

# CT 系统参数标定及成像

蔡志杰

复旦大学数学科学学院

2017.11.25

## 一、问题的提出

一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示, 平行入射的 X 射线垂直于探测器平面, 每个探测器单元看成一个接收点, 且等距排列. X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变, 整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次. 对每一个 X 射线方向, 在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量, 并经过增益等处理后得到 180 组接收信息.

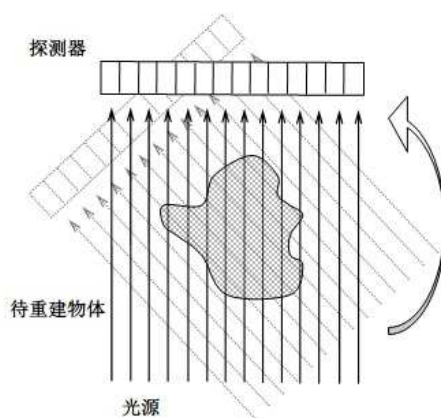


图 1

CT 系统安装时往往存在误差, 从而影响成像质量, 因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定, 即借助于已知结构的样品 (称为模板) 标定 CT 系统的参数, 并据此对未知结构的样品进行成像.

现要求建立数学模型和算法, 解决以下几个问题:

(1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板, 模板的几何信息如图 2 所示, 相应的数据文件见附件 1, 其中每一点的数值反映了该点的吸收强度, 称为吸收系数. 对应于该模板的接收信息见附件 2. 请根据这一模板及其接收信息, 确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向.

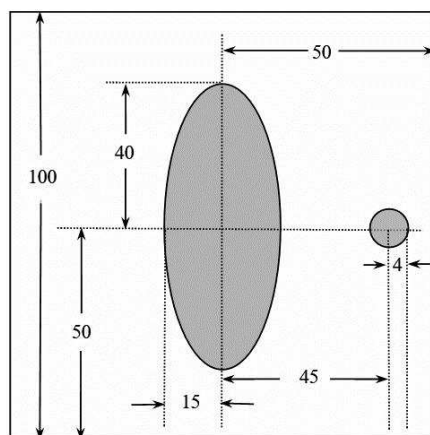


图 2

(2) 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息. 利用 (1) 中得到的标定参数, 确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收系数等信息. 另外, 请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收系数, 相应的数据文件见附件 4.

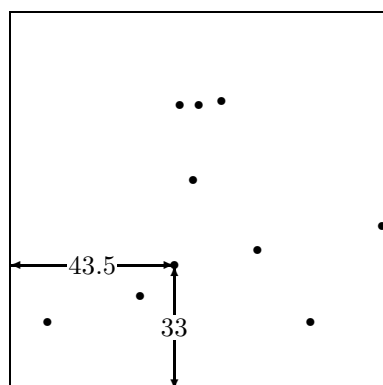


图 3

(3) 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息. 利用 (1) 中得到的标定参数, 给出该未知介质的相关信息. 另外, 请具体给出图 3 所示的 10 个位置处的吸收系数.

(4) 分析 (1) 中参数标定的精度和稳定性. 在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型, 以改进标定精度和稳定性, 并说明理由.

## 二、CT 成像的基本原理

X 射线在穿过物质时, 其强度的衰减与物质的厚度及入射辐射强度成正比, 比例系数记为  $\mu$ . 若 X 射线的入射强度为  $I_0$ , X 射线在均匀物质中传播的距离为  $l$ , 则 X 射线通过均匀

物质后的强度为

$$I = I_0 e^{-\mu l}. \quad (2.1)$$

对于不均匀物质,

$$I = I_0 \exp \left( - \int_L \mu dl \right). \quad (2.2)$$

### 三、标准模板的计算

考察 X 射线经过形如标准椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

的均匀介质的长度. 设 X 射线经过  $(x_0, y_0)$  点, 方向角度为  $\phi$ , 则射线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $p = \cos \phi$ ,  $q = \sin \phi$ .

当  $\Delta_1 \geq 0$  时, X 射线经过椭圆, 其中

$$\Delta_1 = -\frac{(x_0 q - y_0 p)^2}{a^2 b^2} + \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}. \quad (3.3)$$

X 射线经过椭圆的长度为

$$l = \frac{2\sqrt{\Delta_1}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}. \quad (3.4)$$

对圆形的均匀介质

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2, \quad (3.5)$$

当

$$\Delta_2 = r^2 - (py_0 - q(x_0 - c))^2 \geq 0 \quad (3.6)$$

时, X 射线经过圆, 其长度为

$$l = 2\sqrt{\Delta_2}. \quad (3.7)$$

### 四、系统参数的标定

系统参数标定的基本思想是采用最小二乘法, 将问题归结为参数辨识的优化模型, 即确定系统的各个参数, 使得接收信息的理论计算值与测量值之间的平方误差最小.

模型可描述为: 确定系统的旋转中心  $(x_c, y_c)$ , 旋转中心离探测器左端点的距离  $d_c$ , 探测器单元的间距  $d$ , 探测器各方向角度  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m = 180$  为 CT 系统的旋转次数), 系统的增益  $\mu$ , 使得

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (I_{ij} - I_{ij}^*)^2 \quad (4.1)$$

达到最小.

这是一个非线性优化模型, 参数达到近 200 个, 直接进行非线性优化计算, 速度慢, 精度低, 还会陷入局部极小值, 从而得不到所需要的结果. 因此, 必须将问题进行分解, 分阶段来确定参数.

**第 1 步** 确定系统的增益  $\mu$  和探测器单元的间距  $d$ .

设经过圆的 X 射线共有  $n$  条,

$$x = x_i = x_0 + id, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

则 X 射线在介质中传播的距离分别为

$$l_i = 2\sqrt{r^2 - x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

于是接收信息为

$$I_i = \mu l_i = 2\mu\sqrt{r^2 - (x_0 + id)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

利用非线性最小二乘法, 将确定  $\mu$ ,  $d$  和  $x_0$  的数学模型归结为

$$\min \sum_{i=1}^n \left[ 2\mu\sqrt{r^2 - (x_0 + id)^2} - I_i^* \right]^2, \quad (4.5)$$

$$\text{s.t. } \mu > 0, \quad d > 0, \quad x_0 \leq -r, \quad (4.6)$$

其中  $I_i^*$  为第  $i$  条射线的实际接收信息.

直接求解上述优化问题, 结果不理想. 对 (4.4) 作变换, 去掉根号, 得到

$$\frac{I_i^2}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 = r^2, \quad (4.7)$$

从而得到如下优化模型:

$$\min \sum_{i=1}^n \left[ \frac{I_i^2}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 - r^2 \right]^2, \quad (4.8)$$

$$\text{s.t. } \mu > 0, \quad d > 0, \quad x_0 \leq -r. \quad (4.9)$$

为了更好地确定参数, 给出更为确切的参数范围. 对单独圆的情形, 从附件 2 中提取出每个角度经过圆的射线数, 即接收信息为非零的个数. 记最小个数为  $n_{\min}$ , 最大个数为  $n_{\max}$ , 则探测器单元之间的距离  $d$  满足

$$d_{\min} = \frac{2r}{n_{\min} + 1} \leq d \leq \frac{2r}{n_{\max} - 1} = d_{\max}. \quad (4.10)$$

由此可得  $x_0$  的范围为

$$-r - d_{\max} \leq x_0 \leq -r. \quad (4.11)$$

从而得到反演的优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n \left[ \frac{I_i^{*2}}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 - r^2 \right]^2, \quad (4.12)$$

$$\text{s.t. } \mu > 0, \quad d_{\min} \leq d \leq d_{\max}, \quad -r - d_{\max} \leq x_0 \leq -r. \quad (4.13)$$

**第 2 步** 确定系统的各个旋转角度  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

不妨设探测器经过原点, 探测器上原点右侧的第一个单元与原点之间的距离记为  $d_0$ . 当探测器水平时, 各单元  $P_i$  的坐标分别为  $(d_0 + id, 0)$ . 对探测器第  $j$  个方向角度  $\theta_j$ , 各单元  $P_i$  的坐标为

$$x_{ij} = (d_0 + id) \cos \theta_j, \quad y_{ij} = (d_0 + id) \sin \theta_j, \quad (4.14)$$

将其记为  $P_{ij}$ .

下面确定探测器的左端点与原点之间的距离  $d_l$ . 对固定的  $j$ , 记  $n_j^1$  为  $I_{ij}$  中第 1 个非零值的单元号,  $n_j^2$  为  $I_{ij}^*$  中第 1 个非零值的单元号, 其中  $I_{ij}^*$  为实际接收数据. 为书写方便, 下面省略下标  $j$ . 则左端点与原点之间的距离为

$$d_l = d_0 - (n + n^1 - n^2)d. \quad (4.15)$$

利用非线性最小二乘法, 将确定  $d_0$  和  $\theta$  的数学模型归结为

$$\min \sum_{i=1}^n (I_{i+n^1-n^2} - I_i^*)^2. \quad (4.16)$$

再来确定约束条件. 显然

$$0 \leq d_0 \leq d. \quad (4.17)$$

根据接收数据的图像可以看出, 有一部分射线仅通过圆, 而没有经过椭圆. 通过计算椭圆与圆内公切线的斜率, 就可以确定第 1 条射线方向角度的大致范围.

探测器的方向角度满足

$$\phi_1 - 90 \leq \theta \leq \phi_2 - 90. \quad (4.18)$$

记第 1 条仅通过圆介质的射线是第  $l$  条射线, 由于探测器的旋转角度大约为 1 度, 因此探测器的第 1 个方向角度应在  $\phi_2 - 90 - l$  附近,

$$\phi_2 - 91 - l \leq \theta_1 \leq \phi_2 - 89 - l. \quad (4.19)$$

确定  $d_0$  和  $\theta_1$ , 使得

$$\min \sum_{i=1}^n (I_{i+n^1-n^2} - I_i^*)^2, \quad (4.20)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq d_0 \leq d, \quad \phi_2 - 91 - l \leq \theta_1 \leq \phi_2 - 89 - l. \quad (4.21)$$

对  $\theta_j$  ( $j = 2, \dots, m$ ) 类似处理, 其中相应的约束条件改为

$$\theta_{j-1} \leq \theta_j \leq \theta_{j-1} + 2. \quad (4.22)$$

**第 3 步** 确定系统的旋转中心  $(x_c, y_c)$  和旋转中心离左端点的距离  $d_c$ .  
我们有

$$x_c \cos \theta + y_c \sin \theta - d_c = -d_l. \quad (4.23)$$

利用 180 个旋转角度的数据, 采用线性最小二乘法即可求得  $(x_c, y_c)$  和  $d_c$ .

## 五、图像重构

将整个正方形托盘划分成  $p \times p$  个单元, 将每个单元中的吸收系数近似为一个常数, 第  $i$  行第  $j$  列单元的吸收系数记为  $\mu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, p$ ). 这样, 共有  $p+1$  条横线和  $p+1$  条纵线. 分别计算出不同旋转角度、不同位置的射线与这些横线和纵线之间的交点, 将这些交点按  $x$  坐标升序排列, 相邻两点之间的距离就是经过该单元的长度. 对第  $i$  条射线的第  $j$  个旋转角度来说, 经过各单元的长度矩阵记为  $L_{ij} = (l_{ijkl})_{p \times p}$ . 这样, 该射线的接收信息为

$$\sum_{k,l=1}^p l_{ijkl} \mu_{kl} = I_{ij}^*. \quad (5.1)$$

这就是关于各单元吸收系数矩阵  $K = (\mu_{kl})_{p \times p}$  的线性代数方程组. 注意, 为了方便, 这里的接收信息已经去掉了系统整体增益的影响.

通常这是超定或欠定方程组, 例如, 就赛题而言, 正方形托盘划分成  $256 \times 256$  个单元, 射线数为  $n = 512$ , 旋转角度数为  $m = 180$ , 那么, 方程数远远大于变量数, 这是超定方程组. 因此, 需要使用线性最小二乘法来求解.

另一方面, 由于方程组的规模非常大, 不能用直接法进行求解, 而应采用间接法求解.

需要注意的是: 数值计算必然会导致误差, 从而导致吸收系数的计算结果出现负值, 因此必须对其进行处理. 一种处理方法是, 在迭代过程中将负值取为 0.

Matlab 提供了图像重构的命令 `iradon`, 用于实现二维平行光束的 CT 重建, 采用的方法是滤波反投影算法. 但是, 使用该命令的前提是旋转中心在正方形托盘的中心, 且坐标系是一致的, 不能相差一个角度. 因此, 直接用 `iradon` 命令, 重构的图像会相差一个平移和旋转.

为了消除旋转的影响, 可在 `iradon` 函数中加入射线旋转角度参数, 但这仍相差一个平移.

消除平移的一种方法是, 对附件 2 用 `iradon` 函数进行图像重构, 确定出重构图像中椭圆的中心位置, 其与原点的偏移量就是附件 3 重构图像的偏移量. 减去这一偏移量, 就可以得到正确的图像了.

## 六、确定图像中图形的几何信息

赛题要求给出附件 3 中各个几何图形的信息, 也就是要求给出附件 3 中 6 个椭圆的中心坐标、两个半轴长、旋转角度及吸收系数.

首先提取各个椭圆的边界, 然后对其作二次曲线拟合, 得到一般椭圆的方程. 设对某一个椭圆拟合得到的椭圆方程为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (6.1)$$

其中  $b^2 - ac < 0$ .

计算椭圆的中心坐标、两个半轴长及倾斜角度.

将得到的椭圆信息作为初始值, 采用非线性最小二乘法, 可以得到更精确的结果

## 七、对含有噪声的接收信息的处理

附件 5 含有噪声. 采用问题 2 同样的方法进行图像重构, 可以看到, 重构图像四周应为空气, 其吸收系数为 0. 当某些位置的 X 射线沿某些角度穿过该图像时, 其吸收强度应为 0, 而附件 5 中相应的接收信息不为 0.

取出这些接收信息进行分析, 可以知道它们满足  $[0, 0.3]$  的均匀分布. 因此, 可以将接收信息小于 0.3 的部分置为 0.

另一种方法是, 在迭代过程中, 不必等到数值结果收敛, 只要相邻两次迭代的误差小于噪声水平就停止迭代.

## 八、竞赛论文的评述

1. 增加了额外的假设条件

(1) 旋转中心在探测器的中点.

(2) 系统均匀旋转, 每次旋转角度为  $1^\circ$ . 也有用拟合方式, 得到均匀旋转的角度.

2. 用较少信息进行标定

3. 没有注意到离散与连续之间的区别

假设必有一条射线经过椭圆中心、圆心, 与椭圆水平相切、垂直相切, 就椭圆与圆的公切线等.

4. 没有按要求完成赛题.

5. 没有考虑实际应用的方便性.

6. 编程能力较弱.

7. 参考文献的引用.

8. 检验

9. 设计新模板, 但没有重新计算, 没有说明为什么要这样设计.