公交线路最优路径的选择

摘 要

本文是以满足公交乘客需求为前提解决最优路径的问题。最优路径是根据出行的三大要素：出行时间，出行车费，以及换乘次数作为优化的对象的。因此该最优路径是或者追求最短时间，或者追求出行费用最少，或者追求三者结合的最理想路径。与物理意义上的最短路径无关。

模型一是经典最短路径 Dijkstra 算法，该算法虽然在计算机网络中盛行，但经过对公交网络的特性分析，Dijkstra 算法并不适用于公交网络。同时，根据公交网络的特性以及公交乘客的需求，推导出以换乘次数最少为基础的最优路径算法，即模型二。

模型二是以换乘次数最少为前提，或者追求最短时间，或者追求费用最少，或者通过加权系数的方法综合考虑这两个因素而得到的最优路径。它是解答后面所有问题的基础，然而模型二的换乘次数最少的前提局限了它结果的优化。

为了优化模型二的结果，我们扩展了模型，定义了一个公交乘客心理系数，这个心理系数是能忍受的最大换乘次数。考虑该系数以内的所有可能路径，因而在一定范围内优化的结果。最后实验也证明，在这个系数范围内的结果相对于模型二更优。

模型三包含了地铁的因素，为了避免算法的复杂化和不必要的计算，我们限定了乘坐地铁的条件，即对公汽和地铁的换乘次数进行了限制，实验证明，加入地铁因素的模型三也是优于前两个模型的。

然后根据第三问进行了模型扩展，建立了模型四。模型四加入了对不同站点间可以步行到达的考虑，提出了人们心理能够承受的最大步行距离的概念，从而增大了线路的选择范围，减少了换乘次数。

最后本文对公交路线选择系统提出一些建议

。

关键词

换乘次数　最优路径　最大步行距离　公交系统

问题提出

奥林匹克运动会即将在 08 年的北京举行，届时有大量观众到现场观看奥运比赛，其中大部分人将会乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）出行。这些年来，城市的公交系统有了很大发展，北京市的公交线路已达 800 条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，其核心是线路选择的模型与算法，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求[3]：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用该模型与算法，求出题目所给数据的起始站→终到站之间的最佳路线。

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3、假设又知道所有站点之间的步行时间，请你给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

问题分析

城市公交线网的选择查询系统中，线路选择的目标就是要满足广大公交乘客的需求，从而追求总利益最大化。这种利益是根据公交乘客出行的心理情况和题目所给的数据，而概括为“出行时间” 、“出行费用”以及“换乘次数”三个因素。“出行时间”包括公交平均行驶时间、换乘所需的时间和换乘步行的时间；“出行费用”包括公汽票价单一和分段两种计价方式，以及单一的地铁票价；“换乘次数”就是公交乘客搭行不同的交通工具所换乘次数。这几个出行因素也是在互相影响的：“换乘次数”所带来的换乘时间直接影响着“出行耗时”的总时间；同时换乘可能带来的票价计费的不同，也影响了出行的总费用。因此在考虑出行的总利益时，应该综合相关的出行因素，找出最优解。

模型假设

1. 本文所涉及的最优路径，都是指在站点 i 到站点 j 的所有满足条件的路径中，找出或时间最少，或费用最少，或时间和费用综合考虑的最优路径；

2. 公汽和地铁相临站点间距离假设各分别相同，公交平均行驶时间（包括停车时间）各分别相同；

3. 公交间同一种换乘方式的平均耗时相同；

4. 公交换乘时间中包括换乘所需步行时间；

5. 问题提出涉及到的三种出行因素以外的其他因素对于它的决策没有影响。

6. 公交车票价分为分段票价和单一票价。

7. 从实际出发，假设人们乘车可接受的最大换乘次数为 3 次。

8. 从实际出发，假设人们要乘坐地铁，则在地铁内一定走最短的路径。

9. 人们乘坐地铁一定尽早进入地铁，尽晚的出地铁。

10. 人们如果乘坐地铁，公汽与地铁的换乘次数不会超过 2 次，而且不会出现公汽与公汽的换乘。

11. 公汽→公汽换乘时间统一为 5 分钟，地铁→地铁换乘时间统一为 4 分钟，地铁→公汽换乘时间统一为 7 分钟；公汽→地铁换乘时间统一为 6 分钟。

符号说明

start	:	起始公交站点；
end	:	目的公交站点；
BestPath	:	从初始站点 *start* 到目的站点 *end* 的最优路径；
Between[i][j]	:	在站点 i 到站点 j 的所有满足直达的公交路径中，找出时间最少，或费用最少，或时间和费用综合考虑的最优路径；
$change_n[i][j]$	:	从站点 i 到站点 j 换乘 n 次最优公交路径，若无，返回 NULL； n 公交换乘次数，$0 \le n \le \max$；
max	:	满足顾客需求所允许的最大换乘次数；
V	:	所有公交站点组成的结点集；
in	:	进入地铁站的地铁站号；
out	:	出地铁站的地铁站号；
subway[i][j]	:	从地铁站点 i 到地铁站点 j 的最优地铁路径；
X(i)	:	表示公交车站 i 附近是否有地铁站，有则返回地铁站号，没有则返回 0；
$Between'[i][j]$	:	表示的是从站点 i 到站点 j 的最优直达路径（考虑步行时间）， 最优路直达路径是指：在以 i 为起点的所有直达到 j 的公交线路，或离 i 在顾客可以接受的最大步行距离内的所有结点中能够直达 j 的公交线路，或能从 i 直达到离 j 在顾客可以接受的最大步行距离内的结点的公交线路中耗时最小的路径。

模型建立与求解

1.　模型一: Dijkstra 算法[1]

根据迪杰斯特拉（Dijkstra）提出的按路径长度递增的次序产生的经典最短路径的算法。首先，引进辅助向量 D[j]表示当前所找到的从始点 v 到每个终点 v_i 的最短路径的长度，它的初态为：若从 v 到 v_i 有弧，即初始站 v 到站 v_i 存在车次线路相连，则 D[i]为弧上的权值；否则置 D[i]为∞。

1.1 模型一的算法：

1)　假设用带权的邻接矩阵 arcs 来表示带权有向图，arcs[i][j]表示弧 $<v,v_i>$ 上的权值,。若 $<v,v_i>$ 不存在，则置 arcs[i][j]为∞。S 为已找到从 v 出发的最短路径的终点的集合，它的初始状态为空集。[2]

$$D[i]=[Locate\ Vex(G,\ v)\ [i]],\quad v_i\in V$$

2)　选择 v_j，使得

$$D[j]=Min\{D[i]\,|\,v_i\in V-S\}$$

v_j 就是当前求得的一条从 v 出发的最短路径的终点。令

$$S=S\cup\{j\}$$

3)　修改从 v 出发到集合 V—S 上任一顶点 v_k 可达的最短路径长度。如果

$$D[j]+arcs[j][k]<D[k]$$

则修改 D[k]为

$$D[k]=D[j]+arcs[j][k]$$

4)　重复操作 2，3 共 n-1 次。由此求得从 v 图上其余各顶点的最短路径是依路径长度递增的序列。

1.2 模型一的实用性和缺陷：

Dijkstra 算法在图论等学科中计算最短路程的经典算法,对于道路网或计算机网络的拓扑结构非常适用，然而，对于公交网络，该算法并不适合，其主要表现为：

1) 数据结构过于复杂：公交网络具有海量数据和有向性的特点，使用 *Dijkstra* 算法在 对于这些数据进行数据结构定义时，是基于网络的关联矩阵，邻接矩阵和距离矩阵，需要启用 $N \times N$ 的数组，其中 N 为网络的结点数，当网络结点很大时，距离矩阵中将存在大量的 0 元素和 ∞ 元素，这会占用大量的计算机内存。另一方面，尽管我们将一些同名站点归并为同一个结点，但该结点因为相对于不同的公交线路，因此要把它赋予不同的权值标示它所代表的不同车次线路。这需要在大型数组的基础上建立动态链表，增大了数据结构建立的难度。

2) 计算时间过长：为了克服 Dijkstra 算法的缺陷，完成公交网络的线路选择，就需要在结点间进行循环反复的比较过程，如果没有限制最大换乘次数的话，为保证最终答案的正确性，需要遍历整个网络全部的结点来寻找最短路径，这个计算量是很大的，实现起来基本上不可能；而如果限制最大换乘次数，则需要判断最多换乘多少次时就基本会使所有站点都达到，计算平均换乘次数的可达距阵也需要进行距阵乘积计算，对于这种大型距阵的乘积计算需要相当长的时间，普通 PC 无法或者需要很长时间才能完成，因此 Dijkstra 算法不适用于公交网。

3) 核心思想不适用公交网：Dijkstra 算法的核心思想是优化问题中的贪心技巧，在每一步选择局部最优解以期望得到全局最优解。而作为公交网络，它的某些特性决定了算法不适用于公交网络：

- 连通性：城市道路网络的道路连通是真实存在的，其道路和交叉点都真实地反映了该条道路的走向和与其他道路的交点。然而城市公交网络的的连通性存在着一定差异：多条公交线路可能在空间上形成了连通，在现实情况下可能需要换乘才能实现道路的连通；有些公交线路在空间上形成了交叉，在实际交点可能不存在车站，因此并不连通；有些公交线路可能在空间上都不连通，但通过不同点之间步行连通。因此，贪心技巧在解决工交网络道路选择上其实是无法成立的。

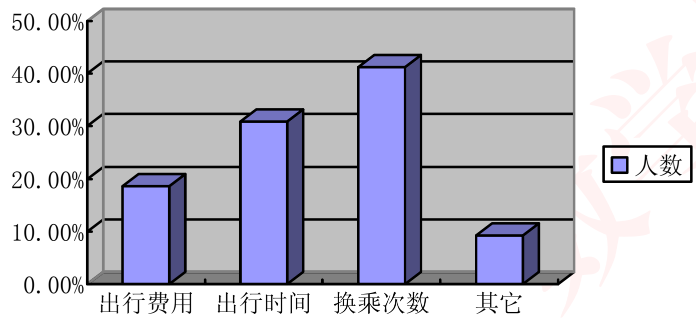
- 最短路径的意义：公交网络的最短路径与道路的最短路径意义并不相同：道路的最短路径指两点间的物理上的最短距离；公交网络的最短路径的意义并不是物理上的距离最短，而是考虑时间或者票价最少的最优路径。因而对于每一步的局部最优解，在下一步运算时不一定能够得到全局最优解。出车的时间，费用以及换乘时的时间，因换乘而费用的变化，会使某些在局部并未是最优的选择成为的全局的最优选择。

- 人文性：北京的奥运会，是人文的奥运会。从我国的政策上说，人民的利益也是高于一切，所以公交线路的选择也要以人为本，从而线路选择的目标就是要满足广大公交乘客的需求，从而追求顾客总利益最大化。乘客不会追求距离最短而随意换车，因为换乘是费时又费力的，如果换乘车站不在同一个地方，还需要一段步行距离，这是不符合我们实际的乘车习惯的。

我们参照了全国的一个公交乘客心理调查统计[4]，主要是以上三个方面对乘客做

的一个调查，调查显示：图表 1 有 30.93%的乘客选择出行时间，有 18.60%的乘客选择出行费用，而有将近 41.16%的乘客选择了换乘次数少。同时，考虑到奥运会阶段，届时会有大量观众前来观看比赛，如果经常换站，导致在站点有大批量人员滞留，会使不安全因素增加，所以应该减少换站次数。

因此，我们可以以换站次数最少为先决条件，选择出行耗时或票价费用的最优路径，因此建立优化的模型二。同时，我们也可以将换乘次数与另外两个因素协调重要性的比例，使两方面同时作用模型，这样可以避免换乘次数过于影响策略，使得全局解失去优化性，这个会在后面的模型扩展中做更多的扩展。



图表 1 公交乘客心理调查统计图

2. 模型二 基于换乘次数最低的公交线路模型

2.1 模型建立

设从站点 i 到站点 j 的所有满足直达的路径中，找出或时间最少，或费用最少，或时间和费用综合考虑最优路径，定义为 Between[i][j]，初始化为∞。$change_n[i][j]$ 为从站点 i 到站点 j 换乘 n 次最优路径，若无，返回 NULL；

设从起始站点 start 到目的站点 end 的最优路径为 BestPath。换乘次数为 n，其所能接受的最大值为 max，所有站点组成的结点集为 V。
以换乘次数最少为条件建立如下模型：

$$n = 0;$$
$$while(change_n = NULL)$$
$$\quad n=n+1;$$
$$BestPath = change_n;$$

其中 $$Change_n = Min\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{n} Between[v_{k,start}, v_{k,end}] \\ s.t \quad \left\{\begin{array}{l} n = 0,1,2\ldots,\max \\ v_{k,start}, v_{k,end} \in V \\ v_{0,start} = start, v_{\max,end} = end, v_{i,end} = v_{i+1,start} \end{array}\right. \end{array}\right\}$$

2.2 模型分析

通过对模型一缺陷的分析，我们发现：追求换乘次数最少相对于时间和票价这些出行因素更为重要的，它更适用于现实生活中的公交线路选择，因此建立基于换乘次数最低的公交线路模型。即以换乘次数最少为前提，然后再追求时间或票价的最优路径。

我们将模型二分为几个阶段，首要阶段，寻找起始站和目的站间可直达的最优路径，如果找到了，就不再考虑换乘的情况，即便换乘有可能出现耗时更短或者费用更低的路线，也不被考虑；第二阶段，在找不到直达的情况下，寻找起始站和终点站间换乘一次可到达的最短路径，一旦找到，也不再考虑倒两次和两次以上的情况，第三阶段，就是继续增加中途换乘结点，按同样的方法继续搜索，直到找到换乘次数最少的最优路径为止。从实际出发，人们心理能够承受的最多换乘次数不宜过大，而且换乘次数越多，算法的计算量越大，时间越长，因此我们只考虑换乘次数不超过三次的情况。

2.3 算法：

第一步：

1） 输入起始站点 start 和目的站点 end；

2） 找出起始站点所在的所有车次的集合 bus1 和目的站点所在的所有车次的集合 bus2；

3） 判断 bus1 和 bus2 是否有相同的车次，如果有，则为直达路线，计算每条直达路径所需要的时间或者费用，然后在这些直达路径中寻求最优的路径，输出结果；如果没有，进入下一步；

以上三步成立一个求两站点 i，j 间最优直达路径 Between[i][j]的函数，到此我们可以直接调用该函数求得 Between[i][j]。

第二步：

对于所有站点的每一个站点，通过上面的函数判断该点与起始结点间、该点与目的结点间是否同时存在最优直达路径，如果有，则该站为转乘一次的中转站点。找出所有这些需要转乘一次的路径，分别计算所需要的时间或者费用，然后找出最优路径的车次，输出结果；如果没有，则进入下一步；

第三步：

在所有站点中任选两个站点 A，B，通过上面的函数判断在 A，B 点间、A 点与 start 点，以及 B 点与 end 点间是否同时存在最优的直达路径，如果有，计算符合条件的路径所需要的时间或费用，然后在所有选择中找出最优总路径；

如果没有，则说明这两个站点间至少要换乘四次才能到达，超出我们的假设，因此不做考虑。

根据以上算法，将 $change_n$ 细化为：

$$Change_n=\begin{cases} Between[start][end] & n=0; \\ Min\left\{ \begin{array}{r} Between[start][i]+Between[i][end] \mid i\in V, \\ start,end,i\text{两两不相等} \end{array} \right\} & n=1; \\ Min\left\{ \begin{array}{r} Between[start][i]+\ldots+Between[j][end] \mid i..j\in V, \\ start,i...j,end\text{两两互不相等} \end{array} \right\} & 2\le n\le \max\text{。} \\ & \max=3 \end{cases}$$

2.4 模型求解:

2.4.1 对问题一进行求解:

求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线。

(1)、S3359→S1828　　(2)、S1557→S0481　　(3)、S0971→S0485

(4)、S0008→S0073　　(5)、S0148→S0485　　(6)、S0087→S3676

我们根据最优路径的定义，分别求出了出行时间、出行费用以及出行时间，出行费用共同作用三种结果：

结果一：最短时间路径

组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）	换乘次数	最佳路线	总行程路费（元）
(1)	S3359→S1828	101	1	L436→S1784(换乘站)→L167	3
(2)	S1557→S0481	106	2	L084→S1919→L189→S3186→L460	3
(3)	S0971→S0485	128	1	L013→S2184→L417	3
(4)	S0008→S0073	83	1	L159→S0291→L058	2
(5)	S0148→S0485	106	2	L308→S0036→L156→S2210→L417	3
(6)	S0087→S3676	65	1	L454→S3496→L209	2

结果二：最少费用路径

组号	起始站点和目的站点	总行程路费（元）	换乘次数	最佳路线	总行程最短时间（分钟）
(1)	S3359→S1828	3	1	L469→S0304→L217	137
(2)	S1557→S0481	3	2	L084→S0978→L047→S2717→L460	157
(3)	S0971→S0485	3	1	L119→S0872→L417	149
(4)	S0008→S0073	2	1	L159→S0291→L058	83
(5)	S0148→S0485	3	2	L308→S0036→L157→S1406→L045	121
(6)	S0087→S3676	2	1	L454→S1893→L209	71

结果三：综合因素= 时间因素×0.7+费用因素×0.3

组号	起始站点和目的站点	换乘次数	最佳路线	总行程路费（元）	总行程最短时间（分钟）
(1)	S3359→S1828	1	L436→S1784→L167	3	101
(2)	S1557→S0481	2	L084→S1919→L189→S3186→L460	3	106
(3)	S0971→S0485	1	L013→S2184→L417	3	128
(4)	S0008→S0073	1	L159→S0291→L058	2	83
(5)	S0148→S0485	2	L308→S0036→L156→S2210→L417	3	106
(6)	S0087→S3676	1	L454→S3496→L209	2	65

2.4.2 模型二的结果分析：

- 三个结果的对比分析：结果一和结果二表明：当以最少费用为分析因素时，总行程的时间受到了一定影响，结果二比结果一的行程时间增加了很多。然而，以最少时间为分析因素时，得到的总行程费用基本没有影响，可以看到结果有一与结果二的行程费用是相同的。通过这个比较，可以得出时间比费用对路径的影响大，考虑最少时间的最优路径对于实际情况来说，更为合理[5]。结果三正好验证了这个结论，可以看到，结果三在把时间、费用综合考虑的时候，将时间

- 模型二适用于该公交网络，而且大部分结果的换乘次数都在 2 次之内，符合现实公交乘客换乘的心理；在费用方面，2-3 元的出行价格也符合现实乘客所能接受的价位，因此在这两方面，该模型是可行的。

- 基于换乘次数的模型二，使得三种结果的换乘次数均相同；

- 模型二的算法尽管已化简，但仍然存在耗时长的缺陷：当换乘次数在 3 次时，算法运行时间会大大增大；

- 总行程的时间还是很长，在以换乘次数为前提的情况下，对数据的优化有一定的限制。

2.5 模型扩展

2.5.1 模型二改进方案分析：

模型二是以换乘次数最少为前提寻找最优路径的，即一但找到换乘次数少的局部最优路线，就不再考虑换乘次数多的可能会是全局的最优路线。然而，在实际情况中，换乘 1 到 2 次对于公交乘客来说，还是有可能被接受的，特别是在时间或者票价方面会有很大优势的情况下，公交乘客可能更愿意接受换乘。因此，限定一个公交乘客对于换乘次数能够接受的极限值，在这个极限值以下的换乘次数，如果可以达到局部最优解的话，顾客接受换乘；如果在这个值以上的换乘次数，即便票价和时间再减少，顾客也不会接受换乘。

2.5.2 改进模型的建立

$$BestPath = Min\{change_n | n = 0,1...\max\}$$

$$Change_n = \begin{cases} Between[start][end] & \text{n=0；} \\ Min\left\{\begin{array}{r} Between[start][i] + Between[i][end] \mid\ i \in V, \\ start, end, i\text{两两不相等} \end{array}\right\} & \text{n=1；} \\ Min\left\{\begin{array}{r} Between[start][i] + ... + Between[j][end] \mid\ i..j \in V, \\ start, i...j, end\text{两两互不相等} \end{array}\right\} & 2 \le \text{n} \le \max\text{。} \end{cases}$$

在一定换乘次数极值条件下的最优路径，即局部最优路径。该模型以模型二为基础，将直达路线，以及在顾客所能接受的换乘次数下的所有路线都搜索出来，然后在这些路线中寻找最优路径。

2.5.3 算法：

1） 输入起始站点 start 和目的站点 end；

2） 找出起始站点所在的所有车次的集合 bus1 和目的站点所在的所有车次的集合

bus2；

3） 判断 bus1 和 bus2 是否有相同的车次，如果有，则为直达路线，计算每条直达路径所需要的时间或者费用，然后在这些直达路径中寻求最优的路径；

以上三步成立一个求两站点 i,j 间最优直达路径 between[i][j]的函数，以上三步成立一个求两站点 i，j 间最优直达路径 between[i][j]的函数，到此我们可以直接调用该函数求得 between[i][j]。

4） 对于所有站点的每一个站点，通过上面的函数判断该点与起始结点间、该点与目的结点间是否同时存在最优直达路径 between[i][j]，如果有，则该站为换乘一次的中转站点。找出所有需要转乘一次的路径，分别计算所需要的时间或费用，在这些直达路径中寻求最优的路径.

5） 在所有站点中任选两个站点 A,B,通过上面的函数判断该 A,B 点间、A 点与 *start* 点，以及 B 点与 *end* 点间是否同时存在最优直达路径，如果有，则计算该路径所需要的是或者费用，再在所有这些选择中比较出最优总路径；

6） 如果没有，则继续增加结点，使用同样的方法继续搜索路径，直到超过乘客所能接受的最多换乘次数后停止；

7） 比较通过以上各步得出的所有最优路径，再次比较时间或者费用，从而找出总体最优的路径。

2.5.4 扩展模型对问题一的求解：

结果四：最短时间路径（允许最高换乘次数 max =3）

组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）	换乘次数	最佳路线
(1)	S3359→S1828	73	2	L324→S1746→L027→S1784→L167
(2)	S1557→S0481	106	2	L084→S1919→L189→S3186→L460
(3)	S0971→S0485	106	2	L013→S1609→L140→S2654→L469
(4)	S0008→S0073	67	2	L198→S3766→L296→S2184→L345
(5)	S0148→S0485	106	2	L308→S0036→L156→S2210→L417
(6)	S0087→S3676	46	2	L021→S0088→L231→S0427→0L97

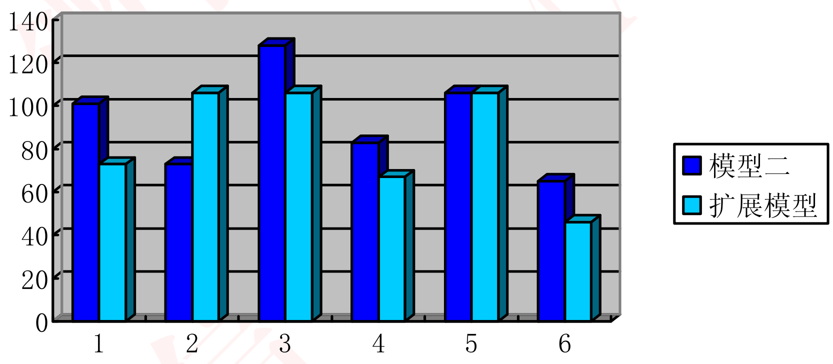
结果五：换乘次数 n=3 时的最短时间路径
（由于计算时间太长，因此只选择了两组数据进行计算）

组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）	换乘次数	最佳路线
(2)	S1557→S0481	132	3	L457→S1920→L233→S0715→L212→S3409→L460
(5)	S0148→S0485	120	3	L308→S0036→L156→S0497→L470→S0053→L450

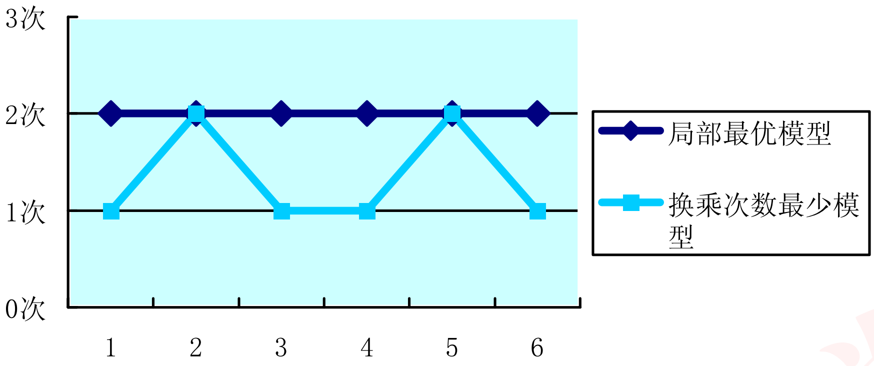
2.5.5 结果分析和模型评价

结果四与结果一的对比（模型二的解与扩展模型的解的对比）：

组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）		换乘次数		最佳路线	
		模型二	扩展模型	模型二	扩展模型	模型二	扩展模型
(1)	S3359→S1828	101	73	1	2	L436→S1784→L167	L324→S1746→L027→S1784→L167
(2)	S1557→S0481	106	106	2	2	L084→S1919→L189→S3186→L460	L084→S1919→L189→S3186→L460
(3)	S0971→S0485	128	106	1	2	L013→S2184→L417	L013→S1609→L140→S2654→L469
(4)	S0008→S0073	83	67	1	2	L159→S0291→L058	L198→S3766→L296→S2184→L345
(5)	S0148→S0485	106	106	2	2	L308→S0036→L156→S2210→L417	L308→S0036→L156→S2210→L417
(6)	S0087→S3676	65	46	1	2	L454→S3496→L209	L021→00S88→L231→S0427→L097



图表 2 模型二和扩展模型的出行时间比较



图表 3　模型二和扩展模型的换乘次数比较

模型二和扩展模型的对比分析：

1） 与模型二的结果相比，图表 3 可以看到扩展模型中每种情况都需要换乘 2 次，而模型二中有一半以上的情况都只需换乘一次。

2） 由换乘次数带来的不同，必然会影响到出行时间解的优化，根据图表 2 可以看到，扩展模型所耗费的时间也明显小于模型二，最大的时间差距甚至有 30 分钟，根据实际情况，30 分钟能够使公车乘客多换乘一次，因此，这个扩展模型在时间上相比模型二明显是优化的。

结果四与结果五相比：

组号	起始站点和目的站点	总行程最间（分钟）		换乘次数		最佳路线	
		结果四	结果五	结果四	结果五	结果四	结果五
(2)	S1557→S0481	106	132	2	3	L084→S1919→L189→S3186→L460	L457→S1920→L233→S0715→L212→S3409→L460
(5)	S0148→S0485	106	120	2	3	L308→S0036→L156→S2210→L417	L308→S0036→L156→S0497→L470→S0053→L450

结果四与结果五的对比分析和推测：

1） 根据有限的对比数据，推测换乘次数大于 2 的最优路径不一定比换乘次数小于等于 2 的好，这与现实情况相符，换乘次数越多，路径越不优；

2） 鉴于三次换乘计算时间过长，优化结果不理想，且大多数车站换乘 2 次均可到达，因此也可以推测，将最大换乘次数判断为 2 最优。

3.　由问题二提出的模型三

3.1 模型分析

同时考虑地铁和公汽线路时，在对于最优路径的选择时，我们始终都考虑从起始点到目的点的路径中，时间消耗最少的，或是票价最少的，或是时间和票价综合考虑最优的路径。由于在前面的问题中，已经分别讨论了这三种情况，为方便模型讨论，我们在问题二中重点考虑时间消耗的问题。

在实际的线路中，两站点之间搭乘公汽往往要花费比地铁更长的时间，因此应该尽可能地利用地铁的优势减少行程时间。另外，考虑到实际情况，乘客乘坐地铁，一般不会换乘几次公汽，再坐地铁，因此，此模型中不会出现公汽间的换乘，并且公汽与地铁之间换乘也不会超过两次。

根据以上对于地铁的分析，需要建立新的模型，并通过对分析中的约束条件来简化模型。

约束 1：当我们乘坐地铁时，应该充分利用其速度快的优势，因此，我们应该尽早进入地铁，并最晚出地铁。

约束 2：乘客乘坐地铁，总路径最多允许两次不同交通工具间的换乘，地铁入口出口各自最多允许一次与公交的换乘，即只允许：1）公汽→地铁→公汽；2）地铁→公汽；3）公汽→地铁 三种情况。如果不满足约束 2 的这两个条件，就不考虑地铁。

3.2 算法

设 in 为进入地铁的站号，out 为出地铁的站号，$subway[in][out]$ 为从地铁入站点 in 到地铁出站点 out 的最优地铁路径；

定义函数 $X(i)=\begin{cases}\text{公交车站}i\text{附近的地铁站号}\neq 0 & \text{公交车站i附近有地铁}\\ 0 & \text{公交车站i附近没有地铁}\end{cases}$；

If $X(start)\neq 0$

$in = X(start);$

If $X(end)\neq 0$

$out = X(end);$

$BestPath = subway[in][out]$； //地铁直达路线

Else If Between[i][end] 存在且 out= $X(i)\neq 0$

$BestPath = subway[in][out] + Min\{Between[i][end]\}$； //地铁→公汽

Else 放弃地铁，进入模型二 公交线路查询系统；

Else if $X(end) \neq 0$

If $Between[start][i]$ 存在且 in= $X(i) \neq 0$

$BestPath = Between[start][i] + subway[in][out]$； //公汽→地铁

Else 放弃地铁，进入模型二 公交线路查询系统；

Else If $Between[start][i]$ 存在且 $Between[j][end]$ 存在且 $in = X[i] \neq 0, out = X[j] \neq 0$

If i=j

//通过地铁换乘，但不乘坐地铁，

$BestPath = Between[start][i] + Between[i][end]$；

Else

$BestPath = Between[start][i] + subway[in][out] + Between[j][end]$

//公交→地铁→公交

Else 放弃地铁，进入模型二 公交线路查询系统；

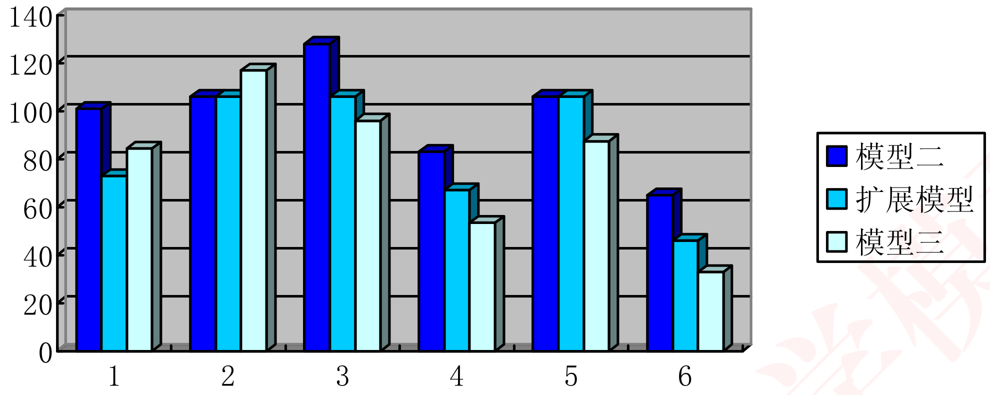
3.3 模型求解

对问题二的结果：

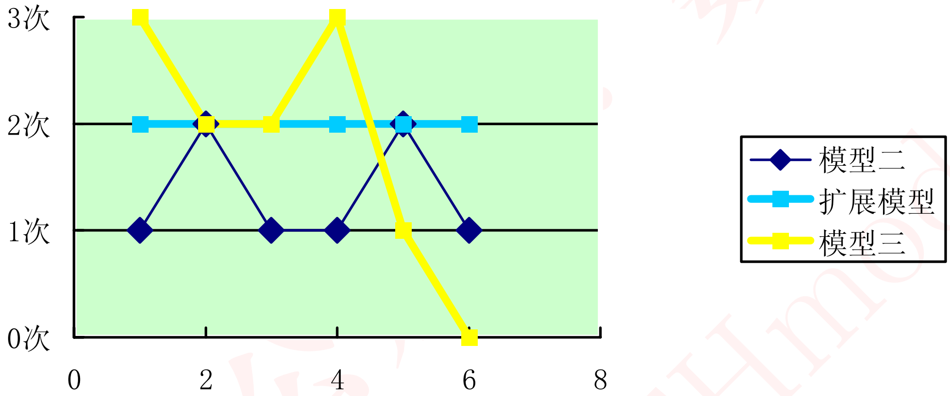
组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）	换乘次数	最佳路线
(1)	S3359→S1828	84．5	3	L15→S3068→D8→D38→S3262→L041
(2)	S1557→S0481	117．0	2	L84→S1919→D20→D24→S537→L516
(3)	S0971→S0485	96．0	2	L94→S567→D1→D21→S464→L104
(4)	S0008→S0073	53．5	3	L200→S2534→D15→D25→S525→L103
(5)	S0148→S0485	87．5	1	D21→S464→L104
(6)	S0087→S3676	33．0	0	D27→D36

问题二的模型与问题一中两个模型的比较：

组号	起始站点和目的站点	总行程最短时间（分钟）			换乘次数		
		模型二	扩展模型	模型三	模型二	扩展模型	模型三
(1)	S3359→S1828	101	73	84．5	1	2	3
(2)	S1557→S0481	106	106	117．0	2	2	2
(3)	S0971→S0485	128	106	96．0	1	2	2
(4)	S0008→S0073	83	67	53．5	1	2	3
(5)	S0148→S0485	106	106	87．5	2	2	1
(6)	S0087→S3676	65	46	33．0	1	2	0



图表 4 模型二，扩展模型，模型三的时间性能比较



图表 5 模型二，扩展模型，模型三的换乘次数比较

问题二与问题一的对比（地铁与公交线路的对比）：

1．图表 4 说明，地铁对提高出行时间有着很大的改善，尽管在 1，2 组中，时间反而呈现增长趋势，但在 3-6 组，可以但到时间有着明显的缩减。特别是第六组数据可以看出，当两个站点都在地铁附近时，时间大大缩减了。因此，对于模型二来说，模型三基本上能做到时间上的优势。

2．图表 5 说明，相对于模型二极其扩展模型，模型三的换乘次数还是比较多的，有一半的换乘次数超过模型二，有三分之一的换乘次数超过扩展模型。

3．结合图表 4 和图表 5，模型三虽然在换乘次数上分别有 50%和 33%的组超过了前两个模型，但模型三在时间性能上的表现更为优越，分别有 83.33%和 67.67%的组时间上要少于前两个模型。因此模型三体现了地铁的优势对于提高时间性能的最优路径。也说明了模型三的实用性。

综上所述，当初始点和目的点均靠近地铁站，或通过较小的乘车距离很快就可以到达地铁站时，此时乘坐地铁是最优选择，反之，乘坐地铁不一定是最优选择。

4. 针对第三问建立模型四：

4.1 模型分析：

在日常生活中，如果两个公交车站距离在人们心理能够承受的最大距离的范围内，人们就可以选择通过步行转换车站。

在前面的模型中我们建立了以换乘次数最小为基础的模型，但此模型中的换乘是指在同一站点进行换乘，即乘客下一辆车然后换乘到另外一辆，但实际中乘客可以下车后步行到邻近的一个站点再换乘另外一辆，这样的行程还有可能够减小换乘次数。

因此我们对前面的模型二进行改进：在求两个站点间的最优直达路径时，把乘客选择从一个站点步行到另一个站点的可能性考虑进去，从而建立模型四。

该模型需要补充的模型假设为：

假设所有的乘客步行速度相同为 v，乘客能够忍受的最远步行距离为 P，即只要两地之间的步行时间少于 P/v，如果通过步行可以简化换乘次数，则让乘客通过步行换车站。

4.2 模型建立：

需要补充的符号说明为：

$Between'[i][j]$:表示的是从站点 i 到站点 j 的最优直达路径，这里的最优路直达路径是指：从 i 直接坐车到 j，或者从 i 步行到 k 再从 k 直接坐车到 j,或者从 i 直接坐车到 k 再从 k 步行到 j,或者从 i 步行到 k 从 k 直接坐车到 r 再从 r 步行到 j，所有这些从 i 到 j 的路径中耗时最短的路径。其中 k,r 为异于 i，j 的任意站点。

其他的符号说明同模型二。

以模型分析为基础建立如下的模型：

$$BestPath = Change_n$$

$$Change_n = \begin{cases} Between'[start][end] & \text{n=0；} \\ Min\left\{ \begin{array}{r} Between'[start][i] + Between'[i][end] \mid i \in V, \\ start, end, i\text{两两不相等} \end{array} \right\} & \text{n=1；} \\ Min\left\{ \begin{array}{r} Between'[start][i] + ... + Between'[j][end] \mid i..j \in V, \\ start,i...j,end\text{两两互不相等} \end{array} \right\} & 2 \le \text{n} \le \max\text{。} \end{cases}$$

4.3 算法：

1） 输入起始站点 $start$ 和目的站点 end ；

2） 找出起始站点所在的所有车次的集合 $bus1$ 和目的站点所在的所有车次的集合 $bus2$；

3） 第一步：

- 判断 $bus1$ 和 $bus2$ 是否有相同的车次，如果有，则有直达路线，计算每个直达路线中起始站点到目的站点的路径，求出最优的路径并且记此最优路径的时间为 M1；

- 找出与 $start$ 点之间步行时间小于 P/v 的站点集合 T1，考虑 T1 中到 end 点有没有直达路径，如果有就将该直达路径的耗时与走到该点的时间相加得到该直达路径的时间总和，找到这些总和里最小值记为 M2；

- 找出与 end 点步行时间小于 P/v 的站点集合 T2，考虑 $start$ 点到站点集合 T2 中有没有直达路径，如果有就将该直达路径的耗时与走到该点的时间相加得到该直达路径的时间总和，找到这些总和里最小值记为 M3；

- 判断是否能从 T1 中的任一站点可以直接坐车到达 T2 中的任一站点，如果能则求出这样路径中耗时最少的，并记为 M4。

- 将 M1,M2,M3,M4 进行比较，取较小的路线做为输出结果，这样可以理解为是虽然有步行但是也达到了不换乘的效果。

以上过程就形成了 $Between'[i][j]$，即从站点 i 到站点 j 的最优直达路径。如果能找到这样的路径，则算法结束，否则进入下一步看是否能够通过换乘一次到达。

第二步：

对于所有站点，通过 $Between'[i][j]$ 判断该点与起始点和目的结点间是否都存在最优直达路径，如果有，则该站为换乘一次的中转站点。找出所有这些符合条件的中转站点，分别计算所需要的从起始站到目的站的总路径耗时，找出最优路径的车次，输出结果算法结束；如果没有，则进入下一步看是否能够通过换乘二次到达；

第三步：

任意找两个站点 i,j，通过 $Between'[i][j]$ 判断，如果从起始点到 i，从 i 到 j，从 j 到目的点均存在最优直达路径则站点 i 和 j 为换乘二次的中转站点，找出所有这些符合条件的中转站点，分别计算所需要的从起始站到目的站的总路径耗时，找出最优路径的车次，输出结果算法结束；

如果没有则说明在此模型下从起始点到目的点至少要换乘三次车，超出模型考虑的范围，在此不做输出。

4.4 模型评价：

此模型从实际情况出发，考虑到现实中当两个站点的距离比较近的时候，乘客可以通过步行换站点，相对与不考虑这种情况的模型，还有可能减少换乘次数，从而找到更优的路径。

给出了人们能够承受的最大步行距离的概念，但并不代表乘客可以任意从一个站点步行到另外一个站点，而只有当两个站点在一定距离内时乘客才会步行过去。

此模型没有考虑到在实际情况中有的乘客愿意步行的距离很大，有的很小，而只是简单的设了一个最大步行距离，因此可以把模型改进为把最大步行距离分为几级，然后对于每一级输出最优线路，由乘客自行选择。

对公交路线选择系统的建议

在实际情况中，公交路线的选择是十分灵活的，不能单单从某种角度来判断最优路径，应该从顾客看重的几个角度来寻找最优路径。而且对与满足条件的最优路径可能同时有几条，应该把这些最优路径提供给顾客，由顾客来选择。

公交路线选择系统应该设计的更为人性化，可以先给乘客提供几个固定角度的常用的最优路径，然后可以由乘客再选择自己看重的角度，这样乘客就可以根据自己的意愿来选择想走的路径。

因此这样的系统应该考虑的很全面，设计的很人性化，这样的系统才能满足人们的需求，才能应用于奥运会这种大需求的应用中。

参考文献

[1] 严蔚敏，吴伟民，数据结构（C 语言版，北京：清华大学出版社，2005。
[2] 郑汉鼎，刘家壮，运筹学，北京：高等教育出版社，2005。
[3] 王振军，王宁宁，李鸿，牛洪亮，基于邻接矩阵的公交换乘算法的研究，徐州工程学院学报，第 21 卷第 3 期：2006。
[4] 王建林，基于换乘次数最少的城市公交网络最优路径算，经济地理，第 25 卷第 5 期：2005

[5] 师桂兰，邓卫，葛亮，基于平均换乘的城市公交线网性能评价，洛阳大学学报，第 18 卷第 4 期：2003