乘公交，看奥运

国防科技大学：庞晨、蔡蕾、王璐璐

摘要

随着城市公交系统的发展，公众的出行越来越方便，但是面对错综复杂的交通网络，如何选择一条满意的出行路线成为越来越重要的问题。为了建立一个公交线路选择的自主查询系统，我们建立公交网络的图论模型来解决这一问题。考虑到*Dijkstra*算法的条件限制，我们改进了经典的*Dijkstra*算法来对这样的公交网络的线路选择进行规划。对于自动查询系统来说，为了使查询系统能够为需求各异的用户提供满意的出行选择路线，针对乘客的需求种类，确定讨论有现实意义的换乘次数，出行时间，出行费用这三种需求。而对这三种需求来说，我们的模型既考虑了乘客的单目标需求，又考虑了乘客的多目标需求。在单目标需求模型中我们分别针对三种需求进行求解，在多目标需求中我们考虑了有主次之分的多目标需求和有约束的多目标需求。对于问题 1 和问题 2 中的六对站点，我们得到以下结果（“/”前数据为无地铁结果，“/”后数据为有地铁结果）：

	换乘次数最少			出行时间最短			出行费用最少		
	换乘次数	时间/分钟	费用/元	换乘次数	时间/分钟	费用/元	换乘次数	时间/分钟	费用/元
(1)S3359→S1828	1/1	101/101	3/3	2/2	64/64	3/3	1/1	101/101	3/3
(2)S1557→S0481	2/2	106/106	3/3	3/3	99/99	4/4	2/2	106/106	3/3
(3)S0971→S0485	1/1	128/128	3/3	2/3	103/95	3/6	1/1	128/128	3/3
(4)S0008→S0073	1/1	83/83	2/2	4/3	59/53	5/8	1/1	83/83	2/2
(5)S0148→S0485	2/2	106/87	3/2	3/3	102/86	4/6	2/2	106/106	3/3
(6)S0087→S3676	1/1	65/33	2/4	2/1	46/33	3/4	1/1	65/49	2/1

针对问题三，由于没有相应的数据，我们计算各线路经过的站点数，联系实际，讨论出步行的加入可以使地理位置相距较近的站点之间不经过换乘车辆而到达，这样的结果使得换乘次数，出行时间和出行费用三个目标均减小。最后，通过大量测试其他站点之间的线路选择情况，得到整个公交网络的定性分析，可以用于指导实践。

[关键词]：最短路、*Dijkstra*算法、多目标优化、实时信息反馈。

一、问题重述

万众瞩目的第 29 届奥运会将于明年 8 月在首都北京举行，届时有世界各国的观众到现场观看比赛，其中大部分人将会乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）出行。如何使公众的出行更加通畅、便利，更方便快捷的选择一个满意的出行路线，从而在国际上造就一个良好的形象，成为一个非常关键的问题。

北京市的公交系统发展非常迅速，目前，公汽、地铁线路已达 800 条以上，形成一个错综复杂的交通网络。请你们根据公交线路及相关信息，以及不同的乘客需求，将公交线路模型化，使之能够根据乘客提出的要求进行最优解计算，给乘客出行路线提供指导。请你们解决一下问题：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用你们的模型与算法，求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）。

(1)、S3359→S1828　　(2)、S1557→S0481　　(3)、S0971→S0485

(4)、S0008→S0073　　(5)、S0148→S0485　　(6)、S0087→S3676

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3、假设又知道所有站点之间的步行时间，请你给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

因此针对不同乘客的需求，建立一个方便准确并且通用的公交线路查询系统，是我们要解决的首要问题。

二、模型假设

1．假设问题中设定的基本参数可以反映实际情况；

2．假设环线的运行情况如下：环线可以正反两个方向通行，但是在始发站和终点站必须换乘车辆，这一点符合北京环线运行情况；

3．模型中不考虑每条公交线的起始站的等车时间 3 分钟，若需要纳入考虑只需在起始站到终点站之间的时间上加上 3 分钟即可；

4. 假设同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘(无需支付地铁费);

5. 假设地铁之间换乘无需付费；

6. 假设乘客的需求:换乘次数，出行时间，出行费用均为越小越好。

三、符号说明

$t(time)$:乘客乘车到达目的地所花费的时间；

$c(\cos t)$:乘客乘车到达目的地花费的费用；

$fre(frequency)$:乘客乘车到达目的地需要换乘车辆的次数；

$G(V,E)(graph)$：公交线路模型图；
$s(start)$：起始站；
$des(destination)$： 终到站；
$P(path)$：路径；
$Ex(P)(\exp enditure)$：一条路径 P 上的总花费，可以用来表示 t,c 或者 fre，可以用 $Ex(e)$ 表示一条边上的路径；
$Lb(label)$：标号。

四、问题分析

这个问题显然是一个复杂的网络图论模型，但是用站点作为图的结点，用结点之间的边来表示站点之间的不同公交线路是很难将换乘的过程和分段计价的机制表示出来的。也就是说，需要建立这样一个网络模型，它要将换乘的过程包含在其中，并且还要具有分段计价的机制。这样就需要在原来的网络模型上进行一定的改进和丰富，使所有的信息和约束都毫不丢失的反映在模型中，然后再将要解决的问题进行转化，在现有的经典网络算法基础上结合这个问题的实际情况，给出这个各个问题的算法，最后根据算法写出程序，从而将问题解决。通过分析这个问题的特殊性，可以把一个站点拆分成若干个结点，每个结点表示一条线路经过该结点，换乘关系可以由这些扩展出来的结点之间的边来表示，只要再加一个结点将一个站点拆分成的结点统一成一个整体。这种处理既考虑了换乘的过程，又将站点统一成一个整体。在每条线路上的每一个站点，增加到它下面站点的边，用这些边表示分段计价的信息。这样，就可以进一步分析要解决的问题来设计算法，最终解决问题。在解决问题时，需要充分考虑客户的多方面需求，针对各种需求来给出供选的线路。具体来讲，既要满足有特别需求的乘客，又要面向广大乘客的一般需求，给出尽可能优的线路。然后可以针对问题，结合北京的实际情况，对该模型做更进一步的分析。下面是对题目的一些理解。

1. 需求分析

从实际情况考虑，乘客的需求是多方面的。在选择出行路线时，通常会考虑以下几种因素：“换乘次数”、“出行距离”、“出行耗时”、“出行费用”。由于没有给出“出行距离”，可以不将距离作为一项指标单独考虑。但是由于给出的“出行耗时”均为平均值，实际上就是距离的一种反映。那么下面就针对“换乘次数”、“出行耗时”、“出行费用”三项需求进行分析。

1） 首先，为乘客提供一个针对上述三种因素的较好的出行路线是非常现实而又重要的。在实际情况中，大多数乘客的需求是多方面的，可能是对单个目标的需求也可能对多个目标均有需求，如既希望换乘次数少，乘车时间较少，又希望能在上述两种需求满足下花最少的钱，对于一个实用的自动查询系统来说，满足乘客的不同需求是最重要的功能。因此针对乘客的多方面需求，给出一个既针对单个目标又能综合权衡各种因素的好的路线是很重要的。针对这样的目的，自动查询系统需要满足以下三种情况：第一：针对单一目标进行线路的规划，第二、根据乘客对三种需求的程度大小，分主次满足乘客的三种需求，第三：要能够解决在乘客提出一定约束的条件下给出一个满足乘客需求

的线路。对于第二、第三种情况来说，在现实社会还是比较常见的，例如，一个行动不便的老年乘客希望三种需求都得到满足，但最重要的是考虑到方便问题，希望首先满足换乘次数最少，在这个前提下，能够节省时间尽快到达，最后，在上述两种需求达到的情况下希望选择一个最节约费用的路线。这属于第一种情况，根据不同的实际情况，三种需求的主次会发生变化。又如：乘客可能认为，自己最多可以忍受 3 次换乘次数，并需要在 60 分钟之内到达，在这两个约束条件下，寻求一个花费较小的满意的路线。这属于第二种情况。

2） 单目标需求的出行解决方案

现实生活中有一部分乘客，他们仅有特定的单方面需求。比如有的人希望出行方便，希望查询到一个换乘次数最少的出行路线。而有的人则希望在最短的时间内到达目的地，例如赶上看奥运会比赛等，他们希望出行耗时最少，而宁愿多花点钱或者选择中途转站。另外，还有的人会出于经济方面考虑，或者由于中国人所具有的勤俭节约的优良传统，或者临时身上没带足够的现金，因而希望能花最少的钱到达目的地。这些人在查询过程中只要求一种需求满足即可，其他方面不是最好的也可以接受甚至可以不顾一切代价希望达到需求。针对这一类乘客，我们的模型要为他们提供单一需求下的最优出行路线，以供乘客出行时参考。

在这种情况下，我们就可以单一分析各种需求情况。下图是对公交乘客出行心理分析图[1]。

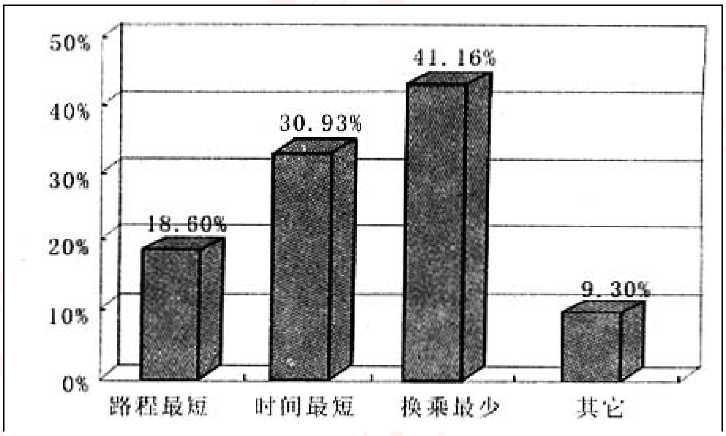

图 1：公交乘客出行心理分析

从图中可以看出，考虑换乘次数的人数最多，占到 41.16%。可见换乘次数是比较重要的一项指标。但人数还没有达到一半，因此，其他各种需求的考虑同样非常重要。

在模型中，我们将分别为要求换乘次数最少，要求出行耗时最少和要求出行费用最少三种不同的单一需求的乘客给出三个单一目标的最优解，从而给不同需求的乘客一个满意的出行线路。

3）在以上分析的基础上，很容易得知有的乘客有两方面的特别要求但第三种需求则不予考虑。因此模型也要能够解决这类乘客的需求。

针对上述需求分析，立足于从简单到复杂的求解过程，我们建立从单一目标求最优路线到综合考虑多种目标求出最优路线的模型，逐一进行求解。

2.关于算法的分析

经典的最短路径算法往往是基于广度优先搜索（BFS）的 *Dijkstra* 算法。但是，这个算法的使用是有一定条件限制的，即图上的边的权值必须满足线性可加的关系，也必须

满足动态规划的局部最优性与无后效性[2]。然而由于公交网络的特殊性，简单的套用最短路径的模型是不适宜的。原因如下：首先，在公交网络里，每一条路线上需要综合考虑几方面的因素（如时间，费用等），而且这些因素不能简单的进行线性组合，因而难以满足线性可加性；其次，由于公交线路模型中存在换乘问题，因此局部的最优解也不一定能够推出全局最优解，因而也就不能满足局部最优性和无后效性。

关于公交路线选择的问题，很多文献中都进行了一定深度的讨论。他们大多从调查到的乘客出行路线选择的心理出发（图 1），采用增加约束等形式简化模型。例如采用基于邻接矩阵的公交换乘算法，以公交线路作为顶点建立网络模型，并以线路公共点建边，利用邻接矩阵乘幂可以表示连通数的特点，计算两点之间的最短换乘次数[3]。然而该算法的约束条件过于严格，无法使用于规模较大的现实问题，例如满足乘幂特性的公交线路必须为双向的，如普通的线路以及环路。但是现实中很多公交线路是单向的，因此，这个模型并不能解决所有问题。其次，该模型将地理信息压缩到只剩下连通性与换乘信息，但是上面已经分析过，现实中乘客的需求是多方面的，因此这种模型不能满足乘客的特殊需求。

如果基于上述模型进行改进，如直接采用车站作为图上的顶点，利用直接可达的关系建立邻接矩阵，就可以使模型满足乘幂特性，利用已有的算法计算最短换乘次数[3]。然而考虑到该算法的时间复杂度过大（ $O(n^3)$ ），对于北京市的庞大的公交系统，n 的量级会达到 10^3 到 10^4 ，所以我们希望找到一个更好的算法。

经典的 Floyd 算法也是能解决此问题的一个方法，但从自动问路系统的时间要求来说，Floyd 算法的时间复杂度 $O(n^3)$ 过大，当然若事先计算好所有结果保存下来供查询也是可以的。

经典的 Dijkstra 算法的时间复杂度为 $O(n^2+m)$，其中 n 为顶点数，m 为边数，适用于稀疏图。因而我们考虑通过改造网络模型，使得在不损失信息的前提下，可以满足 Dijkstra 算法的使用条件。

3. 参数的选择

时间参数设定											
参数名	相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间)：	相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间)：	公汽站平均等车耗时：	公汽站平均换车步行耗时：	地铁站平均等车耗时：	地铁站平均换车步行耗时：	地铁换乘公汽平均等车耗时：	地铁换乘公汽平均换车步行耗时：	公汽换乘地铁平均等车耗时：	公汽换乘地铁平均换车步行耗时：	同一地铁站关联的不同公汽站间直达步行耗时：
参数值	3 分钟	2．5 分钟	3 分钟	2 分钟	2 分钟	2 分钟	3 分钟	4 分钟	2 分钟	4 分钟	8 分钟

表 1 时间参数

参数解释：

1） 平均等车时间＝平均换乘时间－平均步行时间。
2） 由于假设同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘(无需支付地铁费)，因而可以将换乘时间计为公汽站与地铁站间步行时间
3） 对于环线，根据对北京公交运营情况的查询，经过始发站／终点站时应记换乘一次。

票价参数设定					
参数名	单一票制	分段计价(0～20)	分段计价(21～40)	分段计价(41～)	站间换乘费用
参数值	1 元	1 元	2 元	3 元	0 元

表 2 票价参数

参数解释：
1） 站点之间的换乘包括同一地铁站对应的任意两个公汽站之间的换乘。
2） 对于数据的统计结果得知，所有的单一票制都为 1 元。
3） 对于环线，根据对北京公交运营情况的查询，经过始发站／终点站时应重新计费。

五、模型建立与求解

1、公交网络的图论模型

将实际的公交线路站点模型抽象成一个有向图 G（V，E），用图中结点 V 表示各个站点，边 E 表示各站点之间的公交路线。边的方向表示实际行车方向。由于现实中有三种公交路线，为了建立一个通用的模型，需要将这三种路线形式统一。这三种路线分别为：普通路线，环线和单行线。其中普通路线和环线，下行线是上行线的原路返回；单行线的下行线的站点不与上行线完全重合。如图 2。

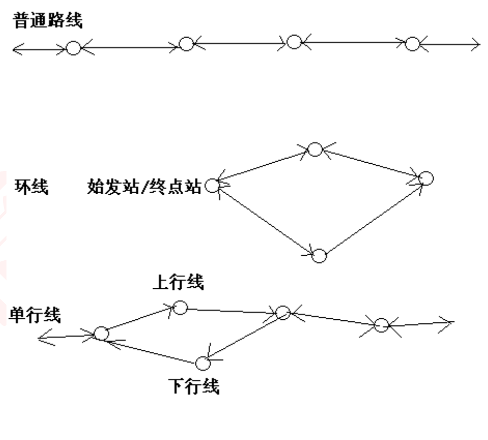

图 2 三种线路形式示意

由于单行线的存在，使得我们建立的网络模型必须为有向图。容易看出，普通路线

可以视为上行线与下行线重合的特殊的单行线。并且根据调查，环线除了始发站与终点站重合外，其运营方式与普通线路无异，即乘客如果通过始发站/终点站，必须换乘车辆。因此环线也可以视为特殊的单行线。这样，就可以将三种路线形式统一为一种形式，下面就可以只考虑单行线这种有向图。

为了使模型包含足够的信息，结点和边中必须具有合理的属性，即存放相应的信息。如 E 中包含 t（时间），c（费用），s（起点站），des（终点站）等信息，V 中包含站点类型（公汽站，地铁站）以及关联的边的集合。

由上面的分析可知，直接将现实中的公交网络映射成图论模型是不符合经典算法的要求的。直接从图中难以得到换乘信息，而换乘信息的遗失会造成无法满足局部最优性和无后效性。因此必须通过对网络模型的改造，在不损失信息的前提下，改造网络结构。在这里我们采用拆分结点的方法。由于一些路线采取分段计费标准，使得模型不满足线性可加性，因此我们采取添加有向边的方法。

①结点的拆分：

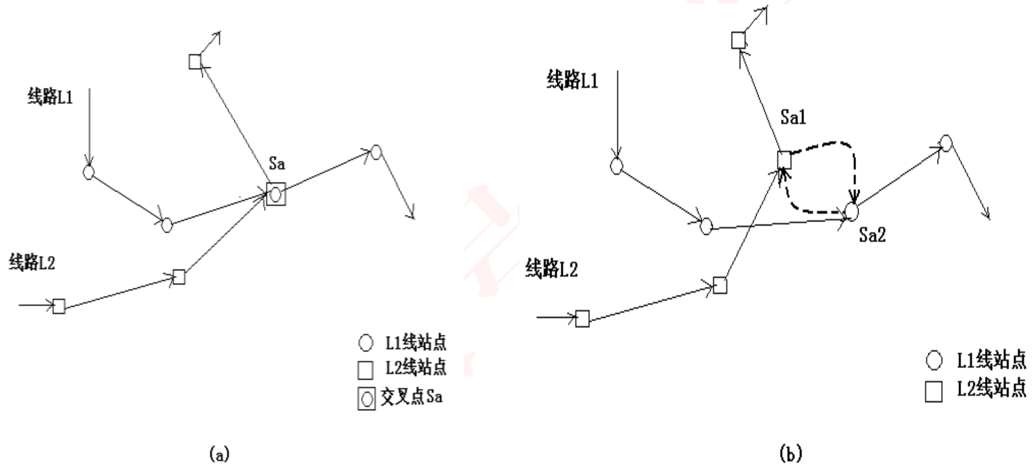

图 3 结点拆分图

如图 3。为了解决换乘问题，我们考虑将两条公交线路 L1 和 L2 的交叉点 Sa 拆分成两个结点 Sa1,Sa2。在这两个拆分出来的结点上建立两条虚边。在这两条边上，t=换乘花费时间，c=0，f=1。

②添加有向边：

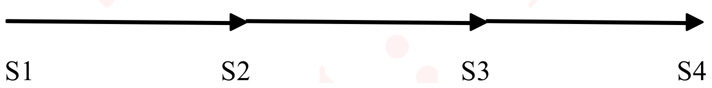

图 4 添加边之前的模型

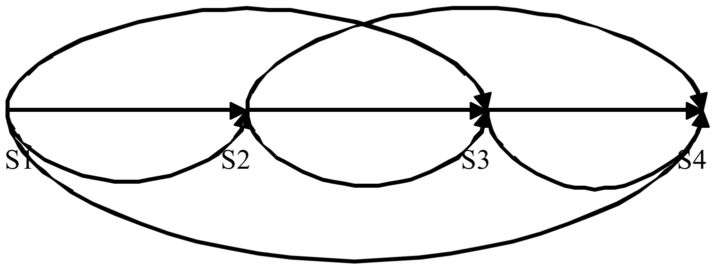

图 5 添加边之后的模型

如图 4 和图 5。为了解决分段计价问题，我们将原有的 4 个站点 S1，S2，S3，S4 两两之间都建立新的边，在这些边上记录起始结点到终止结点所经过的结点数，也就是乘客经过的站点个数。这样就可以解决分段计价的问题。

这样我们就建立了一个包含所有信息的网络图。并且使模型满足局部最优性，无后效性和线性可加性，从而可以使用经典的最短路径算法求解。

2、模型解决的算法。

我们的目标是由起点到终点找到一条最短路，使得该路径上总的耗费最小，即 Ex（P）最小。由于上述拆点，使得起点和终点不唯一，为了使问题清晰，我们增加一个虚拟的起点和虚拟的终点。以这个虚拟的起点为源点，向所有由起点拆分出来的点引有向边；从所有由终点拆分出来的点向这个虚拟的终点引有向边。这些边上的 Ex（e）都为 0。这样从目标上看这些点就是完全相同的点，从而就把该问题转化为单起点单终点的问题。

算法描述：

第一步、首先清空所有点的标号，然后标记起点为待考查点，标号 Lb(s)=0。

第二步：当终点未获取永久标号并且存在待考查点时，取出标号最小的待考查点 v，找出所有以 v 为起点的边 e(v,u)，如果 u 未被标记或者 Lb(u)>Lb(v)+Ex(e)，则更新 Lb(u)，使得 Lb(u)=Lb(v)+Ex(e)，并将 u 置为待考查点，标记 v 获得永久标号。

第三步：重复上面的步骤直到终点获取永久标号或者不存在待考查点为止。

Dijkstra 算法可以保证如果 Ex(P) 满足线性可加性，即如果 $P=P_1+P_2$ 则 $Ex(P)=Ex(P_1)+Ex(P_2)$（P_1,P_2 为路径，P_2 的起点为 P_1 的终点，P 为从 P_1 的起点到 P_2 的终点的一条路径。），和非负性，即对任意的 P，$Ex(P)\ge 0$，则在上面的过程中，当终点获得永久标号时，Lb(des) 即为所求的最优解。

3、问题 1—针对不同目标的解决方案和结果

3.1、换乘次数最少的解决方案和结果

在上面的图论模型中，定义所有路径边的 Ex(e)=0. 而所有换乘边的 Ex(e)=1。运用上述算法，则所得到的结果即为从起点到终点的换乘次数最少时的路线。考虑到仅考虑换乘次数最少时，如果不对时间和费用加以优化，得到的路线虽然换乘次数最少，但是另外两个需求指标的结果会比较差，因此下面的结果是在换乘次数最少的情况的，先考虑时间最少，再考虑费用最少所得到的结果。

输入题目中给出的 6 组起始站→终到站,运行程序结果如下，其中，方式包括从公交车站行走走到与之相邻的地铁站（用 walk 表示），还包括从一个公交站通过地铁通道到达另一个公交站（此时的用地铁站点表示连接两个公交站的地铁站）。

换乘次数最少的路线结果				
始发站→终点站	最少换乘次数	时间/分钟	费用/元	路线
(1)S0335→S1828	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3)S0097→S0485	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
(4)S0008→S0073	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L335(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
(5)S0148→S0485	2	106	3	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
(6)S0087→S3676	1	65	2	$S0087 \xrightarrow{L454(11)} S3496 \xrightarrow{L209(9)} S3676$

表 3 换乘次数最少的路线结果(仅考虑公汽路线)

3.2、出行耗时最少的解决方案和结果

在上面的图论模型中，定义所有路径边的 Ex(e)为从起点到终点所需的时间，而换乘边的 Ex(e)为换乘时间。运用上述算法，则可以得出从起点到终点的耗时最少的出行路线。仅考虑出行耗时最少时，如果不对换乘次数和费用加以优化，得到的路线虽然时间最少，但是另外两个需求指标的结果会比较差，因此下面的结果是在出行耗时最少的情况的，先考虑换乘次数最少，再考虑费用最少所得到的结果。

输入题目中给出的 6 组起始站→终到站,运行程序结果如下：

出行耗时最少的路线结果				
始发站→终点站	最少	时间/	费用	路线

	换乘次数	分钟	/元	
(1)S0033→S1828	2	64	3	$S3359 \xrightarrow{L474(1)} S2903 \xrightarrow{L485(16)} S1784 \xrightarrow{L217(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	3	99	4	$S1557 \xrightarrow{L363(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L091(11)} S0903 \xrightarrow{L514(2)} S0481$
(3)S0097→S0485	2	103	3	$S0971 \xrightarrow{L013(16)} S2517 \xrightarrow{L290(13)} S2159 \xrightarrow{L469(2)} S0485$
(4)S0008→S0073	4	59	5	$S0008 \xrightarrow{L198(2)} S1691 \xrightarrow{L476(5)} S2085 \xrightarrow{L017(1)} S0609 \xrightarrow{L328(3)} S0525 \xrightarrow{L103(2)} S0073$
(5)S0148→S0485	3	102	4	$S0148 \xrightarrow{L308(15)} S3604 \xrightarrow{L081(2)} S2361 \xrightarrow{L156(9)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
(6)S0087→S3676	2	46	3	$S0087 \xrightarrow{L206(1)} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{L097(1)} S3676$

表 4 出行耗时最少的路线结果(仅考虑公汽路线)

3.3、出行费用最少的解决方案和结果

在上面的图论模型中，定义所有路径边的 Ex(e)为从起点到终点所需要的费用，而换乘边的 Ex(e)为 0。运用上述算法，则可以得出从起点到终点的耗时最少的出行路线。考虑到仅考虑出行费用最少时，如果不对换乘次数和时间加以优化，得到的路线虽然出行费用最少，但是另外两个需求指标的结果会比较差，因此下面的结果是在出行费用最少的情况的，先考虑换乘次数最少，再考虑费用最少所得到的结果。

输入题目中给出的 6 组起始站→终到站,运行程序结果如下：

出行费用最少的路线结果				
始发站→终点站	最少换乘次数	时间/分钟	费用/元	路线
(1)S0033→S1828	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3)S0097→S0485	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
(4)S0008→S0073	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
(5)S0148→S0485	2	106	3	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$

(6)S0087→S3676	1	65	2	$S0087 \xrightarrow{L454(11)} S3496 \xrightarrow{L209(9)} S3676$

表 5 出行费用最少的路线结果（仅考虑公交路线）

3.4、结果分析

为了便于分析针对不同目标的最优线路，我们把上面的结果统一起来，如表 6。

始发站→终点站		次数	时间	费用	线路
(1) S0033 → S1828	次数最小	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
	时间最小	2	64	3	$S3359 \xrightarrow{L474(1)} S2903 \xrightarrow{L485(16)} S1784 \xrightarrow{L217(1)} S1828$
	费用最小	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2) S0155 → S0481	次数最小	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
	时间最小	3	99	4	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
	费用最小	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3) S0097 → S0485	次数最小	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
	时间最小	2	103	3	$S0971 \xrightarrow{L013(16)} S2517 \xrightarrow{L290(13)} S2159 \xrightarrow{L469(2)} S0485$
	费用	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$

	最小				
(4) S0008 → S0073	次数最小	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
	时间最小	4	59	5	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
	费用最小	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
(5) S0148 → S0485	次数最小	1	83	2	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
	时间最小	4	59	5	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
	费用最小	1	83	2	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
(6) S0087→S3676	次数最小	1	65	2	$S0087 \xrightarrow{L454(11)} S3496 \xrightarrow{L209(9)} S3676$
	时间最小	2	46	3	$S0087 \xrightarrow{L454(11)} S3496 \xrightarrow{L209(9)} S3676$
	费用最小	1	65	2	$S0087 \xrightarrow{L454(11)} S3496 \xrightarrow{L209(9)} S3676$

表 6 单一需求且仅考虑公汽路线的结果汇总（仅考虑公交路线）

下面将对各种线路给出评价：

如果要减少时间，往往会导致换乘次数的增加。例如(1)S3359→S1828 中，换乘次数最少的线路和时间最少的线路相比，换乘次数增加一次，出行时间减少了 37 分钟。可见对于只要求时间最短的乘客提供这样的出行路线非常好。以上 6 组数据均呈现这种

关系，但是有的时候，换乘次数增加带来的时间方面的减少体现的并不明显，例如：(5)S0148→S0485 中，换乘次数增加一次仅仅能使时间减少 4 分钟，这样一来，如果乘客仅要求时间最少，我们的查询模型将给乘客提供一个时间为 102 分钟，换乘次数为 3 次，费用 4 元的路线，比较另一条路线：时间为 106 分钟，换乘次数为 2 次，费用为 3 元。前一条路线虽然时间上是最少的，但是整体情况不如后者。

换乘次数减少的需求往往和费用的减少是一致的。例如(2)S1557→S0481 中，比较换乘次数最少的线路和时间最短的线路，换乘次数少了一次费用少了 1 元，这样就既使乘客减少换乘次数，由使费用较少。但是(1)S3359→S1828 中，仍然比较换乘次数最少的线路和时间最少的线路相比，换乘次数减少一次，费用并没有减少。这样可能是由于换乘次数较少但是乘客乘坐了分段计价的公交车，因此费用并没有减少。
如果要使费用减少，往往会使时间增加。(4)S0008→S0073 中，换乘次数最少的线路和时间最少的线路相比，时间减少了 24 分钟，费用增加了 3 元。这样就属于用花费较多来节约时间，对于对时间较少要求比较大的乘客是值得的。当然，也存在这样的线路，如(1)S3359→S1828 中，换乘次数最少的线路和时间最少的线路相比，虽然时间减少了，但费用并没有增加。

4、问题 2—公交+地铁解决方案和结果

地铁线的特殊之处在于一个地铁站点可以和多个公汽站点换乘，同时地铁路线本身又是一条独立的线路。因此必须在上述模型的基础上加入地铁线路的信息。由于地铁线路等价于普通的公汽路线和环线，因此可以用上述方法拆分地铁站点和添加地铁线路。对于和地铁站相互可以换乘的各个公汽站点，都生成一个新的结点来代替它们。在这些公汽结点与地铁站的拆分点之间建立地铁站与公汽站的通行边，这些边上 t=换乘花费时间，c=0，f=0。再在新的公汽结点之间建立通行边，这些边上 t=不进入地铁站而直接从一个公汽站点到另一个公汽站点所花费的时间，c=0，f=0。最后，由于与地铁站点可以换乘的各个公汽站点在加入考虑地铁路线前已经拆分出了很多点，所以现在新生成的点也要与来源相同的点之间建立换乘边，t=换乘花费时间，c=0，f=1。这样就可以把地铁线路的全部信息糅合进刚才的模型中去。

这样就可以利用与问题 1 同样的方法解出三种不同的单一目标的结果。

4.1、第二问结果

换乘次数最小的结果

换乘次数最小的路线结果				
始发站→终点站	最少换乘次数	时间/分钟	费用/元	路线

(1)S0033→S1828	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3)S0097→S0485	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
(4)S0008→S0073	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
(5)S0148→S0485	2	87.5	5	$S0148 \xrightarrow{L024(4)} S1487 \xrightarrow{walk} D02 \xrightarrow{T1(19)} D21 \xrightarrow{walk} S0464 \xrightarrow{L104(5)} S0485$
(6)S0087→S3676	1	33	4	$S0087 \xrightarrow{L021(1)} S0630 \xrightarrow{walk} D29 \xrightarrow{T2(8)} D36 \xrightarrow{walk} S3676$

表 7 换乘次数最少的路线结果（考虑公交路线和地铁路线）

出行耗时最少的结果

出行耗时最少的路线结果				
始发站→终点站	最少换乘次数	时间/分钟	费用/元	路线
(1)S0033→S1828	2	64	3	$S3359 \xrightarrow{L474(1)} S2903 \xrightarrow{L485(16)} S1784 \xrightarrow{L217(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	3	99	4	$S1557 \xrightarrow{L363(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L091(11)} S0903 \xrightarrow{L514(2)} S0481$
(3)S0097→S0485	3	95	6	$S0971 \xrightarrow{L013(16)} S2517 \xrightarrow{L290(13)} S2159 \xrightarrow{L469(2)} S0485$
(4)S0008→S0073	3	53.5	8	$S0008 \xrightarrow{L198(2)} S1691 \xrightarrow{L476(5)} S2085 \xrightarrow{L017(1)} S0609 \xrightarrow{L328(3)} S0525 \xrightarrow{L103(2)} S0073$
(5)S0148→S0485	3	86.5	6	$S0148 \xrightarrow{L308(15)} S3604 \xrightarrow{L081(2)} S2361 \xrightarrow{L156(9)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
(6)S0087→S3676	1	33	4	$S0087 \xrightarrow{L206(1)} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{L097(1)} S3676$

表 8 出行耗时最少的路线结果（考虑公交路线和地铁路线）

出行费用最少的结果

出行费用最少的路线结果				
始发站→终点站	最少换乘次数	时间/分钟	费用/元	路线
(1)S0033→S1828	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3)S0097→S0485	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$

(4)S0008→S0073	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L159(10)} S0400 \xrightarrow{L474(16)} S0073$
(5)S0148→S0485	2	106	3	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
(6)S0087→S3676	1	49	1	$S0087 \xrightarrow{D27} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{D36} S3676$

表 9 出行费用最少的路线结果（考虑公交路线和地铁路线）

4.2、结果分析

始发站→终点站		次数	时间	费用	线路
(1)S0033→S1828	次数最小	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
	时间最小	2	3	64	$S3359 \xrightarrow{L474(1)} S2903 \xrightarrow{L485(16)} S1784 \xrightarrow{L217(1)} S1828$
	费用最小	1	101	3	$S3359 \xrightarrow{L436(31)} S1784 \xrightarrow{L167(1)} S1828$
(2)S0155→S0481	次数最小	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
	时间最小	3	99	4	$S1557 \xrightarrow{L363(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L091(10)} S0902 \xrightarrow{L447(3)} S0481$
	费用最小	2	106	3	$S1557 \xrightarrow{L084(12)} S1919 \xrightarrow{L189(3)} S3186 \xrightarrow{L460(17)} S0481$
(3)S0097→S0485	次数最小	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
	时间最小	3	95	6	$S0971 \xrightarrow{L119(6)} S0567 \xrightarrow{walk} D1 \xrightarrow{T1(14)} D15 \xrightarrow{walk} S2534 \xrightarrow{L156(5)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
	费用最小	1	128	3	$S0971 \xrightarrow{L013(20)} S2184 \xrightarrow{L417(21)} S0485$
(4)S0008→S0073	次数最小	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L355(7)} S2263 \xrightarrow{L345(19)} S0073$
	时间最小	3	53.5	8	$S0008 \xrightarrow{L200(6)} S2534 \xrightarrow{walk} D15 \xrightarrow{T1(3)} D12 \xrightarrow{T2(2)} D25 \xrightarrow{walk} S0525 \xrightarrow{L103(2)} S0073$
	费用最小	1	83	2	$S0008 \xrightarrow{L159(10)} S0400 \xrightarrow{L474(16)} S0073$
(5)S0148→S0485	次数最小	2	87.5	5	$S0148 \xrightarrow{L024(4)} S1487 \xrightarrow{walk} D02 \xrightarrow{T1(19)} D21 \xrightarrow{walk} S0464 \xrightarrow{L104(5)} S0485$
	时间最小	3	86.5	6	$S0148 \xrightarrow{L024(4)} S1487 \xrightarrow{walk} D2 \xrightarrow{T1(13)} D15 \xrightarrow{walk} S2534 \xrightarrow{L156(5)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$
	费用最小	2	106	3	$S0148 \xrightarrow{L308(14)} S0036 \xrightarrow{L156(15)} S2210 \xrightarrow{L417(3)} S0485$

(6)S0087→S3676	次数最小	1	33	4	$S0087 \xrightarrow{L021(1)} S0630 \xrightarrow{walk} D29 \xrightarrow{T2(8)} D36 \xrightarrow{walk} S3676$
	时间最小	1	33	4	$S0087 \xrightarrow{L021(1)} S0630 \xrightarrow{walk} D29 \xrightarrow{T2(8)} D36 \xrightarrow{walk} S3676$
	费用最小	1	49	1	$S0087 \xrightarrow{D27} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{D36} S3676$

表 10 单一需求且考虑公汽路线和地铁路线的结果汇总与线路评价。

在加入地铁的情况下，各种线路之间换乘次数，出行时间，出行费用的关系与仅考虑公汽路线是大致相同的。地铁的加入使得线路中能够换乘地铁的线路中时间大大减小。比如(6)S0087→S3676，由于换乘地铁，使得换乘次数最少的那条路线的时间节省了 32 分钟，而换乘次数并未改变，仅费用多了 2 元，如果不对费用有特别的要求，地铁的加入使得线路更加优化。并且实际情况中，公汽路线更容易受到外界因素的影响，出现堵车等不可预测的情况，因此，乘坐地铁是一种比较好的方案。

但是，乘坐地铁往往使费用增加。比如(3)S0971→S0485，乘客希望时间最短，因此线路中途换乘地铁，但是线路中换乘次数增加了一次，费用增加了 3 元，而时间只节省了 8 分钟，从线路的整体情况来看，乘坐地铁的线路不见得比仅乘坐公汽的线路好。由于地铁站点与很多公汽站点可以换乘，乘客可以从地铁站点的通道通过，从而从一个公汽站点通过穿越地铁通道到另一个站点，例如：(6)S0087→S3676，$S0087 \xrightarrow{D27} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{D36} S3676$。这样的路线，换乘次数不变，费用减少了 1 元，时间减少了 16 分钟。可见地铁的通道给乘客提供了很大方便。

5、权衡多目标的出行路线方案

由于各种需求之间不具有实际意义上的可比性，所以不能简单地加权将多种因素糅合在一起。但是正如问题分析所述，人们所提出的多种需求往往有主次之分，因此我们下面建立这样的一个模型，根据乘客输入的查询需求以及不同需求的重要程度，按照先满足主要需求，进而满足次要需求的顺序，给出较好的出行路线。

5.1、有主次区分的目标解决方案

正如问题分析中所述，乘客提出的需求可以是有主次区分的多目标的形式，比如希望找到一条最优的路线，路线是否为最优的衡量标准是：在出发点到目的地的多条路线中寻找换乘次数最少的路线，这样的路线有很多条，在这些路线中，再进一步寻找出行时间最小的路线，从而使满足条件的路线范围减小，最后在这些路线中找到出行费用最少的路线。现实中有很大一部分人会提出这样的有主次区分的多目标问题。由于各个目标之间的简单线形加权不具有现实意义，为了解决这一问题，我们希望能够构造一个综合衡量多种目标的函数，用单一目标来模拟这种情况。

下面考虑乘客提出两个有主次区分的目标的解决方案。对于三个或三个以上有主次区分的目标的解决方案可以在两个的基础的修改参数得到。假设乘客的两种有主次区分的需求为 a、b，其中 a 的优先级，即重要程度大于 b。根据假设，a，b 的值越小越好（实

际问题也恰恰如此，如换乘次数 a 越少越好，出行时间 b 越小越好）。
a 的优先级大于 b 的优先级可以用数学语言这样描述：只要有 $a_1 < a_2$ 时，客户会优先选择目标 $a = a_1$ 的路径。而当 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 < b_2$ 时，客户会优先选择目标 $b = b_1$ 的路径。

算法设计和实现中，我们引入函数来模拟乘客的这种有主次优先之分的多目标需求，设该函数为 $f(a,b)$，那么路线的优劣就可以用 f 来模拟表示，即 f 越小路线越优。对于 $f_1(a_1,b_1) < f_2(a_2,b_2)$ 中，客户会优先选择目标 $f = f_1$ 的路径。那么 $f_1(a\ ,b\ )$ 必须满足这样的性质：

性质一：（a 的优先级高于 b）当 $a_1 < a_2$ 时，无论 b_1, b_2 关系如何，总有 $f(a_1,b_1) < f(a_2,b_2)$。
性质二：（a 相同的情况下，b 越小的路线越好）当 $a_1 = a_2$ 时，如果 $b_1 < b_2$，则 $f(a_1,b_1) < f(a_2,b_2)$。
性质三：（函数可以用来模拟这种需求的条件）任何一个满足性质一和性质二的函数都可以模拟乘客的需求。

取 $y = \delta a + b$ 可以用来模拟这种需求，这里并非线性加权，y 的大小反映的是路线的好坏。下面我们对上述取 $y = \delta a + b$ 进行说明：

由于现实中的需求往往是离散的，例如时间，费用等，所以一定有：对于需求 a，$\exists \varepsilon$, 使得对于 $\forall a_1, a_2$ 如果 $a_1 \neq a_2$，一定有 $\varepsilon < | a_1 - a_2 |$。又由于现实中的需求都是有界的，因此对于需求 b，$\exists M$, 使得对于 $\forall b$，都有 $M > | b |$。

任取 $\delta > \dfrac{M}{\varepsilon}$，则有 $\delta\varepsilon > M$。设 $y = \delta a + b$，则 y 满足性质一，性质二。证明如下：

证明：
如果 $a_1 > a_2$，无论 b_1, b_2 关系如何，总有：

$$y(a_1,b_1) - y(a_2,b_2) = (\delta a_1 + b_1) - (\delta a_2 + b_2) = \delta(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) > \delta(a_1 - a_2) - M > \delta\varepsilon - M > 0$$

如果 $a_1 = a_2$，$b_1 > b_2$，总有：

$$y(a_1,b_1) - y(a_2,b_2) = (\delta a_1 + b_1) - (\delta a_2 + b_2) = \delta(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = 0 + (b_1 - b_2) > 0$$

因此，由性质三，函数 $y = \delta a + b$ 可以作为需求函数模拟乘客的需求。而且这个函数满足线性可加性和非负性。因此可以用 $y = f(a,b)$ 来作为上述单一需求模型中的需求变量。其结果是能够如实地反映出顾客的多种需求的。算法实现中就是通过对 δ 值得选取将这种主次优先的多目标问题转换为单目标的问题。
结果如下：

考查 $S1325 \to S2175$，在不引入地铁线的前提下：

不引入地铁线时各优先级关系下所得最优路径				
优先级关系	最优路径	最短到达时间/分钟	换乘次数/次	通行费用/元
$t > c > fre$	$S1325 \xrightarrow{L445(4)} S0128 \xrightarrow{L308(5)} S0036 \xrightarrow{L023(1)}$ $S0618 \xrightarrow{L290(7)} S0992 \xrightarrow{L475(4)} S1787 \xrightarrow{L428(7)}$ $S3230 \xrightarrow{L504(6)} S2175$	132	6	7

$c>t>fre$	$S1325 \xrightarrow{L445(4)} S0128 \xrightarrow{L427(12)} S2027 \xrightarrow{L201(19)} S1243 \xrightarrow{L504(17)} S2175$	171	3	4
$fre>c>t$	$S1325 \xrightarrow{L445(4)} S0128 \xrightarrow{L038(39)} S0218 \xrightarrow{L504(15)} S2175$	184	2	4

表 11 不引入地铁线时各优先级关系下所得最优路径

考查 $S1325 \to S2175$，引入地铁线后：

引入地铁线时各优先级关系下所得最优路径				
优先级关系	最优路径	最短到达时间／分钟	换乘次数／次	通行费用／元
$t>c>fre$	$S1325 \xrightarrow{L445(1)} S3259 \xrightarrow{L055(2)} S0302 \xrightarrow{walk} D3 \xrightarrow{T1(9)} D12 \xrightarrow{T2(3)} D24 \xrightarrow{T2(3)} D37 \xrightarrow{walk} D1961 \xrightarrow{L428(8)} S3230 \xrightarrow{L504(6)} S2175$	119.5	6	13
$c>t>fre$	$S1325 \xrightarrow{L445(4)} S0128 \xrightarrow{L427(12)} S2027 \xrightarrow{L201(19)} S1243 \xrightarrow{L504(17)} S2175$	171	3	4
$fre>c>t$	$S1325 \xrightarrow{L445(4)} S0128 \xrightarrow{L038(39)} S0218 \xrightarrow{L504(15)} S2175$	184	2	4

表 12 引入地铁线时各优先级关系下所得最优路径

因此这样的查询系统就可以根据乘客输入的多种目标的优先级顺序，给出一个满足乘客需求的最优解。

5.2、有约束的目标解决方案

如问题分析中需求分析所述，存在很多乘客提出这种形式的需求：对一种需求提出一个上限（如在换乘次数不超过 n 次的忍耐程度下），希望另一种需求也达到最优（如时间较少）。下面，我们建立这样一个能解决在乘客提出约束条件下给出满足乘客需求的路线的模型仍然只假设乘客有两种需求，分别为 a，b。现在，乘客提出约束 $a \le a_0$，并希望得到的路线中 a，b 均较小。

显然，对于每个给定的 a，可以得 b 的一个解区间 D。显然，a 的约束越严格（即a 越小），b 的解区间会相应的越小。如图 6：

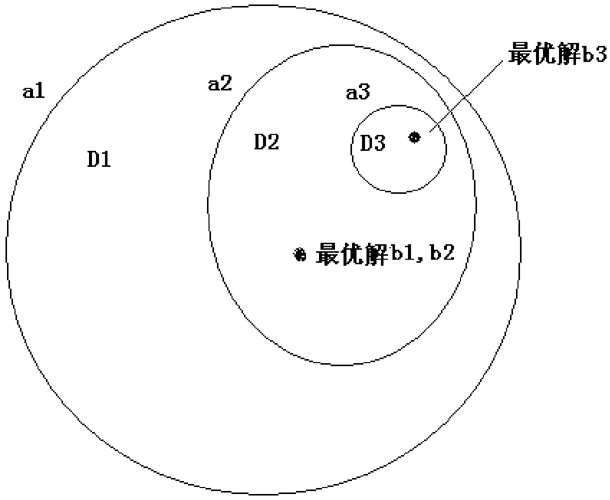

图6

其中，约束条件：a1>a2>a3,b 的相应解区间为 D1>D2>D3，b1,b2,b3 分别为相应区间里的最优解，如图位置所示。

可见，有两个方面的原因使得我们不能简单的取乘客的约束 $a=a_0$，再计算此时的 b 值。一：不一定从乘客提供的起始站到终点站之间存在这样的一条线路，使得恰好该线路上有 $a=a_0$；二：如上图所示，可能 a 取值减小一些，仍能得到相同的 b 的最优解，这样一来，若约束为 $a \le a1$，最优解将不为 $(a1,b1)$，而为 $(a2,b2)$。

假设最优解 b 与约束条件 a 存在这样的函数关系 $b=h(a)$，由上面分析可知，这个函数具有单调递减的趋势，函数趋势图如图 7，但图形并不能表示变量之间变化率的关系。

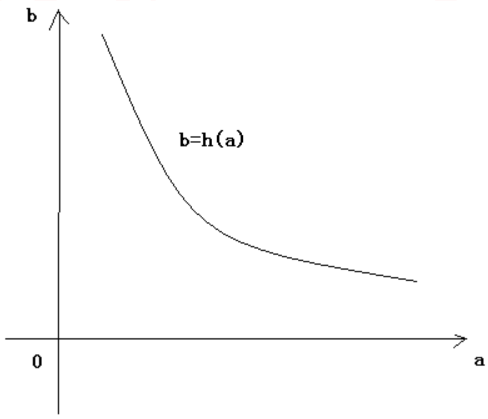

图 7 函数 $b=h(a)$ 趋势示意图

可以在原有算法的基础上增加启发式搜索（A^* 算法）进行求解。

算法步骤：

第一步：计算出所有 v 到 des 的对需求 a 不加约束时对于属性 b 最优路径 P，记函数为 $g(v)=Ex(P)$（估价函数）。

第二步：使所有从 s 出发的边 e(st, v) 为待考查路径，$lb(e)\to Ex(e)$。当仍存在待考查路径时：取出一条待考查路径 $P(s\to v)$，使得 Ex(P)+g(v) 最小：

第三步：找出所有以 v 为起点的边 $e(v,u)$， 记 $P'(st\to u)=P+e$。如果 P' 满足约束条件，则令 lb(P')=lb(P)+Ex(e)．并标记 P' 为待考查路径。

第四步：重复上面的操作直到不存在待考查路径时为止，过程中 b 的最优值即为所求。

上面的算法可以保证求得最优解，但由于考查目标从点变成了路径，大大增加了空间和时间的复杂度（最坏情况下达到指数级），其初解效率难以预测，因而实用性不高。

因此，我们考虑将此问题转化为单目标模型进行求解，将约束条件 $a\le a_0$ 反映在另外一个变量 k 上，构造虚拟的需求目标 $d=ka+b$（注意：这样的构造不能理解为将需求 a,b 线性加权，仅仅是实现规划问题时构造的虚拟目标函数！）。这里的 k 是用来反应对a的约束强度，即 a 的减少可以由 k 的增加来反映，反之亦然。这样一来，以 d 为单一目标，任意指定 k 值，使用原来的算法进行计算，就可以得到一定的 k 下的一组最优解 (a_1,b_1)。可以证明，此时 b 的取值 b_1 就是当 $a=a_1$ 时的最优解，并且这时 a_1 一定是可以取到的。

证明：假设 $\exists b_2$，$b_2\le b_1$，是当 $a=a_1$ 时 b 的最优解。则有 $d_2=ka_2+b_2<d_1=ka_1+b_1$。由因为解 (a_1,b_1) 的求得是 d 的最优解，即在当前 k 下，$d_1=ka_1+b_1$ 最小，与 $d_2<d_1$ 矛盾。所以假设不成立，b_1 就是当 $a=a_1$ 时的最优解。

调整 k 的值，即可在有限次尝试下获得结果。这里可以利用折半查找的原理加速查找。

算法步骤:

第一步：取定 $k_{\min}=0$，$k_{\max}=\infty$（实际操作中可以取一个经验最值）。然后取 $k_{mid}=(k_{\min}+k_{\max})/2$。

第二步：取 $d=k_{\min}*a+b$，经过算法得到一组最优解（a_x,b_x）

第三步：当 $k_{\min}<k_{\max}$ 并且得到的 a_x 值没有收敛时：如果 $a_x<a_0$，则 $k_{\min}=k_{mid}$；否则 $k_{\max}=k_{mid}$。

第四步：不断求取 a_x，直到其收敛为止，这过程中得到的 b 的最优值即为所求。

最后得到一个趋近于 a_0 的最大的可以取到的 a_x，此时的解 (a_x,b_x) 是满足乘客需求的一个较好的解，但是正如上面的原因二所说，这样的解中能保证 b 是满足乘客需求的最小的值，但是实际上 a 仅仅是满足乘客约束的值，还可能存在更好的解，使得最优值 b 的值不变的情况下，a 还可以更小。如果我们的查询模型可以给出所有的符合条件的解集是非常好的，乘客可以得到一组满足约束条件的路线，并可以自主判断选择哪条路线。但是出于复杂度考虑，我们仅给出符合约束条件的一组路线。

但是，如果乘客提出的约束过于严格，比如从 S0873 到 S0402 点，希望在 3 次换乘次数之内到达，而这样一组出发站和终点站之间的最少换乘次数是 5 次，因此我们的查询系统通过运算，发现无法求得约束条件之内的解。这种情况下，我们将返回乘客这样的信息：“您提出的 3 次换乘之内到达是不能实现的，从 S0837 到 S0402 最少需要换乘 5 次，路线如下：$S0837\xrightarrow{L361up(1)}S0414\xrightarrow{L361down(40)}S1919\xrightarrow{L189(4)}S0584\xrightarrow{L280(21)}S2454$ $\xrightarrow{L265up(5)}S1603\xrightarrow{L265down(1)}S0402$

线路 $S2263 \to S3772$ 有约束的目标的解决：

$S2263 \to S3772$，在不引入地铁线时：

不引入地铁线时各约束下所得最优路径				
约束	最优路径	最短到达时间／分钟	换乘次数／次	通行费用／元
$c \le 2$	$S2263 \xrightarrow{L140(12)} S3903 \xrightarrow{L448(20)} S3772$	101	2	1
$c \le 5$	$S2263 \xrightarrow{L140(6)} S2113 \xrightarrow{L244(12)} S3080 \xrightarrow{L192(4)} S3772$	76	2	3
$c \le 10$	$S2263 \xrightarrow{L140(6)} S2113 \xrightarrow{L244(12)} S3080 \xrightarrow{L192(4)} S3772$	76	2	3

表 13 不引入地铁线时各约束下所得最优路径

$S2263 \to S3772$，引入地铁线后：

引入地铁线时各约束下所得最优路径				
约束	最优路径	最短到达时间／分钟	换乘次数／次	通行费用／元
$c \le 2$	$S2263 \xrightarrow{L140(12)} S3903 \xrightarrow{L448(20)} S3772$	101	2	1
$c \le 5$	$S2263 \xrightarrow{L140(3)} S0618 \xrightarrow{walk} D8 \xrightarrow{T1(7)} D1 \xrightarrow{walk} S0042 \xrightarrow{L192(8)} S3772$	63.5	2	5
$c \le 10$	$S2263 \xrightarrow{L140(3)} S0618 \xrightarrow{walk} D8 \xrightarrow{T1(7)} D1 \xrightarrow{walk} S0567 \xrightarrow{L244(2)} S3080 \xrightarrow{L192(4)} S3772$	62.5	3	6

表 14 引入地铁线时各约束下所得最优路径

6、问题 3—步行时间的考虑

如果认为所有站点之间都可以通过步行连接起来，那么模型只需要进行适当的修改就可以解决上述问题：在每两个站点之间，如果原来已经存在边，则在边上增加步行时间信息；如果原来不存在边，则增加新边。在这些边上，t 即为假设所给出的所有站点之间的步行时间，并且 c=0，f=0。这样的话只是在原有模型上加入考虑步行所增加的边，问题二中的模型在规模上扩大，即在数据结构上进行适当的改变，就可以解决加入人步行因素的问题了，而模型的本质没有改变，这也说明这个模型的的稳定性和通用性很强。

讨论：由于题目中没有给出每个站点之间步行的时间，因此无法带入测试点运行程序来进行检验，那么我们仅仅基于问题一和问题二的结果考虑在加入人的步行因素后的结果应该如何更加达到更优。

但是，我们要注意到这样一个问题，两个站点之间的步行线路和公交线路往往不是同一条线路。因为既然两个站点之间存在步行线路，那么就应该是尽可能短的线路，否则人们在长期的生活实践中就会走其他的线路，而公交线路一般不是两站之间最短的线路。基于上面的实际情况，我们可以认为，在很多的情况下，我们可以步行一站，到达

另外一个站点去换乘，这样既减少了费用，还减少了换乘次数。
由问题一和问题二的结果注意到有这样的线路：

$S3359 \xrightarrow{L474(1)} S2903 \xrightarrow{L485(16)} S1784 \xrightarrow{L217(1)} S1828$

$S0087 \xrightarrow{L206(1)} S0088 \xrightarrow{L231(10)} S0427 \xrightarrow{L097(1)} S3676$

从上面的结果看出，有的换乘一次后只乘了一站路就下车再换乘，这样既不经济也增加了等车换乘的时间。如果考虑到人步行，只要这两个站点之间的步行时间适当，乘客可以走过去然后再换乘，这样既节省了时间还节省了费用。
当引入了人的步行因素，乘车线路的选择具有更大的选择性，人们可以根据自己的各种灵活的需求，以自主查询的结果作为参考，然后选择出最适合自己的方案，从而在更大程度上方便自己的出行。

六、结果分析

1 通过对题目中六组测试点的结果分析，以及对大量增加其他测试点的测试结果进行统计，我们可以得到如下结论：

1.1 如果要减少时间，往往会导致换乘次数的增加。

例如：$S0562 \to S1014$，最少换乘 2 次即可到达，但是换乘 2 次的最快到达时间也要 214 分钟，如果换乘次数增加到 5 次的话，就可以使最快到达时间达到最短的 127 分钟。又如：$S1971 \to S0190$，最少换乘 2 次到达，但是此时的最短时间为 178 分钟，而如果换乘次数增加到七次，最短时间就降为最优的 125 分钟。题目中给出的测试点 (1) $S3359 \to S1828$ 也属于这种情况，增加一次换乘次数使得时间减少 37 分钟。

但是增加换乘次数并不一定能显著的减少时间，例如：$S0350 \to S2606$，换乘 1 次的最少时间为 59 分钟，换乘 2 次的最少时间为最优时间 58 分钟，可见换乘次数增加 1 次只使时间减少了 1 分钟。题目中的测试点(5)S0148→S0485 也是这种情况，增加 1 次换乘仅使时间减少 1 分钟。

有的时候换乘次数增加能显著改善出行时间，但是有的时候并不能使出行时间有显著改善。正如上面的例子中，时间的数值理论计算上相差 1 分钟，在实际问题中，乘客可能根本没有体会到时间的改善。因此，若一个乘客希望从 $S0350 \to S2606$ 的时间最短，查询系统给出的最优路线是换乘 2 次，58 分钟。在并未使乘客体会到时间较小的情况下增加了一次换乘，费用上还多出了 1 元。在这种情况下，查询系统应当给乘客一个客观的建议。

1.2 换乘次数减少的需求往往和费用的减少是一致的。

例如：$S2263 \to S3772$，可以乘坐 $L140$ 线直达，费用最少，为 2 元，如果为了出行时间最小，不仅换乘次数 3 次，费用也增加为 6 元。题目中的测试点

(2)$S1557 \to S0481$ 也是类似的情况。

但是，这种关系并不是绝对的，在少数情况下，如 $S2307 \to S3274$，换乘次数 2 次的费用最小，为 3 元，如果换乘次数减少 1 次到最少时，费用增加 1 元。题目中测试点(1)S3359→S1828 也是这种情况。这种结果可能是由于乘坐了分段计价的公交车所致。也就是说乘客需求换乘次数最少和费用最少往往会得到一致的即两方面都较小的结果，但是这个结论并不是总成立的。所以这两个需求不能统一为一个，分开讨论，对乘客的不同单一需求分别给出最优路线是必要的。

1.3 如果要使费用减少，往往会使时间增加。

例如：$S0816 \to S0389$，最小费用为 4 元时最快要 184 分钟才能到达，但是如果愿意增加 4 元，就可以使时间降低为 134 分钟。题目中(4)$S0008 \to S0073$ 中增加 3 元费用也可以带来时间减少 24 分钟。

但是，$S2222 \to S2514$，花费最少为 3 元，即可最快在 73 分钟内到达，而最快到达也需 71.5 分钟，但是却要多花 4 元。如上面分析可知，相差几分钟理论上节省了时间，但实际上由于时间因素误差较大，乘客得到的利益并不明显。可见，有时用金钱换取时间效果不一定好。正如 1.1 中所分析，如果乘客仅仅提出时间最少的需求，得到的结果不一定真正满足乘客的需求。

1.4 地铁线路的加入可以使时间方面大大优化。

例如：$S0526 \to S0527$，在不能乘坐地铁时，最少的换乘次数、最快到达时间和最小费用分别为 2 次、30 分钟和 3 元，且不能同时达到最优。而引入地铁路线后，这些最值变为 0 次、8 分钟和 0 元。又如 $S0978 \to S0630$，引入地铁前后，最快到达时间由 25 分钟降至 17.5 分钟，最小费用也由 2 元降至 1 元。题目中的(5)$S0148 \to S0485$ 与(6)S0087 →S3676 也是通过换乘地铁来使得最快到达时间分别降低了 16 分钟和 13 分钟。

总体来看，地铁线的引入主要使得大多数点对间最快到达时间得以缩短，而付出的代价往往会使得换乘次数和费用增多。这一点与实际也是相吻合的。

2. 最小换乘次数的分析

运用广度优先算法对每一个点到其他任意点的最小换乘次数的求解，通过统计的方法，发现最小换乘次数的最大值为五次，能够达到最小换乘次数五次的站点的组合总共有 108 组。下面列出了部分的结果：

	时间	耗费	换乘	

	/分钟	/元	次数	线路
$S0837 \to S0402$	241	5	5	$S0837 \xrightarrow{L361} S0414 \xrightarrow{L361} S1919 \xrightarrow{L189} S0584 \xrightarrow{L280} S2454 \xrightarrow{L256} S1603 \xrightarrow{L265} S0402$
$S1861 \to S0770$	154	6	5	$S1861 \xrightarrow{L075} S2260 \xrightarrow{L470} S1919 \xrightarrow{L359} S1909 \xrightarrow{L485} S2992 \xrightarrow{L143} S1549 \xrightarrow{L143} S770$

表 15 最小换乘次数为 5 次的路线举例

进一步分析可以知道，绝大部分站点仅仅存在于某一条线路上，例如：S1374、S1220、S1640、S1703、S1820、S1852、S1861、S1939 、S2141 、S2865 等等。因此可以认为这些站点应该对应于实际情况中的郊区，并且是很偏僻的，像这样出行不方便的站点，可以建议多增加到这些站点的公交线路，这样可以在很大的程度上改善该地区的交通状况，同时提高了公交的效率。同时还发现，如 L075 线路，上面有 21 个站点满足只在线路中出现一次并且最短换乘次数为五次，可以认为这种线路属于很偏远的线路。建议增加这种线路来改善该地区的交通状况以提高公交的效率。

七、进一步讨论

1. 考虑实际情况的讨论。

题目中给出的数据是现实生活的一个假设简化。我们认为，在实际情况下，这种模型计算出的结果的可能与实际情况存在一定的误差。这一论断尤其体现在出行时间方面。

首先，题目中的出行时间仅仅是平均值，与实际情况有较大的差别。也很容易受到外界因素的干扰而使结果不稳定。如天气，交通状况等。所以正如问题分析所述，出行时间的结论只能给乘客提供一个参考信息。

其次，我们认为模型可以进一步结合实际情况而使计算结果更加具有现实意义。实际的公交系统中，公交公司会根据情况分配公交车辆的运行车次，尤其是公汽车辆。假设所有公汽车辆的第一班车发车时间均为 6 点，最后一班车为晚上 11 点，那么，并不是每天所有时间段中运行的公交车次时固定的。比如晚上 9 点钟之后，会有大约一半的车辆停止运行，因为这时需要搭乘公交车辆的乘客会减少。再如五一、十一黄金周期间，由于游客数量增多，公交公司会采取增加运行车辆数目的手段，来满足乘客乘车需求。奥运会期间更是如此，在以奥运会场为圆心的一定范围内，会聚集大量来观看比赛的观众，如何及时疏导人群，如何使一辆车上的乘客不至过多而造成拥挤，公交公司势必会选择增加线路或者增加车次数、发车频率等来解决这一问题。这样一来，每天中不同的时间段平均等车时间不能简单地视为常数；不同时期的平均等车时间也必然会存在不同。考虑以上分析，我们希望建立的查询系统能够蕴含更多的信息，以提供乘客更加准确的数据。

2. 反馈实时信息。

由于实际情况中，公交系统是一个动态网络，可能受到各方面因素的影响，例如有的线路堵车或者整修而无法正常通行；有的线路新开通，知道并乘坐的乘客可能会比较少；很多情况下行车速度和发车频率也不尽相同，例如上班高峰期发车频率明显高于其他时期。作为一个较为准确的查询系统，如果能够将这些信息及时反映到查询结果中，那么这样的查询模型将更加有现实意义，并更加符合乘客的需求。

在我们的模型中，只需通过增减、修改边上的信息，就可以记录这些实时信息。当乘客查询时，在较少的查询耗时下，就可以将这些实时信息反映到查询结果中。例如，如果某条线路发生堵塞，只须将所有标记为该线路的边从图中删除即可。

3．由于出行耗时受到多个方面不同因素的影响，可以认为这样的随机变量服从正态分布 $t \sim N(\mu,\sigma)$，为了简化问题，该问题假设中给出的平均时间即为 μ。如果可以调查更多的数据，应该可以在给出乘客出行时间的时候同时给出这个时间内到达的概率。

八、 模型检验

考虑到乘客在选择线路时一般以换乘次数作为优先的考虑，因此我们采用广度优先算法（BFS）来计算每一个站点到其它所有的站点（总共 3958 个站点）所需要的最少的换乘次数。

算法描述：

第一步： 在所有可以通过线路或地铁通道直达的点对 (v,u) 间建立一条有向边。

第二步： 对 $\forall v \neq s$， $lb(v)=-1$。并使得 $lb(st)=0$。将 st 置于队列中。

当队列中还有点时：

将队首点 v 出队。

对于 $\forall e(v,u)$，如果 $lb(u)=-1$，则令 $lb(u)=lb(v)+1$，并将 u 入队。

第三步： 重复上面的操作直到队列为空。

此时 $lb(v)$ 即为 $s \to v$ 所需最少换乘次数。

通过程序的运行，我们得到了每一个点到其它任意一点的最小换乘次数。由于所有的站点太多，考虑到每两个站点之间的不同组合有 $A_{3958}^{2}=3958\times3957=15661806$ 种，这里仅

列出了部分结果。表中列出了 9 个代表点分别在最小换乘次数为 0、1、2、3、4、5 次时所对应的站点。

	S1	S100	S500	S1000	S1500	S2000	S2500	S3000	S3500
0 次	S0359	S2929	S0616	S2451	S3277	S0514	S2400	S1098	S3580
	S0843	S3016	S0618	S2454	S3286	S0520	S2467	S1099	S3590
	S0468	S3023	S0638	S2455	S3316	S0533	S2919	S1277	S3591
	S0522	S3533	S0640	S2493	S3333	S0694	S3184	S1321	S3593
1 次	S2159	S1923	S0938	S1615	S1008	S1671	S2515	S1593	S1068
	S2163	S1930	S0940	S1617	S1010	S1672	S2517	S1606	S1070
	S2164	S1937	S0941	S1618	S1013	S1673	S2528	S1607	S1078

	S2181	S1967	S0943	S1620	S1014	S1674	S2531	S1611	S1080
2 次	S0023 S0026 S0027 S0028	S1390 S1391 S1392 S1393	S3278 S3279 S3280 S3281	S1559 S1578 S1581 S1584	S1197 S1200 S1201 S1202	S743 S744 S745 S746	S0724 S0726 S0727 S0728	S0546 S0551 S0552 S0553	S1394 S1397 S1398 S1401
3 次	S2496 S2497 S2499 S2501	S3550 S3574 S3578 S3588	S1076 S1220 S1336 S1374	S1485 S2623 S2644 S2956	S1703 S1820 S1852 S1861	S319 S320 S321 S322	S2643 S2655 S2663 S2664	S1499 S1509 S1519 S1524	S1040 S1938 S2562
4 次	S1364 S1550 S2132 S2623	S0402	-	-	-	-	S328 S329 S2644	S402 S770 S1550 S2623	-
5 次	-	-	-	-	-	-	-	-	-

表 16 BFS 算法的运行结果 1

上面的一些组合是从大量的结果中抽取出来的代表，“-”表示该站点没有这样的站点使得这两点之间有相应的最小换乘次数。下表是用用广度优先算法计算问题一中的六组测试数据得到的结果：

始发站→终点站	(1)S3359→S1828	(2)S1557→S0481	(3)S0971→S0485	(4)S0008→S0073	(5)S0148→S0485	(6)S0087→S3676
最少换乘次数	1	2	1	1	2	1

表 17 BFS 算法的运行结果 2

这与上面我们得到的结果是一致的。说明我们的模型是能够很好的解决问题的，而且结果具有很高的准确性。

九、 模型优缺点

优点：

建立了很完备的网络图论模型，反映了所有的信息。同时使用了时间复杂度为 $O(n^2)$ 的 $Dijkstra$ 算法，给出了单目标下最优线路。同时，在问题变化时，只要加入相应的结点和有向边就可以完整的描述新的问题，并给出最优线路。这说明该模型具有很高的准确性和很强的通用性。

只需通过增减、修改边上的信息，就可以记录公交线路反映的实时信息，实际可行性较强。

缺点：

没有考虑到其他的因素对模型的影响，只是用题中假设的数据带入模型求解，与实际的情况还存在差距。同时，每次求解只能得到两个站点之间的线路，但不能给出全局的情况，因此为了得到对全局的认识，就要不断的测试站点数据。

十、 参考文献

[1] 王建林，基于换乘次数最少的城市公交网络最优路径算法，经济地理，第25卷第5期，673页，2005年9月。

[2] J.Kleiberg and E.Tardos, Algorithm Design(影印版)，北京：清华大学出版社，2006年1月。

[3] 王振军，王宁宁，李鸿，牛洪亮，基于邻接矩阵的公交换乘算法的研究，徐州工程学院学报，第21卷第3期，74页-77页，2006年3月。

附录

1、换乘次数为五次的站点组合

站点组合					
一		二		三	
起始点	终点	起始点	终点	起始点	终点
30	770	864	3391	1446	3133
30	1550	864	3521	1446	3198
837	402	864	3582	1446	3275
837	770	864	3921	1446	3284
837	1550	864	3924	1446	3391
864	47	1220	770	1446	3608
864	77	1220	1550	1446	3613
864	328	1374	770	1640	770
864	329	1374	1550	1640	1550
864	402	1446	30	1703	770
864	770	1446	328	1703	1550
864	1088	1446	329	1820	770
864	1117	1446	402	1820	1550
864	1457	1446	1040	1852	770
864	1550	1446	1220	1852	1550
864	1581	1446	1374	1861	770
864	1941	1446	1484	1861	1550
864	1950	1446	1485	1939	770
864	1951	1446	1640	1939	1550
864	1952	1446	1703	1942	402
864	2055	1446	1820	2141	770

864	2496	1446	1852	2141	1550
864	2596	1446	1861	2497	402
864	2623	1446	1938	2499	1938
864	2643	1446	1939	2499	2805
864	2644	1446	2141	2562	770
864	2719	1446	2187	2562	1550
864	2957	1446	2562	2786	770
864	3055	1446	2644	2786	1550
864	3129	1446	2786	2865	770
864	3292	1446	2805	2865	1550
3198	770	1446	2865	3133	770
3198	1550	3284	770	3613	770
3275	770	3284	1550	3613	1550
3275	1550	3390	402		
3608	1550	3608	770		

表18 换乘次数为五次的站点组合

2、在所列出的公交线路中只出现一次的站点

S1374 S1220 S1640 S1703 S1820 S1852 S1861 S1939 S2141 S2865 S3133 S3198 S3275
S3284 S3613 S0030 S1220 S1374 S1852 S861 S939 S2141 S1446 S0864 S0402 S1942
S2497 S2499 S2562 S2786 S3608 S3390 S2496 S2623 S0328 S0329 S2644 S0770
S1550 2719 S1040 S1088 S1117 S1484 S1485 938 1950 1951 1952 S0077 S2055
S2957 S3055 3S521 S0837
2805 2953 3129 3292 3391 3582 3924