公交网的路线选择模型

摘要

论文首先从表格中提取线路信息，基于图的理论构造了邻接矩阵和可达矩阵，在此基础之上模拟出了公汽——公汽、公汽——地铁、公汽——地铁——步行三个公交网络，得到了三个网络的线路属性；然后提出了多目标优化的数学模型，编程求解依据我们变形后的 CSI 准则进行最优路线的评判，若 Δ 的值越趋于零则证明该路线越优。

我们采用基于夹逼序列的动态规划算法分层搜索目标下的最优解，得到的结果如下：(说明：1、L436-S1784-L217 表示乘客首先在 S3359 站乘坐 L436 路到达 S1784 站换乘 L217 路到达 S1828；2、“+”号表示公汽换乘公汽的耗时)

问题一：

始终点	线路	总时间（分）	总票价元）
S3359-S1828	L484-S2027-L201-S458-L41	63+10	3
S1557-S0481	L363-S1919-L417-S2424-L516	102+10	3
S0971-S0485	L263-S1609-L140-S2654-L469	96+10	3
S0008-S0073	L463-S1383-L296-S2184-L345	57+10	3
S1048-S0485	L308-S36-L156-S2210-L417	96+10	3
S0087-S3676	L454-S541-L120-S236-L462	42+10	3

问题二：

始终点	线路	总时间（分）	总票价（元）
S3359-S1828	L324-S1746-L27-S1784-L167	63+10	3
S1557-S0481	L84-S1919-L189-S3186-L91-S903-L254	84+15	4
S0971-S0485	L94-S567-D1-T1-D21-S46-L51	83+13	5
S0008-S0073	L355-S2303-L296-S2184-L345	60+10	4
S1048-S0485	L308-S302-D407-T1-D21-S466-L51	63+18	5
S0087-S3676	D27-T2-D36	24+13	3

然后我们用改进后的Dijkstra算法对问题一的求解结果进行了检验，肯定我们的模型能有效且快速的提供最优线路。

关键字：

动态规划，最短路径，Dijkstra 算法，CSI 准则

1 问题重述：

随着 29 届奥运会的临近，大量的观众要到现场观看比赛，出行成为人们考虑的重要问题。将会有很大的比重的人选择公共交通的出行方式，因此完善城市公交查询系统迫在眉睫。

理想的情况是，公交查询系统针对不同的查询者提供满意的公交路线，这样的系统，其核心是线路选择的模型与算法。

需要解决的问题：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公共汽车站点线路选择问题的一般数学模型与算法。并依据附录数据，给出 6 对起始站——终点站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）。

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决上述问题。

3、在知道所有站点之间的步行时间，给出任意两站点间线路选择问题的数学模型。

2 问题分析：

模型由查询系统的查询准则与方法抽象而来，我们需要考虑的是：

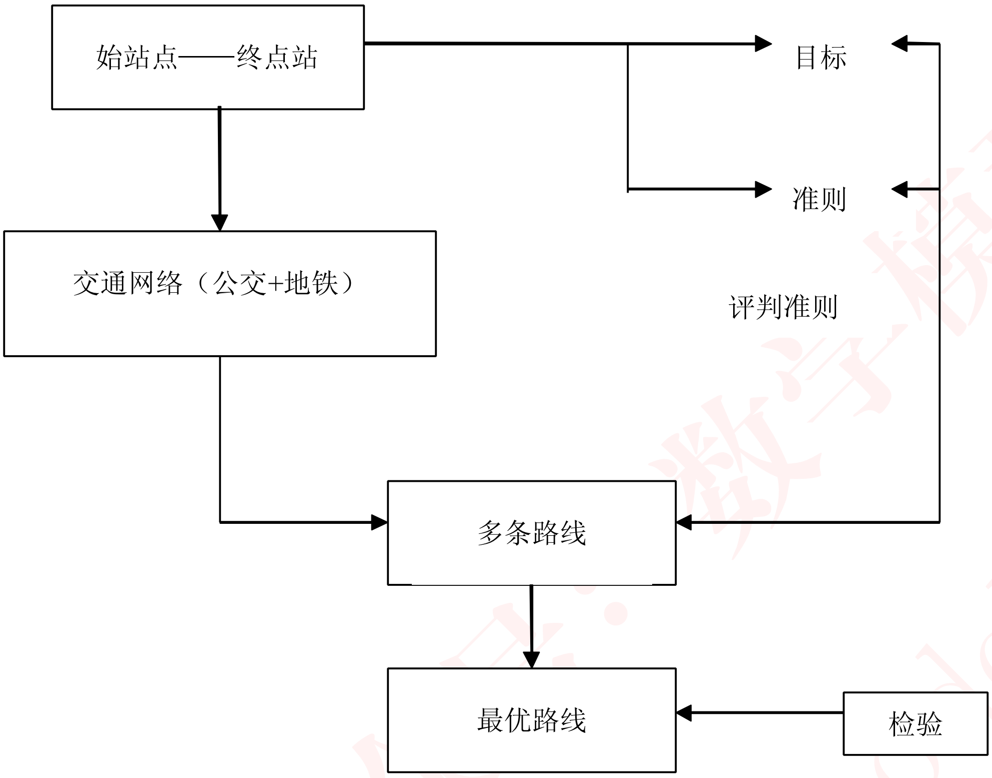
1、依据公交网络的信息快速正确提供给查询者一条或多条路线，如何抽象出这个公交网络？

2、针对不同的查询者给出各条路线的优劣排序，以及每一条线路的详细信息，在此基础上建议一条最“好”的线路，如何定义最“好”？

解决第一个问题，先要对数据进行预处理，得出一步抵达矩阵从中抽出一个公交网络的雏形；然后在此基础上考虑换乘的情况，构造换乘多次的公交网络及其属性；刻画这个公交网络每一条线路的基本信息。

第二个问题涉及评判准则，我们针对人们对线路的基本要求（时间、票价），确定准则，并据此对已经得到的可行路线进行综合排序，为查询者建议最满意的路线。

整个的过程如下：



3 模型建立

3．1　基本符号约定：

i　公交网络中的一个站点 i

num　公交网络中站点数（3957）

l　公交网络中的一条公汽线路 l

$line$　公交网络中的线路数（520）

k　一条乘车线路中的换乘次数

l_{ij}^{h}　第 h 条公交线路 l^{h} 是否同时经过 i、j 站；$l_{ij}^{h} \neq 0$ 则该线路同时经过 i 与 j 站；$l_{ij}^{h} = 0$ 则该线路不同时经过 i 与 j 站

$\lambda(l)$　公汽线路 l 的票价规则，$\lambda = 0$ 表示公汽线路 l 采用单一票价制；$\lambda = 1$ 表示公汽线路 l 采用分段票价制

$f(l_{ij}^{h})$　线路 l^{h} 上 i、j 站的票价

l_{hi}　站点 i 是第 h 条公交线路 l^{h} 的某一站

η_{ij}^{k}　从站点 i 在换乘 k 次后能否到达 j 站

Ω^k　　是一个由元素η_{ij}^k构成的可达矩阵矩阵

$s_h^k(i,j)$　　从站点i 在换乘k次后到达j站的第h条路线

$S_n^k(i,j)$　　从站点i 经过k次换乘到达j站的所有路线，共有n条

$$S_n^k(i,j)=\left\{s_h^k(i,j)\,|\,0\le h\le n\right\}$$

$\Psi(m)$　　公交网络$\Psi(m)$中，其中的路线最多有m次换乘

$S_{ij}(m)$　　公交网络$\Psi(m)$中，能够从站点i 到达j站的所有路线

W_{ij}^m　　公交网络$\Psi(m)$中，能否从站点i 到达j站

$T(s_{ijh}^k)$　　从站点i 经过k次换乘到达j站的第h条路线的总平均耗时

$m(s_{ijh}^k)$　　从站点i 经过k次换乘到达j站的第h条路线的总票价

t　　公汽线路l上（下）行线的第j站到第$j+1$站平均行驶时间

t_1　　公汽换乘公汽的平均耗时（/次）

t_{1f}　　公汽换乘公汽的步行时间（/次）

t_f　　一次乘车中的步行总时间

3．2　基本模型假设：

1、人群到达i 站是均匀的，不会发生因为车辆拥挤而等待下一辆公车
2、不考虑车流高峰期对公车行使时间的影响
3、票价视为不会变动，不存在公交卡打折付费，不存在1.2m以下儿童或者是退休人员的免费票

3．3　模型准备：

1、l_{hi}　站点i 是第h条公交线路l^h的某一站

$$l_{hi}=\begin{cases}k & i\text{是公交线路}l^h\text{上行的第}k\text{站}\\ 0 & i\text{不是公交线路}l^h\text{上的站点}\\ -k & i\text{是公交线路}l^h\text{下行的第}k\text{站}\end{cases}$$

2、$s_{ijh}^k=\left\{l^{h1}(ii_1),l^{h2}(i_1i_2),\cdots,l^{hk}(i_{k-1}i_k),l^{h(k+1)}(i_kj)\right\}$

表示从站点i 经过k次换乘到达j站的第h条路线：先在站点i 乘坐l^{h1}路公交到达i_1站，然后第1次换乘l^{h2}路公交到达i_2站，……，第k次在i_k站换乘$l^{h(k+1)}$到达j站；l^{h1}表示

在第 h 条路线中乘坐的第一辆公交车

3、$f(l_{ij}^h)$　线路 l^h 上 i、j 站的票价

$$f\left(l_{ij}^h\right)=\begin{cases} 0 & l_{ij}^h=0 \\ 1+\left\lfloor \dfrac{|i-j|}{20} \right\rfloor \cdot \lambda(l^h) & 21\le |i-j| \le 39 \\ 1+3\cdot\lambda(l^h) & |i-j|\ge 40 \end{cases}$$

4、W_{ij}^m　公交网络 $\Psi(m)$ 中，能否从站点 i 到达 j 站

$$W_{ij}^m=\begin{cases} 0 & i\text{不能到达}j \\ 1 & i\text{能到达}j \end{cases}$$

5、若 $\sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}\neq 0$，则 $l_{ij}^h\neq 0$，否则 $l_{ij}^h=0$；

$l_{ij}^h\neq 0$ 则该线路同时经过 i 与 j 站；$l_{ij}^h=0$ 则该线路同时经过 i 与 j 站

矩阵 $\Omega^0=\left\{\eta_{ij}^0 \mid 1\le i,j\le num\right\}$

$$\eta_{ij}^0=\begin{cases} 0 & \sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}=0 \ \ or\ i=j \\ 1 & \sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}\neq 0 \end{cases}$$

则可达矩阵

$$\Omega^m=\left\{\eta_{ij}^m \mid \ 1\le i,j\le num\right\},$$

$$\eta_{ij}^m=\begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^{num}\eta_{ik}^{m-1}\cdot\eta_{kj}^0=0 \\ 1 & \sum_{k=1}^{num}\eta_{ik}^{m-1}\cdot\eta_{kj}^0\neq 0 \end{cases}$$

6、由邻接矩阵求可达矩阵的方法[1]：

邻接矩阵定义：

设有向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{V1,V2,\cdots,Vn\}$，令 a_{ij} 为关联 vi 与 vj 的边的条数

则称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为 G 的邻接矩阵

可达矩阵定义：对于上面的有向图 $G=\langle V,E\rangle$， $V=\{V1,V2,\cdots,Vn\}$，令

$p_{ij}=\begin{cases}0 & 从vi到vj存在通路\\ 1 & 从vi到vj不存在通路\end{cases}$，则称矩阵 $P(G)=(p_{ij})_{n\times n}$ 为图 G 的可达矩阵

可达矩阵表明了图中任意两个结点间是否存在通路以及在任何结点上是否存在回路，在讨论可达时只关心 vi 到 vj 是否有通路。

定理一　　在一个具有 n 个结点的图中，若从 vi 到 vj $(i\neq j)$ 存在一条通路，则从 vi 到 vj 存在一条长度不大于 $n-1$ 的基本通路

证明　如果从结点 vj 到 vk 存在一条通路，该路上的结点序列是 $vj\cdots vi\cdots vk$，如果在这条路中有 m 条边，则序列中必有 $m+1$ 个结点。若 $m>n-1$，则必有结点 vs，它在序列中不止一次出现，即必有结点序列 $vj\cdots vs\cdots vs\cdots vk$。在路中去掉 vs到vs 的这些变，仍然是 vj 到 vk 的一条路，但是此路比原来的边数要少。如此重复进行下去，比可得到一条从 vj 到 vk 的不多余 $n-1$ 条边的路。

定理二　　社 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵，则 $A(G)^l$ 中的第 i 行， j 列元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 G 中连接 vi 与 vj 的长度为 l 的路的条数。

证明　对 l 用数学归纳法。

1、当 $l=2$ 时，由此可知定理显然成立；

2、设该命题对 l 成立，由 $A(G)^{l+1}=A(G)\cdot A(G)^l$，故有 $a_{ij}^{(l+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}\cdots(*)$，根据邻接矩阵定义 $a_{kj}^{(l)}$ 表示联结 vj 与 vk 的长度为 l 的路的数目，故 $(*)$ 式右端的每一项表示由 vj 经过一条边到 vk，再由 vk 经过一条长为 l 的路到 vj 的总长度为 $l+1$ 的路的数目，对命题对 $l+1$ 成立。所以命题正确。

算法　由以上两个定理即得 $B_n(G)=A(G)+\left(A(G)\right)^2+\cdots+\left(A(G)\right)^n$，然后把 $B_n(G)$ 中的非零元素换为1，而零元素不变，即可得到 G 的可达矩阵 $P(G)$。（其中，$\left(A(G)\right)^k$ 是 $A(G)$ 的 k 次幂矩阵）

3．4　问题一模型建立：

1、针对 520 条线路，3957 个公汽站，建立线路——站点直达矩阵 L，过程如下：

Step1：把所有分为上下行的线路选择出来，根据数据对元素赋值：

如果站点 j 是上行线路 l_i 的第 k 站，则标记矩阵元素 $l_{ij}^{上}=k$；

$k=0$ 表示公汽线路 l_i 上行线不经过第 j 站；

记该矩阵为 $L^{上}$ ；标记 $\gamma=1$；

Step2：把所有分为上下行的线路选择出来，根据数据对元素赋值：

如果站点 j 是下行线路 l_i 的第 k 站，则标记矩阵元素 $l_{ij}^{下}=-k$ ；

$-k=0$ 表示公汽线路 l_i 下行线不经过第 j 站；

记该矩阵为 $L^{下}$ ；标记 $\gamma=-1$；

Step3：找出余下线路中的环行路线，编程分出上下行，依据上面所述的步骤进行矩阵赋值；

Step4：存在个别的单行路线，将其按 step1 的方法处理即全部看作是上行路线，在后续的过程中可以看出这一处理并没有不妥之处。

Step5：记矩阵： $L=L^{上}\cdot\gamma+L^{下}\cdot\gamma$

2、基于直达矩阵 L 建立一个网络的雏形 $\Psi(0)$，其相应网络特性如下：

$$s_h^0(i,j)=\{l_{ij}^h \mid l_{ij}^h\neq 0\};$$

$$若\sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}\neq 0，则 l_{ij}^h\neq 0，否则 l_{ij}^h=0；$$

相应的 $S_n^0(i,j)=\{s_h^0(i,j)\mid 1\le h\le n\}$

可达矩阵 $\Omega^0=\{\eta_{ij}^0 \mid 1\le i,j\le num\}$

$$\eta_{ij}^0=\begin{cases}0 & \sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}=0\ \ or\ i=j\\ 1 & \sum_{h=1}^{line} l_{hi}\cdot l_{hj}\neq 0\end{cases}$$

$$m(s_h^0(i,j))=f(l_{ij}^h)$$

$$T(s_h^0(i,j))=t\cdot|l_{hi}-l_{hj}|$$

$$t_f=0$$

3、建立公汽——公汽的公交网络：

一次换乘的公汽网络 $\Psi(1)$，计算其网络属性，运用前文所述求解转移矩阵的方式来计算，具体公式如下：

$$\Omega^1 = \left\{ \eta_{ij}^1 \mid \quad 1 \le i, j \le num \right\}$$

$$\eta_{ij}^1 = \begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^0 \cdot \eta_{kj}^0 = 0 \\ 1 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^0 \cdot \eta_{kj}^0 \ne 0 \end{cases}$$

据此有：

$$s_h^1(i,j) = \left\{ l^{h1}(iih), l^{h2}(ihj) \mid l_{h1i} \cdot l_{h1ih1} l_{h2ih2} \cdot l_{ih2j} \ne 0 \right\}, \quad ih = 1..num, \text{且} ih \ne i, j$$

上式表示：从 i 站乘 l^{h1} 路到 ih 站，然后在 ih 站乘坐 l^{h2} 路到 j 站； ih 表示该换乘线路的换乘站；

则 $S_n^1(i,j) = \left\{ s_h^1(i,j) \mid \quad 1 \le h \le n \right\}$

$$m(s_h^1(i, j)) = f(l_{iih}^{h1}) + f(l_{ihj}^{h2})$$

$$T\left(s_h^1(i,j)\right) = t \cdot \left| l_{h1i} - l_{h1ih} \right| + t \cdot \left| l_{h2ih} - l_{h2j} \right| + t_1$$

$$t_f(s_h^1(i,j)) = t_{f1}$$

与上述的方法相同，计算二次换乘的公车网络属性参数：

$$\Omega^2 = \left\{ \eta_{ij}^2 \mid \quad 1 \le i, j \le num \right\}$$

$$\eta_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^1 \cdot \eta_{kj}^0 = 0 \\ 1 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^1 \cdot \eta_{kj}^0 \ne 0 \end{cases}$$

$$s_h^2(i,j) = \left\{ l^{h1}(iih1), l^{h2}(ih1ih2), l^{h3}(ih3j) \mid l_{h1i} \cdot l_{h1ih1} \cdot l_{h2ih2} \cdot l_{h2ih3} \cdot l_{h3ih3} \cdot l_{h3j} \ne 0 \right\},$$

$ihk = 1..num, k = 1,2,3 \text{且} ihk \ne i, j$

上式表示：从 i 站乘 l^{h1} 路到 $ih1$ 站，换乘 l^{h2} 路到 $ih2$，然后在 $ih2$ 换乘 l^{h3} 路到达 j 站； $ih1$，$ih2$ 是两个中间换乘站

则 $S_n^2(i,j) = \left\{ s_h^2(i,j) \mid \quad 1 \le h \le n \right\}$

$$① \ m(s_h^2(i, j)) = f(l_{iih1}^{h1}) + f(l_{ih1ih2}^{h2}) + f(l_{ih_2 j}^{h3})$$

$$② \ T\left(s_h^2(i,j)\right) = t \cdot \left| l_{h1i} - l_{h1ih1} \right| + t \cdot \left| l_{h2ih1} - l_{h2ih2} \right| + t \cdot \left| l_{h3ih2} - l_{h3j} \right| + 2t_1$$

$$t_f(s_h^2(i,j)) = 2t_{f1}$$

解释：

① 式右端第一项表示线路 l^{h1} 上从 i 站到 $ih1$ 站的票价；第二项表示线路 l^{h2} 上从 $ih1$ 到 $ih2$ 站的票价；第三项表示线路 l^{h3} 上从 $ih2$ 到 j 站的票价；三者总和表示这一条乘车路线的总票价

② 式有端前三项分别表示线路 l^{h1} 上从 i 站到 $ih1$ 站、线路 l^{h2} 上从 $ih1$ 到 $ih2$ 站、线路 l^{h3} 上从 $ih2$ 到 j 站的时间，三者与两次换乘耗时求和则表示这一条乘车路线的总耗时

可以根据这种方法编程实现公交网络的模拟。

已知一公交网络 $\Psi(m)$，其各个属性为：

$$\Omega^m = \{\eta_{ij}^m \mid \quad 1 \le i, j \le num\},$$

$$\eta_{ij}^m = \begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^{m-1} \cdot \eta_{kj}^0 = 0 \\ 1 & \sum_{k=1}^{num} \eta_{ik}^{m-1} \cdot \eta_{kj}^0 \ne 0 \end{cases}$$

$$W_{ij}^m = \begin{cases} 0 & \sum_{k=0}^{m} \eta_{ij}^k = 0 \\ 1 & \sum_{k=0}^{m} \eta_{ij}^k \ne 0 \end{cases}$$

$S(m \mid (i,j)) = \{S_n^k(i,j) \mid 0 \le k \le m\}$， $S_n^k(i,j) = \{s_h^k(i,j) \mid 1 \le h \le n\}$， T， m， t_f

具体的数学模型如下：

目标　对于网络 $\Psi(m)$ 中的一条线路

$s_h^k(i, j) = \{ l^{h1}(ii_1), l^{h2}(i_1 i_2), \cdots, l^{hk}(i_{k-1} i_k), l^{h(k+1)}(i_k j) \}$ 有：

$$Min \quad T(s_h^k(i,j))$$

$$Min \quad m(s_h^k(i,j)) \quad \text{其中 } k = 0..m$$

$s.t$

$$W_{ij}^m = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$S(m \mid (i,j)) = \{S_n^k(i,j) \mid 0 \le k \le m\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$S_n^k(i,j) = \{s_h^k(i,j) \mid 1 \le h \le n\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

模型解释：

式(1)表明在网络$\Psi(m)$中，至少存在一条换乘路线式的乘客能够从站点 i 到达 j 站；

式(2)、(3)联合表明 S_{ijn}^{k} 是一条从站点 i 到达 j 站的可行路线的乘车方式；

准则：根据顾客对所提供路线基本信息的主观判断提出 CSI 衡量准则[2] ：
考虑到人们对路线的选择主要考虑总耗时、总票价和换乘次数，故对这三个因素分别标准化：

$$CSI=\frac{\sigma-Min(\sigma)}{Max(\sigma)-Min(\sigma)}$$

得到关于该线路一个评价向量 $\vec{c}=\left(CSI(T(s_h^k(i,j))),CSI(m(s_h^k(i,j)))\right)$ 定义指标

$\Delta(s_h^k(i,j))=|\vec{c}|$ 为最终的选择标准，显然 $\Delta(s_h^k(i,j))$ 靠近 0 则该线路越符合乘客的标准，即将该路线定义为最优路线。

3．5　问题二模型建立

3．5．1　追加的符号约定：

$\delta(l)$　标记线路 l 为公交或地铁；$\delta=\begin{cases}0 & 地铁\\ 1 & 公交\end{cases}$

$line$　公交网络中的线路数（520+2）

$\tilde{t}$　地铁线路第 j 站到第 $j+1$ 站平均行驶时间

$\bar{t}$　一次换乘的平均耗时矩阵

t_f　一次换乘的平均步行时间矩阵

（其余符号的意义与前述相同，以上标号表示相应的意义）

3．5．2　模型准备：

记矩阵 $\delta=\begin{pmatrix}00 & 01\\ 10 & 11\end{pmatrix}$，$t_f=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$，$\bar{t}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 5\end{pmatrix}$

解释：

1、若 $\delta(l_1)+\delta(l_2)=0$ 则 $\delta_{11}=00$，表示地铁换乘地铁；$t_f(\delta_{11})=2$ 表示地铁换乘地铁平均步行时间，$\bar{t}(\delta_{11})=4$ 表示地铁换乘地铁平均耗时；

2、若 $\delta(l_1)+\delta(l_2)=1$ 且 $\delta(l_1)=0$ 则 $\delta_{12}=01$，表示地铁换乘公汽；$t_f(\delta_{12})=4$ 表示地铁换乘公汽平均步行时间，$\bar{t}(\delta_{12})=7$ 表示地铁换乘公汽平均耗时；

3、若 $\delta(l_1)+\delta(l_2)=1$ 且 $\delta(l_1)=1$ 则 $\delta_{21}=10$，表示公汽换乘地铁；$t_f(\delta_{21})=4$ 表示公汽换乘地铁平均步行时间，$\bar{t}(\delta_{21})=6$ 表示公汽换乘地铁平均耗时；

4、若 $\delta(l_1)+\delta(l_2)=2$ 则 $\delta_{22}=11$，表示公汽换乘公汽； $t_f(\delta_{21})=4$ 表示公汽换乘地铁平均步行时间， $\bar{t}(\delta_{22})=5$ 表示公汽换乘公汽平均耗时；

3．5．3　模型建立：

1、针对 520+2 条线路，3957 个公汽站，建立线路——站点直达矩阵 $\widetilde{Z}$：

对于地铁的处理方法：

把两条地铁线看作是比较特殊的公车线路记为 $\widetilde{l}_{521}$、$\widetilde{l}_{522}$ 即可，用 δ 标记矩阵 $\widetilde{Z}$ 的行向量则有，$\delta(\widetilde{l}_i)=\begin{cases}0 & i=521\ or\ 522\\ 1 & else\end{cases}$，认为地铁是多站点的，即地铁的一站会通向多个公交站点，据此这多个公交站点赋相同的 k（因为地铁是严格上下行的，故矩阵相应的元素值人为的取上行）值，即可得到矩阵 $\widetilde{Z}$

2、基于直达矩阵 $\widetilde{Z}$ 建立一个网络的雏形 $\widetilde{\Psi}(0)$，其网络特性如下：

若 $\sum_{h=1}^{line}\widetilde{l}_{hi}\cdot\widetilde{l}_{hj}\neq 0$，则 $\widetilde{l}_{ij}^{\,h}\neq 0$，否则 $\widetilde{l}_{ij}^{\,h}=0$

$\widetilde{s}_h^0(i,j)=\left\{\widetilde{l}_{ij}^{\,h}\mid \widetilde{l}_{ij}^{\,h}\neq 0\right\}$

相应的 $\widetilde{S}_n^0(i,j)=\left\{\widetilde{s}_h^0(i,j)\mid\ 1\le h\le n\right\}$

$$\widetilde{\Omega}^0=\left\{\widetilde{\eta}_{ij}^0\mid 1\le i,j\le num\right\}$$

$$\widetilde{\eta}_{ij}^0=\begin{cases}0 & \sum_{h=1}^{line}\widetilde{l}_{hi}\cdot\widetilde{l}_{hj}=0\ or\ i=j\\ 1 & \sum_{h=1}^{line}\widetilde{l}_{hi}\cdot\widetilde{l}_{hj}\neq 0\end{cases}$$

$$\widetilde{m}(\widetilde{s}_h^0(i,j))=f(\widetilde{l}_{ij}^{\,h})\cdot\delta(\widetilde{l}_h)+\left(1-\delta(\widetilde{l}_h)\right)\cdot 3$$

$$\widetilde{T}\left(\widetilde{s}_h^0(i,j)\right)=t\cdot\left|\widetilde{l}_{hi}-\widetilde{l}_{hj}\right|\cdot\delta(\widetilde{l}_h)+\left(1-\delta(\widetilde{l}_h)\right)\cdot\widetilde{t}$$

2、建立公汽——地铁公交网络

一次换乘的公交网络 $\widetilde{\Psi}(1)$，具体属性如下：

$$\widetilde{\Omega}^1=\left\{\widetilde{\eta}_{ij}^1\mid\ \ 1\le i,j\le num\ \right\}$$

$$\tilde{\eta}_{ij}^{1}=\begin{cases}0 & \sum\limits_{k=1}^{num}\tilde{\eta}_{ik}^{0}\cdot\tilde{\eta}_{kj}^{0}=0\\ 1 & \sum\limits_{k=1}^{num}\tilde{\eta}_{ik}^{0}\cdot\tilde{\eta}_{kj}^{0}\neq 0\end{cases}$$

据此有：

$$\tilde{s}_{h}^{1}(i,j)=\left\{\tilde{l}^{h1}(ii_{h}),\tilde{l}^{h2}(i_{h}j)\mid \tilde{l}_{h1i}\cdot\tilde{l}_{h1i_{h}}\cdot\tilde{l}_{h2i_{h}}\cdot\tilde{l}_{h2j}\neq 0\right\},\quad i_{h}=1..num,\text{且}\, i_{h}\neq i,j$$

则 $\tilde{S}_{n}^{1}(i,j)=\left\{\tilde{s}_{h}^{1}(i,j)\mid \quad 1\leq h\leq n\right\}$

③ $$\tilde{m}(\tilde{s}_{h}^{1}(i,j))=f(\tilde{l}_{iih}^{h1})\cdot\delta(\tilde{l}_{h1})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h1})\right)\cdot 3+f(\tilde{l}_{ihj}^{h2})\delta(\tilde{l}_{h2})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h2})\right)\cdot 3$$

④ $$\begin{aligned}\tilde{T}\left(\tilde{s}_{h}^{1}(i,j)\right)=\,&t\cdot\left|\tilde{l}_{h1i}-\tilde{l}_{h1ih}\right|\cdot\delta(\tilde{l}_{h1})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h1})\right)\cdot\left|\tilde{l}_{h1i}-\tilde{l}_{h1ih}\right|\tilde{t}+\\ &t\cdot\left|\tilde{l}_{h2j}-\tilde{l}_{h2ih}\right|\cdot\delta(\tilde{l}_{h2})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h2})\right)\cdot\left|\tilde{l}_{h2j}-\tilde{l}_{h2ih}\right|\cdot\tilde{t}+\bar{t}(\delta_{ij})\end{aligned}$$

$$\tilde{t}_{f}(\tilde{s}_{h}^{1}(i,j))=t_{f}(\delta_{ij})$$

解释：

③ 式右端第一项表示乘客选择公汽从 i 站到 ih 站的票价，第二项表示乘客选择地铁从 i 站到 ih 站的票价；第三项表示乘客选择公汽从 ih 站到 j 站的票价，第四项表示乘客选择地铁从 ih 站到 j 站的票价；四项求和得出这条路线的总票价

④ 式右端第一项表示乘客选择公汽从 i 站到 ih 站的时间，第二项表示乘客选择地铁从 i 站到 ih 站的时间；第三项表示乘客选择公汽从 ih 站到 j 站的时间，第四项表示乘客选择地铁从 ih 站到 j 站的时间；这四项与平均换车耗时求和得出该线路的总耗时

二次换乘的公交网络 $\tilde{\Psi}(2)$，具体属性如下：

$$\tilde{s}_{h}^{2}(i,j)=\left\{\tilde{l}^{h1}(ii_{h1}),\tilde{l}^{h2}(i_{h1}i_{h2}),\tilde{l}^{h3}(i_{h2}i_{j})\mid \tilde{l}_{h1i}\cdot\tilde{l}_{h1ih1}\cdot\tilde{l}_{h2ih1}\cdot\tilde{l}_{h2ih2}\cdot\tilde{l}_{h2ih3}\cdot\tilde{l}_{h3j}\neq 0\right\},$$

$$i_{h1},i_{h2}=1..num,\text{且}\, i_{h1},i_{h2}\neq i,j$$

则 $\tilde{S}_{n}^{2}(i,j)=\left\{\tilde{s}_{h}^{2}(i,j)\mid \quad 1\leq h\leq n\right\}$

⑤

$$\begin{aligned}\tilde{m}(\tilde{s}_{h}^{2}(i,j))=\,&f(\tilde{l}_{iih1}^{h1})\cdot\delta(\tilde{l}_{h1})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h1})\right)\cdot 3+f(l_{ih1ih2}^{h2})\cdot\delta(\tilde{l}_{h2})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h2})\right)\cdot 3\\ &f(\tilde{l}_{ih2j}^{h3})\delta(\tilde{l}_{h3})+\left(1-\delta(\tilde{l}_{h3})\right)\cdot 3\end{aligned}$$

⑥

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}\left(\widetilde{s}_h^2(i,j)\right) = & \, t\cdot\left|\widetilde{l}_{h1i}-\widetilde{l}_{h1ih1}\right|\cdot\delta(\widetilde{l}_{h1})+\left(1-\delta(\widetilde{l}_{h1})\right)\cdot\left|\widetilde{l}_{h1i}-\widetilde{l}_{h1ih1}\right|\cdot\widetilde{t}+t\cdot\left|\widetilde{l}_{h2ih2}-\widetilde{l}_{h2ih3}\right|\cdot\delta(\widetilde{l}_{h2}) \\
& +\left(1-\delta(\widetilde{l}_{h2})\right)\cdot\left|\widetilde{l}_{h2ih2}-\widetilde{l}_{h2ih3}\right|\cdot\widetilde{t}+\bar{t}_1+t\cdot\left|\widetilde{l}_{h3ih2}-\widetilde{l}_{h3j}\right|\cdot\delta(\widetilde{l}_{h3}) \\
& +\left(1-\delta(\widetilde{l}_{h3})\right)\cdot\left|\widetilde{l}_{h3ih2}-\widetilde{l}_{h3j}\right|\cdot\widetilde{t}+\bar{t}_2
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{t}_f(\widetilde{s}_{ijh}^2)=t_{f1}+t_{f2}$$

解释：

⑤ 式右端第一、二项联合表明乘客从 i 站到 $ih1$ 站的票价；第三、四项联合表明乘客从 $ih1$ 站到 $ih2$ 站的票价；第五、六项联合表明乘客从 $ih2$ 站 j 站的票价，六项求和即得该线路的总票价

⑥ 式右端第一、二项联合表明乘客从 i 站到 $ih1$ 站的平均耗时；第三、四项联合表明乘客从 $ih1$ 站到 $ih2$ 站的平均耗式；第五、六项联合表明乘客从 $ih2$ 站 j 站的平均耗时，六项与两个换车时间求和即得该线路的总耗时

可以根据这种方法编程实现公交网络的模拟：

具体数学模型如下：

目标：对于网络 $\widetilde{\Psi}(m)$ 的一条线路

$$\widetilde{s}_{ijh}^{\,k}=\left\{\widetilde{l}^{\,h1}(ii_1),\widetilde{l}^{\,h2}(i_1i_2),\cdots,\widetilde{l}^{\,hk}(i_{k-1}i_k),\widetilde{l}^{\,h(k+1)}(i_kj)\right\}$$

$$Min \quad \widetilde{T}(\widetilde{s}_h^k(i,j))$$

$$Min \quad \widetilde{m}(\widetilde{s}_h^k(i,j)),\quad k=0..m$$

$$s.t \qquad \widetilde{W}_{ij}^m=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\widetilde{S}_{ij}(i,j\mid m)=\left\{\widetilde{S}_n^k(i,j)\mid 0\le k\le m\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\widetilde{S}_n^k(i,j)=\left\{\widetilde{s}_h^k(i,j)\mid 1\le h\le n\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

沿用问题一的准则

3．6　问题三模型建立：

3．6．1　追加的符号约定：

d_{ij}　　站点 i 与站点 j 之间的平均步行时间

$\varphi(d_{ij})$　乘客在站点 i 与站点 j 之间是否选择步行

3．6．2　模型准备：

$\varphi(d_{ij})$　乘客在站点 i 与站点 j 之间是否选择步行

$$\varphi(d_{ij})=\begin{cases}0 & d_{ij}/D>1\ \text{乘客不会步行}\\ 1 & d_{ij}/D\le 1\ \text{乘客会步行}\end{cases}$$

3．6．3　模型假设：

1、乘客只有在两站之间步行的时间小于 D 时才会选择步行

2、所有乘客的步行速度大体是一致的，对于不同的乘客，D 值无差别

3．6．4　模型建立：

1、对于步行的处理方法，把步行看作是一种类似于线路的过程，当 $d_{ij}\le D$ 时，可以抽象为由一条票价为零的线路将 i,j 站连结起来，反之，i,j 站之间没有一条票价为零的线路

2、在问题二的公汽——地铁网络模型基础之上建立新的公汽——地铁——步行公交网络。

建立一个网络的雏形 $\dot{\Psi}(0)$，其网络特性如下：

若⑦ $\sum_{h=1}^{line}\tilde{l}_{hi}\cdot\tilde{l}_{hj}+\varphi(d_{ij})+\sum_{k=1}^{num}\left(\varphi(d_{ik})\cdot\sum_{h=1}^{line}\tilde{l}_{hk}\cdot\tilde{l}_{kj}\right)\ne 0$

则 $\dot{l}_{ij}^{h}\ne 0$，否则 $\dot{l}_{ij}^{h}=0$

解释：

⑦ 式左端第一项表示 i,j 站间是否有地铁或公汽直达；第二项表示乘客是否会直接从 i 站步行到 j 站；第三项表示乘客步行到达 k 站后乘地铁或公汽到达 j 站

则有：

$$\dot{s}_h^0(i,k,j)=\left\{\dot{l}_{ij}^{h}\mid \dot{l}_{ij}^{h}\ne 0\right\}$$

$$\dot{S}_n^0(i,j)=\left\{\dot{s}_h^0(i,k,j)\mid\ 1\le h\le n;1\le k\le num\right\}$$

$$\dot{\eta}_{ij}^{0}=\begin{cases}0 & else\\ 1 & \sum_{h=1}^{line}\tilde{l}_{hi}\cdot\tilde{l}_{hj}\ne 0\ or\ \varphi(d_{ij})\ne 0\end{cases}$$

$$\dot{\Omega}^0=\left\{\dot{\eta}_{ij}^{0}\mid 1\le i,j\le num\right\}$$

⑧

$$\dot{m}(\dot{s}_h^0(i,k,j))=\left(1-\varphi(d_{ij})\right)\cdot f(\tilde{l}_{ij}^{\,h})\cdot\delta(\tilde{l}_h)+\left(1-\delta(\tilde{l}_h)\right)\cdot 3\cdot\left(1-\varphi(d_{ij})\right)+\varphi(d_{ik})\cdot f(\tilde{l}_{kj}^{\,h})\cdot\delta(\tilde{l}_h)+\varphi(d_{ik})\cdot\left(1-\delta(\tilde{l}_h)\right)\cdot 3$$

⑨

$$\dot{T}\left(\dot{s}_h^0(i,k,j)\right)=\left(1-\varphi\left(d_{ij}\right)\right)\cdot t\cdot\left|\tilde{l}_{hi}-\tilde{l}_{hj}\right|\cdot\delta(\tilde{l}_h)+\left(1-\varphi\left(d_{ij}\right)\right)\cdot\left(1-\delta(\tilde{l}_h)\right)\cdot\left|\tilde{l}_{hi}-\tilde{l}_{hj}\right|\tilde{t}+ \\ \varphi(d_{ij})\cdot d_{ij}+\varphi(d_{ik})\cdot\left(d_{ik}+t\cdot\left|\tilde{l}_{hk}-\tilde{l}_{hj}\right|\cdot\delta(\tilde{l}_h)\right)+\varphi(d_{ik})\cdot\left(d_{ik}+\left(1-\delta(\tilde{l}_h)\right)\cdot\left|\tilde{l}_{hi}-\tilde{l}_{hj}\right|\cdot\tilde{t}\right)$$

解释：

⑧ 式右端第一、二项联合表明，乘客不选择步行时的票价；第三、四项联合表明乘客选择步行式的票价，四项求和即得该线路的总票价

⑨ 式右端第一、二项联合表明，乘客不选择步行时的平均耗时；第三、四项联合表明乘客选择步行式的平均耗时，求和即德该路线的总耗时

根据前文所述的可达矩阵的计算方法，编程模拟新的公汽——地铁——步行网络具体的属性。

4 模型求解

4．1　求解问题一：

4.1.1　基于夹逼序列的动态规划算法[3]：

现在我们面对的是一个3996×3996规模的巨型矩阵，在综合考虑了实际情况与算法复杂度之后，我们采用中转车站的逼近查找法，并在此基础上引用动态规划算法，可以在理想的时间内得到较为满意的结果。

算法描述：

Step1：数据初始化：起始点为x，终点y可达矩阵T列存储向量Z_k(k表示第k次转车)可以设$\max(k)=5$；$i=1$；$j=\max(k)$；

Step2：在可达矩阵中对第x行所有的点进行搜索，即查找由起点x可以通过一趟车可达的车站，将对应元素为 1 的点（可达的点）存入Z_i，$i=i+1$(表示进入下一次转车路线的选择)

Step3：在可达矩阵中对第y列所有的点进行搜索，将对应元素为 1 的点存入Z_j，$j=j-1$

Step4：对Z_{i-1}里的所有点，将对应行元素为 1 的点存入Z_i；对Z_{j+1}里的所有点，将对应列元素为 1 的点存入Z_j；记：$i=i+1$，$j=j-1$；

Step5：如果$i+2\le j$返回 step4；如果$j-i=2$，则转 step6；如果$j-i=1$，则转到 step7;

Step6：对里Z_{i-1}的所有点，继续查找可达矩阵，搜索可达矩阵的下一车站，存入Z_i。

Step7：开始对已经存好的Z_i用动态规划算法查找最适合的公交线。

其中动态规划算法如下：

阶段：认为乘客每转一次车就为一个阶段； k

阶段的状态：乘客当前所在的站点，并具有无后效型； $s(k)$

状态变量：乘客选择的车次； x_k

决策：乘客到下一站的抉择，是与当前站可直达的站点集合； $u(k)$

状态转移方程：乘客到下一次转车（或到终点站）的时间间隔； $T_k(s_k,u_k)$

权函数：乘客到下一站的时间间隔与票价的函数； $w_k(s_k,u_k,x_k)$

递归方程：

$$V(s(k),k)=Min\left[V(s(k+1),k+1)+w_k(s_k,u_k,x_k)\right]$$

$$s(k)=T_{k+1}(s_{k+1},u_{k+1})$$

根据这个动态规划的算法，对于问题一的解答如下，由于篇幅所限，只列举前三小问的结果：[具体的结果见附件]

（说明：1、L436-S1784-L217 表示乘客首先在 S3359 站乘坐 L436 路到达 S1784 站换乘 L217 路到达 S1828；2、“+”号表示公汽换乘公汽的耗时）

错误！未找到引用源。换乘一次(3359-1828)

信息　　线路	1	2	3
乘车线路	L436-S1784-L217	L469-S304-L217	L436-S3695-L217
总票价（元）	3	3	3
总耗时（分钟）	96+5	132+5	108＋5
步行（分钟）	2	2	2

错误！未找到引用源。换乘两次（3359-1828）

线路	1	2
乘车线路	L484-S2027-L201-S458-L41	L15-S3733-L2137-S3695-L217
总票价（元）	3	3
总耗时（分钟）	63+10	114+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次（不存在 1557-0481）

错误！未找到引用源。换乘两次（1557-0481）

线路	1	2
乘车线路	L363-S1919-L417-S2424-L516	L84-S3389-L212-S3409-L460
总票价（元）	4	3
总耗时（分钟）	102+10	123+10
步行（分钟）	4	4

错误！未找到引用源。换乘一次(971-485)

信息　　　线路	1	2	3
乘车线路	L13-S2184-L417	L119-S872-L417	L13-S2607-L377
总票价（元）	4	3	4
总耗时（分钟）	123+5	144+5	183+5
步行（分钟）	2	2	2

错误！未找到引用源。换乘两次（971-485）

线路	1	2
乘车线路	L263-S1609-L140-S2654-L469	L310-S3755-L142-S3544-L417
总票价（元）	6	3
总耗时（分钟）	96+10	132+10
步行（分钟）	4	4

结果解释：

错误！未找到引用源。、错误！未找到引用源。表格提供的是从 3359-1828 站的部分路线的信息，看出这两站之间没有直达路线，直观来看：若换乘一次，则理想线路应该是 L436-S1784-L217；若是换乘两次，则理想线路 L484-S2027-L201-S458-L41。

下表则是根据我们提出的 CSI 准则得到的最终路线对比结果（部分路线）：

(CSI 准则：$\left(CSI(T(s_h^k(i,j))),CSI(m(s_h^k(i,j)))\right)$，指标 $\Delta(s_h^k(i,j))=|\vec{c}|$)

始终点	线路	总票价（元）	总时间(分)	Δ
S3359-S1828	L436-S1784-L217	3	96+5	0.4375
	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10	0
	L469-S304-L217	3	132+5	1
S1557-S0481	L363-S1919-L417-S2424-L516	3	102+10	0.1897
	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0903-L312	4	84+15	1
	L084-S28-L348-S2361 -L312	4	147+10	1.414
S0971-S0485	L13-S2184-L417	3	123+5	0.4151
	L119-S872-L417	3	144+5	0.7170
	L263-S1609-L140-S2654-L469	3	96+10	0
S0008-S0073	L159-S291-L58	2	78+5	1
	L463-S1383-L296-S2184-L345	3	57+10	0.3503
	L355-S2755-L34-S2085-L17-S2085-L17-S604-L328-S525-L103	5	45+20	1
S0148-S0485	L308-S36-L156-S2210-L417	3	96+10	0.1428
	L308-S3604-L21-S3776-L469	3	120+10	1
	L308-S3604-L81-S2361-L156-S3351-L417	4	87+15	1
S0087-S3676	L454-S3496-L209	2	60+5	1
	L454-S541-L120-S236-L462	3	42+10	0.8360
	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10	1

评价：

根据我们对评价指标的定义，看出在 S3359-S1828 的三条线路 Δ=0 对应为理想路线，Δ=1 则对应为时间最长票价最小或者是票价最大时间最少，看出 L469-S304-L217 为时间最长；S1557-S0481 的三条线路中 Δ=0.1897 对应为最优路线，L084-S1919-L007-S3186-L091-S0903-L312 则对应为票价最大时间最少，Δ=1.414 则说明该路线是最糟糕的一种选择；S0971-S0485 的三条路线中 L263-S1609-L140-S2654-L469 是理想路线，L13-S2184-L417 与 L119-S872-L417 比较来说前者 Δ 值要小一些，故而在没有最优的路线时，可以退而求其次；S0008-S0073 的三条路线中不存在理想路线，只能选择 Δ 值最小的路线 L463-S1383-L296-S2184-L345，L159-S291-L58 则是票价最少时间最长，L355-S2755-L34-S2085-L17-S2085-L17-S604-L328-S525-L103 则是票价最大时间最少；S0148-S0485 的最优路线为 L308-S36-L156-S2210-L417；L308-S3604-L21-S3776-L469 则是时间最长票价最短，L308-S3604-L81-S2361-L156-S3351-L417 则是票价最大时间最短；S0087-S3676
的最优路线为 L454-S541-L120-S236-L462，L454-S3496-L209 则是时间最长，票价最少，L21-S88-L231-S427-L97 则是票价最大时间最小。

最终，我们建议在公汽网中：
S3359-S1828 的最优路线为：L484-S2027-L201-S458-L41；
S1557-S0481 的最优路线为：L363-S1919-L417-S2424-L516；
S0971-S0485 的最优路线为：L263-S1609-L140-S2654-L469；
S0008-S0073 的最优路线为：L463-S1383-L296-S2184-L345；
S0148-S0485 的最优路线为：L308-S36-L156-S2210-L417；
S0087-S3676 的最优路线为：L454-S541-L120-S236-L462。

4.2 求解问题二：

下表是考虑地铁后对第一题的回答，并且将两个网络中的最优路线进行了对比：

（说明：汽-汽表示在公汽-公汽网络中的最优路线，汽-铁表示在公汽-地铁网络中的最优路线 ）

		线路	票价（元）	时间（分）
汽-汽	S3359-	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10
汽-铁	S1828	L324-S1746-L27-S1784-L167	3	63+10
汽-汽	S1557-	L363-S1919-L417-S2424-L516	3	102+10
汽-铁	S0481	L84-S1919-L189-S3186-L91-S903-L254	4	84+15
汽-汽	S0971-	L263-S1609-L140-S2654-L469	3	96+10
汽-铁	S0485	L94-S567-D1-T1-D21-S466-L51	5	83+13
汽-汽	S0008-	L463-S1383-L296-S2184-L345	3	57+10
汽-铁	S0073	L198-S3766-L476-S2085-L406-S604-L328-S525-L103	5	39+20
汽-汽	S0148-	L308-S36-L156-S2210-L417	3	96+10
汽-铁	S0485	L308-S302-D03-T1-D21-S466-L51	5	63+18
汽-汽	S0087-	L454-S541-L120-S236-L462	3	42+10
汽-铁	S3676	D27-T2-D36	3	24+13

结果解释：

看出对于 S1557-S0481，地铁——公交网络很大程度上节约了时间，对于时间要求紧的乘客完全可以选择该路线；对于 S3359-S1828、S0971-S0485、S0008-S0073，地铁网络没有很大的优越性；对 S0148-S0485 地铁则节约了很多时间 L308-S302-D407-T1-D21-S466-L51 很可能成为首选路线；同样对于 S0087-S3676 线路 D27-T2-D36 也是不错

的选择。

5 模型检验

5．1　改进的Dijkstra 算法在Mathematica的实现

基于Mathematica强大的集合表现能力，考虑到这个路网的属性比较复杂，故在Mathematica下实现Dijkstra 算法，求v到 v_x 的最短路。

Step1. 选用邻接矩阵T来表示整个公交网络 $G\langle V,E\rangle$， T 属性如下：

T[[i,j]]表示第i个公交站点到第j个公交站点的相邻关系，包含一个整数表示是否相邻和一个集合记录通过第i个公交站点到第j个公交站点的所有线路， $T[[i,j]]=\{m,S\}$，

$$m=\begin{cases}Infinity, & ij\text{不相邻}\\ n, & n<Infinity, ij\text{相邻且存在一条权值为}n\text{的边}\end{cases};$$

$$\text{S}=\{l^h \mid \quad s_i\in l^h\text{且}s_j\in l^h\},\text{其中}s_k\text{为标号为}k\text{的公交站点，}k\in \text{N}^*;$$

比如 $T[[619,1914]]=\{3,\{1,25,67,105,141,151,165,248,295,342,348,383,446,495\}\}$，

说明S19和S1914相邻，之间存在边权值为3的边，且存在L1， L25，L 67，L 105， L141，L151，L165，L248，L295，L342，L348，L383，L446，L495这些线路，使两者相连。

定义 F 为已找到从 v 出发的短路径的集合，初始状态为空集；那么，从 v 出发到 G 上其余各顶点（终点） v_i 可能的最短路径长度的初值为：

$$D[[i]]=T[[v,v_i,1]],v_i\in V$$

Step2. 选择 v_j，使得 $D[[j]]=Min\{D[[i]]\mid v_i\in V-F\}$， v_j 就是当前求得的一条从v出发的最短路径的终点；令 $F=F\bigcup\{j\}$

Step3. 修改从 v 出发到集合 $V-F$ 上任一顶点 v_k 可达的最短路径长度；

如果

$$\text{D[[j]]}+\text{T[[j,k]]}+Dw[[j,k]]<\text{D[[k]]}$$

则修改 $D[k]$ 为

$$\text{D[[j]]}+\text{T[[j,k]]}+Dw[[j,k]]<\text{D[[k]]},$$

其中 Dw 矩阵保存站点j到k转车代价的值。如果，在 F 中索引到的 j 的上一个节点记做 p，使得 $T[[p,j,2]]\bigcup T[[j,k,2]]\neq\{\}$（即存在这样的公交线路，它依次通过 p,j,k），则认

为 j 到 k 不需要转车， $Dw[[j,k]]=0$；否则 $Dw[[j,k]]$ 为 j 到 k 转车的代价，根据转车的类型和相关的评价准则计算；

Step4. 重复操作(2),(3)直到目标 $v_x \in F$ 。

5．2　改进的Dijkstra算法实现流程

最短路径算法中,Dijkstra 算法以及基于该算法的一些改进算法是比较成熟的算法,但这些算法在数据结构以及时间限制上由于受到当时计算机硬件水平发展的限制,将空间存储问题放到一个很重要的位置,以牺牲适当的时间效率来换取空间的节省。目前,空间存储问题已经不是要考虑的主要问题,因此有必要对已有算法重新进行考虑并进行改进,可以利用空间换时间来提高最短路径算法的效率。改进的Dijkstra 算法的实现流程基本符合前面介绍的算法思想,但在对临时标号节点的排序处理上为了实现方便没有使用二叉排序树,使用了相对简单的插入排序。定义临时标号节点排序序列为OPEN集合,永久标号节点集合为CLOSED集合,起始节点为 S ,目标节点为 T ,节点 i 到初始结点的代价为 $D(i)$,算法如下:

改进的Dijkstra 算法:

(1) 初始化所有节点的标号结构,初始化OPEN集合。计算 $D(i)$,将起始 S 加入OPEN 集合;

(2) 如果OPEN集合为空,没有找到路径,算法结束;

(3) 取OPEN 表中 D 值最小的节点 i 放到CLOSED表中;如果 $i=T$,则路径规划成功,从CLOSED集合中找出最短路径,算法结束;

(4) 扩展节点 i 的后继节点 j,计算 $D(j)$;节点 j 不在OPEN 表中,转(7);

(5) $D(j)$ 没有比节点 j 原有的 f 值小,转(8);

(6) 将节点 j 从OPEN集合中删除;

(7) 节点 $j->$ OPEN集合,对OPEN集合排序;

(8) 节点 i 有未扩展的后继节点,转(4);否则转(3) 。

在本算法,只扩展节点的未被扩展的后继节点,这样就不会出现重复扩展节点问题。

Dijkstra 算法与动态规划算法结果比较:(第一问)

始终点	线路	总票价（元）	总时间（分）
S3359-S1828	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10
	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10
S1557-S0481	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0903-L312	4	84+15
	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0492-L72	4	90+15
S0971-S0485	L263-S1609-L140-S2654-L469	6	96+10
	L263-S1609-L140-S2654-L469	6	96+10
S0008-S0073	L463-S1383-L296-S2184-L345	7	57+10
	L355-S2755-L34-S2085-L17-S2085	5	45+20

	-L17-S604-L328-S525-L103		
S0148-S0485	L308-S3604-L81-S2361-L156-S3351-L417	4	87+15
	L308-S302-L407-S128-L308-S3604-L21-S3874 L156-S3351-L417	7	81+35
S0087-S3676	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10
	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10

从上表不难看出，我们的模型和算法能够很好的找到最优路线，并且在一般情况下换乘次数较少，符合乘客不想多换乘的心理，因此也比较合理。

6 灵敏度分析

对问题一的评价准则进行灵敏度分析，研究不同权值对于路线选择的影响：

$$\vec{c}=\left(CSI(T(s_h^k(i,j))),CSI(m(s_h^k(i,j)))\right)$$

模型以 $\Delta(s_h^k(i,j))=|\vec{c}|$ 为最终的选择标准，对于不同的目标，即时间与总票价的比重没有区别。而实际上不同乘客的选择偏向会存在差异，因此考虑加入不同权重的影响。

引入新的选择标准：

$$\Delta=\sqrt{\alpha\cdot CSI(T(s_h^k(i,j)))^2+(1-\alpha)\cdot CSI(m(s_h^k(i,j)))^2}$$

对问题一的评价准则进行灵敏度分析，研究不同权值对于路线选择的影响：

只针对 S0087-S3676 这条路线，因为得到的最优解 Δ 值并不高，这条线可能是受到权值影响较大的线路之一：

α	路线	总票价	时间
0.2	L454-S3496-L209	2	65
0.3	L454-S541-L120-S236-L462	3	52
0.4	L454-S541-L120-S236-L462	3	52
0.5	L454-S541-L120-S236-L462	3	52
0.6	L454-S541-L120-S236-L462	3	52
0.7	L454-S541-L120-S236-L462	3	52
0.8	L21-S88-L231-S427-L97	4	46

也就是说，对于其他一般的线路，该模型是比较稳定的，只有少数的极端情况才会产生较大的差异。

7 模型展望

关于我们的网络模型，还有很多地方可以挖掘：

1、可以针对不同的车站的繁忙程度，比如考虑一些大站、居民区、商业街等，可以适当的加大路线的密度，考虑地铁网络；

2、可以针对不同的咨询者提出详细的帮助信息，例如，对一些行动不便的乘客，可以把不幸事件也考虑在内，其实，我们在刻画时已经将这部分考虑进去了，只是因为涉及对人群得分类，没有继续深入；

3、对于一些繁忙事端，特别是上下班时间，我们就要重新考虑模型参数，地铁的参数

就比较稳定，公交的参数变化会比较大，必然会影响结果；

4、对于人们关于路线的选择，在期望心理的角度来说，是一个概率分布的，所以在我们刻画模型的时候可以适当考虑概率的影响

[1]（美）kenneth H.Rosen 离散数学及其应用　北京　机械工业出版社 2003

[2]贾新民等 顾客满意度指数标准化处理方法的改进 工业工程与管理 73-77 2007 年第一期

[3]李志林等 数学建模及典型案例分析 北京 化学工业出版社 2006

附录：第一问：

换乘一次(3359-1828)

信息　　　线路	1	2	3
乘车线路	L436-S1784-L217	L469-S304-L217	L436-S3695-L217
总票价（元）	3	3	3
总耗时（分钟）	96+5	132+5	108＋5
步行（分钟）	2	2	2

换乘两次（3359-1828）

线路	1	2
乘车线路	L484-S2027-L201-S458-L41	L15-S3733-L2137-S3695-L217
总票价（元）	3	3
总耗时（分钟）	72+10	114+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次(971-485)

信息　　　线路	1	2	3
乘车线路	L13-S2184-L417	L119-S872-L417	L13-S2607-L377
总票价（元）	4	3	4
总耗时（分钟）	123+5	144+5	183+5
步行（分钟）	2	2	2

换乘两次（971-485）

线路	1	2
乘车线路	L263-S1609-L140-S2654-L469	L310-S3755-L142-S3544-L417
总票价（元）	6	3
总耗时（分钟）	96+10	132+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次（不存在 1557-0481）

换乘两次（1557-0481）

线路	1	2
乘车线路	L363-S1919-L417-S2424-L516	L84-S3389-L212-S3409-L460
总票价（元）	4	3
总耗时（分钟）	102+10	123+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次（0008-0073）

信息　　　线路	1	2	3
乘车线路	L159-S291-L58	L43- S2091-L113	L159- S3919-L480
总票价（元）	2	2	2
总耗时（分钟）	78+5	183+5	147+5
步行（分钟）	2	2	2

换乘两次（0008-0073）

线路	1	2
乘车线路	L463-S1383-L296-S2184-L345	L355-S3389-L302-S3409-L480
总票价（元）	7	3
总耗时（分钟）	57+10	111+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次（不存在 0148-0485）

换乘两次（0148-0485）

线路	1	2
乘车线路	L308-S36-L156-S2210-L417	L308-S3604-L21-S3776-L469
总票价（元）	4	3
总耗时（分钟）	96+10	120+10
步行（分钟）	4	4

换乘一次（0087-3676）

信息　　线路	1	2	3
乘车线路	L454-S3496-L209	L454-S1893-L209	L454- S3496-L209
总票价（元）	2	2	2
总耗时（分钟）	60+5	66+5	60+5
步行（分钟）	2	2	2

换乘两次（0087-3676）

线路	1	2
乘车线路	L454-S541-L120-S236-L462	L293-S3917-L296-S1788-L209
总票价（元）	3	3
总耗时（分钟）	42+10	75+10
步行（分钟）	4	4

根据准则选择最优路线：

始终点	线路	总票价（元）	总时间（分）	Δ
S3359-S1828	L436-S1784-L217	3	96+5	0.4375
	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10	0
	L469-S304-L217	3	132+5	1
S1557-S0481	L363-S1919-L417-S2424-L516	3	102+10	0.1897
	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0903-L312	4	84+15	1
	L084-S28-L348-S2361 -L312	4	147+10	1.414
S0971-S0485	L13-S2184-L417	3	123+5	0.4151
	L119-S872-L417	3	144+5	0.7170
	L263-S1609-L140-S2654-L469	3	96+10	0
S0008-S0073	L159-S291-L58	2	78+5	1
	L463-S1383-L296-S2184-L345	3	57+10	0.3503
	L355-S2755-L34-S2085-L17-S2085-L17-S604-L328-S525-L103	5	45+20	1
S0148-S0485	L308-S36-L156-S2210-L417	3	96+10	0.1428
	L308-S3604-L21-S3776-L469	3	120+10	1
	L308-S3604-L81-S2361-L156-S3351-L417	4	87+15	1
S0087-S3676	L454-S3496-L209	2	60+5	1
	L454-S541-L120-S236-L462	3	42+10	0.8360
	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10	1

DIJ 算法的结果：

始终点	线路	总票价（元）	总时间（分）
S3359-S1828	L484-S2027-L201-S458-L41	3	63+10
	L484-S2027-L201-S458-L41	3	66+10
S1557-S0481	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0903-L312	4	84+15
	L084-S1919-L007-S3186-L091-S0492-L72	4	90+15
S0971-S0485	L263-S1609-L140-S2654-L469	6	96+10
	L263-S1609-L140-S2654-L469	6	96+10
S0008-S0073	L463-S1383-L296-S2184-L345	7	57+10
	L355-S2755-L34-S2085-L17-S2085 -L17-S604-L328-S525-L103	5	45+20
S0148-S0485	L308-S3604-L81-S2361-L156-S3351-L417	4	87+15
	L308-S302-L407-S128-L308-S3604-L21-S3874 L156-S3351-L417	7	81+35
S0087-S3676	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10
	L21-S88-L231-S427-L97	4	36+10