死亡的人口以及原有人口所确定。

模型 1.1

$$F(t+1) = F(t) + \hat{F}(t+1) - \tilde{F}(t+1)$$

$$F(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i(t)}{b}$$

$$\hat{F}(t+1) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \times r_i$$

$$\tilde{F}(t+1) = F(t) \times s$$

$$x_i(t+1) = x_i(t)r_i d_i - x_i(t)s + x_i(t)$$

分析题目所给的数据，我们发现在 01-05 年间，总女性比率的变动率仅为 1.01%；城市女婴比例及育龄妇女生育率的变动率分别为 2.51%和 15%，但市、镇、乡的数据差异较大。因此在这个模型中，我们认为 b s_k r_i d_i 保持不变，但

有地区差异性，即 $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ ， $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ ， $s_1 = s_2 = s_3$

对于这些数据，我们求其加权平均值，得

$$b = 0.491, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0.006079, \quad r_1 = 0.0163278, \quad r_2 = 0.030654,$$



$$r_3 = 0.221886, \quad d_1 = 0.4778287, \quad d_2 = 0.4629201, \quad d_3 = 0.4595799$$

图1. 总女性比例

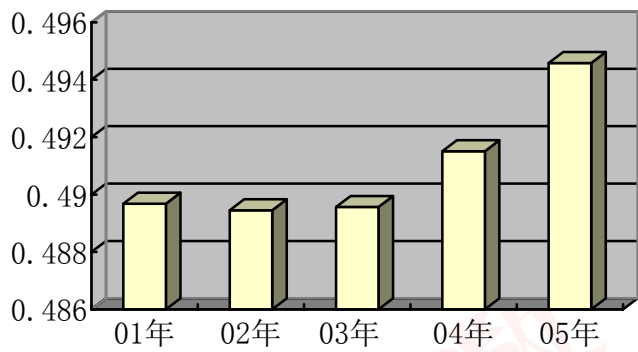


图2. 女婴比例

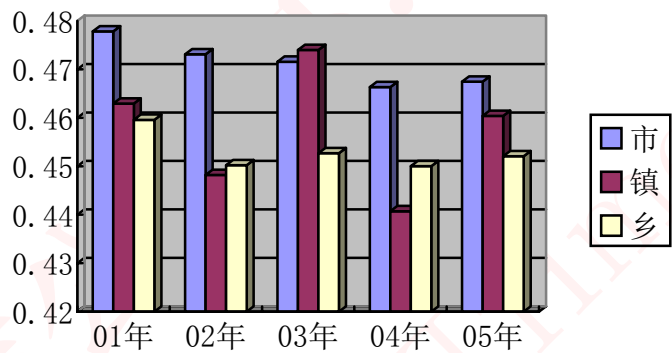
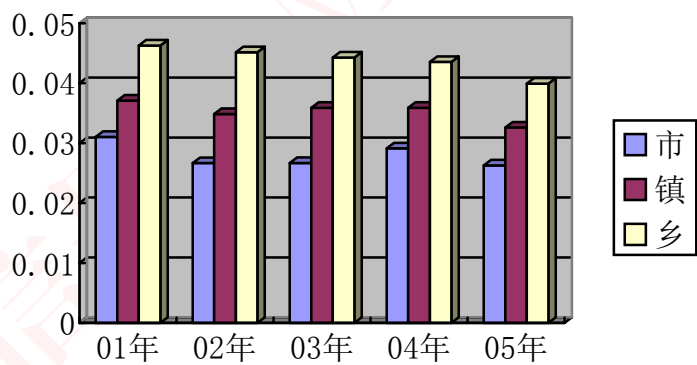


图3. 育龄妇女生育率



我们用模型 1.1 预测了未来 50 年中国人口的数量(单位：十亿)

表 1. 中短期预测

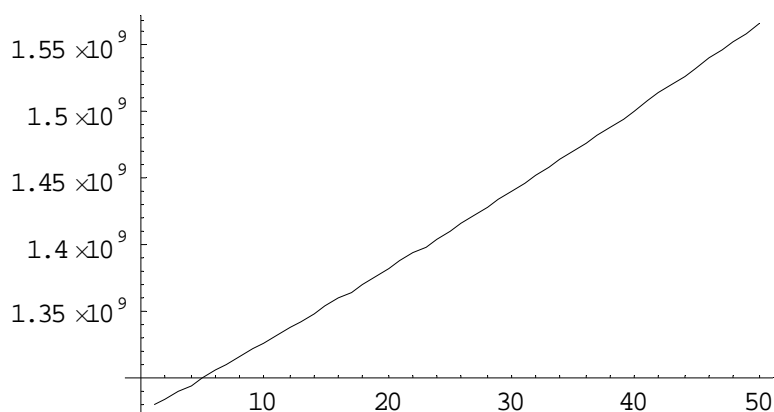
时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	1. 27922	1. 28961	1. 30011	1. 31071	1. 32141	1. 33767	1. 35416



表 2. 长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.35972	1.37655	1.39363	1.41097	1.42857
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.45245	1.47682	1.50168	1.52706	1.55295

图 4. 人口趋势预测图 (模型 1.1)



中短期预测效果理想, 误差率不超过 5%(与国家人口计生委 03 年预测的结果相比, 下同); 但是长期预测不行, 人口的增长率不可能一直都这么大, 也就是说人口的增长不可能一直都增长这么快。分析模型 1.1, 它考虑到人口分布的地域性, 这符合中国的实际情况, 是其优点; 但是将 s_k r_i d_i 认定保持不变,

却是不合理的。随着时间的增长, 人们的生育观念的转变——不再早婚早育, r_i

必定会减小。医疗水平的提高, 人口的死亡率必然会下降。但是死亡率还与年龄有关, 人到了一定年纪, 死亡的可能性就会增加, 这是自然规律。模型 1.1 没有考虑到这些, 这是它的不足之处。

人口分布的层次性也应是我们要考虑到的。我们认为人口是由少儿 (0 ~ 14)、劳动年龄人口 (15 ~ 64)、老年人 (65 以上) 这三种人组成的。它们各自的组成比是不同的, 其中劳动年龄人口处于主导地位。这三类人死亡率也是有差异的, 老年人死亡率显然比前二者要大。因此我们对模型 1.1 进行了改进, 得到了模型 1.2:

$$\hat{F}(t+1) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) r_i(t+1)$$

$$\tilde{F}(t+1) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i(t)}{b} s(t+1)$$



$$x_i(t+1) = x_i(t) + [x_i(t) - x_i(t-1)r_i(t)]r_i(t+1)d_i(t+1)l_2 - \sum_{k=1}^3 x_i(t)s_k(t+1)l_k$$

$$l_k = \begin{cases} 0.21 & k=1 \\ 0.71 & k=2 \\ 0.08 & k=3 \end{cases}$$

用模型 1.2 预测未来 50 年中国人口的数量（单位：十亿）

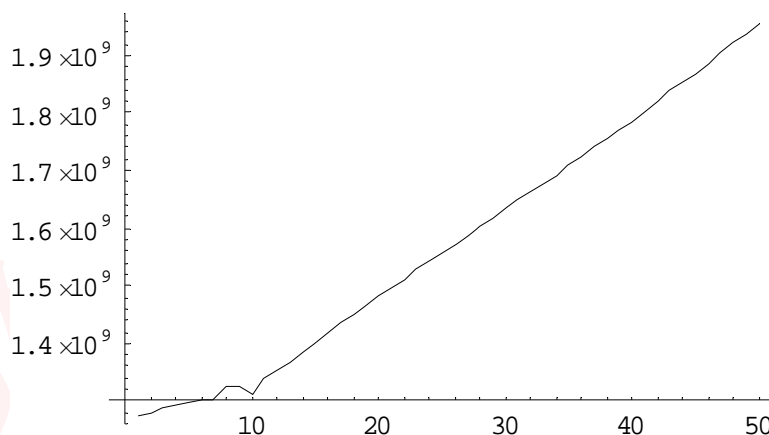
表 3. 中短期预测：

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	1.27497	1.28576	1.29743	1.30128	1.32576	1.35332	1.40052

表 4. 长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.41846	1.466	1.51249	1.55761	1.60171
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.66154	1.7256	1.7858	1.85233	1.92101

图 5. 人口趋势预测图（模型 1.2）



与模型 1.1 一样，模型 1.2 也是中短期预测理想，误差率不超过 3.7%。分析模型，它还是不够完善。模型 1.2 认为人口组成是稳定的。可是这并不符合实际情况。2000 年，我国 65 岁以上老年人口比重达 7% 以上。根据国际标准，中国已经进入老龄社会。以后中国的老年人会逐步增加，而儿童的增长率却在下降。根据我们查阅的信息，在 2001-2050 年期间，中国进入快速老龄化和加速老龄化阶段，此后，趋于稳定状态。这也就是说，老年人在以后的时间内，其比重会越来越大，最后稳定下来。根据权威机构预测，到 2050 年 l_3 即老年人口比重将达到 30% 以上。基于此，我们对模型 1.2 进行了改进。

模型 1.3

$$x_i(t+1) = x_i(t) + [x_i(t) - x_i(t-1)r_i(t)]r_i(t+1)d_i(t+1)l_2(t) - \sum_{k=1}^3 x_i(t)s_k(t+1)l_k(t+1)$$



$$l_k(t) = \begin{cases} 1 - l_2(t) - l_3(t) & k = 1 \\ 0.65635 + 0.0151425t - 0.0004825t^2 & k = 2 \\ 0.0415141 + 0.00699293t - 0.00004256t^2 & k = 3 \end{cases}$$

用模型 1.3 预测未来 50 年中国人口的数量（单位：十亿）

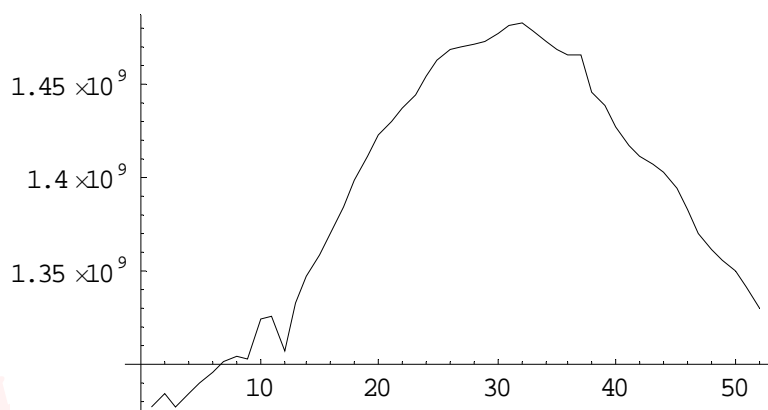
表 5. 中短期预测

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	1.27708	1.28875	1.30014	1.30217	1.32463	1.34626	1.38365

表 6. 长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.39847	1.42981	1.45448	1.47073	1.47694
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.47342	1.44541	1.4107	1.3822	1.34989

图 6. 人口趋势预测图（模型 1.3）



不管是中短期预测, 还是长期预测, 模型 1.3 预测效果都很理想, 误差不超过 3.85%。而且它预测出峰值, 大概在 2033 年出现, 这与联合国预测的结果相吻合。分析模型 1.3, 它基本上考虑到了与人口数量增长有关的主要因素: 育龄妇女的生育率、死亡率、新生儿中男女的比例、人口结构系数——也就是题目附录 1 中所提到的抚养比。此外, 我们还考虑到了人口分布的地区差异性、人口结构组成的差异性、不同年龄层之间死亡率的差异性以及老龄化进程加速等问题。人口的增长是一个极其复杂的问题。除了和上述因素有密切的关系外, GDP、就业情势、生育观念、城镇化等也在一定程度上影响着人口的增长。但是, 这些在模型 1.3 中没有得到体现。

5.2 模型二

模型 2.1

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{dt} = \alpha F(t) - KF^2 \\ F(t)|_{t=t_0} = F_0 \end{cases} \quad (1.1)$$



此式表示每年自然增长的人数 $\frac{dF(t)}{dt}$ 等于自然增长率 $\alpha F(t)$ 减掉制约的幅度

KF^2 ，这说明人口的增长率随人口的增加而减小。

此模型为阻滞增长模型。其解为：

$$F(t) = \frac{1}{\frac{K}{\alpha} + (\frac{1}{F_0} - \frac{K}{\alpha})e^{-\alpha t}} \quad (1.2)$$

模型检验

当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $F(t) \rightarrow \alpha/k$ ，可见初始值为任何值时，人口总数最终趋向于某一

极限值；当 $0 < F(t) < \alpha/K$ 时， $\frac{dF(t)}{dt} = \alpha F(t) - KF^2 > 0$ ，所以 $F(t)$ 是时间的单

调递增函数

根据题中所给数据，

$$\bar{\alpha} = \frac{dF(t)}{dt} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i / 5;$$

$$\alpha_i = br_i - wr_i;$$

$$br_i = (\sum_{j=1}^6 v_{ij}[0] * br_{ij}[0] * n_i[j]) / \sum_{j=1}^6 n_i[j];$$

$$wr_i = \sum_{j=1}^6 \sum_{z=0}^{90} v_{ij}[z] * wr_{ij}[z] * n_i[j] / \sum_{j=1}^6 n_i[j]$$

可求出 $\bar{\alpha} = 0.0047576$

为检验以上模型，用 01 年数据来预测未来五十年的人口总数。据生物学家估计， α 的自然值为 0.029。通过查阅资料，可知 01 年人口总数为 $1.27627 * 10^9$ ，

$$\text{因为 } \bar{\alpha} = \frac{1}{F(t)} \frac{dF(t)}{dt} = \alpha - KF(t);$$

即

$$0.0047576 = 0.029 - K(1.27627 * 10^9)$$

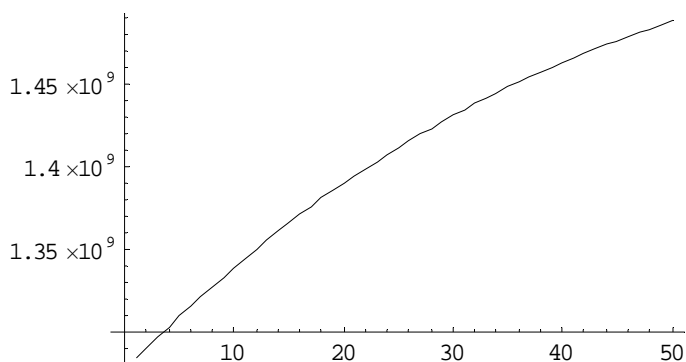
得 $K = 1.85 * 10^{-11}$

将 K 代入 1.2 式中。

预测出 50 年内的人口数量。



图 7.人口趋势预测图（模型 2.1）

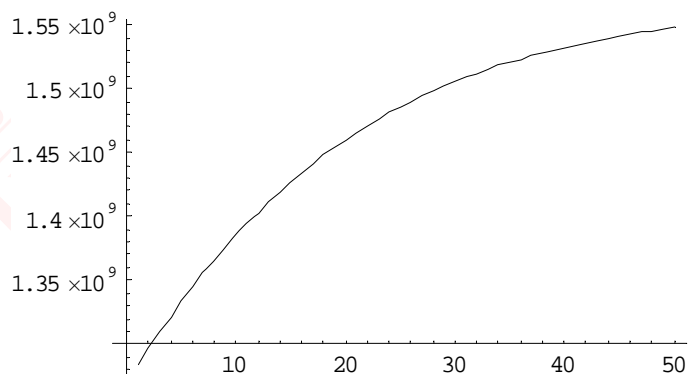


通过网上资料比较，02，03 年的预测人口与调查数据十分接近，误差仅有 0.11% 和 0.19%; 而 04、05 年的预测人口与调查数据略有偏差，0.27% 和 0.36%
模型改进

在 1.2 式中，预测值只与 01 年的人口总数有关，添加新陈代谢思想，原公式可化为

$$F(t) = \frac{1}{\frac{K}{\alpha} + \left(\frac{1}{F_{i-1}} - \frac{K}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}}$$

图 8. 人口趋势预测图（模型 2.1 的改进模型）



与第一个模型相比较，该模型运用新陈代谢思想，可是由于采取的数据只是前一年的，所以在预测前几年的数据较大偏差，但它更好地反映了趋势。

模型 2.2

各地方人口不相互流动，城镇乡人口占总人口比率都不变

在一段时期内，各地方育龄率保持不变

在一定时期内，各年龄段死亡率保持不变

模型建立

根据某年的人口=上一年人口+上一年出生的人口-上一年死亡的人口 建立动态模型，其表达式为：

$$F(t) = F(t-1) + 1.8f(t-1) - F(t-1) * w(t)$$



$$\begin{cases} \{X_i(t) = X_i(t-1) * (1 - w_i) + X_{i-1}(t-1) * (1 - w_{i-1}) \leftarrow i = 90 \\ X_i(t) = X_{i-1}(t-1) * (1 - w_{i-1}) \leftarrow 1 \leq i \leq 89 \\ X_i(t) = 1.8f(t-1) * g_i \leftarrow i = 0 \\ Y_0(t) = \mu_t * X_0(t) \\ Y_i(t) = Y_{i-1}(t-1)(1 - w'') \\ f(t) = \sum_{i=15}^{49} Y_i(t) * g_i \\ F(t) = \sum_{i=0}^{90} X_i(t) \\ 90 \geq i \geq 0, t \geq 0, \end{cases}$$

已知第 t 年里各年龄段人数 $X_i(t)$ 和死亡率 w_i 以及各年龄段女性人数 $Y_i(t)$ 和死亡率 w'_i , 可以通过此模型预测出该年以后各年的人口总数, 各年龄段死亡率 w_i 通过所给各年龄段男女死亡率及其所占该年龄段总人数比率加权拟合出来。运用给出的历年的男女出生比率拟合出 μ_i 。

模型求解

05 年数据最新, 以它作为预测的第 0 年。将所有数据代入模型, 可预测出每年各地方人数, 根据 05 年各地方占总人口数的比率加权平均, 求出每年全国总人口

表 7. 中短期预测

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	——	——	1. 32143	1. 34818	1. 37390	1. 40950	1. 43866

表 8. 长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1. 44697	1. 46708	1. 48230	1. 49437	1. 50429
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1. 51385	1. 51900	1. 51795	1. 51215	1. 50556

因为 05 年市镇乡人口数占总人口数的比率分别为

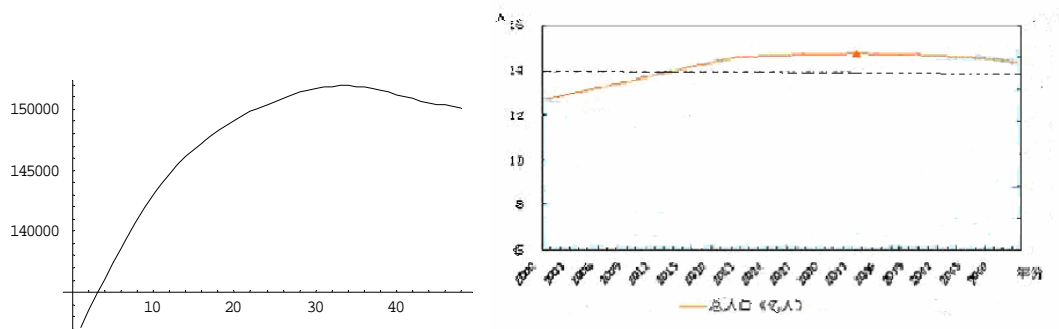
$$L_0(0) = 0.277168;$$

$$L_1(0) = 0.171260;$$

$$L_2(0) = 0.551573;$$

模型检验





相比两图，增长趋势都是先增后降，而前者的人数在 15 亿以上缓慢下降，后者一直没有超过 15 亿，根据资料的基本判断，该预测人数不是很合理。

模型评价

此预测模型的总人口数长期在 15 亿以上，同时此模型也是建立在城乡人口一直不流动的前提下，而材料中指出，乡村人口正在向城市转移，同时由于人口城镇化，并且由于科学技术，医疗水平，人口素质等的提高，人口增长率、男女出生比率等都会趋向于城市指标，城市人口在总人口中所占的比率也会上升。

模型改进

由于城市人口在总人口中所占的比率逐年上升，假设城镇每年所占比率增加一个百分点。农村每年递减一个百分点，城镇分别递增 0.5 个百分点

$$\text{即 } L_0(0) = 0.277168; \quad L_0(i) = L_0(i-1) + 0.005$$

$$L_1(0) = 0.171260; \quad L_1(i) = L_1(i-1) + 0.005$$

$$L_2(0) = 0.551573; \quad L_2(i) = L_2(i-1) - 0.01$$

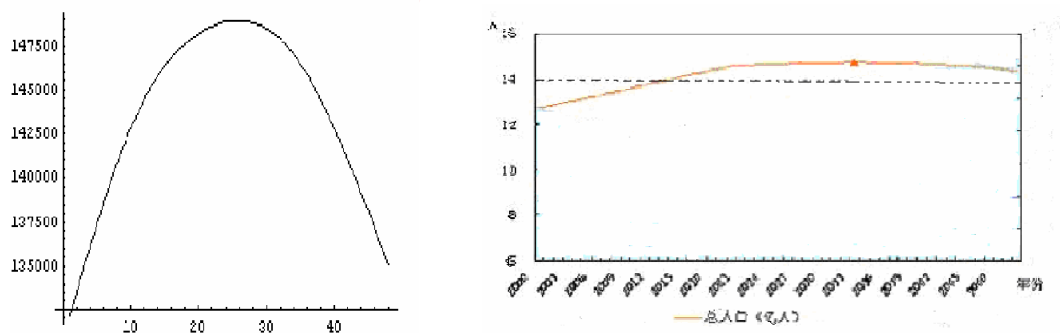
表 9.中短期预测

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	——	——	1. 32143	1. 34812	1. 37367	1. 40871	1. 43689

表 10.长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1. 44476	1. 46324	1. 47601	1. 48440	1. 48900
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1. 48832	1. 478834	1. 45840	1. 42836	1. 39162

模型检验：



相较两图，两者趋势相同，先增后降，并且前者人数一直没有超过 15 亿，下降趋势也很缓慢，模型合理。

模型评价：

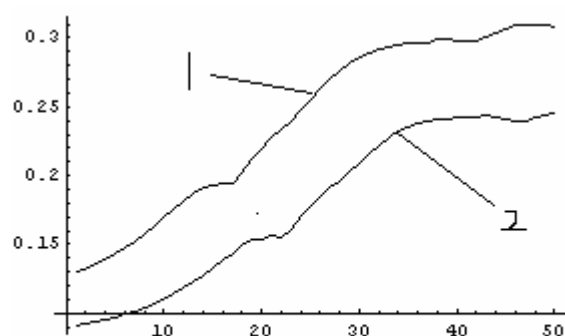
该模型除了解决了上一个模型中总人口预测数过大和人口没有流动的问题。

模型扩展和应用

改进后的模型在人口老龄化比率、育龄妇女（包括生育旺盛期）人数、人口结构层次等方面都可以应用。

通过该模型求出以下数据：

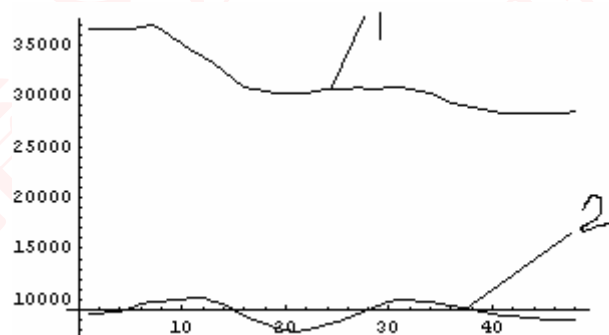
图 9.老龄化图



1——60 以上的老年人占总人口的比率

2——65 以上的老年人占总人口的比率

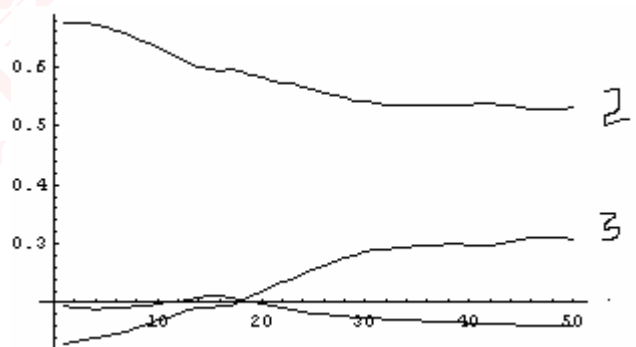
图 10.育龄妇女人数图



1——育龄妇女人数

2——生育旺盛期育龄妇女人数

图 11.人口层次图



- 1——15 岁以下人口数之和占总人口数的比率
 2——16 至 59 岁人口数之和占总人口数的比率
 3——60 岁以上人口数之和占总人口数的比率

5.3 模型三

1) 灰色微分方程

$$\frac{dy}{dt} + ay = u \quad (1-1)$$

2) GM(1, 1) 模型

灰色简单模型 GM(1, 1) 表示的是一阶的、一元的微分预测模型。

设原始序列为 $Y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$

其累加生成序列 $Y^{(1)}$ 为 $Y^{(1)} = (y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), \dots, y^{(1)}(n))$

对一阶生成数列 $Y^{(1)}$ 建立模型 $\frac{dy^{(1)}}{dt} + ay^{(1)} = u \quad (1-2)$

3) GM(1-1) 的预测

式 (1-2) 的方程的解为 $y^{(1)}(t) = \left[y^{(1)}(0) - \frac{u}{a} \right] e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (1-3)$

其离散形式

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \left[y^{(1)}(0) - \frac{u}{a} \right] e^{-ak} + \frac{u}{a} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

其中 $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T A$

用灰色模型预测中国未来 50 年的人口数量（单位：十亿）

表 11. 中短期预测

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	1.27843	1.29979	1.3215	1.34357	1.36602	1.40039	1.43562

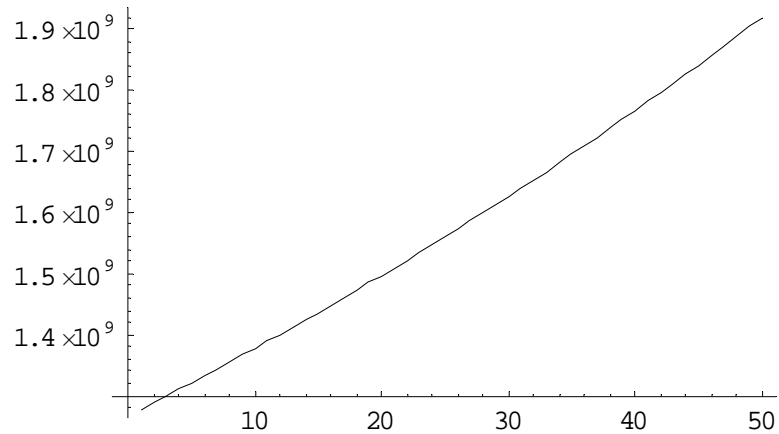
表 12. 长期预测

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.44756	1.48398	1.52132	1.5596	1.59884
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.6527	1.70838	1.76593	1.82542	1.88691

中短期预测效果理想，其误差率不超过 1.46%；但是长期预测效果不好，误差率竟高达 23.37%。灰色模型对数据的依赖性很强，它是根据以前的数据来预测的。人口在短时间内是增长的，但不可能无限的增长下去，它会趋于一个稳定值，也可能会下降。离预测数据越近的，对预测结果的影响越大。01 年之前的人口增长较大，导致后面的预测数据会越来越偏离实际值。



图 12. 人口趋势预测（灰色模型）



6. 模型评价与扩展

模型一中，模型 1.1 是最简单，考虑的因素也是最少的。它认为死亡率、育龄妇女生育率、新生儿中男女比例是不变的，实际上这些因素与时间有着相关性，这使得它偏离实际值。模型 1.2 是对模型 1.1 的改进，它考虑到了上述因素与时间的相关性，同时考虑到人口分布的年龄层次性。但认为各年龄层分布是恒定的，却是不合理的。模型 1.3 是一个较完善的模型，它充分考虑到死亡率、育龄妇女生育率、新生儿中男女比例、人口分布的年龄层次性与时间的关系。

模型二中，模型 2.1 是在比较理想的前提下，但平均增长率的求解用了 01-05 所有的数据，使得模型在较为简陋的条件下能够比较准确的预测出 05 年以后各年的人数总和，模型 2.2 在模型 2.1 的基础上，建立了一个动态模型，模型假设包括了没有人口流动，城镇乡人口所占比例一直不变，虽然很好的预测出人口总趋势的变化，但由于处理比较简单，没有考虑生产力的发展会使得人口比例的变化。所以在 2.3 的模型中，加入了城乡变化比率，每年城镇乡人数所占的总人数的比例加以变化，使得所得结果能够较好地反映趋势。

灰色模型对数据依赖性很大，离预测数据越近的，对预测结果的影响越大。

表 13. 中短期预测(模型 1.3)

时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	1.27708	1.28875	1.30014	1.30217	1.32463	1.34626	1.38365
误差 (%)	1.5	2.0	2.5	3.6	3.3	3.2	3.0

表 14. 长期预测(模型 1.3)

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.39847	1.42981	1.45448	1.47073	1.47694
误差 (%)	2.5	1.7	0.9	0.4	0.3
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.47342	1.44541	1.4107	1.3822	1.34989
误差 (%)	0.8	2.7	4.7	5.4	6.6

表 15. 中短期预测（模型 2.2 改进）



时间	2002	2004	2006	2008	2010	2013	2016
人口总数	——	——	1.32143	1.34812	1.37367	1.40871	1.43689
误差(%)			0.9	0.2	0.3	0.6	0.7

表 16. 长期预测（模型 2.2 改进）

时间	2017	2020	2023	2026	2029
人口总数	1.44476	1.46324	1.47601	1.48440	1.48900
误差(%)	0.7	0.6	0.6	0.6	0.5
时间	2033	2037	2041	2045	2049
人口总数	1.48832	1.478834	1.45840	1.42836	1.39162
误差(%)	0.2	0.5	1.5	2.7	3.8

经判断，模型 1.3 和模型 2.2（改进）预测效果都不错，但模型 2.2（改进）误差较小，更为完善。人口的增长是一个极其复杂的问题，除了和上述因素有密切的关系外，GDP、就业情势、生育观念、城镇化等也在一定程度上影响着人口的增长。如果将这些因素都予以考虑，模型将更加完善。

7. 参考文献

- [1] 姜启源等，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003
- [2] 李尚志等，数学模型（第二版），北京：高等教育出版社，2005
- [3] 冯杰等，数学建模原理与案例，北京：科学出版社，2007
- [4] 国家人口计生委，2001-2050 年全国总人口变动情况预测，
<http://www.cpirc.org.cn/tjsj.cy.detail.asp?id=1422>, 2007/9/24

8. 附录

灰色模型

1) 灰色微分方程

$$\frac{dy}{dt} + ay = u \quad (1-1)$$

a, u 为参数

2) GM(1, 1) 模型

灰色简单模型 GM(1, 1) 表示的是一阶的、一元的微分预测模型。

设原始序列为

$$Y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$$

其累加生成序列 $Y^{(1)}$ 为

$$Y^{(1)} = (y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), \dots, y^{(1)}(n))$$

对一阶生成数列 $Y^{(1)}$ 建立模型



$$\frac{dy^{(1)}}{dt} + ay^{(1)} = u \quad (1-2)$$

一般的预测的序列在时间上是离散的，所以我们以离散的形式表示

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y^{(1)}(k+1) - y^{(1)}(k)}{(k+1) - k} = y^{(0)}(k+1)$$

令 $z^{(1)}(k)$ 为 $y^{(1)}(k)$ 和 $y^{(1)}(k-1)$ 的平均值

则式(1-2)可表示为

$$y^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = u \quad (1-3)$$

$$z^{(1)}(k) = \frac{y^{(1)}(k) + y^{(1)}(k-1)}{2} \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

$$\begin{cases} y^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = u \\ y^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = u \\ \dots + \dots = \dots \\ y^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = u \end{cases} \quad (1-4)$$

3) 模型参数求解

a, u 为待估参数，其中 a 为系统发展系数，反映了整个指数的发展趋势； u 是反映数据的变化关系。

将这两个待估参数表示成向量形式：

$$\hat{a} = [a \quad u]^T$$

对于方程组 (1-4)

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T A \quad (1-5)$$

$$\text{式中 } A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(2) \\ y^{(0)}(3) \\ \dots \\ y^{(0)}(n) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & 1 \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

4) GM (1-1) 的预测

式 (1-2) 的方程的解为

$$y^{(1)}(t) = \left[y^{(1)}(0) - \frac{u}{a} \right] e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (1-6)$$

其离散形式为



$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \left[y^{(1)}(0) - \frac{u}{a} \right] e^{-ak} + \frac{u}{a} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (1-7)$$

其中 $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T A$

附表 1：模型 2 的预测数据

年份	市人口数	镇人口数	乡人口数	人口总数
2006	131990.86	132236.16	132190.39	132143.06
2007	133176.53	133682.16	133597.56	133495.48
2008	134312.14	135095.44	134985.23	134817.69
2009	135408	136478.95	136358.84	136116
2010	136458.36	137838.95	137717.66	137389.53
2011	137466.8	139175.16	139062.19	138639.48
2012	138412.98	140451.67	140355.75	139833.84
2013	139273.91	141639.33	141577.69	140949.84
2014	140059.83	142744.11	142734.67	141995.05
2015	140773.56	143770.3	143821.45	142968.06
2016	141413.38	144711.84	144836.39	143866.45
2017	141987.09	145576.36	145784.78	144696.64
2018	142473.53	146354.61	146652.5	145443.34
2019	142879.86	147051.27	147449.13	146114.67
2020	143203.63	147661.09	148172.8	146708.02
2021	143461.67	148216.16	148864.91	147256.34
2022	143656.5	148712.83	149528.25	147761.28
2023	143789.95	149159.56	150171.53	148229.59
2024	143862.42	149550.66	150794.3	148660.17
2025	143878.81	149896.56	151405.92	149061.3
2026	143841.55	150205.2	152009.88	149436.95
2027	143753.66	150476.17	152610.94	149790.53
2028	143612.2	150710.77	153209.64	150121.73
2029	143415.17	150905.78	153804.41	150428.58
2030	143163.19	151065.59	154394.55	150711.61
2031	142852.52	151184.33	154978.94	150968.17
2032	142473.67	151257.64	155548.48	151189.88
2033	142035.7	151283.36	156114.69	151385.19
2034	141543.69	151278.36	156676.84	151558.03
2035	140988.83	151240.84	157231.95	151704
2036	140368.91	151163.86	157780.86	151821.75
2037	139676.89	151033.56	158311.48	151900.31
2038	138915.66	150852.78	158822.03	151939.97
2039	138099.11	150617.3	159303.42	151938.83
2040	137221.22	150322.53	159741.19	151886.48



2041	136292.38	149976.64	160149.95	151795.27
2042	135327.16	149585.66	160542.31	151677.2
2043	134317.89	149157.84	160925.36	151535.47
2044	133276.27	148705.59	161310.94	151381.98
2045	132205.66	148219.47	161696.8	151214.83
2046	131101.73	147713.3	162095.23	151041.94
2047	129983.18	147192.61	162509.23	150871.09
2048	128842.19	146670.97	162946.22	150706.53
2049	127685.95	146151.61	163415.5	150555.95
2050	126532.95	145636.56	163922.91	150428.05
2051	125369.87	145127.86	164469.59	150320.09
2052	124211.45	144632.83	165061.69	150240.83
2053	123048.34	144152.94	165689.08	150182.31

附表 2：模型 2 的改进模型预测数据

年份	市人口数	镇人口数	乡人口数	人口总数
2006	131990.86	132236.16	132190.39	132143.06
2007	133176.53	133682.16	133597.56	133493.8
2008	134312.14	135095.44	134985.23	134812.05
2009	135408	136478.95	136358.84	136103.55
2010	136458.36	137838.95	137717.66	137366.77
2011	137466.8	139175.16	139062.19	138602.42
2012	138412.98	140451.67	140355.75	139778.44
2013	139273.91	141639.33	141577.69	140871.38
2014	140059.83	142744.11	142734.67	141888.44
2015	140773.56	143770.3	143821.45	142828.59
2016	141413.38	144711.84	144836.39	143689.08
2017	141987.09	145576.36	145784.78	144476.3
2018	142473.53	146354.61	146652.5	145174.73
2019	142879.86	147051.27	147449.13	145791.81
2020	143203.63	147661.09	148172.8	146324.36
2021	143461.67	148216.16	148864.91	146802.45
2022	143656.5	148712.83	149528.25	147226.31
2023	143789.95	149159.56	150171.53	147601.16
2024	143862.42	149550.66	150794.3	147924.38
2025	143878.81	149896.56	151405.92	148202.84
2026	143841.55	150205.2	152009.88	148439.66
2027	143753.66	150476.17	152610.94	148636.38
2028	143612.2	150710.77	153209.64	148791.14
2029	143415.17	150905.78	153804.41	148900.47
2030	143163.19	151065.59	154394.55	148964.38
2031	142852.52	151184.33	154978.94	148978.05
2032	142473.67	151257.64	155548.48	148932.33



2033	142035.7	151283.36	156114.69	148832.3
2034	141543.69	151278.36	156676.84	148683.59
2035	140988.83	151240.84	157231.95	148480.03
2036	140368.91	151163.86	157780.86	148217.41
2037	139676.89	151033.56	158311.48	147883.88
2038	138915.66	150852.78	158822.03	147479.86
2039	138099.11	150617.3	159303.42	147006.91
2040	137221.22	150322.53	159741.19	146456.92
2041	136292.38	149976.64	160149.95	145839.86
2042	135327.16	149585.66	160542.31	145166.27
2043	134317.89	149157.84	160925.36	144436.09
2044	133276.27	148705.59	161310.94	143660.38
2045	132205.66	148219.47	161696.8	142835.97
2046	131101.73	147713.3	162095.23	141966.83
2047	129983.18	147192.61	162509.23	141063.33
2048	128842.19	146670.97	162946.22	140126.86
2049	127685.95	146151.61	163415.5	139162.34
2050	126532.95	145636.56	163922.91	138179.25
2051	125369.87	145127.86	164469.59	137170.75
2052	124211.45	144632.83	165061.69	136146.61
2053	123048.34	144152.94	165689.08	135100.73

附表 3：老龄化、育龄妇女、人口结构预测

年份	老龄化比率		育龄妇女		人口结构层次		
	60+	65+	总人数	生育旺盛期人数	0-15	16-59	60+
2005	0.129705	0.090461	36488.147	8614.9067	0.195589	0.674643	0.129768
2006	0.132448	0.092398	36587.297	8513.5205	0.192201	0.675351	0.132448
2007	0.135714	0.093996	36510.071	8709.6184	0.190424	0.673862	0.135714
2008	0.13879	0.095511	36520.682	8850.61	0.189305	0.671905	0.13879
2009	0.143176	0.097267	36642.242	9112.9593	0.189837	0.666987	0.143176
2010	0.147642	0.099409	36729.07	9518.6489	0.189806	0.662552	0.147642
2011	0.151785	0.101516	36854.622	9764.5421	0.191395	0.65682	0.151785
2012	0.157593	0.104155	36470.657	9813.989	0.193255	0.649153	0.157593
2013	0.163093	0.106666	35714.265	9972.0622	0.195044	0.641863	0.163093
2014	0.169371	0.110404	35095.742	10055.936	0.197779	0.63285	0.169371
2015	0.175754	0.114263	34440.654	10182.184	0.200011	0.624235	0.175754
2016	0.180769	0.117888	33781.903	10116.397	0.202402	0.616829	0.180769
2017	0.186819	0.123045	33204.927	9830.8009	0.205362	0.607819	0.186819
2018	0.191155	0.127938	32340.13	9542.0771	0.208445	0.6004	0.191155
2019	0.19262	0.133585	31631.922	9066.319	0.210874	0.596507	0.19262
2020	0.194929	0.139327	30863.101	8499.4886	0.21295	0.592121	0.194929
2021	0.194907	0.14381	30631.834	8062.8596	0.209347	0.595746	0.194907



2022	0.200967	0.149244	30449.442	7661.1207	0.205778	0.593255	0.200967
2023	0.211745	0.153075	30319.658	7273.3779	0.202219	0.586036	0.211745
2024	0.219312	0.154204	30241.052	7010.9038	0.198642	0.582046	0.219312
2025	0.227241	0.156078	30260.457	6737.0863	0.195088	0.577671	0.227241
2026	0.234427	0.155731	30324.11	6975.6081	0.191542	0.574031	0.234427
2027	0.239575	0.161066	30470.682	7237.0633	0.188228	0.572198	0.239575
2028	0.248249	0.170911	30555.608	7519.5777	0.185268	0.566483	0.248249
2029	0.255231	0.177666	30623.188	7871.6918	0.182597	0.562172	0.255231
2030	0.26347	0.184705	30702.358	8212.2808	0.180228	0.556302	0.26347
2031	0.270146	0.190981	30751.043	8574.7997	0.178147	0.551707	0.270146
2032	0.276117	0.195302	30676.949	8979.2692	0.176274	0.547609	0.276117
2033	0.281407	0.203037	30715.006	9386.9833	0.17477	0.543823	0.281407
2034	0.285824	0.209174	30757.569	9751.8671	0.173568	0.540609	0.285823
2035	0.289011	0.216509	30778.964	10068.504	0.172698	0.538292	0.28901
2036	0.29153	0.222365	30705.452	9965.5223	0.171928	0.536542	0.29153
2037	0.292719	0.227554	30434.644	9839.8476	0.17118	0.536101	0.292719
2038	0.294272	0.232086	30171.467	9686.7066	0.17045	0.535278	0.294272
2039	0.295803	0.235781	29797.003	9514.3255	0.169694	0.534503	0.295803
2040	0.296353	0.238313	29336.857	9325.8041	0.168875	0.534772	0.296353
2041	0.297013	0.240194	29027.093	9131.1851	0.168031	0.534956	0.297013
2042	0.298966	0.240751	28802.876	8938.1574	0.16715	0.533884	0.298966
2043	0.298726	0.241642	28612.902	8755.5224	0.166272	0.535002	0.298726
2044	0.297939	0.242478	28506.047	8583.3877	0.165417	0.536644	0.297939
2045	0.297149	0.242298	28361.471	8432.1944	0.164567	0.538284	0.297149
2046	0.297742	0.242219	28311.635	8307.1931	0.163765	0.538493	0.297742
2047	0.30082	0.243451	28277.342	8205.3015	0.163064	0.536117	0.30082
2048	0.303135	0.242518	28258.138	8125.7295	0.162412	0.534453	0.303135
2049	0.305928	0.24104	28295.49	8059.5838	0.161824	0.532248	0.305928
2050	0.309002	0.239613	28312.953	8009.2707	0.161284	0.529714	0.309002
2051	0.309938	0.239602	28340.414	7966.0611	0.160854	0.529208	0.309938
2052	0.3099	0.242056	28398.599	7929.34	0.160617	0.529483	0.3099
2053	0.309385	0.243658	28399.732	7906.87	0.160577	0.530038	0.309385
2054	0.307838	0.245535	28401.123	7887.647	0.16074	0.531422	0.307838

