# 多目标决策的公交线路选择模型

## 摘要

本文从实际情况出发，针对查询者对时间、费用以及换车次数三个目标的不同需求，建立了相应的多目标决策的公交线路选择模型。

在第一个问题中，为了解决多目标决策问题，采用“分层排序法”和“目标约束法”两种方案。为使两种方案适合用经典的 Dijkstra 算法求解，提出“拆点构图法”对原图进行改造。然后对算法进行复杂度评价，改进该算法，提出“二维状态更新标号”的算法求解，提高解决问题的效率；最后针对模型结论进行评价说明。

在第二个问题中，由于要考虑地铁对公交线路选择的影响，需要调整构图，并采用第一问的算法求解，评价地铁因素对结果的影响。

在第三问中，由于引入两地点间步行时间，重新考虑对公交线路选择的需求情况，加入“体力消耗”的因素，并以此为约束进行目标决策，最后进行评价。

在模型拓展中，添加公交线路中路况的实际因素对线路选择进行分析评价。最后，给出本文模型对计算机网络及通信的实际应用。

关键字：多目标决策；分层排序、目标约束、拆点构图法；二维状态更新标号法

# 1. 问题重述

公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）是多数市民首选的出行方式，出行者乘公交时面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。现在要解决如下问题：

1．仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用模型与算法，求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线并进行评价说明。

(1)、S3359→S1828　　(2)、S1557→S0481　　(3)、S0971→S0485

(4)、S0008→S0073　　(5)、S0148→S0485　　(6)、S0087→S3676

2．同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3．假设又知道所有站点之间的步行时间，给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

# 2. 问题分析

线路查询者选择线路时一般会有各种不同需求。本文将其归结为三个因素：用时、费用、换乘次数。三个因素一般不能同时达到最优时，出行者往往根据需求对三种因素的重要程度排序，例如使出行时间达到最优，在有多种路线都使时间达到最优时再选择其中费用最少的路线，如果仍有多组路线，则从中选择换成次数最少的线路，即对多目标分层排序。

另外，出行者也可以选择一种因素为主要目标，其他因素为次要目标，次要目标化为所需满足的约束，即在其他因素不至于太差的情况下选择主要因素最优的出行方案。

当仅考虑公汽线路时，时间上只需考虑公汽行驶时间和换车时间，费用有两种公汽票价，换乘次数只是换车次数。

当加入地铁线路时，时间上需添加地铁行驶时间和换乘时间，费用需添加地铁票价，换乘次数要考虑地铁之间、地铁和公车之间的换乘。

当知道所有站点之间的步行时间后，需要重新考虑影响线路选择需求的因素——体力消耗，进行建模求解。

# 3. 模型假设和符号系统

3．1 模型假设

1）同种公交工具（公汽或地铁）在相邻两站的行驶时间可近似用期望代替且为定值（包括停站时间）

2）乘客换乘公汽或地铁的消耗时间可近用期望代替且为定值

3）同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘（无需支付地铁费用）

3．2 符号系统

T： 线路总用时

C：线路总花费

R：线路公交换乘次数

$t_b$：相邻公汽站平均行驶时间（包括停站时间）

$t_u$： 相邻地铁站平均行驶时间（包括停站时间）

$t_{bb}$：公汽换乘公汽平均耗时

$t_{uu}$：地铁换乘地铁平均耗时

$t_{ub}$：地铁换乘公汽平均耗时

$t_{bu}$：公汽换乘地铁平均耗时

$c_b$：公汽票价，分为单一票制和多票制。

$c_u$：地铁票价

$f_1$：所选线路所需时间

$f_2$：所选线路所需费用

$f_3$：所选线路所需换乘次数

$f_4$：所选线路步行消耗体力

$P_{st}$：以 s 站为起点，t 站为终点的所有公交路线的集合

s ：查询起点

t：查询终点

## 4． 模型建立和求解

4．1 问题（1）

4．1．1 模型建立

以出行者对出行时间、费用、换乘次数的不同需求建立三个目标的多目标规划模型

$$\underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$按照出行者的需求，分别可以选择用时 T，费用 C，换乘次数 R，三者重要程度不同。

4．1．2 模型分析

方案一：其三个目标按重要程度排序，先求出第一个目标的最优解，再达到此目标下的条件下求第二个目标的最优解，依次类推到最后一个求解结束即得到最优解：

$$\underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

$$\Rightarrow f_1^* = \underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{f_1(x)\}$$

$$f_2^* = \underset{x \in P_{st} \cap f_1^*}{\mathrm{Min}} \{f_2(x)\}$$

$$f_3^* = \underset{x \in P_{st} \cap f_1^* \cap f_2^*}{\mathrm{Min}} \{f_2(x)\}$$

方案二：在多个目标中选定一个主要目标，而对其他目标设定一个期望值，在要求结果不比此期望值坏的条件下，求主要目标的最优值。

$$\underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{f_1(x)\} \\ f_2(x) \le f_2^0, f_3(x) \le f_3^0, \end{cases}$$

4．1．3 模型求解

（等效转化的最短路算法）：

方案一和方案二将多目标决策问题转化为有约束条件的单目标决策问题。为了求解某一目标的最优解，现对乘车线路图建立图论模型：

（定义一：原图）原图为有向图 G(V,E)：

点集： $V = \{$ 所有的公汽站点 $\}$

有向边集： $E = \{ \langle u, v, l \rangle \mid$ 存在某条线路使 u 站在线路 l 的下一站是 v 站 $\}$，即公交线路相邻的站连接一条有相边，每两个站之间的边因为所在线路不同，可能不止一条，用它们的所在线路号 l 来区别。

边权 w：若决策目标是时间最优，所有边赋权值为从等待该边始点站开始到到达该边终点站的时间；若决策目标是换乘次数最优，所有边赋权值 0 或 1，0 表示换车，1 表示不换车。可见边权是动态的，与路径有关。

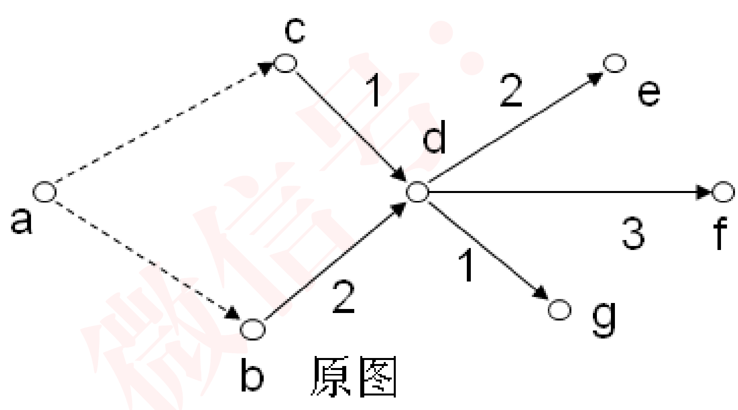
问题即为在图 G 中找到一条使目标最优的路径。

为了化动态边权为固定边权，引入改造图。

（定义二：改造图）对原图的每个点，设有 n 条入边（以该点为头的有向边），m 条出边（以该点为尾的有向边）。将其拆分成$m*n$个点，分别与 n 条入边的头关联，与 m 条出边的为关联，将每个与入边关联的拆分点与每条出边关联拆分点连接一条有向边，则该有向边的前驱边和后继边唯一。对于新加入的有向边，若决策目标是时间最优，则如果前驱边和后继边所属的公交线路号不同， 该边赋权值$t_{bb}$，否则赋权值 0；若决策目标是换乘次数最优，则如果前驱边和后继边所属的公交线路号不同， 该边赋权值 1，否则赋权值 0；

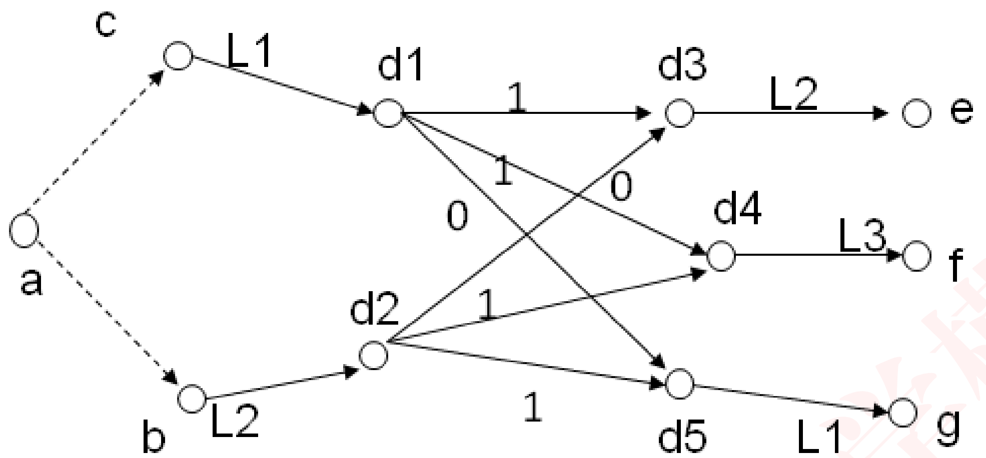
例如：

原图为：




原图

若以换乘次数为目标，改造图为：



改造图

从改造过程可知：
（定理一）：改造图中任意两点之间的路径的边权和即为两点之间的乘车代价（时间或换乘次数）。
（推论一）改造图中起点到终点的最小路径边权和等于起点到终点的最小乘车代价。
此时，最小乘车代价问题则化为在改造图中求起点到终点的最短路径，可以用经典的 Dijkstra 算法求解。
当目标为乘车费用时，由于有多票制的干扰，费用随路径长度积累，无法等校为最短路径问题，不能用 Dijkstra 算法求解。考虑到实际情况，费用一般不会很大，可以令费用为 1 元依次增大，搜索是否存在用花费此费用的线路，若存在，则此线路的乘车费用为最优，否则使设定的费用值加 1。

上述算法只解决了单目标决策，现在运用方案一、二解决多目标决策的公交线路选择问题。

方案一，在只考虑首要目标决策的最优解集中，选择次要目标决策的最优解（可能有多个），再从其中选择最次要目标决策的最优解。

方案二，枚举首要目标决策的最优解，选择符合其他目标约束的解。

算法评价：

上述算法将每个交叉点拆分成若干点，并添加许多边，难于构图，算法效率低。

（改进的算法：二维状态更新标号法）
先定义几个名词：
设公交网络有 n 个站点，m 条线路。
状态：有序二元组 $<i,j>$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$，表示从起点 s 出发，最后由 j 线路乘车到达 i 站。

标号：为状态 $<i,j>$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 设置状态标号 $d(i,j)$，表示从起点 s 出发，最终由 j 线路乘车到达 i 站的以某因素为目标的代价。

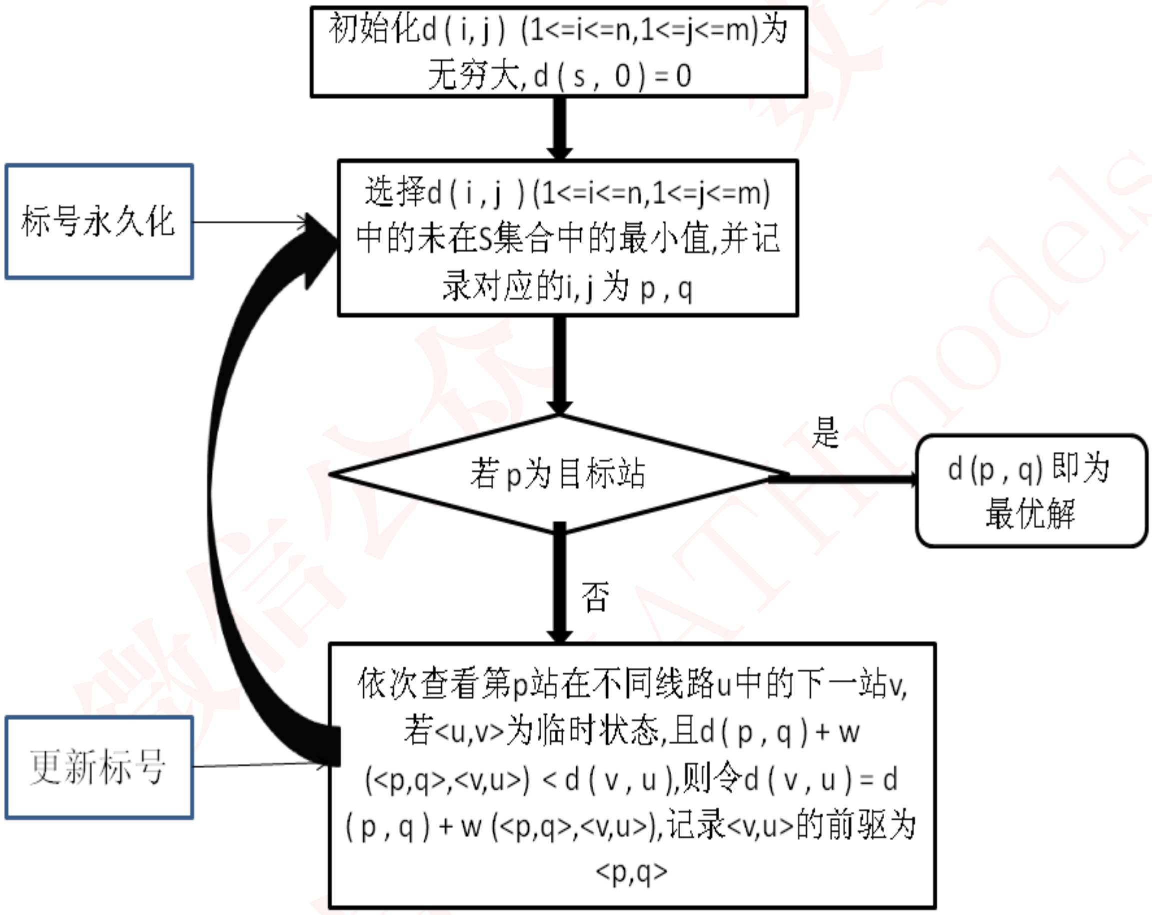
S 集合：S 包含标号永久化的状态，初始时为空集。
永久状态：已在 S 中的状态。

临时状态：未被标号永久化的状态。

标号永久化：从$d(i,j)$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 中选择不在 S 中的标号最小的点，将其放入 S，则 i 被标号永久化。

更新标号：站点 v 为被标号永久化的站点 p（来自线路 q）通过线路 u 一站可达的站点即由状态$<p,q>$ 可达状态 $<v,u>$。若$d(p,q) + w(<p,q>,<v,u>) < d(v,u)$,则令$d(v,u) = d(p,q) + w(<p,q>,<v,u>)$。其中，$w(<p,q>,<v,u>)$为由 $<p,q>$ 到 $<v,u>$ 的代价，若 $q \ne u$ 则包括换乘代价)

（算法流程）




（定理二）设 k 为算法进行标号永久化和临时标号的迭代次数，在第 k 迭代过程中：

(1) 永久状态标号 $d(i,j)$是从起点 s 出发，最终由 j 线路乘车到达 i 站的状态〈i, j>的以某因素为目标的最少代价。

(2) 临时状态的标号是从起点 s 出发，只经过 S 中的状态的最少代价路径。

证明：用数学归纳证明，

a. 当 k=0 时，$S = \emptyset$, 因此从起点 s 到其他站点的最少代价费用为无穷，成立。

b. 假设第 k 次迭代定理成立。设<v，u>在第 k+1 次迭代加入 S，因此<v，u>在第 k

次迭代后具有最小临时标号的状态。

c.由归纳假设知，在 k+1 次迭代之前的永久状态的标号是从起点 s 到该状态的最少代价路径。则<v, u>一定被标号为从起点 s 到该状态的最少代价。否则，在第 k 次迭代后，会存在一条包含 S 外的一个状态且代价小于 d(v,u)的路径（因为 d(v,u)在第 k 次迭代后是一条从起点 s 到<v,u>的只经过 S 中状态的最少代价路径的长度）。设〈r, h〉为在这条路径上第一个不在 S 中的状态。存在一条从起点 s 到<r,h>的只含 S 中的点且总代价小于 d(v,u)的路径。这与<v,u>的选择矛盾。因此(1)成立。

d.设<r, h>是第 k+1 次迭代后不在 S 中的状态。一条从起点 s 到〈r,h>的只包含 S 中的状态的最少代价路径不是包含<v,u>就是不包含〈v,u〉。如果它不包含〈v,u〉，则由归纳假设，它的长度是 d(r,h)。如果它包含〈v,u〉，则它一定由一条经过除<v,u>外的 S 中的状态的最少可能代价的一条从起点 s 到<v,u>的路径以及随后的从<v,u>到〈r,h>的边构成。在这种情况下，它的路径代价为 d(v,u>+w(<v,u>,<r,h>) 的代价。因为第 k+1 次迭代以 Min{d(r,h),d(v,u)+w(<v,u>,<r,h>)更新<r,h>的标号，所以(2)成立。

（推论二）算法首次永久化状态〈t,k〉(t 为目标站点，k 为任意线路)时，其标号即为从起点到达终点的最少代价路径。因此算法正确。
证明：从算法可以看出，标号永久化的状态标号随迭代过程增大，所以第一次将终点永久化标号则求出到达终点的最少代价路径，此后永久化标号的到终点的状态标号都不小于它。

在解决多目标决策问题时，可以将算法修正，以使其按照分别按照模型一、二的方法求解：

方案一，将状态标号 d(v,u) 改造为向量形式，$\vec{d}(v,u)=(d_1,d_2,d_3)$（$d_1,d_2,d_3$分别为主要目标代价，次要目标代价，最次要目标代价）$\vec{w}(v,u)$也改为向量形式。在算法的更新标号阶段，更新条件改为$d_1(v,u) < d_1(p,q)$，或 $d_1(v,u)=d_1(p,q)+w_1(<p,q>,<v,u>)$ 且$d_2(v,u) < d_2(p,q)+w_2(<p,q>,<v,u>)$，或 $d_1(v,u)=d_1(p,q)+w_1(<p,q>,<v,u>)$ 且$d_2(v,u)=d_2(p,q)+w_2(<p,q>,<v,u>)$且$d_3(v,u) < d_3(p,q)+w_3(<p,q>,<v,u>)$

方案二,在永久化标号阶段，只在符合约束的状态中选择最小值进行永久化标号，防止其更新更多的不符合约束的无用标号。

4.1.4 模型的结论与评价
现从实际情况出发求解在三种不同需求下的最优线路：

1．时间为首要，费用为次要，换乘次数为最次要

| 起始站→终点站 | 路线 | 时间 | 费用 | 换乘次数 |
|---|---|---|---|---|
| $S3359 \to S1828$ | $S3359 \xrightarrow{L15} S1327 \xrightarrow{L328} 0525 \xrightarrow{L103} S0073 \xrightarrow{L480} S2704 \xrightarrow{L27} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ | 67 | 6 | 5 |
| $S1557 \to S0481$ | $S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L189} S3186 \xrightarrow{L91} S0903 \xrightarrow{L254} S0481$ | 99 | 4 | 3 |
| $S0971 \to S0485$ | $S0971 \xrightarrow{L263} S1609 \xrightarrow{L448} S2113 \xrightarrow{L002} S2017 \xrightarrow{L469} S0485$ | 105 | 4 | 3 |
| $S0008 \to S0073$ | $S0008 \xrightarrow{L198} S3766 \xrightarrow{L476} S2085 \xrightarrow{L406} S0604 \xrightarrow{L328} S0525 \xrightarrow{L103} S0073$ | 59 | 5 | 4 |
| $S0148 \to S0485$ | $S0148 \xrightarrow{L308} S3604 \xrightarrow{L354} S2361 \xrightarrow{L156} S3351 \xrightarrow{L417} S0485$ | 102 | 4 | 3 |
| $S0087 \to S3676$ | $S0087 \xrightarrow{L454} S0088 \xrightarrow{L231} S0427 \xrightarrow{L97} S3676$ | 46 | 3 | 2 |

（表一）

此种需求以增加换乘次数和费用的代价换取了时间最短的目标，而实际中人们往往不愿意频繁换车，而更希望选择一条换乘次数比较少的线路。

2．换乘次数为首要，时间为次要，费用为最次要

| 起始站→终点站 | 路线 | 换乘次数 | 时间 | 费用 |
|---|---|---|---|---|
| $S3359 \to S1828$ | $S3359 \xrightarrow{L436} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ | 1 | 101 | 3 |
| $S1557 \to S0481$ | $S1557 \xrightarrow{L84} S1919 \xrightarrow{L417} S3919 \xrightarrow{L447} S0481$ | 2 | 124 | 4 |
| $S0971 \to S0485$ | $S0971 \xrightarrow{L13} S2119 \xrightarrow{L047} S0485$ | 1 | 134 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $S0008 \rightarrow S0073$ | $S0008 \xrightarrow{L159} S3729 \xrightarrow{L011} S0073$ | 1 | 86 | 3 |
| $S0148 \rightarrow S0485$ | $S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S3351 \xrightarrow{L417} S0485$ | 2 | 106 | 3 |
| $S0087 \rightarrow S3676$ | $S0087 \xrightarrow{L454} S1159 \xrightarrow{L209} S3676$ | 1 | 62 | 2 |

（表二）

这种需求减少了换车带来的烦琐，符合大多数出行者的心理。但选线的不灵活导致途径站数增多，牺牲了时间。

3．费用为首要，时间为次要，换乘次数为最次要

| 起始站→终点站 | 路线 | 费用 | 时间 | 换乘次数 |
|---|---|---|---|---|
| $S3359 \rightarrow S1828$ | $S3359 \xrightarrow{L484} S0004 \xrightarrow{L027} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ | 3 | 79 | 2 |
| $S1557 \rightarrow S0481$ | $S1557 \xrightarrow{L84} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L254} S0481$ | 3 | 112 | 2 |
| $S0971 \rightarrow S0485$ | $S0971 \xrightarrow{L013} S2517 \xrightarrow{L296} S2017 \xrightarrow{L469} S0485$ | 3 | 109 | 2 |
| $S0008 \rightarrow S0073$ | $S0008 \xrightarrow{L335} S2303 \xrightarrow{L11} S0073$ | 2 | 89 | 1 |
| $S0148 \rightarrow S0485$ | $S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S3357 \xrightarrow{L417} S0485$ | 3 | 106 | 2 |
| $S0087 \rightarrow S3676$ | $S0087 \xrightarrow{L454} S1159 \xrightarrow{L209} S3676$ | 2 | 62 | 1 |

（表三）

该需求最大了减少了出行所需费用，其时间和换乘次数都介于上述两种需求之间，指标较平均。

综合评价与说明：

根据查询者的不同需求得到的最佳查询路线在时间，费用和换乘次数上有着差异。因为时间由线路经过的站数和换乘次数决定，并且不同路线换车次数相差不大（一般不超过 4 次），但是不同线路所经过的车站站数相差较大，所以时间长短主要受到所选路线经过的车站站数的影响。以时间为主要目标的乘车方案往往所经站数比较少。

同样，费用受换乘次数和经过站数（有些线路分段计费）影响，从所得结果看出，费用为首要与换乘次数为首要所得的结果在费用和换乘次数都较少。

从以上结果还能看出：在某些情况下，以时间为首要和换乘次数为首要所得路线差

异较大，时间为首要所选的路线经过的车站站数接近或等于最少，可为出行者节约时间。而换乘次数为首要所选的路线可能会绕远，但可以为出行者减少麻烦。

### 4．2 问题（2）

#### 4．2．1 模型分析与求解

由于同时考虑公汽与地铁线路，在原图的构图上会发生变化，点集需加入各个地铁站。因为换乘情况增多，问题一中只能在在同一公汽站换车，而问题二不仅地铁 T1、T2 线可以在同一中转站换乘，而且还增加了在不同站换车的情况，即：

a. 在公汽站可以换乘地铁站的地铁

b. 在地铁站可以换乘公汽站的公汽

c. 一个公汽站可以通过地铁站换乘另一公汽站的公汽

为表示不同站的换乘，需要在原图的某些点对连入有向边,表示两不同站可达。

在采用二维状态更新标号法求解时，状态转移代价与问题一相比增加了一些。

#### 4．2．2 模型结论与评价

1．时间为首要，费用为次要，换乘次数为最次要

| 起始站→终点站 | 路线 | 时间 | 费用 | 换乘 |
|---|---|---|---|---|
| $S3359 \to S1828$ | $S3359 \xrightarrow{L15} S1327 \xrightarrow{L320} S0535 \xrightarrow{L103} S0073 \xrightarrow{L480} S2704 \xrightarrow{L027} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ | 67 | 6 | 5 |
| $S1557 \to S0481$ | $S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L189} S3186 \xrightarrow{L91} S0903 \xrightarrow{L254} S0481$ | 99 | 4 | 3 |
| $S0971 \to S0485$ | $S0971 \xrightarrow{L198} S3766 \xrightarrow{L476} S2085 \xrightarrow{L406} S0604 \xrightarrow{L328} S0525 \xrightarrow{L103} S0485$ | 59 | 5 | 4 |
| $S0008 \to S0073$ | $S0008 \xrightarrow{L198} S3766 \xrightarrow{L476} S2085 \xrightarrow{L406} S0604 \xrightarrow{L328} S0525 \xrightarrow{L203} S0073$ | 59 | 5 | 4 |
| $S0148 \to S0485$ | $S0148 \xrightarrow{L024} S1487 \longrightarrow D02 \xrightarrow{T1} D15 \longrightarrow S2534 \xrightarrow{L156} S3351 \xrightarrow{L417} S0485$ | 91.5 | 7 | 4 |
| $S0087 \to S3676$ | $S0087 \xrightarrow{L021} S0630 \longrightarrow D29 \xrightarrow{T2} D36 \longrightarrow S3676$ | 36 | 5 | 2 |

（表四）

2．换乘次数为首要，时间为次要，费用为最次要

结果同问题一的表 2。

3．费用为首要，时间为次要，换乘次数为最次要

结果同问题一的表 3。

评价与说明：

在考虑地铁线路后，一方面，时间为首要的最优线路变化较大，这是因为地铁在相邻两站间行驶时间较短，合理选择地铁线路可以带来时间的减少。

另一方面，换乘次数为首要和费用为首要的最优路线与无地铁时相同。因为在无地铁时，第一问以费用为首要所得的 6 条最优路线费用最多为 3 元，而地铁本身票价就是 3 元，对降低费用是无意义的。同样，第一问中换乘次数为首要的最优路线最多换乘 2 次，地铁本身车站有限，出行者搭乘地铁后往往仍然需要倒公汽，无法保证一定减少换乘次数。

由此可见，地铁是一种可以缩短人们出行时间，却相对较为昂贵的公共交通工具。

4．3 问题三

当知道所有站点之间的不同时间时，相当于所有站点之间可以采用零花费的交通途径，但单纯的步行不仅会浪费时间，也消耗体力。所以增加“体力消耗”这一因素。考虑到实际情况应以时间为主要目标，在此基础上尽量减少体力消耗，并使步行时间在一定的约束范围内。从而建立如下多目标决策模型：

$$F = \underset{x \in P_{st}}{\mathrm{Min}} \{T(x), N(x), T_w(x)\}$$

$$\text{s.t.} \quad T_w(x) \le \widetilde{T_w}$$

该模型仍然可以化为带约束的单目标，用问题一中的算法求解。

## 5． 模型评价与改进

本文通过建立多目标决策模型综合考虑出行人对时间、费用、换乘次数的不同需求，不仅以按重要度排名的方按求解多目标问题，而且还从实际出发，考虑现实出行者的心理约束，使得结果更符合现实情况。这样还巧妙的将多目标决策转化为带约束的单一目标规划。

模型还可以进一步改进，可以等权重考虑三种因素，用 Max-Min 法求得一个折中的线路，或是按指定权重建立目标，进行规划求解。

## 6．模型扩展

该模型是一种高度的简化的理想模型，一个好的公交线路查询系统不仅要满足查询者的各种不同需求，还要使城市相对紧张的各种交通资源得到优化配置，缓解交通压力。这就要求在建立模型时应该考虑更多实际状况，如路况问题。北京的交通状况较为拥挤，交通阻塞十分严重。在奥运会举行期间，必将有大批游客涌入北京。如果单纯考虑上述模型中提到的因素，很容易造成在比赛时间造成奥运场馆周围的交通瘫痪，对比赛造成影响，给人们出行带来不便。因此，在建立模型时就必须考虑到即时路况信息，如某路

段车流量，是否堵车，综合考虑各种因素，为查询者提供最佳的出行线路，在为人们出行带来方便的同时，保证北京城市交通系统的良好运转，为奥运会的圆满举行提供有力保障。

该模型可推广到网络规划建设问题，如铺设铁路，既要保证铺设路段距离短，又要保证该路段易于铺设铁路，以及该路径应覆盖重要站点；又如计算机网络和通讯中路由选择问题。

## 7 参考文献

[1] Kenneth H.Rosen ，离散数学及其应用 ，北京，机器工业出版社，2003 年
[2] 胡运权 等，运筹学教程（第三版），北京，清华大学出版社，2007 年
[3] 刘汝佳 黄亮 ，算法艺术与信息学竞赛，北京，清华大学出版社，2005 年
[4] 黄红选 韩继业，数学规划，北京，清华大学出版社，2006 年