公交最佳线路选择的数学模型

摘要

本文研究了在公交网络中选择最佳乘车线路的数学模型，并给出了相应的求解算法。

对于问题一，首先用四元组对公交网络进行了刻画；其次，对任意两站点间最佳线路上可能的换乘次数进行了分析，给出了需要分析的换乘次数的上下界，并且引入反映换乘次数的变化对心理影响的模糊隶属函数，定量分析，进一步缩小了需要分析的换乘次数的范围；再次，针对不同查询者的需要，给出了以时间最少、费用最少以及综合评价值最高的三条最优准则，其中综合评价函数的提出兼顾了时间、费用及换乘次数等多个因素；最后，通过广度优先搜索算法和基于线路邻接矩阵的改进算法搜索出可行解，再利用给出的不同准则对可行解进行寻优，可以得到基于各条原则的最佳乘车线路。

对于问题二同时考虑公汽和地铁的情况，将地铁线路和地铁站归入到第一步用于刻画公交网络的四元组中，四元组做出相应的变化，然后利用前面提出的算法，求解出满足不同准则的最佳乘车线路。

对于问题三考虑步行对最优解的影响，将步行比拟成一种只经过两站地的短程公交工具，这样便可以用与前两问统一的数学模型描述最佳线路的选择。

关键词：换乘次数，综合评价函数，广度优先算法，线路邻接矩阵

目录

1．问题的重述

城市的公交系统近些年来有了快速的发展，特别是北京、上海等大城市公共交通系统尤其发达。以北京为例，目前公交线路已达 800 条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但是同时也面临着从多条线路中选择最佳路线的问题。

为了设计出方便的最佳线路选择系统，核心就是线路选择的模型和算法，我们要解决的问题就是在下列情况下：(1)仅考虑公汽路线；(2)同时考虑公汽路线和地铁路线；(3)在(2)情况下又已知任意两站间的步行时间，给出最佳路线选择的数学模型和算法。

2．基本假设

1) 公交线路畅通，公汽及地铁匀速行驶；

2) 相邻公汽站的平均行驶时间(包括停站时间)为 3 分钟；

3) 相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间)为 2.5 分钟；

4) 公汽换乘公汽，地铁换乘地铁，地铁换乘公汽，公汽换乘地铁平均耗时分别为：5 分钟(其中步行时间 2 分钟)，4 分钟(其中步行时间 2 分钟)，7 分钟(其中步行时间 4 分钟)，6 分钟(其中步行时间 4 分钟)；

5) 公汽票价分别单一票价和分段计价两种，设单一票价为 1 元，分段计价的票价为 0~20 站 1 元，21~40 站 2 元，40 站以上 3 元；

6) 地铁票价为 3 元(无论地铁线路间是否换乘)。

3．符号约定

v_i：编号为 i 的站点；

p_j：编号为 j 的线路的售票方式；

r_k：编号为 k 的线路所经过的站点集合；

l_m：通过编号为 m 站点的线路的集合；

T_l：经过某对起止点编号为 l 的可行路径；

N_r：某条可行路径上最少换乘次数；

3. 问题分析

本题要处理的是一个在已知交通网络中寻找任意两点间最佳线路的问题。因此需要描述这个交通网络，给出最佳路线的标准，并且给出快捷、有效的算法。

3.1 公交网络的描述

本文用一个四元组来$\Omega=\{V,P,R,L\}$来描述公交网络[1]。

其中，$V=\{v_i \mid i=1,2\cdots I\}$为各站点集合，；$P=\{p_j \mid j=1,2\cdots J\}$为所有公交线路集合，令$p_j=\{0,1\}$，$p_j=0$ 表示售票方式为单一票价，$p_j=1$ 表示售票方式为分段计价；$R=\{r_k \mid k=1,2\cdots J\}$为线路—站点关系描述，$r_k=<v_{k_1},v_{k_2}\cdots v_{k_{m_k}}>$表示的是第$k$条线路经过的所有站点的有序序列，$v_{k_1}$和$v_{k_{m_k}}$为该线路起点和终点，$v_{k_1}=v_{k_{m_k}}$表示该线路为环线；$L=\{l_m \mid m=1,2\cdots M\}$为站点—线路关系描述，$l_m=<p_{m_1},p_{m_2}\cdots p_{m_{n_k}}>$表示通过第$m$个站点的所有线路的集合。这样一个公交网络就可以被惟一描述。

3.2 换乘次数范围的确定

换乘次数在公交线路选择的过程中起着重要的作用并且对搜索算法的效率有很大的影响，因此利用合理的算法尽量缩小需考虑的换乘次数的范围对简化问题和提高算法效率都有积极的影响。

3.3“最佳线路”的理解

由于乘公交出行要考虑乘车时间的长短，乘车费用的花销，换乘次数的多少等很多因素的影响，不同人群对于这些因素的重视程度也各不相同，例如赶时间的上班族更看中时间因素，而退休的老年人可能更看中乘车的花销，所以我们给出不同的标准分别从不同人群需求的角度刻画“最佳线路”。

4．模型建立及求解

4.1 换乘次数的确定

4.1.1 换乘次数上界的确定

设有某可行路径T_k，其途经站数最少即$S_k = \min\limits_i (S_i)$，其换乘次数为$N_k$，则对于其他换乘路径$T_i$必有如下关系：

1)对$\forall i \neq k$， $S_i \geq S_k$, 若$N_i \geq N_k$则对$\forall i \neq k$，路径T_k优于T_i；

2)对$\forall i \neq k$， $S_i \geq S_k$, 若$N_i < N_k$则$\exists\, t$，路径T_t优于T_i；

因此途经站数最短路径的最小换乘次数是换乘次数上界，我们记为$N_b^{(r)}$。

求两节点之间最少途经站数路径的问题可以转为求最短路问题，分析原始数据，建立邻接矩阵$A = \{a_{ij}\}_{I \times I}$，其中$I$为总站点数，$a_{ij}$表示站点$i$和$j$是否有同一车次顺次经过，即$a_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad v_{k_n} = v_i \in r_k \wedge v_j \in r_k \wedge v_j = v_{k_{n+1}} \\ \infty & otherwise \end{cases}$，

利用 *Dijkstra* 算法[2]可以计算给定起点到终点的最短路径，然后求该路径的最小换乘次数。

已知路径的最小换乘次数算法[3]的基本思想是：首先从路径的终点开始，寻找能经过该路径直达终点的节点区间(0 次换乘节点区间)；对该区间中的任一节点寻找能够经过该可行路径直达该节点的最接近起点的出发节点,比较所有出发节点得到一个最左侧的出发节点,则位于该出发节点和0 次换乘节点区间左边界(不含) 中的所有节点到终点的最小换乘次数为1 (一次换乘节点区间)；对一次换乘节点区间进行类似操作，得到二次换乘节点区间，依次进行,直到出现以起点为出发节点,算法结束。

对题目中所给的六组起止点利用上面的思想求出来的换乘次数上界$N_b^{(r)}$如下：

S3359-1828	S1557-0481	S0971-0485	S0008-0073	S0148-0485	S0087-3676
6	9	7	4	10	7

4.1.2 最小换乘次数的确定

建立邻接矩阵$B = \{b_{ij}\}_{I \times I}$， b_{ij}表示v_i, v_j是否在同一条公交线路上，即

$b_{ij}=\begin{cases}1 & if \quad v_i,v_j\in r_k \\ \infty & otherwise\end{cases}$，对矩阵 B 利用 *Dijkstra* 算法可以求出任意两点最少换乘次数，我们记为 $N_a^{(r)}$。利用计算机得到六组起止点的最小换乘次数 $N_a^{(r)}\ (r=1,2\cdots 6)$ 如下表：

S3359-1828	S1557-0481	S0971-0485	S0008-0073	S0148-0485	S0087-3676
1	2	1	1	2	1

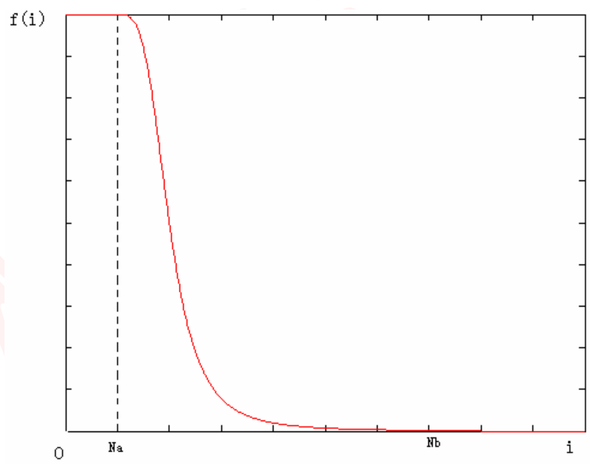
4.1.3 换乘次数的不同对乘客乘车心理的影响

定义 $\eta_i^{(r)}=f(i)$ （$N_a^{(r)}\le i\le N_b^{(r)}$）为乘客对公汽之间不同换乘次数的心理接受程度，$\eta_i^{(r)}\in[0,1]$，$\eta_i^{(r)}$ 越接近1，表示乘客对换乘 i 次越容易接受。

显然 $f(i)$ 是关于 i 的单调减函数，还考虑到：i)换车次数 i 由 $N_a^{(r)}$ 变化到 $N_a^{(r)}+1$ 乘客心理接受程度会有较大的变化；ii) $N_a^{(r)}$ 越大，i 变到 $N_a^{(r)}+1$ 乘客心理落差也会越大；iii)换车次数 i 越大，i 的变大乘客接受程度的变化反而越小，因为乘客对 i 的增加越来越"麻木"(通常乘客只关心较小的换车次数)。

根据乘客上述心理变化特征由模糊隶属函数降半柯西分布[4]给出 $f(i)$：

$$f(i)=\begin{cases}1 & i\le N_a^{(r)} \\ \dfrac{1}{1+c(i-c)^{\beta}} & N_a^{(r)}<i\le N_b^{(r)} \\ 0 & i>N_b^{(r)}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(1)$$



由于函数在$i=N_a^{(r)}$连续，且当$i=N_b^{(r)}$时接受程度几乎为0，令$f(N_b^{(r)})$=0.001得参数分别为：

$$c=N_a^{(r)};\beta=\ln(999/N_a^{(r)})/\ln(N_b^{(r)}-N_a^{(r)})$$

取足够小的ε，当$f(i_0)<\varepsilon$时，我们认为乘客对换乘次数i已经无法接受，令$N_a'=N_a, N_b'=i_0-1$那么要考虑的换乘次数范围为$[N_a', N_b']$，取ε=0.1，则题目中的六组数据要考虑的换车次数范围见下表：

S3359-1828	S1557-0481	S0971-0485	S0008-0073	S0148-0485	S0087-3676
[1,2]	[2,3]	[1,2]	[1,2]	[2,3]	[1,2]

上面数据说明：由于乘客心理很难接受多次换车,因此我们要考虑的换车次数最多也不用超过3次,这与实际中的情况也是相符的。

4.2 "最佳线路"准则的提出

设$T_{ik}^{(r)}$表示第r组起止点对应的换乘次数为i的第k种可行路径。

准则 I：$\forall i\in[N_a', N_b']$，以花费时间(包括行车,换乘和步行时间)最少的线路为最佳路线。

准则 II：$\forall i\in[N_a', N_b']$，以乘车费用最少的线路为最佳路线。

准则 III：定义综合评价函数

$$\psi(T_{ik}^{(r)})=\eta_i^{(r)}\cdot\frac{1}{\tilde{t}_{ik}^{(r)}}\qquad i\in[N_a', N_b']\quad\cdots(2)$$

其中$\eta_i^{(r)}$由(1)式给出，$\tilde{t}_{ik}^{(r)}=\alpha\cdot t_{ik}^{(r)}+\beta\cdot t'(\cos t_{ik}^{(r)})$，$t_{ik}^{(r)}$表示以该可行路径乘车所需要的总时间；$t'(\cos t_{ik}^{(r)})$表示所需票价$\cos t_{ik}^{(r)}$转化成的等效时间[5]：$t'(\cos t_{ik}^{(r)})=\dfrac{480\rho}{\omega}\cdot\cos t_{ik}^{(r)}$，$\rho$表示平均的年工作日，$\omega$表示平均的年均收入，480表示平均一天工作 480 分钟。

而综合评价函数参数α,β的取值表现了乘客心理的不同偏好，如α较大说明对时间比较看重，反之则表示对花销比较看重。

在$\eta==1$情况下，考虑极限情形$\alpha\to 0$，$\tilde{t}\to t'(\cos t)$，相当于准则 II 只考虑花销；当$\beta\to 0$时，$\tilde{t}\to t$，相当于准则 I 只考虑时间。

由此，准则 III 表述为：$\forall i\in[N_a', N_b']$，以综合评价值最大值所对应的路径

为最佳路线。

4.3 问题一的建模与求解

4.3.1 问题一模型的建立

设$T_k=<v_{k_1},v_{k_2}\cdots v_{k_e}>$为某两点$v_{k_1},v_{k_e}$间的任一条可行路径，$N$为该路径经过的站点数，$N_k$为该路径上公汽的最小换乘次数，$v_{k_{m_1}},v_{k_{m_2}}\cdots v_{k_{m_{N_k}}}$为换乘站点，$<v_{k_1}\cdots v_{k_{m_1}}>\subset r_{m_1},\cdots<v_{k_{m_{N_k}}}\cdots v_{k_e}>\subset r_{m_{N_k}}$。

依次考虑上文提到的三个准则，可以分别建立相应的目标函数。

1) 基于准则 I 时间最少的目标函数：

$$Min \qquad t_k^{(r)} \qquad\qquad \cdots(3)$$

其中，

$$t_k^{(r)}=(N-1)\cdot t_1+N_k\cdot\Delta t_{11} \qquad (r=1,2\cdots6)$$

t_1表示相邻公汽站平均行使时间，Δt_{11}表示公汽换公汽平均耗时；

2) 基于准则 II 花费最少的目标函数：

$$Min \qquad \cos t_k^{(r)} \qquad\qquad \cdots(4)$$

其中，

$$\cos t_k^{(r)}=\sum_{n-1}^{N_k+1}\left(1+\left(\frac{\max\{num(n)-20,0\}}{num(n)-20}+\frac{\max\{num(n)-40,0\}}{num(n)-40}\right)\cdot\min(p_{m_n},1)\right)$$

上式表示从起点到终点的票价总额，$num(n)$表示$<v_{k_{m_{n-1}}}\cdots v_{k_{m_n}}>$中站点的个数，$p_{m_n}$表示路径上第$n-1$到第$n$段的售票方式，$p_{m_n}=0$表示单一票价，$p_{m_n}=1$表示分段计价；

3) 基于准则 III 综合最佳的目标函数：

$$Max \qquad \varphi(T_{N_ik}^{(r)}) \qquad\qquad \cdots(5)$$

$\varphi(T_{N_ik}^{(r)})$的表达式见(2)，$N_i\in[N_a',N_b']$。

4.3.2 两种求可行解算法

i) 广度优先搜索算法：

设任意一组起止点为(v_s,v_t)，算法基本思想：

step 1：经过v_s的所有线路的集合为$l_s=<p_{s_1}\cdots p_{s_{m_1}}>$，类似的，经过$v_t$的所有线路的集合$l_t$。如果$l_s\cap l_t\neq\Phi$，则说明$v_s,v_t$之间可以直达（换乘 0 次），直

达的所有线路记为 $P_0 = \{p_{01}, p_{02} \cdots p_{0k_1}\}$；

step 2：取 l_s 中的 p_{s_1}， p_{s_1} 对应的站点集合 $r_{s_1} = < v_{s_{11}}, v_{s_{12}} \cdots v_{s_{1m_2}} >$，遍历 r_{s_1} 中的所有站点，每个站点对应的线路集合分别为 $l_{s_{11}}, l_{s_{12}} \cdots l_{s_{1m2}}$， 如果 $l_{s_{1n}} \cap l_t \neq \Phi$，则说明 v_s, v_t 之间可以通过换乘一次车到达，记录换车站点 $v_{s_{1n}}$ 以及 $l_{s_{1n}}$ 与 l_t 相交的线路。遍历完 $p_{s_1} \cdots p_{s_{m_k}}$ ，记录所有可行的换车站点及对应的两条线路，存于数组 $P_1 = \{\{p^{(1)}_{1s_1}, v_{1s_1}, p^{(2)}_{1s_1}\}, \{p^{(1)}_{1s_2}, v_{1s_2}, p^{(2)}_{1s_2}\} \cdots \{p^{(1)}_{1s_{m_3}}, v_{1s_{m_3}}, p^{(2)}_{1s_{m_3}}\}\}$;

step 3：以通过起点的所有车次上的所有站点作为起点，以原终点为终点，重复 *step* 2，若两站可以通过换两次车到达，则可以找到两个换乘点及三条乘车线路并且存于一个五列的数组 P_2，形式类似 P_1；

依次类推；

理论上可以根据上面的算法利用递归思想求出换三次车以及三次以上的可行路线及换乘站点。但是实际中由于算法的时间复杂度太大，该算法求解换乘三次或三次以上是不适合的。

ii) 基于线路邻接矩阵的改进算法

把每条公交线作为图中一个顶点，任意两条公交线路之间的关联性取决于两者之间是否存在交点(即共同的停靠站点),做出线路的邻接矩阵，其中每一个元素可以表示为 $l_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad r_i \cap r_j \neq \Phi \quad \forall i, j \in m \\ 0 & otherwise \end{cases}$，公交路线路系统可以抽象为 $m \times m$ 阶邻接矩阵，可以借用邻接矩阵的特性和算法，来解决公交线路换乘问题。

我们将上下行区间相同、上下行区间不同、环线三种类型公交线路分别处理成一条线路、两条线路和一条线路的形式。在实现公交换乘前，我们估计公交系统中各站点互相到达最大的换乘数。因为公交线路是经过严格规划好的，而且换乘次数过大没有任何现实意义,故假设为 4。

分别建立矩阵 L、L^2、L^3、L^4。关于矩阵 L^n 的计算，根据 $L^n = L * L \cdots L = L^i * L^{n-i}$，乘积后得到的 l_{ij} 如果不为 0，则一律赋值成 1，否则不变。不妨设起点和终点对为 (v_i, v_j),算法的基本思想：

step 1：将原始的公汽线路信息，转化成线路—站点的矩阵 $R_{918 \times 100}$，判断线路之间是否存在交点，得到线路的邻接矩阵 $L_{918 \times 918}$，计算 $L^n(n = 1,2,3,4)$；

step 2：对于给定的起点和终点，分别找到经过的公交路线，求出二者的线路有序对；

step 3：根据邻接矩阵 L^n 查出所有数对值。根据起点终点对为 (v_i, v_j),如果 A 中 l_{ij} =1，则 v_i 只需换乘一次可到达 v_j，否则查找 L^2 中 l_{ij} 是否为 1，如果为 1，则 v_i 只需换乘二次可到达 v_j，如果为 0，则继续查找 L^3

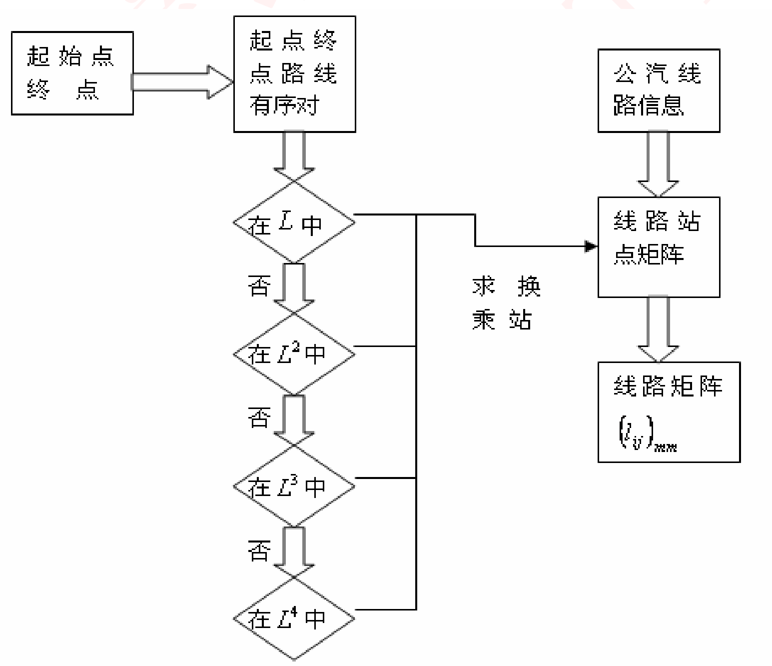
依此类推

换乘路线以及换乘站的求解算法：

step 1：若换乘一次，即 L 中 j 值即换乘路线的线路；若换乘两次，则在矩阵 L 的第 i 行，遍历除去对角线外所有不为 0 的顶点，得到线路集合 $P'\{l_{ij_1}, l_{ij_2} \cdots l_{ij_k}\}$，在 P' 中每一条线路 l_{ij_x} $(1 \le x \le k)$，查找第 j_x 行 $l_{j_x j}$ 的值；如果 $l_{j_x j}$ 等于 1，则值 j_x 是某条换乘路线的线路，否则不是换乘线路，继续寻找 $l_{ij_{x+1}}$；若换乘三次，则先转换成换乘两次，得到的 j_x 值，继续遍历该行除对角线外的为 1 的顶点 $l_{j_x j_y}$，这些顶点关于对角线对称的行中，只要满足 $l_{j_y j} = 1$,则求出换乘路线

step 2：得到换乘路线之后，在线路—站点矩阵 $R_{918\times100}$ 中，找出线路之间的公共交点，即换乘站点。

以下是邻接矩阵的程序流程图：



程序流程图

因此我们可以从邻接矩阵的改进算法中得到换乘路线以及换乘站，从而考察

某种公交路线的优劣性。

4.3.3 问题一具体算例的求解

利用上述两种算法对题目中所给的数据进行求解，取参数$\alpha=\beta=0.5$，可分别得到不同换车次数下的可行解，再对可行解进行选优，利用*matlab*编程可得出答案，由于根据各准则算出的结果可能不是惟一的路线，例如准则 II 得到的最佳线路就通常有很多条，因此这里只列出在各准则下求出的一条最佳乘车线路，具体结果如下表：

算例起止点 S3359，S1828	换乘路线	时间(分钟)	费用(元)
准则 I	L015…(S2903)…L027…(S1784)…L167	73	3
准则 II	L015…(S2903)…L027…(S1784)…L167	73	3
准则 III	L436…(S1784)…L167	101	3

算例起止点 S1557，S0481	换乘路线	时间(分钟)	费用(元)
准则 I	L84…(S1919)…L189…(S3186)…L460	106	3
准则 II	L84…(S1919)…L189…(S3186)…L460	106	3
准则 III	L84…(S1919)…L189…(S3186)…L460	106	3

算例起止点 S0971，S0485	换乘路线	时间(分钟)	费用(元)
准则 I	L013…(S1609)…L140…(S2654)…L469	106	3
准则 II	L013…(S1609)…L140…(S2654)…L469	106	3
准则 III	L013…(S2184)…L417	128	3

算例起止点 S0008，S0073	换乘路线	时间(分钟)	费用(元)
准则 I	L43…(S1383)…L296…(S2184)…L345	67	3
准则 II	L159…(S2633)…L474	83	2
准则 III	L159…(S2633)…L474	83	2

算例起止点 S0148，S0485	换乘路线	时间 (分钟)	费用 (元)
准则 I	L308…(S0036)…L156…(S2210)…L417	106	3
准则 II	L308…(S0036)…L156…(S2210)…L417	106	3
准则 III	L308…(S0036)…L156…(S2210)…L417	106	3

算例起止点 S0087，S3676	换乘路线	时间 (分钟)	费用 (元)
准则 I	L021…(S0088)…L231…(S427)…L97	46	3
准则 II	L454…(S3496)…L209	65	2
准则 III	L454…(S3496)…L209	65	2

4.3.4 问题一结果的说明与分析

上面的结果给出了在不同准则下的最佳乘车线路。

准则 I 求出的最佳线路是在我们考虑的换乘范围内，所有可行线路中时间最优的线路，不考虑换乘次数的不同；

准则 II 求出的最佳线路是在我们考虑的换乘范围内，所有可行线路中时间最优的线路，不考虑换乘次数的不同；

准则 III 是综合了各种影响因素给出的最优乘车线路，在换乘次数i不同的情况下，由于不同换乘次数对应的$\eta(i)$相差很大(2~3 倍)，所以最优乘车线路首先以换乘次数少为原则，换乘次数相同的情况下再考虑时间和花销的影响，这也符合一般人的心理。

4.4 问题二的建模及求解

4.4.1 线路及站点加入地铁后的处理

将两条地铁线路和地铁站点分别加入到公交站点集合和公交线路集合当中去，将地铁和公交视为同等的地位。本文将地铁两条线路看成分解为四条线路(考虑方向)加入到公交线路集合P当中，地铁站点同样的加入到公交站点V集合中，相应的线路—站点集合R和站点—线路集合L也要相应的变化。若地铁线路q_s上的地铁站u_i对应公汽线路p_r上的公汽站v_j，则$l_s' = l_s \cup \{v_j\}$，$r_i' = r_i \cup \{p_r\}$，$l_r' = l_r \cup \{u_i\}$，$r_j' = r_j \cup \{q_s\}$。

4.4.2 问题二模型的建立

考虑到地铁两条线路换乘对乘客心理影响程度与其它的换乘方式对心理影响程度不同，选择了乘坐地铁的乘客通常不会在意地铁线路之间的换乘，因此地铁线路之间的换乘对人心理的影响程度很小，为简化模型，我们假设乘客对于地

铁之间的换乘完全可以接受，即地铁间的换乘只考虑对总时间的影响，不考虑对乘客心理接受程度η的影响。

设$T_l=<v_{l_1},v_{l_2}\cdots v_{l_e}>$为某两点$v_{l_1},v_{l_e}$间的任一条可行路径，$N_1$为该路径经过的公交站点数，$N_2$为该路径经过的地铁站点数，$N_{l_1}$为该路径上公汽换公汽的换乘次数，$N_{l_2}$地铁换地铁的换乘次数，$N_{l_3}$为公汽换地铁的换乘次数，$N_{l_4}$为地铁换公汽的换乘次数，$v_{l_{m_1}},v_{l_{m_2}}\cdots v_{l_{m_{N_{L1}+N_{L2}+N_{L3}+N_{L4}}}}$为换乘站点，$<v_{l1}\cdots v_{l_{m_1}}>\subset r'_{m_1},\cdots<v_{l_{m_{N_{L1}+N_{L2}+N_{L3}+N_{L4}}}}\cdots v_{l_e}>\subset r'_{m_{N_{L1}+N_{L2}+N_{L3}+N_{L4}}}$。

根据上文 4.2 提出的准则，给出最佳路线的目标函数：

1) 基于准则 I 时间最少的目标函数：

$$Min \quad t_l^{(r)'}$$

其中,

$$t_l^{(r)'}=(N_1-1)\cdot t_1+(N_2-1)\cdot t_2+N_{l_1}\cdot\Delta t_{11}+N_{l_2}\cdot\Delta t_{22}+N_{l_3}\cdot\Delta t_{12}+N_{l_4}\cdot\Delta t_{21}$$

t_1表示相邻公汽站之间的行车时间，t_2表示相邻地铁站之间的行车时间

Δt_{11}、Δt_{22}、Δt_{12}、Δt_{21}分别表示公汽换公汽，地铁换地铁，公汽换地铁，地铁换公汽所用时间。

2) 基于准则 II 花费最少的目标函数：

$$Min \quad \cos t_l^{(r)'}$$

其中，$\forall v_{l_{m_i}}\in<v_{l_{m_{n-1}}}\cdots v_{l_{m_n}}>$时,若均有$v_{l_{m_i}}\in V$，说明第$n-1$到第$n$段乘车方式为公汽，则：

$$\cos t_{l_n}^{(r)'}=1+(\frac{\max\{num(n)-20,0\}}{num(n)-20}+\frac{\max\{num(n)-40,0\}}{num(n)-40})\cdot\min(p_{m_n},1)$$

$num(n)$，p_{m_n}的意义与前文 4.3.1 相同,否则第$n-1$到第n段乘车方式为地铁：

$$\cos t_{l_n}^{(r)'}=3$$

那么

$$\cos t_{l_n}^{(r)'}=\sum_{n=1}^{N_{L1}+N_{L2}+N_{L3}+N_{L4}+1}\cos t_{l_n}^{(r)'}$$

3) 基于准则 III 综合最佳的目标函数：

$$Max \qquad \psi_{N_i l}^{(r)} \qquad \cdots(6)$$

(6)式与问题一给出的目标函数具有相同的意义。

4.4.3 问题二的求解算法

i) 利用已有算法求解：求可行解的过程可以利用问题一给出的两种算法，求出可行的乘车线路及其对应的换乘站点。然后根据给出的三条最优准则求出各条准则下的最优乘车路线。

ii)对寻优过程的简化：由于前面一问已经求出只乘公汽的任意两点间的最佳线路，因此只要取出可行的换乘站点中包括地铁站点的可行解，在这些可行解中寻优，得到的较优解与前文不乘地铁的最优解进行比较，其中的更优解即为我们此问要找的最优解。

4.4.4 问题二具体算例的求解

第一到第五组数据根据各种准则求出的最佳乘车路线与第一问求出的最佳路线完全相同，不再列出，由第六组数据求出的最佳乘车线路为：

算例起止点 S0087，S3676	换乘路线	时间 (分钟)	费用 (元)
准则 I	T2 直达	28	3
准则 II	L454…(S3496)…L209	65	2
准则 III	T2 直达	28	3

4.5 问题三模型的建立

4.5.1 问题三的分析

假设任意两站点之间可以通过步行到达，且步行需要的时间已知，在同时考虑公汽、地铁以及步行的情况下，如何选择任何两站点之间的最佳路线？

通过上面两个问题的分析，我们已经解决了两种公交工具同时存在于公交网络中时的最佳路线选择问题，考虑步行因素的加入，可能出现通过步行将相隔很近但公交联系并不发达的两地联系起来从而得到更优线路的情况。

由于步行需要耗费乘客的体力，考虑乘客的承受力有限，规定一个有限的时间值δ，认为当两站点间的步行时间小于δ时，两站点之间可以通过步行直接相连接，否则认为两站点之间是不能通过步行直接连接的。而且根据普通人对步行的接受能力，我们模型假设步行次数≤ 1

对于步行，我们可以把它看成是和公汽、地铁类似的交通工具。根据假设，“步行”具有换乘次数≤ 1，满足“行驶时间”小于δ的性质。在前面两问中我们准确求解出起止点之间的最佳路线，问题三里增加了一种短程的交通工具，可以方便我们模型求解出哪些站点选择乘车、坐地铁、或步行的最佳路径。

4.5.2 模型的准备

设任意两站点v_i,v_j间的步行时间为w_{ij}，如果$w_{ij}<\delta$，则i,j之间有“步行”这种公交方式连通，记为线路$\tilde{p}_{ij}$，则加入步行后的公交网络可表示为$\Omega''=\{V'',P'',R'',L''\}$，$V''=V'$，$P''=P'\cup\{\tilde{p}_{ij}\mid(i,j)\in\{(i,j)\mid w_{ij}<\delta\}\}$，$R''=R'\cup\{r_{ij}\mid(i,j)\in\{(i,j)\mid w_{ij}<\delta\}\}$，$r_{ij}=<v_i,v_j>$，$L''=\{l''_s\mid s=1,2\cdots I\}$，$l''_s=l'_s\cup\{p_{sk}\mid(s,k)\mid w_{sk}<\delta\}$，这样加入步行后的公交网络可以被惟一表示出来。

4.5.3 问题三模型的建立

设加入步行后，$T_w=<v_{w_1},v_{w_2}\cdots v_{w_e}>$为以$w_1,w_e$为起止点的任一可行路径，换乘次数为$N_w$，则$<v_{w_1}\cdots v_{w_{k_1}}>\subset r_{k_1},<v_{w_{k_1}}\cdots v_{w_{k_2}}>\subset r_{k_2}\cdots<v_{w_{kN_w-1}},v_{w_{kN_w}}>\subset r_{k_{N_w}}$，此路径中共有$N_R$种换乘方式，记$N_{w_{\varphi i}}$为第$\varphi$种换车方式的换车次数，$\Delta t_\varphi$为第$\varphi$种换车方式的换车时间，$r_{k_t}$代表的交通方式经过一站地的时间为$t_{k_t}$。

则该可行路径所用的总时间为：

$$t_w=\sum_{\varphi=1}^{N_R}N_{W_\varphi}\cdot\Delta t_\varphi+\sum_{t=1}^{N_w}(k_t-k_{t-1})\cdot t_{k_t}$$

$\forall v_{w_{k_i}}\in<v_{w_{k_{n-1}}}\cdots v_{w_{k_n}}>$时,若均有$v_{w_{k_i}}\in V$，说明第$n-1$到第$n$段乘车方式为公汽，则$\cos t_{w_n}=1+(\frac{\max\{num(n)-20,0\}}{num(n)-20}+\frac{\max\{num(n)-40,0\}}{num(n)-40})\cdot\min(p_{mn},1)$

$\forall v_{w_{k_i}}\in<v_{w_{k_{n-1}}}\cdots v_{w_{k_n}}>$时,若均有$v_{w_{k_i}}\in V'\wedge v_{w_{k_i}}\notin V$，说明第$n-1$到第$n$段乘车方式为地铁，则 $\cos t_{w_n}=3$。

其他情况$\cos t_{w_n}=0$，那么该路径的总花销为：

$$\cos t_w=\sum_{n=1}^{N_W}\cos t_{w_n}$$

根据 4.1 的综合评价函数

$$\psi(T_w)=\eta(N_w)\cdot\frac{1}{\tilde{t}_w}$$

其中

$$\tilde{t}_w = \alpha \cdot t_w + \beta \cdot t'(\cos t_w)$$

$$\alpha + \beta = 1$$

综上，问题三的最优化问题的目标函数为：

$$Max \qquad \psi(T_w)$$

5．模型的灵敏度分析

对于问题一的模型，考虑乘车费用的变化对模型最优解的影响。

I.以花费时间最少为目标函数，由消耗时间函数 $t^{(r)}{}_k = (N-1)\cdot t_1 + N_k \cdot \Delta t_{11}$ 知道，乘车费用变量不含在表达式中，所以模型最优解没有变化；

II.以乘车费用最少为目标函数

1)全部公交汽车均提价或降价，则 $\cos t_k^{(r)}$ 的值增大，即乘车费用函数

$$\cos t_k^{(r)} = \sum_{n=1}^{N_K+1}(1+(\frac{\max\{num(n)-20,0\}}{num(n)-20}+\frac{\max\{num(n)-40,0\}}{num(n)-40})\cdot\min(p_{m_n},1))$$

对于任意确定的 k 值，$\cos t_k^{(r)}$ 均随均价增大而增大或随均价减小而减小。所以乘车费用的改变对于最优解没有影响，只是影响目标函数值。

2)仅某线路的乘车费增加，若此线路的费用增加，则包含此路线的最优解将会变成非最优解，最优解的数目会减少，比如 L231 路线费用增长到 2 元，则从 $S0087$ 到 $S3676$ 的某一最优线路 $L206-L231-L097$ 所需费用将由原来的 3 元变成 4 元，不再是最优解；仅某线路的乘车费减少，若原始最优解包含此路线，则新的最优解中将仅含有包含此路线的原始最优解；若原始最优解中不包含此条路线，则当此路线减少的价格大于一元时，最优解的个数可能增加。

再考虑平均的公汽换乘时间的变化对模型最优解的影响

I.以花费时间 $t^{(r)}{}_k$ 最少为目标函数

1)对于固定换乘次数，即 N_k 不变， $t^{(r)}{}_k$ 对于任意的 k 变化一样,所以最优解不变，但是目标函数值减少了，最优解对换乘时间变化不敏感；

2)对于不同换乘次数， $\frac{dt_k^{(r)}}{d\Delta t_{ll}} = N_k$，即最优时间的变化与换乘时间的变化是和换乘次数呈正比的，若换乘时间减少，则换乘次数多的解可能变成最优解；若换乘时间增加，则换乘次数少的解可能变成最优解，而换乘次数多的最优解可能变成非最优解，但是其最优解对换乘时间并不敏感。对于起止点为 $S0971$ 和 $S0485$ 的花费时间最少的最优换乘线路为 $L13-L140-L469$，所需时间为 106 分

钟，而要使其最优解改变所需的最小换乘时间要增加 22 分钟，最优解变为换乘一次的 $L13-L417$，由此也可见换乘时间对以花费最小为目标函数的最优解影响很小。

II.若以费用最少为目标函数，则换乘时间不影响其最优解；

最后，考虑公汽站与站之间的平均行驶时间变化对模型最优解的影响

若所有线路的行驶时间均同时变化，则对于无论花费时间最少还是乘车费用最少的目标函数都没有影响；若单一线路的站与站行驶时间变化则可能影响以花费时间最少为目标函数的最优解。

6．模型评价

我们的模型对问题一进行了合理的简化，重点考虑了换乘次数对最优路线的影响，先确定题目所给六组起止点换乘次数的上界和下界，然后由模糊隶属函数半柯西分布给出乘客对换乘次数的心理变化曲线，从而确定六组起止点的换乘次数范围。对于问题一建立的模型，我们分别考虑了以花费时间最少，乘车费用最少，以及自定义评价函数为目标进行求解。求解的结果表明了自定义评价函数的合理性

对于问题二和问题三，我们将地铁、步行与公汽三者统一起来，建立了问题一的推广模型。推广模型可以看成是任意两点之间交通方式和最佳线路的选择模型，具有普遍适用的意义。对于问题一的模型求解，我们给出了两个算法，它们都可以给出固定换乘次数下的全局最优解。广度优先搜索算法的时间复杂度比较高，但是在换乘次数小于三次的情况下，并不敏感。基于线路邻接矩阵的改进算法，相对于广度优先搜索算法降低了时间复杂度，并且能够迅速给出可选择换乘线路。但是两种算法在站点数很大的时候，时间复杂度会很大使运算时间增加。

模型对换乘次数的简化会减少可行解的数目，更坏的情况是会减少以花费时间最少为单目标的最优解。本模型考虑的只是换乘时间为平均时间，每两个相邻站之间的公汽行驶时间为平均时间的时候的最优解，可考虑换乘时间，公汽相邻站的行驶时间为随机变量的模型。

7．参考文献

[1]朱江云 王玉琨，《基于最小换乘次数的最优路径算法》，《福建电脑》， 第 3 期，2007 年

[2]宁宣熙 《运筹学实用教程》，北京，科学教育出版社，2007 年

[3]赵巧霞 张发，《以最小换乘次数和站数为目标的公交出行算法》，《计算机应用》，24 卷 12 期，2004 年

[4]诸静 《模糊控制理论与系统原理》，北京，机械工业出版社，2005 年

[5]流云生 陈晶 《一种基于 WebGIS 的加权最佳换乘算法与实现》， 《计算机仿真》，第 23 卷第 10 期，2006 年

[6]姜启源 《数学模型》，北京，高等教育出版社，2003 年