

文章编号:1005-3085(2006)07-0001-27

## 2006 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

姜启源

(清华大学, 北京 100084)

由教育部高教司和中国工业与应用数学学会主办、高等教育出版社独家赞助的“2006 高教社杯全国大学生数学建模竞赛”于2006年9月15日至18日举行。来自全国30个省(市、自治区)和香港特区864所院校的9985队参加了这项通讯比赛,比2005年的795所院校8492队有很大发展。

竞赛答卷首先在由省(市、自治区)形成的27个赛区和联合赛区(今年由内蒙、宁夏、青海、香港组成)进行初评,评出各赛区的获奖者,然后各赛区按一定比例将优秀答卷送全国组委会,全国组委会聘请专家从中评出甲组全国一等奖193名,二等奖537名,乙组全国一等奖57名,二等奖165名。江南大学的王艳、王金鑫、苏电波同学获(甲组)高教社杯,乙组空缺。

我国的这项竞赛创办于1992年,每年一届,十几年来参赛规模以年均20%以上的速度增长,成为目前全国高校规模最大的课外科技活动。

这项竞赛之所以受到大学生们如此热烈的欢迎,是因为它有以下的特点:赛题由工程技术、管理科学等领域的实际问题简化加工而成,要求参赛者结合实际问题灵活运用数学和计算机软件以及其他学科的知识,通过建立、求解、评估、改善数学模型,充分发挥其聪明才智和创造精神;三名大学生组成一队,团结合作,选择一题在三天时间内完成一篇研究论文;可以自由地收集、查阅资料,调查研究,使用计算机、互联网和各种软件(但是不能与队外的任何人讨论赛题);赛题没有事先确定的答案,论文评阅的标准是①假设的合理性②建模的创造性③结果的正确性和④表述的清晰程度。

为了进一步加强竞赛规则的执行,促进竞赛的健康发展,要求参赛同学签名承诺:“我们完全明白,在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。我们郑重承诺,严格遵守竞赛纪律,以保证竞赛的公平、公正性。如有违反竞赛规则的行为,我们将会受到严肃处理”。今年各赛区加强了评阅工作,对部分参赛队进行了面试。全国评阅专家组认真审查了送交的答卷,也对一些队进行了面试答辩。

今年A题的素材包括许多数据来自竞赛的赞助单位—高等教育出版社,由北京工业大学孟大志教授形成题目;B题是命题人天津大学边馥萍教授在自己一项科研课题的基础上加工的;C题由北京理工大学叶其孝教授提供;D题由解放军信息工程大学韩中庚教授提供;在此一并表示感谢。为了更广泛、有效地收集适合竞赛的题目和素材,再次向全社会诚征赛题,有意者请与全国组委会办公室联系:100084北京清华大学数学科学系胡明姬,电话及传真(010)62781785, Email: mhu@math.tsinghua.edu.cn

为了与广大同学进行交流,对今后的竞赛予以适当引导,全国评阅专家组选择了一些优秀论文在本刊发表,并请命题者和评阅者撰文讲评。

发表的论文是同学们三天内写出的, 为了保持原貌只作了适当的删节和文字上的修正。文章不可避免地存在着相当多的不妥之处, 请读者谅解。

希望对这项竞赛作进一步了解的读者, 请看: <http://mcm.edu.cn>

### A 题 出版社的资源配置

出版社的资源主要包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等, 它们都捆绑在书号上。经过各个部门的运作, 形成成本(策划成本、编辑成本、生产成本、库存成本、销售成本、业务与管理成本等)和利润。

某个以教材类出版物为主的出版社, 总社领导每年需要针对分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析, 将总量一定的书号数合理地分配给各个分社, 使出版社产生最好的经济效益。事实上, 由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量, 此总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。资源配置完成后, 各个分社(以学科划分)根据分配到的书号数量, 再重新对学科所属每个课程作出出版计划, 付诸实施。

资源配置是总社每年进行的重要决策, 直接关系到出版社的当年经济效益和长远发展。由于市场信息(主要是需求与竞争力)通常是不完全的, 企业自身的数据收集和积累也是有限的, 这种情况下的决策问题在我国企业中是普遍存在的。

本题附录中给出了该出版社所掌握的一些数据资料, 请你们根据这些数据资料, 利用数学建模的方法, 在信息不足的条件下, 提出以量化分析为基础的资源(书号)配置方法, 给出一个明确的分配方案, 向出版社提供有益的建议。

注 附录位于压缩文件 A2006Data.rar 中, 可从 <http://mcm.edu.cn> 下载。

### B 题 艾滋病疗法的评价及疗效的预测

艾滋病是当前人类社会最严重的瘟疫之一, 从 1981 年发现以来的 20 多年间, 它已经吞噬了近 3000 万人的生命。

艾滋病的医学全名为“获得性免疫缺损综合症”, 英文简称 AIDS, 它是由艾滋病病毒(医学全名为“人体免疫缺损病毒”, 英文简称 HIV)引起的。这种病毒破坏人的免疫系统, 使人丧失抵抗各种疾病的能力, 从而严重危害人的生命。人类免疫系统的 CD4 细胞在抵御 HIV 入侵中起着重要作用, 当 CD4 被 HIV 感染而裂解时, 其数量会急剧减少, HIV 将迅速增加, 导致 AIDS 发作。

艾滋病治疗的目的, 是尽量减少人体内 HIV 的数量, 同时产生更多的 CD4, 至少要有目的地降低 CD4 减少的速度, 以提高人体免疫能力。

迄今为止人类还没有找到能根治 AIDS 的疗法, 目前的一些 AIDS 疗法不仅对人体有副作用, 而且成本也很高。许多国家和医疗组织都在积极试验、寻找更好的 AIDS 疗法。

现在得到了美国艾滋病医疗试验机构 ACTG 公布的两组数据。ACTG320 (见附件 1) 是同时服用 zidovudine (齐多夫定), lamivudine (拉米夫定) 和 indinavir (茚地那韦) 3 种药物的 300 多名病人每隔几周测试的 CD4 和 HIV 的浓度(每毫升血液里的数量)。193A (见附件 2) 是将 1300 多名病人随机地分为 4 组, 每组按下述 4 种疗法中的一种服药, 大约每隔 8 周测试的 CD4 浓度(这组数据缺 HIV 浓度, 它的测试成本很高)。4 种疗法的日用药分为: 600 mg zidovudine 或 400 mg didanosine (去羟基苷), 这两种药按月轮换使用; 600 mg zidovudine 加 2.25 mg zalcitabine (扎西他滨); 600 mg zidovudine 加 400 mg didanosine; 600 mg zidovudine 加 400 mg didanosine, 再加 400 mg nevirapine (奈韦拉平)。

请你完成以下问题:

1) 利用附件1的数据, 预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间(继续治疗指在测试终止后继续服药, 如果认为继续服药效果不好, 则可选择提前终止治疗)。

2) 利用附件2的数据, 评价4种疗法的优劣(仅以 CD4 为标准), 并对较优的疗法预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间。

3) 艾滋病药品的主要供给商对不发达国家提供的药品价格如下: 600 mg zidovudine 1.60美元, 400 mg didanosine 0.85美元, 2.25 mg zalcitabine 1.85美元, 400 mg nevirapine 1.20美元。如果病人需要考虑4种疗法的费用, 对2)中的评价和预测(或者提前终止)有什么改变。

注 附件1, 2位于压缩文件 B2006Data.rar 中, 可从 <http://mcm.edu.cn> 下载。

### C 题 易拉罐形状和尺寸的最优设计

我们只要稍加留意就会发现销量很大的饮料(例如饮料量为355毫升的可口可乐、青岛啤酒等)的饮料罐(即易拉罐)的形状和尺寸几乎都是一样的。看来, 这并非偶然, 这应该是某种意义下的最优设计。当然, 对于单个的易拉罐来说, 这种最优设计可以节省的钱可能是很有限的, 但是如果是生产几亿, 甚至几十亿个易拉罐的话, 可以节约的钱就很可观了。

现在就请你们小组来研究易拉罐的形状和尺寸的最优设计问题。具体说, 请你们完成以下的任务:

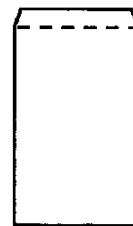
1. 取一个饮料量为355毫升的易拉罐, 例如355毫升的可口可乐饮料罐, 测量你们认为验证模型所需要的数据, 例如易拉罐各部分的直径、高度、厚度等, 并把数据列表加以说明; 如果数据不是你们自己测量得到的, 那么你们必须注明出处。

2. 设易拉罐是一个正圆柱体。什么是它的最优设计? 其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸, 例如说, 半径和高之比, 等等。

3. 设易拉罐的中心纵断面如右图所示, 即上面部分是一个正圆台, 下面部分是一个正圆柱体。什么是它的最优设计? 其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸。

4. 利用你们对所测量的易拉罐的洞察和想象力, 做出你们自己的关于易拉罐形状和尺寸的最优设计。

5. 用你们做本题以及以前学习和实践数学建模的亲身体验, 写一篇短文(不超过1000字, 你们的论文中必须包括这篇短文), 阐述什么是数学建模、它的关键步骤, 以及难点。



### D 题 煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制

煤矿安全生产是我国目前亟待解决的问题之一, 做好井下瓦斯和煤尘的监测与控制是实现安全生产的关键环节(见附件1)。

瓦斯是一种无毒、无色、无味的可燃气体, 其主要成分是甲烷, 在矿井中它通常从煤岩裂缝中涌出。瓦斯爆炸需要三个条件: 空气中瓦斯达到一定的浓度; 足够的氧气; 一定温度的引火源。

煤尘是在煤炭开采过程中产生的可燃性粉尘。煤尘爆炸必须具备三个条件: 煤尘本身具有爆炸性; 煤尘悬浮于空气中并达到一定的浓度; 存在引爆的高温热源。试验表明, 一般情况下煤尘的爆炸浓度是  $30 \sim 2000 \text{ g/m}^3$ , 而当矿井空气中瓦斯浓度增加时, 会使煤尘爆炸下限降低, 结果如附表1所示。

国家《煤矿安全规程》给出了煤矿预防瓦斯爆炸的措施和操作规程,以及相应的专业标准(见附件2)。规程要求煤矿必须安装完善的通风系统和瓦斯自动监控系统,所有的采煤工作面、掘进面和回风巷都要安装甲烷传感器,每个传感器都与地面控制中心相连,当井下瓦斯浓度超标时,控制中心将自动切断电源,停止采煤作业,人员撤离采煤现场。具体内容见附件2的第二章和第三章。

附图1是有两个采煤工作面的一个掘进工作面的矿井通风系统示意图,请你结合附表2的监测数据,按照煤矿开采的实际情况研究下列问题:

- 1) 根据《煤矿安全规程》第一百二十三条的分类标准(见附件2),鉴别该矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”。
- 2) 根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定,并参照附表1,判断该煤矿不安全的程度(即发生爆炸事故的可能性)有多大?
- 3) 为了保障安全生产,利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量,通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风(见下面的注)。根据附图1所示各井巷风量的分流情况、对各井巷中风速的要求(见《煤矿安全规程》第一百零一条),以及瓦斯和煤尘等因素的影响,确定该煤矿所需要的最佳(总)通风量,以及两个采煤工作面所需的风量和局部通风机的额定风量(实际中,井巷可能会出现漏风现象)。

注 掘进巷需要安装局部通风机,其额定风量一般为  $150 \sim 400 \text{ m}^3/\text{min}$ 。局部通风机所在的巷道中至少需要有15%的余裕风量(新鲜风)才能保证风在巷道中的正常流动,否则可能会出现负压导致乏风逆流,即局部通风机将乏风吸入并送至掘进工作面。

#### 名词解释

- 1) 采煤工作面:矿井中进行开采的煤壁(采煤现场)。
- 2) 掘进巷:用爆破或机械等方法开凿出的地下巷道,用以准备新的采煤区和采煤工作面。
- 3) 掘进工作面:掘进巷尽头的开掘现场。
- 4) 新鲜风:不含瓦斯和煤尘等有害物质的风流。
- 5) 乏风:含有一定浓度的瓦斯和煤尘等有害物质的风流。

注 附表和附图位于压缩文件 D2006Data.rar 中,可从 <http://incm.edu.cn> 下载。

### 2006 高教社杯全国大学生数学建模竞赛获奖名单

高教社杯获得者: 甲组: 王 攀、王金鑫、苏电波(江南大学)  
乙组: (空缺)

甲组一等奖193名(排名以学校笔画为序)

序号	学 校	参赛队员			指导教师
1	上海大学	江 攀	张家骥	龚云路	数模指导组
2	上海大学	万书晓	张润章	余新鑫	数模指导组
3	上海师范大学	胡铁卫	刘盼婷	孙 莉	数模指导组
4	上海财经大学	张 兴	邱 凌	王养君	数模指导组
5	上海理工大学	黄 辉	刘培生	徐 斌	数模指导组
6	上海理工大学	刘润慧	卢荣文	张秋香	数模指导组
7	大连水产学院	李 涛	王聪刚	张 志	数模指导组
8	大连民族学院	朱前富	杜月蓬	白艺玲	数模指导组
9	大连理工大学	李 川	佟 彤	崔晓晰	数模指导组

文章编号:1005-3085(2006)07-0028-09

## 出版社的资源配置优化模型

王 艳, 王金鑫, 苏电波

指导教师: 教练组

(江南大学, 无锡 江苏 214122)

**编者按:** 该文以经济效益、满意度、占有率和计划准确率构造目标函数, 并给出来所有约束条件, 建模考虑全面, 表达较为简洁、严谨。这是一篇优秀的竞赛论文。

**摘 要:** 本文针对出版社资源配置问题建立了相应的数学模型。根据出版社历年的统计资料和问卷调查数据, 以9个分社的72门课程为研究对象, 利用线性回归的方法预测2006年每种书号实际销售量, 从均值角度统计其市场满意度和市场占有率, 并计算出书号申请计划的准确度。从经济效益, 市场满意度和市场占有率三方面来理解所谓的“强势产品”, 兼顾计划准确度建立了一个多目标整数规划模型。利用“极差标准化法”和“指派方法”对经济效益指标和满意度指标进行了标准化处理, 最后进行综合加权将多目标转化成单目标。以人力资源与书号申请量为约束条件, 引进“惩罚因子”和“平衡因子”对分社的申请量进行了调整, 使决策更具有有效性。利用LINGO软件求解, 得到了总社明确的书号配置方法, 并分析了在资源配置中人力资源的关键性作用。针对市场经济条件下出版业的发展趋势和该出版社所暴露出来的问题本文提出了一些参考性建议。

**关键词:** 资源配置; 量化分析; 多目标决策; 无量纲化; 强势产品

**分类号:** AMS(2000) 90C29

**中图分类号:** O221.4

**文献标识码:** A

### 1 问题的提出

出版社的资源主要包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等, 它们都捆绑在书号上, 经过各个部门的运作, 形成成本和利润。合理的进行资源配置是出版社每年都要进行的重要决策, 因为它直接关系到出版社当年的经济效益和长远发展战略。

考虑某个以教材类出版物为主的出版社, 总社领导每年需要针对分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析, 将总量一定的书号数合理地分配给各个分社, 各个分社(分社以学科划分)根据分配到的书号数量, 再重新对学科所属每个课程作出出版计划, 付诸实施, 从而使出版的教材产生最好的经济效益。事实上, 由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量, 因此总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。

A出版社通过问卷调查收集相关信息, 并且积累了该社往年的一些数据资料, 根据这些数据资料, 提出以量化分析为基础的书号配置方法, 给出一个明确的分配方案, 并且向出版社提供有益的建议。

### 2 问题的分析

本题是一个出版社资源的优化配置问题。所谓的资源配置, 美国经济学家保罗·萨缪尔森是这样定义的: 资源配置是将资源的生产要素在各种潜在的用途上进行分配, 以产生一组特定的最终产品的经济形式。在这里出版社的各种资源都是捆绑在书号上的, 所以出版社的资源合理配置问题就可以看成是如何将总量一定的书号数分配给各分社, 使得出版社的效益最佳。

任何形式的资源配置都是在一定信息量的基础上进行的，本题可得资料包括分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场调查信息，但是这些信息通常具有不完全性和随机性，所以本文在信息提取和模型建立上都提出了适当的简化处理方法，在克服信息不足困难和提供实用参考决策方面进行了探索。

首先是数据的提取。从调查问卷表和问卷调查数据可以统计获得各门课程教科书的平均满意度，通过是否使用本出版社的教材估计本出版社主要课程的市场占有率，以及市场竞争力的其他相关指标；根据以往5年各课程计划及实际销售数量可以来预测06年的实际销售量和各分社对各门课程的计划准确度；另外从所给资料中能够得到总社可供分配总书号数、各门课程销售均价、2006年各分社书号分配数量的范围以及各分社人力资源最大工作能力。

其次是模型的建立。利用资料中提取的信息，根据以增加强势产品支持力度原则进行资源的优化配置，从而达到效益的最大化。我们对“强势产品”从市场占有率，市场满意度，计划准确度三个方面理解，即总社在分配书号时优先考虑市场占有率高，市场满意度高，计划准确度高的课程。于是问题就可以转化成一个多目标决策问题。

最后通过信息分析并且结合当今出版业在市场中的地位以及发展趋势，对出版社提出了一些参考性建议。

### 3 模型假设和符号系统

#### 3.1 模型假设

- 1) 问卷调查数据能正确地反映出出版社的历年经营状况和读者对图书的满意度评价；
- 2) 假设2006年A出版社及市场均运行正常，没有突发情况；
- 3) 分配书号时只考虑各分社人力资源的约束，而不考虑其它资源的限制；
- 4) 为保持工作连续性和对各分社申请计划一定程度上的认可，出版社在分配书号时至少保证各分社申请数量的一半；
- 5) 同一课程不同书目价格差别不大，同时销售量相近，用“课程均价”和“平均销量”表示A出版社同一课程不同书目的价格均值和销量均值；
- 6) 本文只研究A出版社所关注的72门课程所对应的教材（一个书号对应一类教材）。

#### 3.2 符号系统

- |  |  |
|--|--|
| $x_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程分配到的书号数；  | $\alpha_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程的市场满意度；  |
| $x_i$ : 第 $i$ 分社所得书号数；                 | $\beta_{ij}$ : 第 $i$ 分社第 $j$ 门课程教材数的市场占有率； |
| $n_i$ : 第 $i$ 个分社的课程数；                 | $\eta_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程计划的准确度；    |
| $p_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程每种书目价格均值； | $\mu_i$ : 第 $i$ 个分社的申报准确度；                 |
| $q_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程每种书目销量均值； | $\varepsilon_{ij}$ : 标准化后的经济效益；            |
| $s_{ij}$ : 第 $i$ 个分社第 $j$ 门课程的申请书号数；   | $\omega_{ij}$ : 标准化后的市场满意度；                |
| $s_i$ : 第 $i$ 分社申请书号数；                 | $\theta$ : 平衡因子；                           |
| $c_i$ : 第 $i$ 个分社的最大工作能力；              | $\lambda_k$ : 目标函数的权值；                     |
| $M$ : 出版社的可供分配总书号数；                    |  |

## 4 模型建立

### 4.1 数据分析

出版社在进行决策时必须同时兼顾经济效益和社会效益,信息的不完全性和不确定性增加了决策的难度,因此在大量信息中提取有用信息就成为了决策的关键。首先我们根据历年资料和社会调查数据挖掘出影响决策的信息。

#### 1) 2006年每种书号平均销售预测

出版社大部分有关资源配置的问题都是以未来的销售预测为前提的。作为出版社的决策者就必须了解市场销售量的发展趋势,在主观预测的基础上结合历史数据对未来的销售量进行预测。观察往年的数据,我们发现该出版社每种书号的实际销售量(每门课程教材的实际销售量和总书号数之商)呈一种线性递增的趋势,在市场和出版社都运行正常的假设下,我们可以认为2006年每种书号的实际销售量也是线性增加的,本文运用线性回归的方法对2006年每种书号实际销售量进行预测。

以计算机类的C++程序设计这门课程为例,其以往5年每种书号实际销售量如表1所示。

表 1: 2001-2005 年 C++ 程序设计销售情况

项目	2001年	2002年	2003年	2004年	2005年
实际销售量	1240	1243	1850	2641	2692
实际书号数	10	11	12	12	12
每种书号平均销量 $\varepsilon_{ij}$	124	113	154.7	220.8	224.3

用线性模型  $q_{11} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \varepsilon$  进行拟合(其中  $\alpha_0, \alpha_1$  称为回归系数,  $\varepsilon$  为随机误差,如果模型选择合适,应大致服从均值为0的正态分布,  $n$  为年份,2001年取1),用 MATLAB<sup>[4]</sup>统计工具箱中的命令 regress 求解,得到:  $\alpha_0 = 72.791, \alpha_1 = 32.716$ , 线性回归函数为:  $q_{11} = 72.791 + 32.716n$ , 预测2006年每种书号销量为269。类似地可以计算其它课程每种书号销售量预测值。

#### 2) 市场满意度分析

A出版社进行出版决策时,不能仅以盈利为目的,也应该尽量整合出版社资源实现社会效益的最大化,而市场满意度即为评价社会效益的一个重要指标。读者满意度反映读者对教材的某项指标的要求和教材实际效用之间的差异,满意度越高,说明差异越小,出版社的社会效益越好。通过问卷调查数据获取A出版社每门课程的销售数量,对筛选数据满意度分值求和取均值,见表2。

#### 3) 课程教材的市场占有率分析

出版社要在市场上生存,进行资源配置决策就要保证一定的市场竞争力。市场占有率在一定程度上体现了市场竞争力,占有率越大的课程竞争力就越强,那么出版社在分配书号时就应该对该课程有所偏重。本文通过是否使用A出版社的教材来估计A出版社主要课程的市场占有率,即市场占有率为市场上使用A出版社的某门课程教材人数占市场上所有使用该门课程教材人数的百分比。统计结果见表3。

#### 4) 课程的计划准确度分析

各分社在提交生产计划申请书时,出于本位利益或其他原因考虑,分社主观夸大申请的

表 2: 72 门课程满意度标准化  $\omega_{ij}$ 

课程号1-12	0.45	0.49	0.11	0.51	0.36	0.49	0.41	0.6	0.45	0.46	0.59	0.52
课程号13-24	0.67	0.3	0.72	0.51	0.76	0.5	0.58	0.62	0.48	0.47	0.46	0.46
课程号25-36	0.18	0.18	0.47	0.5	0.45	0.46	0.47	0.38	0.29	0.42	0.47	0.49
课程号37-48	0.2	0.42	0.46	0.56	0.47	0.46	0.46	0.46	0.46	0.47	0.45	0.48
课程号49-60	0.43	0.06	0.44	0.46	0.43	0.5	0.04	0.42	0.47	0.11	0.43	0.47
课程号61-72	0.47	0.5	0.47	0.47	0.33	0.45	0.45	0.44	0.46	0.5	0.41	0.43

表 3: 72 门课程的市场占有率  $\beta_{ij}$ 

课程号1-12	0.19	0.11	0	0.04	0.05	0.08	0.26	0.02	0.24	0.04	0.62	0.47
课程号13-24	0.1	0.06	0.1	0.25	0.5	0.21	0.49	0.52	0.336	0.972	0.916	0.792
课程号25-36	0.98	0.72	0.97	0.004	0.404	0.576	0.08	0.16	0	0.74	0.32	0.35
课程号37-48	0.13	0.13	0.2	0.12	0.24	0.37	0.36	0.32	0.44	0.35	0.35	0.43
课程号49-60	0.62	0.08	0.63	0.76	0.87	0.69	0.14	0.41	0.56	0.09	0.96	0.93
课程号61-72	1	0.85	1	0.99	0.28	1	0.83	0.94	0.96	0.65	0.48	0.85

书号数，这就造成了计划数与实际需求量之间的偏差。总社在进行资源的优化配置的时候，必须要考虑各个分社对各门课程计划的准确度，准确度高的优先考虑其申请要求。由已知可得“计划销售量”表示由各门课程申请的书号数计算的总销售量，“实际销售量”表示由分配到各分社的书号数计算的总销售量，它们的差别反应了计划的准确度。本文定义实际销售量和计划销售量之间的比为计划准确度。根据以往5年的数据我们估计各分社对各门课程的计划准确度和各分社申报准确度。统计结果见表4和表5。

表 4: 72 门课程的计划准确度  $\eta_{ij}$ 

课程号1-12	0.704	0.73	0.663	0.675	0.722	0.697	0.729	0.702	0.777	0.777	0.74	0.72
课程号13-24	0.74	0.74	0.72	0.7	0.69	0.72	0.7	0.67	0.677	0.662	0.678	0.7198
课程号25-36	0.733	0.72	0.78	0.747	0.733	0.718	0.718	0.666	0.678	0.748	0.685	0.7216
课程号37-48	0.744	0.75	0.702	0.684	0.732	0.724	0.659	0.644	0.679	0.708	0.697	0.7237
课程号49-60	0.68	0.73	0.72	0.73	0.72	0.79	0.654	0.673	0.717	0.651	0.666	0.7401
课程号61-72	0.67	0.67	0.782	0.718	0.725	0.728	0.742	0.684	0.611	0.667	0.717	0.6813

## 4.2 模型建立

一般来说，总社以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置，从而达到效益最大化。本文对所谓的“强势产品”从三个方面理解，即：经济效益(价格与销售量)，市场占有率，市场



表 5: 9 个分社的申报准确度  $\mu_i$ 

分社序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
申报准确度	0. 7177	0. 71	0. 7149	0. 7098	0. 6956	0. 73	0. 7062	0. 7153	0. 6849

满意度。在进行书号配置决策时优先考虑这类强势产品并尊重计划准确度高的课程。

#### 4.2.1 模型建立分析

##### 先考虑目标函数

##### 1) 经济效益指标

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} q_{ij} x_{ij},$$

$p_{ij} q_{ij}$  为第  $i$  个分社第  $j$  门课程每种书号的销售额, 即每种书目的经济效益。

##### 2) 市场满意度指标

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} o_{ij} x_{ij},$$

对于市场满意度高的课程分配书号时应优先考虑。

##### 3) 市场占有率指标

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} x_{ij},$$

某门课程的市场占有率越高, 说明其市场竞争力越强, 进行书号分配的时候优先考虑。

##### 4) 计划准确度指标

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij} x_{ij},$$

分社对各门课程计划的准确度越高, 总社在进行资源配置时就更优先考虑该课程。

##### 再考虑约束条件

##### 1) 人力资源约束

$$\sum_j x_{ij} \leq c_i,$$

分社分配所得的书号数要小于该分社的最大工作能力  $c_i$ , 其中  $c = (c_1, \dots, c_9) = (114, 114, 120, 102, 111, 72, 44, 63, 72)$ 。

##### 2) 书号数约束

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leq M,$$

总社每年可供分配的书号总数  $M$  是一定的, 即  $M = 500$ 。

总社在扶植“强势产品”的同时还要保持工作的连续性和对各分社计划一定程度上的认可, 所以在分配书号时至少保证分给各分社申请数量的一半, 又由于有可能存在各分社出于本位利益或其他原因考虑而主观夸大申请的书号数而造成申请数目偏大的情况, 总社要想尽可能合理的分配书号, 就需要对各分社实际申请量进行估计, 本文引进“惩罚因子”和“平衡因子”来对实际申请量进行估计。所谓“惩罚因子”可以看作是对分社虚报的惩罚, 本文取其

计划的准确度。而“平衡因子”则可以看作分社被误判为虚报的补偿，令其为2006年申请的书号总数与总社可供分配书号数之比的平方根，即： $\theta = \sqrt{\frac{750}{500}} = 1.22$ 。由此可得分配应满足的条件

$$\frac{1}{2}s_i \leq \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leq \mu_i \theta s_i, \quad x_{ij} \leq \eta_{ij} \theta s_{ij}.$$

上述的四项指标和约束条件即构成了资源优化配置的初始多目标规划模型。

#### 4.2.2 目标函数构成

本文在建立出版社资源优化配置模型时，考虑了四个目标，这些目标在满足约束条件下都要求实现最大化。但是由于不同的指标性质不同，量纲不同，之间不具有可比性和可加性。为了得到一个实用性更强的资源配置模型，我们将各指标抽象成同质的统一标准化指标，进行加权处理得到单一目标。

##### 1) 经济效益指标标准化：极差标准化法<sup>[5]</sup>

根据初始模型，经济效益指标是“越大越优目标”。应用相对隶属度的定义，取方案集中最大特征值对优的相对隶属度为1，方案集中最小特征值对优的相对隶属度为0，构成极差标准化公式

$$\frac{p_{ij}q_{ij} - \min(p_{ij}q_{ij})}{\max(p_{ij}q_{ij}) - \min(p_{ij}q_{ij})},$$

其中  $\max(p_{ij}q_{ij}) = 267830$ ,  $\min(p_{ij}q_{ij}) = 1105.8$ 。

运用极差标准化公式对72门课程经济效益指标进行标准化，结果见表6。

表6: 72门课程经济效益标准化  $\varepsilon_{ij}$

课程号1-12	0.022	0.03	0.0233	0.0165	0.009	0.02	0.043	0.002	0.032	0.0297	0.123	0.1869
课程号13-24	0.033	0.089	0.0313	0.0478	0.078	0.064	0.383	0.139	0.053	0.0614	0.755	0.0801
课程号25-36	0.096	0.196	0.0255	0.027	0.037	0.248	0.088	0.026	0.087	0.0185	0.042	0.0171
课程号37-48	0	0.076	0.0244	0.0292	0.283	0.498	0.687	0.274	1	0.3521	0.251	0.1068
课程号49-60	0.047	0.026	0.0234	0.058	0.1	0.126	0.056	0.065	0.039	0.0161	0.054	0.0408
课程号61-72	0.014	0.068	0.0457	0.0618	0.013	0.119	0.073	0.032	0.04	0.0248	0.051	0.1724

##### 2) 满意度指标的标准化：指派方法<sup>[2]</sup>

读者对某门课程的满意度评价具有一定的模糊性，问卷调查中设为五个等级，相应的评语集为{非常好，较好，一般，勉强可以，不好}，对五个等级进行打分，对应的分值为5, 4, 3, 2, 1。考虑读者在评价课程时，课程对其的效用应是递增，最后趋于平缓，本文选择偏大型模糊分布<sup>[2]</sup>描述读者的心理变化过程，其隶属度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{a_2 - a_1}\right) & a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & x > a_2 \end{cases}$$

为建立评价分值和该函数的一一映射关系，取  $f(0) = 0, f(5) = 1$ ，得到  $a_1 = 0, a_2 = 5$ 。

通过该函数，可以得到72门课程的满意度进行标准化，其数值在[0, 1]区间上。

##### 3) 资源优化配置模型的建立

在标准化处理的基础上综合加权得到资源优化配置的最终优化模型

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} (\lambda_1 \varepsilon_{ij} + \lambda_2 \omega_{ij} + \lambda_3 \beta_{ij} + \lambda_4 \eta_{ij}) x_{ij} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_j x_{ij} \leq c_i, \\ \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leq M, \\ \frac{1}{2} s_i \leq \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leq \mu_i \theta s_i, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \\ x_{ij} \leq \eta_{ij} \theta s_{ij}, \\ x_{ij} \geq 0 \text{ 且 } x_{ij} \text{ 为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

## 5 模型求解和结果分析

考虑四个评价指标, 由于个人偏向不同, 不同的决策者赋予的权值会有所偏差, 在这里我们将四个指标的重要性同等看待, 即赋予相同的权值  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.25$ 。利用 LINGO 软件<sup>[3]</sup>求解得到目标函数值为: 259.8366。各分社所得书号数分别为: 63, 43, 120, 91, 56, 47, 32, 30。即总社根据分社提交的生产计划申请书, 人力资源情况及市场信息分析, 将 500 个书号数分别分配给计算机类 63 个, 经管类 43 个, 数学类 120 个, 英语类 91 个, 两课类 56 个, 机械能源类 47 个, 化学化工类 18 个, 地理地质类 32 个, 环境类 30 个。

从模型求解结果可以看出, 人力资源约束起着关键作用。数学类共有策划人员 40 人, 工作能力为 3, 即数学类的人力约束使其获得的书号数量最多为 120。实际上在我们对 2001-2005 年的书号分配量分析后可以发现, 总社没有严格按照各分社人力资源的限制来分配书号数。一则是因为附件中提供的数据为历年平均值, 二则是人力资源是流动的, 当某分社人力资源不足的时候可以从外部引进或从内部调用, 而且每个工作人员的工作能力也是可以改变的, 如通过技能培训提高工作效率、通过加班加点提高工作强度等等。因此, 我们可以考虑改变人力资源约束。这里我们再讨论两种情况: 人力资源没有约束, 人力资源的工作能力可以适当提高, 利用 LINGO 软件求得两种分配方案, 与原优化方案进行比较见表 7。

表 7: 三种人力资源约束条件下各分社的所得书号数

分社序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
人力资源硬约束	63	43	120	91	56	47	18	32	30
人力资源无约束	55	28	177	60	56	47	18	29	30
工作能力提高20%	63	43	144	67	56	47	18	32	30

若我们仅将数学类策划人员的工作能力提高 20%, 其解与所有人力资源均提高 20% 相同, 由此可知数学类相对于其他类而言人力资源紧张, 人力资源对企业的总效益有较大的影响, 所以合理的配置人力资源也是出版社应该重视的问题。

## 6 模型推广和评价

资源的优化配置是任何一个企业进行决策时都不可避免地会遇到的问题，所以我们可以将此模型推广到其他行业，在量化分析的基础上进行资源的配置决策。从问题的分析到模型的建立求解再到模型的推广，逐步靠近问题的本质，在这些过程中克服了许多困难。模型有优点也有不足之处：

优点：

- 1) 调查问卷分析中，我们尽可能地提取有用信息来支撑资源配置模型；
- 2) 本文的模型是基于调查结果建立起来的，紧密联系实际，对现实具有指导作用；
- 3) 模型中成功的使用了极差标准化法和指派方法进行了指标的标准化处理，从而将多目标转化为单目标；

有待改进之处：

- 1) 模型仅凭5年的数据预测2006年的销售量，由于历史数据较少，可能会影响预测效果；
- 2) 模型是在理想的情况下建立的，并没有考虑企业内外部的动态因素，因此模型仍存在不足，但总的来说，还是具有很好的借鉴意义和指导价值的。

## 7 关于出版社更好发展的几点建议

在解决资源配置问题之后，针对出版业市场的发展趋势和该出版社存在的不足提出我们的一些建议：

1) 在市场经济体制下，出版物体现的更多的是一种商品而不是一种文化，所以出版社要以市场为导向，从市场中来到市场中去，加强市场的分析和预测，特别在信息收集时要注意样本的随机性和代表性，从而减少资源配置的盲目性和主观臆断性。

2) 可以实行“双效益”考核机制，对出版社的社会效益建立若干评估指标，实行量化考核，同时对经济效益也要进行分类细化，从而保证出版社的可持续发展。

3) 从模型求解中我们可以得知各分社在人力资源配备上存在忙闲不均的现象，如计算机分社人员过多而数学分社的人员偏少，所以建议出版社能够采取一定的措施来优化人力资源的配备，如各个分社之间的人员适当调度等；

4) 在数据预测上，仅仅根据历史数据预测未来的发展趋势是远远不够的，出版社最好能够建立一套预警系统来指导未来的经营活动。

5) 分社考虑自身利益可能存在“虚报”的现象，这既不利于总社分配工作的进行，总社应加强书号申报工作的管理，本着立足全局，实事求是的原则提高申报准确度。

## 参考文献：

- [1] 胡良剑等. 数学实验：使用MATLAB[M]. 上海：上海科技出版社，2003
- [2] 谢季坚，刘承平. 模糊数学方法及其应用（第2版）[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2000
- [3] 谢金星，薛毅. 优化建模与Lindo/Lingo软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005
- [4] 姜启源等. 数学模型（第三版）[M]. 北京：高等教育出版社，2003
- [5] 李振鹏，肖华勇等. 模糊优选法在生产决策中的应用[J]. 西南民族大学学报，2005,31(5):701-704

## The Optimal Model for the Publishing House's Resource Configuration

WANG Yan, WANG Jin-xin, SU Dian-bo

Advisor: Instructor Group

(Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122)

**Abstract:** The mathematical model for the resource configuration of the publishing house was established. Based on statistical and questionnaire data over the years, taking 9 branch offices and 72 courses as survey subjects, the linear regression was used to predict the sale of each book in 2006. The market satisfaction and occupation were predicted and the accuracy of book number application plan was calculated. The "mighty product" was defined according to the economic benefit, the market satisfaction, the market occupancy, and the compound target integer program model was established, giving attention to the plan accuracy. The "standardized extreme difference method" and "detail-off method" were used as standardization process. Finally, the multiple target function was transferred into single target function by aggregate weighted method. Taking human resources and application number of books as constraint conditions, the application of each branch was adjusted on introducing "penalty factor" and "equilibrium factor", so that the strategic decision was more effective. The LINGO software was used to obtain the book number collocation method for principal office and to analyze the crucial role that the human resources played in resource configuration. We have propounded some reference proposal for the development trend of publishing directed towards market economy and the problem which has been revealed.

**Keywords:** resource configuration; dimensional analysis; multiple target strategic decision; dimensionless; mighty product

文章编号:1005-3085(2006)07-0037-04

## 人力资源调配在出版社资源配置中的应用

蔡惠民, 刘少成, 蔡庆平

指导教师: 朱 宁

(桂林电子科技大学信息与通信学院, 桂林 541004)

编者按: 该论文关于人力资源内部调配的讨论很有特色, 部分发表该文。

摘 要: 本文在出版社资源配置的背景下, 对出版社书号的分配作了量化分析。在此基础上, 建立以优化人力资源目标的非线性规划模型, 探讨了人力资源内部调配对出版社书号分配及效益的影响。

关键词: 人力资源; 非线性规划; 资源配置

分类号: AMS(2000) 90C30

中图分类号: O221.2

文献标识码: A

### 1 引言

出版社每年需要针对分社提交的申请、人力资源情况及市场信息, 将书号合理地分配给各个分社, 以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置, 得到最好的经济效益。出版社资源配置受生产计划申请、人力资源情况及市场信息三方面的约束, 其利益一方面取决于销售产品所得的收入, 另一方面取决于生产计划与市场需求是否一致, 据此建立以书号分配最优为目标的非线性规划模型。

然而, 在上述条件下, 许多市场前景极好的分社, 所得的书号却被过少的人力资源配置所抑制。为了更好的实现资源配置, 有必要进行人力资源的内部调配, 将人力尽量集中在市场需求较强的分社; 同时又要使三类人员的配置尽量合理, 避免因人力分配不均衡而造成的资源浪费。在此基础上, 提出基于人力资源内部调配后更优的书号分配方案。

### 2 模型及求解

基于灰色理论<sup>[1]</sup>, 可求得第  $i$  分社第  $j$  号课程 2006 年销售量的预测值  $T_{ij}$  及每书号印数的预测值  $t_{ij}$ ; 根据主成分分析及系统聚类<sup>[2]</sup>, 可求得第  $i$  分社第  $j$  号课程的满意权重  $d_{ij}$  及各分社所占的市场份额  $a_p$ 。出版社关注的目标有以下两个: 1) 使分社的收益最大。2) 使产品更符合市场需求, 尽量避免出现生产过剩或不足的情况。即实际生产量与预测销量的差值最

综合这两个因素, 结合书号总数、申请、人力、市场等约束条件, 我们便可建立双目标的非线性规划模型。

申请书号约束:  $S_{ij}/2 \leq x_{ij} \leq S_{ij}$ 。

人力约束:  $M_i = \min\{m_{i1} \times c_{i1}, m_{i2} \times c_{i2}, m_{i3} \times c_{i3}\}$ 。

其中  $S_{ij}$ 、 $x_{ij}$ 、 $y_{ij}$  分别表示第  $i$  分社第  $j$  号课程 2006 年的书号申请数、实际分得的书号数及实际印数。 $M_i$  表示第  $i$  分社的策划、编辑及校对人员年处理书号的上限约束。 $m_{ik}$ 、 $c_{ik}$  分别表示第  $i$  分社第  $k$  类人员的人数及每人每年能处理的书号数。

设实际销量与预测、实际印册与预测的相对误差分别保持在  $r_{ij}$ ,  $e_{ij}$  范围内, 即

$$\begin{aligned} (1 - r_{ij})T_{ij} &\leq x_{ij} \cdot y_{ij} \leq (1 + r_{ij})T_{ij}, & 0 \leq r_{ij} &\leq 1, \\ (1 - e_{ij})t_{ij} &\leq y_{ij} \leq (1 + e_{ij})t_{ij}, & 0 \leq e_{ij} &\leq 0.3. \end{aligned}$$

对于收益, 有

$$E = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{j_{\max}} x_{ij} \cdot y_{ij} \cdot P_{ij} \cdot d_{ij}, \quad E_{\max} = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{j_{\max}} T_{ij} \cdot P_{ij} \cdot d_{ij}.$$

$E$  是总社下所有分社的线性加权收益指标。其中,  $P_{ij}$  为第  $i$  分社第  $j$  号课程所有书号的均价。 $E$  不仅反映了出版社的总收益, 更体现了出版社加强强势产品力度的原则。 $E_{\max}$  是总社下所有分社的线性加权收益指标最大值。

$$E' = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{j_{\max}} r_{ij}, \quad E'_{\max} = 72.$$

$E'$  是预测销量与实际销量的相对误差总和。显然, 当  $r_{ij} = 1$  时,  $E'$  有最大值  $E'_{\max}$ 。

$Z_1, Z_2$  表示单位化的加权收益和相对误差总和, 有  $Z_1 = E/E_{\max}$ ,  $Z_2 = E'/E'_{\max}$ 。

由于出版社的目标是兼顾收益及市场, 因此最终的目标函数是  $Z_1, Z_2$  两个单位指标的线性加权:  $\max Z = \alpha Z_1 - \beta Z_2$ 。其中,  $\alpha, \beta$  是权系数, 根据出版社的侧重或偏好取值。

综上所述, 我们建立了以  $x_{ij}, y_{ij}, r_{ij}$  为变量的多元双目标非线性规划模型

$$\max Z = \alpha Z_1 - \beta Z_2.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{j_{\max}} x_{ij} = 500, \\ S_{ij}/2 \leq x_{ij} \leq S_{ij}, \\ \sum_{j=1}^{j_{\max}} x_{ij} \leq M_i, \\ (1 - r_{ij})T_{ij} \leq x_{ij} \cdot y_{ij} \leq (1 + r_{ij})T_{ij}, \\ (1 - e_{ij})t_{ij} \leq y_{ij} \leq (1 + e_{ij})t_{ij}, \\ 0 \leq r_{ij} \leq 1, \\ 0 \leq e_{ij} \leq 0.3, \\ x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

当出版社对  $Z_1, Z_2$  同等看重, 即  $\alpha = \beta = 0.5$  时, 使用 Lingo 软件<sup>[4]</sup>可求得结果, 见表 1。此时, 出版社 2006 年的总销售额

表 1: 各分社分得的书号总数 (单位/个)

分社	计算机类	经管类	数学类	英语类	两课类	机械类	化工类	地质类	环境类
书号数	67	42	120	94	64	36	21	29	27

$$Q = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{j_{\max}} x_{ij} \cdot y_{ij} \cdot P_{ij} = 31354888.$$

### 3 考虑人力资源内部调整的模型

由上述分析可知：数学类教材有极好的市场前景，但过少的人力资源抑制了总社对其书号的分配，在其他分社中也可能存在这种情况。为了更好的实现资源调配，在不考虑人力外部输入的前提下，有必要进行人力资源的内部调配。假设：

- 1) 人员可在本分社内自由调动，可以胜任调整后一切职务，且工作能力不变。
- 2) 由于策划、编辑人员对专业技能要求较高，因此不同分社间的策划、编辑人员不可互相调动。设  $X_{ikpq}$  为从第  $i$  分社第  $k$  类人员中调整为第  $p$  分社第  $q$  类人员的人数，此规则可记为

$$A = \{X_{ikpq} = 0 \mid p \neq i, k = 1, 2\}.$$

- 3) 校对人员对专业知识要求不高，认为校对人员可在各分社之间调动，此规则可记为

$$B = \{X_{ikpq} = 0 \mid p \neq i, q \neq 3, k = 3\}.$$

人力资源优化的目标是：1) 将人力尽量的集中在市场需求较强的分社。2) 在各个分社中，三类人员的配置尽量合理，即他们的总工作能力尽量相似，避免人员闲置的情况出现。

为了同时实现上述两个目标，我们采用人力偏差对市场需求加权的方法确定目标函数

$$\begin{aligned} \min Z' &= \sum_{p=1}^9 \{[(M'_{p1} - M'_{p2})^2 + (M'_{p2} - M'_{p3})^2 + (M'_{p3} - M'_{p1})^2]/a_p\}. \\ \text{s.t.} &\begin{cases} X_{ikpq} = 0, & p \neq i, k = 1, 2, \\ X_{ikpq} = 0, & p \neq i, q \neq 3, k = 3, \\ \sum_{p=1}^9 \sum_{q=1}^3 X_{ikpq} = m_{ik}, & i = 1, 2, \dots, 9, k = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^3 X_{ikpq} = n_{pq}, & p = 1, 2, \dots, 9, q = 1, 2, 3, \\ M'_{pq} = c_{pq} \times n_{pq}, & p = 1, 2, \dots, 9, q = 1, 2, 3, \\ X_{ikpq} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

$M'_{pq}$ 、 $n_{pq}$  分别为调整后  $p$  分社  $q$  类人员的年工作能力及人数。人力资源调整前后的情况如表 2 所示。可见，人员大部分流入了人力资源较欠缺的数学类和两课类分社。

引入分社工作能力均衡指标

$$F(p) = \sqrt{[(M'_{p1} - M'_{p2})^2 + (M'_{p2} - M'_{p3})^2 + (M'_{p3} - M'_{p1})^2]/3}.$$

可得各分社人力资源调整前后该指标的折线图，见图 1。由图可知，调整后各分社人力更加均衡，三类人员的工作能力近似相等，有效避免了人员闲置，人力资源得到了充分利用。

将上述结果带入书号分配模型，可得新的书号分配结果，调整前后分配结果如表 3 所示。

### 4 结论

综上，可得调整前后出版社总收益及总工作能力对比，见表 4。从中可看到，引入人员调配后，总收益增加了 21.88%，工作效率提高了 13.30%。人力资源内部调配有助于出版社效益的提高。结果证明，该模型有较高的合理性和实用性，具有一定的推广价值。



表 2: 调整前后各分社人力对比

所属分社	策划人员数量		编辑人数数量		校对人员数量	
调整次序	前	后	前	后	前	后
计算机类	36	24	35	24	38	32
经营类	38	42	36	32	38	42
数学类	40	61	36	46	36	46
英语类	35	34	34	34	36	26
两课类	35	45	38	59	37	60
机械类	25	23	24	23	26	23
化工类	20	11	21	15	22	22
地质类	29	16	23	21	21	21
环境类	30	20	24	15	24	20

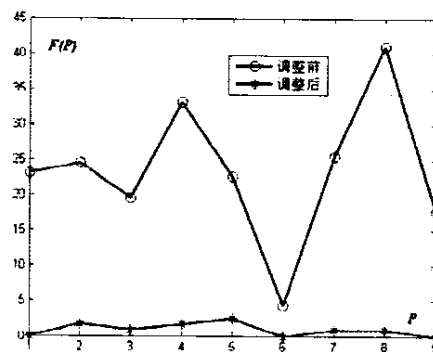


图 1: 调整前后工作能力均衡指标折线图

表 3: 人力资源调整前后书号分配方案对比

No.	前	后	No.	前	后	No.	前	后	No.	前	后	No.	前	后	No.	前	后
1	10	9	10	5	4	19	6	5	28	3	3	37	4	4	46	8	8
2	14	9	11	5	4	20	4	3	29	12	13	38	4	3	47	6	6
3	2	2	12	3	3	21	6	8	30	6	12	39	6	5	48	14	12
4	3	3	13	3	2	22	19	19	31	40	38	40	3	3	49	13	11
5	3	3	14	2	2	23	35	52	32	3	3	41	2	2	50	2	2
6	9	8	15	4	4	24	4	5	33	1	1	42	10	10	51	7	6
7	9	7	16	5	3	25	12	12	34	16	14	43	8	8	52	8	8
8	4	3	17	5	5	26	17	34	35	6	5	44	10	10	53	2	2
9	8	8	18	5	5	27	6	6	36	11	10	45	6	6	54	4	4

表 4: 调整前后总收益及总工作能力对比

调整前		调整后		增长率	
$Q$	$M = \sum M_i$	$Q'$	$M' = \sum M'_i$	$P_Q = (Q' - Q)/Q$	$P_M = (M' - M)/M$
31354888	812	38215403	920	21.88%	13.30%

## 参考文献:

- [1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用 (第三版) [M]. 北京: 科学出版社, 2004
- [2] 黄燕, 吴平. SAS统计分析及应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006
- [3] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005
- [4] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型 (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003

## The Application of Human Resources' Deployment in the Press Allocation of Resources

CAI Hui-min, LIU Shao-cheng, CAI Qing-ping

Advisor: ZHU Ning

Information &amp; Communication College, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004)

Abstract: In the background of the Press allocation of resources, we made a quantitative analysis of the distribution of book numbers. We establish a nonlinear programming with a goal of optimizing human resources. We discuss the influence of human resources' internal deployment on the allocation and efficiency of the Press.

Keywords: human resources; nonlinear programming; allocation of resources

文章编号:1005-3085(2006)07-0041-05

## 出版社的资源配置的网络模型

朱琳琳, 于凤展, 王 伟

指导教师: 魏建新

(鲁东大学, 烟台 264025)

**编者按:** 本文对于资源配置问题的信息结构理解比较清楚。特别是用网络流方法来建立问题的模型并求解是富有创意的, 是大学生创造性的很好表现。推荐本文在于在数学建模竞赛中提倡创新精神。

**摘 要:** 本文就出版社的资源配置问题进行了研究并建立了网络流模型。首先根据所提供的数据选择出了强势课程, 然后依据该问题的特点我们构造出了一个网络。结合书号的分配约束等条件给网络赋上了合理的费用、流值及其上下界, 建立了最小费用流模型并且运用 Lingo 软件编程给出了出版社资源(书号)的合理分配方案。

**关键词:** 灰色预测; 满意度分析; 网络流; 最小费用流

**分类号:** AMS(2000) 90C35

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 问题分析与模型的准备

因为强势课程支持力度、市场信息分析、各分社人力资源情况及其提交的生产计划申请书都将影响书号数的分配, 为获得最优的分配方案, 必须对各个影响因素进行分析研究。

#### 1.1 强势课程评选

强势课程是指市场占有率、顾客的4个满意度分值都很突出的课程, 可以通过这5个因素对72个课程作出综合评价, 从而确定出强势课程。

1) 预测2006年各课程的市场占有率。通过对 Excel 软件统计出来的 A 出版社历年各课程的市场占有率进行加权平均的方法可预测出2006年各课程书目的市场占有率。显然, 2005年各课程的市场占有率对预测2006年各课程的市场占有率影响最大, 2004年次之, 而2001年的影响最小故而可以取权值为0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3。在数据处理时, 由于调查数据中购买旧书的样本所占的比例非常小, 所以忽略了其对市场占有率的影响。

2) 各课程满意度分析。针对教材评价的4个满意度, 利用 Excel 统计得到2001到2005年各课程所有书目满意度的平均值, 并对各年的数据再次加权(权值可同1)平均, 最终得到72个课程的4个满意度得分。

3) 强势课程排序。综合考虑各课程占有率和满意度得分进行评分, 取72个课程的4个满意度得分和市场占有率得分5个因素的最大值作为标准得分, 分别求出各课程得分与它的马氏距离<sup>[1]</sup>, 按距离从小到大进行排序, 得出强势课程名次排序, 见表1(前68名); 根据强势课程的优先分配的原则, 可把课程分为九个层次, 通过对前五年的数据分析, 第 $j$ 个层次赋予权值 $p_j$ , 见表2。

#### 1.2 人力资源分析

通过分析所提供的9个分社人力资源细目, 可以得到各分社实际工作能力, 即第 $j$ 个分社每年最多能够完成的书号个数 $N_j, j=1, 2, \dots, 9$ 。由于书籍的出版依次经过策划、编辑、校对三个过程, 所以各分社三种工作人员工作能力的最小值即为该分社实际工作能力, 也就是每年最多能够完成的书号个数。利用 Excel 软件统计的各分社实际工作能力见表3。结合总社在分

表 1: 2006 年强势课程综合评分排序

名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
代码	62	60	68	25	27	59	22	23	66	24	61	63	72	53	67	69	64
名次	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
代码	70	54	11	26	52	51	49	20	48	57	19	45	30	17	29	12	34
名次	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
代码	56	71	39	36	21	46	41	43	44	35	10	16	1	9	47	42	18
名次	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
代码	7	65	33	40	13	28	6	4	31	8	2	15	37	14	50	38	5

表 2: 各课程权重表

课程排序 $j$	1~9	10~18	19~27	28~36	37~45	46~54	55~63	64~72
权重 $p_j$	1.35	1.15	1.00	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70

配书号时至少保证分给第  $j$  分社申请数量  $Q_j (j = 1, 2, \dots, 9)$  的一半这一原则, 可以初步得到总社分配给各分社书号个数的上限和下限。

表 3: 各分社实际工作能力表

分社 $j$	计算机类	经管类	数学类	英语类	两课类
能力 $N_j$	114	114	120	102	111
分社 $j$	机械能源类	化学、化工类	地理、地质类	环境类	
能力 $N_j$	72	44	63	72	

### 1.3 2006 各课程单位书号销售量预测

由于同一课程不同书目价格差别不大, 同时销售量相近, 可以计算出各课程单位书号的销售量。并据此可运用灰色预测模型  $GM(1, 1)$ , 通过 Matlab 编程预测出 2006 年单位书号的销售量  $L_i, i = 1, \dots, 72$ , 再乘以课程均价即得到各课程单位书号的销售额  $X_i, i = 1, \dots, 72$ 。

### 1.4 2006 各课程申请书号的调整

就各个课程而言, 其实际销售量与计划销售量的比值反映了书号分配计划的准确度, 统计每一个课程各年准确度的平均值并乘以该课程 2006 年的书号申报个数  $Q_j$ , 对各分社的申请书号数做出调整, 调整值  $Y_j (j = 1, 2, \dots, 72)$  见表 4。

## 2 网络流模型的建立与求解

### 2.1 网络流模型的建立

总社要将总量一定的书号合理地分配给各个分社, 使出版的教材产生最好的经济效益, 需要考虑多方面的因素, 第一要尽量使优势科目得到最大的满足, 第二不能超出各分社人力资源限度, 第三为保持工作连续性和对各分社计划一定程度的认可, 分配书号时还要保证至少分给各分社申请数目的一半。综合考虑上述三方面因素可建立网络流的模型来求解最优的书号分配方案。

表 1: 2006 年各课程书号的调整分配数

课程代码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
书号数目	13	13	3	4	4	11	9	4	12	6	6	3	3	3	4	4
课程代码	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
书号数目	4	6	4	3	8	25	35	6	18	24	9	4	16	9	29	3
课程代码	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
书号数目	1	16	5	12	4	5	7	4	3	7	5	6	4	6	8	10
课程代码	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
书号数目	12	3	7	12	3	6	3	3	3	3	3	7	5	5	6	6
课程代码	65	66	67	68	69	70	71	72								
书号数目	3	3	6	7	5	4	3	3								

构造单源单汇网络图  $G(D, V, L, U, A)$ , 总社为网络图源  $S$ , 各分社及各分社的课程为分别为转运点, 即用节点  $D_j (j = 1, 2, \dots, 9)$  代表分社和节点  $V_i (i = 1, 2, \dots, 72)$  代表 72 个课程, 最终汇入到虚拟点  $T$ .

由源  $S$  流向节点  $D_j (j = 1, 2, \dots, 9)$  的流量  $f_{Sj}$  的下界  $L_{Sj}$  是各分社申请书号个数的一半, 也即

$$L_{Sj} = \frac{\sum_{i=m_j}^{n_j} Q_i}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, 9;$$

上界  $U_{Sj}$  是申请数目与分社人力资源限度的最小值, 也即

$$U_{Sj} = \min \left( N_j, \sum_{i=m_j}^{n_j} Q_i \right), \quad j = 1, 2, \dots, 9;$$

弧  $A_{Sj}$  上的费用  $C_{Sj} = 0$ . 其中,  $m_j, n_j$  分别表示第  $j$  个分社所属课程代码的最小值和最大值,  $j = 1, 2, \dots, 9$ . 节点  $D_j (j = 1, 2, \dots, 9)$  流向节点  $V_i (i = 1, 2, \dots, 72)$  的流量  $f_{ji}$  下界

$$L_{ji} = Y_i p_i, \quad m_j \leq i \leq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, 9;$$

上界  $U_{ji}$  是各课程申报的书号个数, 也即

$$U_{ji} = Q_i, \quad m_j \leq i \leq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, 9;$$

弧  $A_{ji}$  上的费用  $C_{ji}$  为单位书号销售额的最大值  $M$  与各课程单位书号销售额的差值

$$C_{ji} = M - X_i, \quad m_j \leq i \leq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

由  $V_i (i = 1, 2, \dots, 72)$  节点流向虚拟点  $T$  的流量  $f_{iT}$  的上界  $U_{iT}$  是申报的书号个数也即  $U_{iT} = Q_i, m_j \leq i \leq n_j$ , 其中  $V_i, D_j$  相连; 下界  $L_{iT} = 0$ ; 弧  $A_{iT}$  上的权值  $C_{iT} = 0$ .

这样就构造了一个网络模型, 模型的示意图见图 1.

显然, 对于所构造的网络的每一个整流, 对应着一种分配方案: 由  $S$  到  $D_j$  的弧  $A_{Sj}$  上的流  $f_{Sj} (j = 1, 2, \dots, 9)$  表示总社分配到各分社的书号数; 由  $D_j$  到  $V_i$  的弧上  $A_{ji}$  的

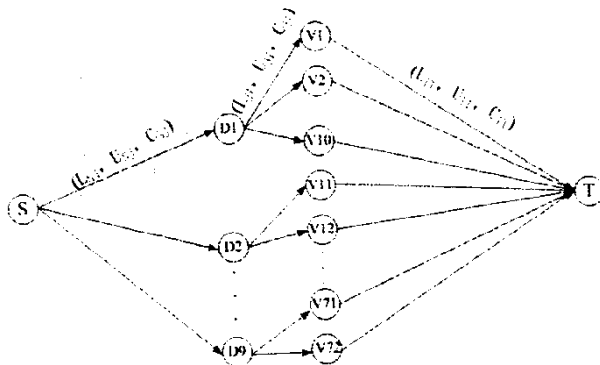


图 1: 网络流模型示意图

流  $f_{ji} (j = 1, 2, \dots, 9, m_j \leq i \leq n_j)$  表示各分社分到具体课程的书号数。结合我们的目的即合理的分配书号以求得较好的效益, 根据该网络的费用的定义, 所要解决的问题就转化成了一个最小费用流问题。

所建模型中, 由源点发出的流值  $d = \sum_{j=1}^9 f_{sj} = 500$ ; 且根据网络流的性质得到  $\sum_{i=1}^{72} f_{iT} = -d = -500$ ; 而对于  $j \in D, i \in V$ , 有  $f_{sj} = \sum_{i=m_j}^{n_j} f_{ji}$  及  $f_{ji} = f_{iT}$ 。我们就是求解这个网络的值为  $d = 500$  最小费用整流, 而这个流值费用函数为

$$\min \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{72} C_{ji} f_{ji}.$$

## 2.2 网络流模型的求解

利用上面的分析, 根据网络流的特点通过 Lingo 软件编程, 输入各节点、各条弧上的费用流的上下界、流值  $d = 500$ , 运行得到结果: 总社 2006 年的总销售额为  $2.621870 \times 10^7$ ; 总社分到各分社的书号如表 5 所示; 各课程书号的分配如表 6 所示。

表 5: 各分社分配书号数

分社	计算机类	经管类	数学类	英语类	两课类
书号数	55	48	120	79	72
分社	机械能源类	化学、化工类	地理、地质类	环境类	
书号数	48	20	30	28	

## 2.3 模型的讨论

通过构造一个网络模型, 使原问题转化为一个容易解决的最小费用流问题, 不但使问题变得比较直观, 而且解法高效。

在该模型的强势课程的评选中, 我们采用了等差形式的权重, 取值与决策者的经验等因素有关, 有较大的主观性, 如何更合理的取值使得分配方案更优, 这有待进一步研究。

表 6: 2006 年各课程书号的分配数

课程代码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
书号数目	8	8	2	3	3	7	9	3	8	4	8	4	2	4	3	3
课程代码	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
书号数目	6	8	6	4	5	16	29	4	20	15	11	3	11	6	40	2
课程代码	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
书号数目	1	10	4	7	3	4	5	3	4	10	8	10	6	8	12	14
课程代码	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
书号数目	8	2	10	16	4	8	2	2	2	2	3	9	4	8	4	8
课程代码	65	66	67	68	69	70	71	72								
书号数目	2	4	8	8	3	3	2	4								

## 参考文献:

- [1] 韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005
- [2] 王成, 文野, 俞寅涛. DVD租赁问题的模型设计及求解[J]. 工程数学学报, 2005,22(7):92-100
- [3] 何仁斌. Matlab工程计算及应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2001

## The Network Model for the Allocation of Press Resources

ZHU Lin-lin, YU Feng-zhan, WANG Wei

Advisor: WEI Jian-xin

(Ludong University, Yantai 264025)

**Abstract:** In this paper, we discuss the allocation problem of press resources and we design a network flow model for this problem. Firstly, we give the dominance courses by the given data. Then aiming at the dominance courses we set up a network model by the feature of this problem and we develop the minimum cost flow model with the cost, flow and their bounds which we endow for the network. And by using Lingo software the problem of allocation of press resources is solved reasonably.

**Keywords:** grey prognosis; satisfaction analysis; network flow; minimum cost flow

文章编号:1005-3085(2006)07-0046-09

## 出版社资源配置优化

汤志高, 仲青青, 邵长磊

指导教师: 生汉芳

(海军航空工程学院, 青岛 266041)

**编者按:** 该论文较为完整地解决了出版社资源配置问题, 对市场竞争力作出了适当的分析, 并考虑了计划准确度因子, 使分析结果更为接近实际情况。特别地, 论文采用了波士顿矩阵模型, 分析了市场增长率与相对市场份额对出版社发展的影响, 给出了符合出版社长远发展战略的资源配置方案。

**摘 要:** 本文研究了影响出版社资源配置的可变因素: 销售量、市场竞争力(满意度、市场占有率)、人力资源成本和长远发展策略; 首先利用波士顿矩阵模型量化市场竞争力, 通过市场增长率与相对市场份额反映 A 社不同出版物的市场行情和发展前景, 综合考虑长远发展; 然后以人力资源效用最大(人均创造的销售额最大)为目标, 以人力资源、书号量和申请书号规则为约束, 建立非线性整数规划模型, 最后, 通过改变模型的波士顿参数, Lingo 求解得到了 5 种不同发展战略的资源配置方案, 大大增强了模型的通用性与可操作性。

**关键词:** 波士顿矩阵; 市场增长率; 市场占有率; 相对市场份额; 资源效用

**分类号:** AMS(2000) 90C11

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 模型假设

- 1) 出版社在资源配置时, 对每种课程教材都以各自的平均价格计算;
- 2) 出版社在定价时保持对所有教材利润率统一, 并在此原则上制定教材单价;
- 3) 假设各分社不同岗位酬劳相同;
- 4) 假设各分社按实际分得书号出版图书, 不存在卖号等情况。

### 2 问题分析

#### 2.1 目标分析

本题中, 总社的书号数是 500 个, 分社以学科划分, 共有 9 个。如何合理地分配给各个分社, 使出版的教材产生最好的经济效益, 是亟待解决的问题。由于本题没有涉及成本的计算, 所以利润不能直接计算。而采用销售额表示经济效益更方便。

#### 2.2 影响资源优化配置的四要素

##### 1) 销售量

出版社通过出版大量的书籍获取利润, 销售量是配置方案的关键。销售数量包括计划销售数量和实际销售数量, 而资源指的是书号, 因此, 建立书号和销售量之间的关系是资源优化配置模型的重要一步, 根据附件 3 对计划销售量和实际销售量的说明, 不难发现

$$\text{各学科单位书号销售量} = \frac{\text{计划销售量}}{\text{申请书号数}} = \frac{\text{实际销售量}}{\text{分配书号数}}$$

##### 2) 市场竞争力

市场信息包括市场需求和竞争力信息,对分配方案的影响至关重要,因为它关系到A社的长远发展战略,应该从整体上提高该社的竞争力,才能达到长远效益最好的目的。鉴于分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量,总社应该遵循“增加强势产品支持力度”的原则优化资源配置,并且使计划的准确度越高越好。市场竞争力包含满意度和市场占有率,需要选择比较合理的方法进行量化。研究市场竞争力对出版社的影响以及如何提高市场竞争力是长远发展战略的必然要求。

### 3) 长远发展战略

长远发展战略的制定建立在市场信息的基础上,具体的说就是在当前的市场信息下,要用长远的发展眼光优化配置资源,不能仅考虑眼前利益。长远发展战略包括重点发展的产品的市场占有率变大或者市场占有份额增大,给出版社带来更多的经济效益。重点发展的产品类别不同,长远的经济效益不同。

### 4) 人力资源情况

分社的人力资源包括策划、编辑和校对三部分人员,对人员能力的衡量以平均每人处理书号的个数而定。三部分人员的工作互不交叉,因此,资源配置时,分社获得的书号数量应该在每一部分人员能够处理的范围之内,某些必要课程可以雇佣社外人员。

## 3 严格人力约束模型

### 3.1 模型准备

#### 1) 2006年单位书号销售量的预测

因为销售额=实际书号×单位书号销售量×价格,其中价格已知,而分社实际得到的书号是决策变量,所以欲表示2006年的销售额就必须先确定2006年各门课程的单位书号销售量。

2001~2005年中,每个实际销售量 $F_{kj}$ 和分配到的书号 $d_{kj}$ 是已知的,则每一年72个课程的单位书号销售量是

$$\beta_{kj} = F_{kj}/d_{kj}, \quad k = 1, \dots, 72, j = 1, \dots, 5 \quad (1)$$

对于每门课程的单位书号来说,对应的教材销售量是随时间不断变化的,呈现线性递增趋势。我们采用了一元线性回归方法对未来年份的单位书号销售量作出预测。得到回归系数之后,回代直线方程,即可得到2006年72门课程的单位书号的销售量。

#### 2) 计划准确性因子

计划准确性具有很强的实际意义,因为决策人在做当年决策时会考虑到计划销售量和实际销售量的差距,当计划销售量和实际销售量差别非常大时,表明决策不准确,是不合适的。计划销售量和实际销售量同样由回归预测得到,设稳定性因子为 $\omega_k$ (第 $k$ 门课程),计划销售量 $q_k$ ,实际销售量 $Q_k$ ,定义计划准确性因子为

$$\omega_k = \frac{Q_k}{q_k}, \quad (2)$$

#### 3) 市场竞争力量化因子

对市场竞争力量化目的是分析相对于其它出版社来说,A社出版物存在的优势和劣势,便于分析每种课程的发展前景,资源配置时有所侧重。

**相对满意度:**学生对某种教材的满意度越大,它的市场竞争力就会越强。调查的满意度项目有4个,由于4项的评分量级相同,所以对A社每门课程的满意度表示为:A社课程4项满



意分值的均值除以所有出版社的满意分值的均值, 对于 2001~2005 年 A 社第  $k$  门课程的综合满意度

$$\bar{\mu}_k = \frac{\text{A 社第 } k \text{ 门课程的满意度 5 年均值}}{\text{所有出版社满意度 5 年均值}}. \quad (3)$$

**市场占有率:** 在一个国家和地区内, 大规模的出版社都会有强势产品, 形象地说就是“拳头产品”或“名牌产品”。本题所研究的范围是市场中有代表性的 24 家出版社, 它们在市场中的各类产品的占有率不尽相同。产品的市场占有率从一个方面反映了它的市场竞争力。由于市场信息不足, 我们仅以调查问卷的数据求解各门课程的市场占有率。假设除学校统一定购的其余获取途径可以忽略。本文研究范围是 24 家出版社 72 门课程。记第  $j$  年第  $i$  个出版社的第  $k$  门课程教材在市场上的占有率为  $\lambda_{ik}^j$ , 教材数为  $h_{ik}^j$ , 附件 2 中第  $j$  年共  $H^j$  张问卷, 则

$$\lambda_{ik}^j = \frac{h_{ik}^j}{H^j} \cdot 100\%, \quad i = 1, \dots, 24, k = 1, \dots, 72, j = 1, \dots, 5. \quad (4)$$

### 3.2 模型建立与求解

由于成本没有给出, 所以当销售额最大时, 利润最高, 并且要考虑到市场竞争力和计划准确度, 定义经济效益因子为: 经济效益 = (市场竞争力  $\times$  计划准确度  $\times$  销售额)。

当不增加社外工作人员时, 引入竞争力系数, 以分配书号  $X_k$  为决策变量, 经济效益最好为目标, 建立整数线性规划模型如下

$$\max \sum_{k=1}^{72} ((\bar{\lambda}_k \times \bar{\mu}_k \times \omega_k) \times \beta_{k6} X_k P_k), \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{k=1}^{72} X_k = 500 \\ \sum_{k=a_n}^{b_n} X_k \leq M_n \\ \frac{1}{2} \sum_{k=a_n}^{b_n} Y_k \leq \sum_{k=a_n}^{b_n} X_k \leq \sum_{i=a_n}^{b_n} Y_k \\ X_k \in N^*, \quad n = 1, \dots, 9. \end{cases} \quad (6)$$

注  $a_n$  表示第  $n$  个分社最小课程编号;  $M_n$  为第  $n$  个分社以现有人力能完成书号数的上限;  $b_n$  表示第  $n$  个分社最大课程编号;  $Y_k$  表示第  $k$  门课程申请书号数;  $P_k$  表示第  $k$  门课程教材单价。

### 3.3 Lingo 软件求解模型结果

计算机类 55, 经管类 42, 数学类 120, 英语类 60, 两课类 72, 机械、能源类 56, 化学、化工类 24, 地理、地质类 34, 环境类 37, 各科书号数分配。

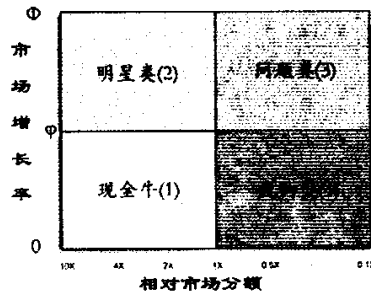
从结果来看, 数学类分得的书号与 2005 年相比, 减少 26 个, 丧失市场近 20%, A 社利益损失很大。而环境类市场占有率已经超过 96%, 却比 2005 年增加 11 个书号, 市场是否能接受这么多的数量, 从往年数据来看, 持否定态度。从长远利益来看, 我们认为严格人力资源约束的分配方案不够明智, 因此, 本文在后面讨论了可以添加社外人力资源的分配方案。

## 4 波士顿市场化模型建立与求解

### 4.1 模型准备

#### 4.1.1 矩阵含义简介

波士顿矩阵法是一种规划企业产品组合的方法，它以业务的市场增长率（市场需求的增长量和市场需求的比值）和相对市场份额（该业务相对于最大竞争对手的市场份额）的大小将不同的业务化分为四类：



**现金牛业务：**低市场增长率、高相对市场份额的业务，它是企业现金的来源；

**明星类业务：**高市场增长率、高相对市场份额的业务；

**问题类业务：**高市场增长率、低相对市场份额的业务；

**瘦狗类业务：**低市场增长率、低相对市场份额的业务。

#### 4.1.2 波士顿矩阵的建立

纵坐标  $\phi$  为市场增长率：表示该业务销售量的年增长率，并认为市场增长率超过  $\phi$  就是高速增长（ $\phi$  一般取 10% 左右，可以根据实际情况调整）。统计附件数据得出：市场占有率  $\lambda_{ik}^j$ ，实际销售量  $F_{ik}^j$ ，则市场总需求量  $S_{ik}^j$  及市场增长率  $\Phi_{ik}^j$  为

$$S_{ik}^j = \frac{F_{ik}^j}{\lambda_{ik}^j}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad i = 1, \dots, 24, \quad k = 1, \dots, 72 \quad (7)$$

$$\Phi_{ik}^j = \frac{S_{ik}^{j+1} - S_{ik}^j}{S_{ik}^j} \times 100\%, \quad j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, 24, \quad k = 1, \dots, 72 \quad (8)$$

由于市场增长率不稳定，因此本文取 5 年平均值作为最终量化标准。

纵坐标分界点：在 A 社，高等数学学科的相对市场份额较大，市场增长率较低，属于现金牛类业务，所以以高等数学学科的平均市场增长率 16% 为纵坐标的分界点，超过高等数学课程市场增长率就是高速增长。

横坐标为相对市场份额：A 社 ( $i = 8$ ) 第  $k$  门课程的市场占有率与第  $k$  门课程的最大竞争对手市场占有率的比值

$$R_k = \frac{\lambda_{8k}}{\max_{i=1}^{24} \lambda_{ik}}, \quad k = 1, \dots, 72, \quad (9)$$

根据以上横、纵坐标计算公式，利用 MATLAB 软件可得到各课程坐标值。

特殊说明：由于调查样本的容量有限，市场占有率会出现接近于 0 的情况，此时认为市场增长率和相对市场份额都为 0。

分类: 市场份额的中间定界通常设为1, 当  $R_k > 1$  时, 说明 A 社的市场份额大于最大竞争对手, 现金牛类和明星类的相对市场份额都大于1; 反之当  $R_k < 1$  时, 说明 A 社的市场份额小于最大竞争对手, 处于劣势。问题类和瘦狗类的相对市场份额都小于1。

经过以上横纵坐标的分支定界, 并计算出横纵坐标值后, 通过编程分类, 得到波士顿逻辑矩阵  $V_{72 \times 4}$ , 矩阵元素是  $f_{km}$  ( $f_{km} = 1$  指第  $k$  种课程属于第  $m$  种业务), 如表1。

表 1: 波士顿逻辑矩阵

课程号	1	2	3	4	课程号	1	2	3	4	课程号	1	2	3	4	课程号	1	2	3	4
1	0	0	0	1	19	1	0	0	0	37	0	0	0	1	55	0	0	0	1
2	0	0	0	1	20	1	0	0	0	38	0	0	1	0	56	0	1	0	0
3	0	0	0	1	21	1	0	0	0	39	0	0	0	1	57	0	1	0	0
4	0	0	0	1	22	0	0	0	1	40	0	0	0	1	58	0	0	0	1
5	0	0	1	0	23	1	0	0	0	41	0	0	1	0	59	0	0	0	1
6	0	0	0	1	24	0	0	1	0	42	1	0	0	0	60	0	0	1	0
7	0	0	1	0	25	0	0	0	1	43	0	1	0	0	61	0	0	0	1
8	0	0	0	1	26	0	1	0	0	44	0	1	0	0	62	0	1	0	0
9	0	0	0	1	27	0	0	0	1	45	0	1	0	0	63	0	0	1	0
10	0	0	1	0	28	0	0	1	0	46	0	1	0	0	64	0	0	1	0
11	0	1	0	0	29	1	0	0	0	47	1	0	0	0	65	0	0	1	0
12	0	1	0	0	30	1	0	0	0	48	1	0	0	0	66	0	0	1	0
13	0	0	1	0	31	0	0	0	1	49	0	1	0	0	67	0	0	1	0
14	0	0	1	0	32	0	0	1	0	50	0	0	0	1	68	0	0	0	1
15	0	0	1	0	33	0	0	0	1	51	1	0	0	0	69	0	0	1	0
16	0	0	1	0	34	0	1	0	0	52	0	1	0	0	70	0	0	1	0
17	0	1	0	0	35	0	1	0	0	53	0	0	0	1	71	1	0	0	0
18	0	0	0	1	36	1	0	0	0	54	1	0	0	0	72	0	0	1	0

#### 4.1.3 强势产品分析

强势产品(金牛类)的特点是该产品已经占有了很大的市场份额, 市场增长率相对稳定。课程号分别为 19, 20, 21, 23, 29, 30, 36, 42, 47, 48, 51, 54, 71; 其中 21, 23, 29, 30 课程都属于数学分社, 数学分社的强势产品较多, 是 A 社的重点支持对象。

### 4.2 模型分析

#### 4.2.1 长远发展战略

总社书号只有 500 个, 由于各个分社申请的书号总量远大于总社的书号总量, 为寻求更好的长远经济效益, 需要对不同的课程有所侧重。当出版社对 4 类业务的侧重点不同时, 会有不同的分配方案。例如: 强势产品是现金牛类业务。总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。明星类业务的市场增长率高, 相对市场份额较大, 也是应该鼓励发展的业务; 当出版社有足够的后备资金寻求快速发展时, 会支持有发展前途的问题类业务。所以, 要针对不同的发展战略, 有侧重地分配书号。

##### ◆ 稳定性原则

从2001~2005年每年各分社分得的书号总量波动变化不大,符合出版社的长远发展战略,因为A社在分配书号之前已经对市场需求量有所了解,虽然总的实际销售量每年都在增加,但是每门课程从2001~2005年的实际销售量只是呈现阶梯式增长,即每年的增长有一个比例(该比例有一个波动区间),每个分社如果按比例正常发展,无论哪一门课程都不应当出现哥斯拉式的飞跃性发展(哥斯拉式发展是一种超常规的发展,近似于垂直增长),如果盲目追求利润而忽略市场的需求情况,必然导致失败。

因此,我们引入了波动约束(约束16.4),即2006年第 $k$ 门课程书号的波动量等于前5年书号的最大值和最小值之差

$$\begin{cases} \Delta x_k = \max_{j=1}^5(x_k^j) - \min_{j=1}^5(x_k^j) \\ |X_k - x_k^5| \leq \Delta x_k, \quad k = 1, \dots, 72, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $x_k^j$ 表示第 $k$ 门课程第 $j$ 年的书号个数, $X_k$ 表示2006年第 $k$ 门课程分得的书号个数。

#### ◆长期发展战略的不同方案

在明确了各项业务在出版社中的不同地位后,就需要进一步明确出版社的战略目标。我们分五种战略目标分别适用于不同的业务。

**维持形态:**投资维持现状,目标是保持业务现有的市场份额。主要针对强大稳定的现金牛业务。在维持形态里,我们制定了两种发展战略:

发展战略一:按照2005年比例正常发展;发展战略二:发展现金牛类;

**发展形态:**继续大量投资,目的是扩大战略业务的市场份额。主要针对有发展前途的问题业务和明星中的恒星业务。在发展形态里,我们也制定了两种发展战略:

发展战略三:发展“明星类”;发展战略四:创新发展“问题类”;

**收获形态:**主要针对处境不佳的现金牛业务及没有发展前途的问题业务和瘦狗业务。

发展战略五:补救“瘦狗类”。

#### ◆方案量化实例(波士顿决策约束解释)

2005年业务比例

设四类业务比例为 $\eta_m(m=1, \dots, 4)$ , $f_{km}$ 是波士顿逻辑矩阵 $V_{72 \times 4}$ 的元素, $f_{km}=1$ 指第 $k$ 种课程属于第 $m$ 种业务, $Y_k^5$ 指2005年第 $k$ 门课程的申请书号量,那么

$$\eta_m = \frac{\sum_{k=1}^{72} f_{km} Y_k^5}{500}, \quad (11)$$

由此计算出2005年四类业务比例:

现金牛: $\eta_1 = 25\%$ ; 明星类: $\eta_2 = 22\%$ ; 问题类: $\eta_3 = 18\%$ ; 瘦狗类: $\eta_4 = 35\%$

在求解2006年分配方案时可以将2005年各业务比例设为初始值,然后按照出版社长期发展目标(即:上节中的不同策略,战略一、二、三、四、五)分别求解最优的分配方案。

关于发展战略需要量化定义第 $m$ 种业务下一年的百分比增量 $\Delta\eta_m$ :

**例如** 2006年决策人员决定扩大战略业务的市场份额。主要针对有发展前途的问题业务和明星中的恒星业务(市场增长率一直保持很高水平,市场相对份额也很高)。那么

$$\Delta\eta_1 < 0, \quad \Delta\eta_2 > 0, \quad \Delta\eta_3 > 0, \quad \Delta\eta_4 < 0.$$

显然问题业务和明星业务增加投资, 其他两项业务减小投资, 这里  $\Delta\eta_m$  是投资增加百分比, 所以  $\sum_{m=1}^4 \Delta\eta_m = 0$ .

综上, 设  $X_k$  表示2006年第  $k$  门课程得到的书号量, 2006年的具体投资应该满足第  $m$  项业务比例为  $\eta_m$  式(11), 并且符合决策者对此类业务投资的不同增量要求, 使比例达到  $\eta_m + \Delta\eta_m$ , 由于  $f_{km}$  和  $X_k$  都为整数, 所以不一定能够满足

$$\frac{\sum_{k=1}^{72} f_{km} X_k}{500} = \eta_m + \Delta\eta_m, \quad (12)$$

故为了使建立的模型具有更好的操作性, 可以将  $\Delta\eta_m$  设定在一定范围内, 建立不严格的模型 (16.1, 16.2) 其中  $\varepsilon$  为决策人可以允许的投资波动范围. 最终在决策者允许的波动范围内实施2006年的各类业务投资.

#### 4.2.2 人力资源

根据4.1.3并结合严格人力约束模型求解结果, 发现许多强势产品并没有得到加强, 这显然不符合效益最大化的目的, 另外从市场经济角度分析, 畅销行业出现人力稀缺也是符合实际的, 而且通过对历年数据统计许多分社的确雇佣社外人员, 所以为了支持强势产品的目的, 下面讨论添加社外人员.

在假设(3)的前提下, 可以对各分社人力取均值, 由已知数据可以计算得第  $n$  个分社的平均岗位人数  $D_n$ , 人均工作能力  $W_n$ , 得到社外人员表达式

$$3 \sum_{n=1}^9 \max \left\{ 0, \frac{1}{W_n} \left( \sum_{k=a_n}^{b_n} X_k \right) - D_n \right\}, \quad (13)$$

因此, 9个分社的实际工作人员总数

$$N = 3 \sum_{n=1}^9 \max \left\{ 0, \frac{1}{W_n} \left( \sum_{k=a_n}^{b_n} X_k \right) - D_n \right\} + 3 \sum_{n=1}^9 D_n. \quad (14)$$

社外人员的参与, 分社必须支付相应报酬. 若出版社以当年的销售额最大为目标进行资源配置, 而忽略报酬问题, 那么分社为了更大的利益会尽量多的申请书号, 同时雇佣更多的社外人员, 是不符合实际情况的. 综上, 将目标定为人均销售额最大.

#### 4.3 建立模型

以分配给第  $k$  门课程书号数  $X_k$  为决策变量, 人力资源效用最大 (人均创造的销售额最大) 为目标, 建立非线性整数规划模型

$$\max \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{72} \beta_{k6} X_k P_k,$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sum_{k=1}^{72} f_{km} X_k}{500} \geq \eta_m + \Delta\eta_m - \varepsilon, & (16.1) \\ & \frac{\sum_{k=1}^{72} f_{km} X_k}{500} \leq \eta_m + \Delta\eta_m + \varepsilon, & (16.2) \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=a_n}^{b_n} Y_k \leq \sum_{k=a_n}^{b_n} X_k \leq \sum_{k=a_n}^{b_n} Y_k, & (16.3) \\ & |X_k - x_k^5| \leq \Delta x_k, & (16.4) \\ & \sum_{k=1}^{72} X_k = 500 \\ & X_k \in N^*, \quad f_{km} \in \{0, 1\}, \quad n = 1, \dots, 9, \quad m = 1, \dots, 4. \end{aligned} \right. \quad (16)
 \end{aligned}$$

主要约束与符号说明：

(16.1)(16.2)波士顿决策约束上下限，具体说明见4.2.1方案量化实例；

(16.3)各个分社分配到的书号小于申请的书号，大于申请书号的一半；

(16.4)波动上下限约束，具体说明见4.2.1稳定性原则；

$a_n$  表示第  $n$  个分社最小课程编号； $b_n$  表示第  $n$  个分社最大课程编号；

$f_{km}$  是波士顿逻辑矩阵  $V_{72 \times 4}$  的元素， $f_{km} = 1$  指第  $k$  种课程属于第  $m$  种业务。

#### 4.4 模型求解

通过代入不同参数，运用 Lingo 软件编程求解得到5种发展战略下的资源配置方案：

表2：五种发展战略最优化分配方案

战略说明	发展战略一 正常发展	发展战略二 发展金牛类	发展战略三 发展明星类	发展战略四 创新发展问题类	发展战略五 补救瘦狗类
$\Delta\eta_1$	0.00%	5.00%	-2.50%	0.00%	-0.50%
$\Delta\eta_2$	0.00%	0.00%	5.00%	-2.50%	-2.00%
$\Delta\eta_3$	0.00%	-2.50%	-2.50%	5.00%	-2.50%
$\Delta\eta_4$	0.00%	-2.50%	0.00%	-2.50%	5.00%
各分社分配数量					
分社类别	书号数	书号数	书号数	书号数	书号数
计算机类	58	58	58	66	60
经管类	42	41	44	42	41
数学类	148	154	152	144	150
英语类	78	73	81	76	82
两课类	66	66	54	65	58
机械、能源类	30	30	34	30	32
化学、化工类	21	21	21	21	21
地理、地质类	28	28	27	27	28
环境类	29	29	29	29	28
总营业额	22710213	22472930	22614033	22212036	22131952
人均效益	17228.39	17054.14	17133.94	16843.29	16761.38

五种发展方向对应的各课程分配方案  $X_k$ 。

**参考文献:**

- [1] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005,7
- [2] 波士顿矩阵[EB/OL]. <http://www.acmr.com.cn/newsletter/3/200608/company/200608001.html>

## Optimization of Resources Allocation for Press

TANG Zhi-gao, ZHONG Qing-qing, SHAO Chang-lei

Advisor: SHENG Han-fang

(Naval Aeronautical Engineering Academy, Qingdao 266041)

**Abstract:** This dissertation examines the variable factors which affect the allocation of resources for press including sales volume, market competitiveness (consumer satisfaction and market share), labour costs and long-term development strategies. Firstly, the Boston matrix model was used to quantify market competitiveness. It analyses different market conditions for press and their development prospects by looking at the market demand growth rate and relative market share. Secondly, taking into account the long-term development of press A with an aim of human resource utility maximisation (i.e. the largest sales per capita) and restrictions by human resource, capacity ISBN applications guidelines, an non-linear integer programming model is set up. Finally, five different development strategies for resources allocation are obtained by changing Boston parameters of the model solved by Lingo which greatly increases the applicability and operability of the model.

**Keywords:** boston matrix model; market share; market demand growth rate; relative market quotient; resource utility

文章编号:1005-3085(2006)07-0055-06

## 出版社资源配置的多目标优化模型

周有飞, 夏 阳, 陈 博

指导教师: 指导教师组

(华北电力大学, 保定 071003)

**编者按:** 该文对出版社资源的优化配置问题, 运用层次分析法、灰色预测及数学规划等方法, 提出了一个多目标优化模型, 较好的处理了出版社当年的经济效益与长远发展目标的问题。

**摘 要:** 针对出版社资源的优化配置问题, 为了使出版社获得最大利润的同时, 也要加大对强势产品的支持力度, 本文建立了一个多目标整数规划模型。首先运用基于指数标度的层次分析法, 将各门课程除销售利润以外的因素进行量化, 得到了该课程的一个综合得分, 作为强势产品的衡量标准。然后运用灰色预测模型, 预测2006年每门课程的销售利润和综合得分。为了更合理的分配书号, 本文引进了平衡系数, 避免分配给各门课程的书号出现两极分化。最后利用 LINGO 软件对模型求解。分配给九个分社的书号数依次为: 78、42、120、86、50、53、25、36、25, 总销售额为 24457323 元。

**关键词:** 多目标整数规划; 层次分析法; 灰色预测

**分类号:** AMS(2000) 90C10

**中图分类号:** O221.4

**文献标识码:** A

### 1 问题分析

出版社每年都需要对它要出版的书号进行合理的分配, 以达到最好的经济效益, 这是一个考虑多因素的资源分配问题。本文将其归结为两个因素: 其一是同一门课程每个书号的平均销售利润; 其二是该门课程的市场潜力, 并以综合得分将市场潜力量化。每个书号的平均销售利润表现为实际销售量和利润率, 综合得分表现为读者的满意度、市场占有率、印张价格比和出版社的地位四个因素。由于读者的满意度带有主观因素, 故可以利用层次分析法进行量化。2006年的销售量和市场占有率可以利用灰色预测模型来进行预测。所求的分配方案既要使每门课程销售利润最大, 又要考虑每门课程的市场潜力, 使出版社的年度经济效益和可持续发展的问題得到很好的解决。

### 2 问题假设

- 1) 所有课程的利润率相同;
- 2) 同一门课程所有书目的年销量相近, 且同一课程不同书目的价格相近;
- 3) A 出版社每年可分配的总的书号数目一定, 都为 500;
- 4) A 出版社只考虑下属九个分社的 72 门课程;
- 5) A 出版社在分配书号时至少保证分给各分社申请数量的一半;
- 6) 附表二问卷调查数据认为是客观, 可靠的;
- 7) 不考虑新增的人力资源, 并且只考虑人力资源的历年平均值。



### 3 符号说明

$V$ : 出版社一年的销售额;	$W$ : 出版社一年的总综合得分;
$S_i$ : 第 $i$ 门课程在2006年的每个书号的销售量;	$Z_i$ : 第 $i$ 门课程的综合评价值;
$T_i$ : 2006年第 $i$ 门课程申请的书号数目;	$Q_i$ : 第 $i$ 门课程的强势度;
$J_{ij}$ : 第 $i$ 年第 $j$ 门课程的计划销售量;	$CI$ : 判断矩阵的一致性指标;
$R_{ij}$ : 第 $i$ 年第 $j$ 门课程的实际销售量;	$RI$ : 判断矩阵的一致性比率;
$IP_i$ : 第 $i$ 分社所属课程的数目;	$L_i$ : 第 $i$ 门课程的人力资源能力;
$x_i$ : 实际分配给第 $i$ 门课程的总书号数目;	$y_i$ : 第 $i$ 个分社实际申请的书号数目;
$x_{ij}$ : 分配给第 $i$ 分社第 $j$ 门课程的书号数;	$w_i$ : 第 $i$ 个因素的权重;
$p_i$ : 第 $i$ 门课程下所有书目的平均单价;	$A$ : 判断矩阵;
$Ac_{ij}$ : 第 $i$ 年第 $j$ 门课程计划的准确程度;	
$Ac_{0j}$ : 预测的2006年第 $j$ 门课程计划的准确程度 (也称为平衡系数)。	

### 4 模型建立

根据假设1), 由于所给教材的利润率是相同的, 则总利润的最大化问题可以转化为总销售额的最大化问题。

根据假设2), 由于相同课程下不同书号的年销量相近, 且价格相近, 因此, 只须考虑对每门课程的书号分配。再考虑到人力资源的限制, 以及假设7), 建立如下多目标整数规划模型:

$$\begin{aligned} \text{多目标函数为} \quad & \begin{cases} \max V = \sum_{i=1}^{72} p_i \times S_i \times x_i, \\ \max W = \sum_{i=1}^{72} Q_i \times x_i, \end{cases} \\ \text{约束条件分别是} \quad & \begin{cases} x_i \text{ 为正整数, } i = 1, 2, \dots, 72; \\ \sum_{i=1}^{72} x_i = 500; \\ \sum_{j=1}^{IP_i} x_{ij} \geq y_i/2, \quad i = 1, 2, \dots, 9; \\ \sum_{j=1}^{IP_i} x_{ij} \leq L_i, \quad i = 1, 2, \dots, 9; \\ T_i \geq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 72. \end{cases} \end{aligned}$$

### 5 模型求解

#### 5.1 求解思路

在目标函数中, 各门课程在2006年的销售量和强势度是未知的。利用前五年已知的数据对2006年的销售量进行预测。影响各门课程强势度的因素有市场占有率、消费者对书本的满意度、书本印张价格比和出版社在消费者心中的影响。首先根据附件二中的数据, 用层次分析法确定每年每门课程的强势度, 然后利用灰色预测方法, 预测出2006年各门课程的强势度。

## 5.2 强势度的确定

对影响综合得分的各因素的原始数据  $\beta_i$  用如下方法进行无量纲化处理,

$$\lambda(i) = \beta(i) / \left( \sum_{i=1}^n \beta(i) / n \right), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

运用基于指数标度的层次分析法, 来确定每门课程的综合得分。针对强势度这一目标建立层次结构, 如图1所示, 其中最上一层为目标层, 中间为准则层, 最下层为方案层。

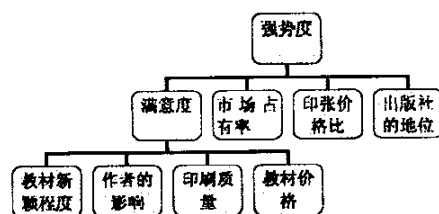


图1: 层次分析图

指数标度相对于传统的1-9标度, 克服了其一致性与判断思维一致性不等价这一缺憾, 并符合传递性准则。取相对重要度  $a = 1.618$ , 指数标度的含义见表1。

表1: 指数标度

标度 $a_{ij}$	标度定义	标度 $a_{ij}$	标度定义
$a^0 = 1$	$B_i$ 与 $B_j$ 同等重要	$a^3 = 4.236$	$B_i$ 比 $B_j$ 明显重要
$a^1 = 1.618$	$B_i$ 比 $B_j$ 稍微重要	$a^4 = 6.854$	$B_i$ 与 $B_j$ 相比很重要
$a^2 = 2.618$	$B_i$ 比 $B_j$ 重要	$a^5 = 11.09$	$B_i$ 与 $B_j$ 相比绝对重要

构造判断矩阵。考虑到要加大对强势产品的支持力度, 所以要加大影响强势产品的主要因素权重。本文将影响强势度的主要因素归结为: 市场占有率和满意度, 从而产生如下主观判断矩阵

$$A = (a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ a^{-1} & 1 & a & a^3 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a^2 \\ a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} & 1 \end{pmatrix},$$

求得矩阵  $A$  的最大特征值为  $\lambda_{\max} = 4$ 。

一致性检验。计算一致性指标  $CI = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$  及一致性比率指标  $CR = CI / RI$  其中  $n = 4$ , 查表可知  $RI = 0.89$ , 所以  $CR = 0$ , 认为其主观判断矩阵通过一致性检验, 可以用来计算权重。利用公式

$$w_i = \left( \sum_{j=1}^4 a_{ij} \right) / \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij} \right)$$

计算出每个因素的权重为 0.466, 0.288, 0.178, 0.068。进一步可得第  $j$  门课程的强势度

$$Z_j = \sum_{i=1}^4 w_i \times q_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 72,$$

其中  $q_{ij}$  表示第  $j$  门课程第  $i$  个影响因素的无量纲化值。

### 5.3 综合得分的预测

综合竞争指数在时间上是有积累效应的, 类别之间也具有模糊的特性, 没有明确的界限, 而且又受多种因素的综合影响, 因此, 本文利用时间序列建立灰色预测模型, 即  $GM(1, 1)$  模型, 采用累加生成法, 得到一条通过系统的原始序列累加生成的点群的最佳拟合曲线, 并用此曲线对未来的情况进行预测。

## 6 模型改进

对于原模型, 进行优化求解, 发现虽然利润上得到了优化, 但是书号的分配却出现了两极分化的现象: 一部分课程由于其本身具有很强的强势度, 因而分到的书号很多; 而一部分课程由于本身的强势度较弱, 从而分到的书号很少, 甚至很多课程没有分到书号。这是与实际情况不相符合的, 因此, 需要对上述模型进行改进。类似于经济学中引进基尼系数来衡量经济发展的平衡性, 本文引进了一个平衡参数来约束对书号的分配。

平衡参数的确定。本文对附件 3 的数据进行了处理, 利用各门课程每年的计划销售量与实际销售量, 计算出了各年的计划准确度, 即

$$Ac_{ij} = R_{ij}/J_{ij}, \quad i = 1, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 72.$$

然后用灰色模型  $GM(1, 1)$  根据前五年的计划准确度预测出 2006 年的计划准确度  $Ac_{6j}$ , 这个准确度就定义为第  $j$  门课程的平衡参数, 这是基于以下的考虑: 一般来说, 出版社各个分社实际得到的书号数比它申请的书号数日要少, 但分配给每门课程的书号数和该课程申请的书号数不会相差太大, 这样就可以有效的抑制了两极分化, 使得总体的分配比较均匀。

另外, 平衡参数具有很好的灵活性, 可以满足决策者对与利润与强势度的不同需求。考虑到这个平衡参数是实际总销售量与计划总销售量的比值, 根据假设 2), 同一课程中不同书号的销量相近, 则这个计划销量的准确度就可以认为是申请的书号的准确度, 这样虽然损失了一部分利润, 但却使得分配更为合理, 更符合实际情况, 满足出版社长远发展的需要。从而得到改进模型: 多目标函数为

$$\begin{cases} \max V = \sum_{i=1}^{72} p_i \times S_i \times x_i \\ \max W = \sum_{i=1}^{72} Q_i \times x_i \end{cases}$$

约束条件分别是

$$\begin{cases} x_i \text{ 为正整数,} & i = 1, 2, \dots, 72; \\ \sum_{i=1}^{72} x_i = 500; \\ \sum_{j=1}^{IP_i} x_{ij} \geq y_i/2, & i = 1, 2, \dots, 9; \\ \sum_{j=1}^{IP_i} x_{ij} \leq L_i, & i = 1, 2, \dots, 9; \\ T_i \geq x_i, & i = 1, 2, \dots, 72; \\ \frac{x_j}{T_j} < Ac_{6j}, & j = 1, 2, \dots, 72. \end{cases}$$

## 7 模型的结果

用 Lingo 8.0 软件对改进模型进行求解，得到的结果见表 2。

表2: 书号分配结果及其销售额

分社	书号数 (个)	销售额 (元)
计算机	78	699445.8
经管	42	1536694
数学	120	13355268
英语	86	1456452
两课	50	5156054
机械能源	51	1068383
化学化工	20	306164.6
地质地理	28	449851.2
环境	25	429012
合计	500	24457324

## 8 模型的评价

- 1) 模型编程实现简单，可操作性强，易于推广；
- 2) 采用层次分析法确定权重，判断矩阵可以根据强势度的进行调节，具有较好的灵活性；
- 3) 运用灰色预测的方法进行预测，这样在市场信息不完全的情况下，有较高的准确性；
- 4) 在分析权重时，版次这个因素没有考虑进去，造成一些课程的数据有所偏差。

### 参考文献：

- [1] 谢金星. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005
- [2] 姜启源. 数学模型[M]. 第2版. 北京：高等教育出版社，1993
- [3] 梁国业. 数学建模[M]. 北京：冶金工业出版社，2004
- [4] 吴祈宗. 运筹学[M]. 北京：机械工业出版社，2002

- [5] 许永峰. 指数标度中重要度的研究[J]. 纺织高校基础科学学报, 2003,16(2)
- [6] 注浩, 马达. 层次分析标度评价与新标度方法[J]. 系统工程理论与实践, 1993,13(5)
- [7] 舒康, 梁镇韩. AHP中的指数标度法[J]. 系统工程理论与实践, 1990,10(1):6-8

## The Multiple Objective Optimization Model for Press Allocation of Resources

ZHOU You-fei, XIA Yang, CHEN Bo  
Advisor: Instructor Group

(North China Electric Power University, Baoding 071003)

**Abstract:** In this paper the optimization distributing problem of book numbers is considered. In order to maximize the profit and give more supporting to stronger power product, a multiple targets integer programming model is built. First, using the analytic hierarchy process (AHP) based on index scale process, some factors are quantified, and the synthetic score of every course is obtained. This score is considered as the measurement of stronger power product. Second, the gray prediction method is used to forecast the profit and the synthetic score of every course in 2006. Third, for more rational assignment of book numbers, a balancing number is introduced to avoid polarization appearing on the book numbers distributed to every course. Finally, the LINGO software is used to solve the model. The book numbers distributed to nine subsidiary presses are 78, 42, 120, 86, 50, 53, 25, 36, 25, and the total profit is 24457323 yuan.

**Keywords:** multiple objective integer programming; analytic hierarchy process; grey prediction

文章编号:1005-3085(2006)07-0061-03

## 出版社的资源配置与战略决策

孟大志, 张 艳, 孙守霞

(北京工业大学应用数理学院, 北京 100022)

**摘 要:** 本文给出 2006 年数学建模竞赛甲组 A 题的命题背景, 命题构思和解题的基本思路。特别强调了海量数据处理和信息不完全条件下的决策问题的重要性和建模发展的特点。同时也概述了学生的创造性在建模竞赛中的表现。

**关键词:** 数学建模; 战略决策; 资源配置

**分类号:** AMS(2000) 90C35

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 引言

全国数学建模竞赛十五年之际, 回顾这项教育事业成功的历程, 当然首先归功于无私奉献的开创这一事业的一批老教授们, 然而没有象高教出版社这样一些企业的经济支持, 这项事业形成今年近乎万队参加的规模也是不可想象的。2006年初, 在全国组委会和高教社共同商讨下, 决定让我对高教社的企业管理问题进行调研, 希望从中拟定当年的数学建模夏令营与全国竞赛的题目。通过多次对高教社的调研, 在全国组委会各位教授的共同努力下, 我们选择了“市场信息调查方法”作为夏令营的题目, 而将“教材类出版社资源配置”问题作为竞赛用题的素材。

### 2 问题背景

出版社的资源配置是一个带有普遍性的问题, 是出版企业的战略决策问题。这个问题解决的水平不仅直接关系到出版社的下一年的企业经济效益, 也影响企业的市场竞争力与发展。但是, 当前大多数出版社的资源配置方法基本上是基于经验的, 就是说是根据去年的配置方案, 再参照当年下属各分社提交的申请计划和某些内、外部特殊情况的“考虑”而进行分配的。显然这种以经验和直觉为主, 通过群体“拍脑袋”的决策在现代企业管理中是粗糙的、不精确的, 达不到企业管理的目标, 因此, 如何通过有数据依据的理性化决策是企业所需要的。

但是, 事实上出版业可用于资源配置的数据信息通常是不完全的。由于出版界普遍没有全企业的 ERP 或 MIS, 从而企业本身的基础数据信息没有完整的采集与存贮。同时, 用于决策的出版市场的信息更是匮乏, 也没有行业性的市场信息有效采集与存贮。在这种情况下, 要进行有数据依据的科学决策是很困难的, 这就启发我们向全国大学生们提出了一个数据信息不完全情况下的资源配置决策问题。

### 3 命题构思

二十一世纪数学建模越来越突出地表现出时代的特点: 面对海量数据, 数据不完备性和信息结构复杂。我们的命题构思希望突出这三个特点, 希望大学生在建模比赛中对此有所体会,

有所理解,又能在这些特点的决策问题建模中有所创新。

#### 1) 海量数据

二十一世纪的科学技术和社会生活中,由于广泛地使用了计算机和网络,也由于人类对于信息的数据化有更高、更迫切的需求,从而数据已经是世纪的一般特征,一个数据化社会已经形成:工商业的全球化、全球化社会管理、生命科学指数增长的数据以及互联网的数据涌现……。一方面人们都被数据海洋所淹没,另一方面人们又渴望在数据中得到所需要的信息与知识,从而面向海量数据的计算与分析,在海量数据中建立数学模型已经是科学技术的一种最重要的研究方法。因此,我们期望通过数学建模竞赛,让更多的大学生理解我们这个数字化社会。

#### 2) 数据不完备

在数字社会的初期,尤其是象中国这种正处于发展中的国家,多数企业并未建立完备的数据收集与存储系统。出版业中已经建立 ERP 或 MIS 的出版社目前了无几,即使建立了企业的基础数据库,市场信息的采集与完备地整合仍然是十分欠缺的。因此,在这种实际情况下,面对数据的残缺不全与“肮脏”,如何进行有数据依据的决策,显然是当前企业特别需要的。我们期望通过数学建模竞赛让大学生们理解社会数据的不完备性。

#### 3) 信息结构的复杂性

科学技术已经进入复杂系统的研究,而社会功能的大幅增加也使社会变得复杂,特别是企业正走向全球化,企业将面对全社会,同时企业进入精确化生产的水平,这些都使得复杂性问题的成为二十一世纪的又一个特点。面对一个复杂的系统,特别是信息系统,如何分析并表达清楚系统中的信息结构是理解系统以及为系统建立数学模型的关键环节。我们期望通过这样一个复杂的决策问题,让大学生们学会分析复杂问题的方法,也建立处理复杂问题的信心。

以上三点既是命题的构思要点,也形成了题目的难点和提供学生发挥创造性的空间。

### 4 建模要点

出版社的资源配置实际上就是将有限的书号分配给各个分社(每个分社出版一个学科的教材),因为一个书号从分配到确定的分社以后,将经历策划、编辑、设计、排版、印刷直至销售(或入库),所以,书号占有了一定量的出版社的各种生产资源和资金,而销售以后又体现出税收与利润。因此,出版社对于书号的分配就是出版社的资源配置。由于不同的教材表现出的投入产出效益不同,同时对于企业利润与在市场中竞争力的贡献也不同,从而需要科学地将书号分配到各分社以期获得最佳的企业效益。从题目中显然看出是一个优化问题,有明显的优化问题的结构:书号数是优化变量,经济效益是优化的目标而企业内部与外部的各种条件构成约束集合。

如何建立这样一个优化决策问题的数学模型,首先应该是分析清楚决策所需要的信息,信息之间的结构以及在问题附录中给出的数据是如何计算出这些信息的。

资源配置的决策所需要的信息可分为两大类:外部的或市场的信息和内部的或内部资源的信息。

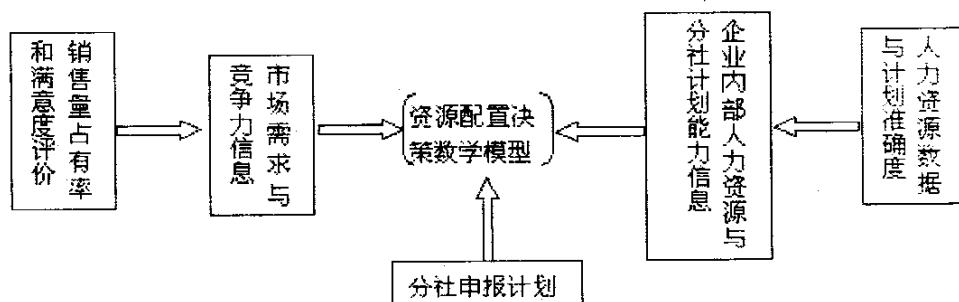
#### 1) 内部信息

包括各分社申请中计划的各个课程的书号数,由于各分社可能存在本位的某种主观因素而使申报数与实际完成数之间存在差异,这种差异又称为计划准确度;同时企业资源也是内部信息,它主要标志企业的产能和人力资源的分布(出版社的资源主要体现在人力资源中)。

#### 2) 外部信息

主要是市场信息，包括市场需求信息与市场竞争力信息。由于市场竞争力包含的因素较多，例如：企业财务状况，市场占有率，企业的市场形象，商品的满意度、企业的人力资源配置以及企业的创新能力等等。但是实际上许多因素难以得到量化的数据，因此竞争力的完全表达是困难的。在这种信息不完全的条件下，数学模型只能以一定粗糙度来建立。

我们可以将决策问题的信息结构用下图表示：



分析清楚了信息结构，可以建立数学模型将信息之间的关系用数学表达式表示出来，当然模型不是唯一的。

在今年的全国大学生数学模型比赛中，许多答卷都对以上结构有很清楚的理解，同时又能将其用各种不同的数学模型表达：线性规划、非线性规划、多目标规划、多层或分级分配优化，经验与理论相结合的部分优化以及用网络流优化模型等等，产生了一批非常有创意的优秀论文。

值得指出的是，在分析产品之间的强势和设计强势系数时，一些学生的论文很准确地理解到，所谓强势不仅是在外部市场表现中是富有竞争力的，而且把在企业内部比较的强势很好地结合起来，虽然这种文章还不普遍。

## 后记

十五年来的数学建模竞赛取得令全国大学生瞩目的成绩，许多大学生在参加竞赛以后都感觉受益匪浅。另一方面，上万大学生参加的竞赛当然萌发了许多创造性的好思想，如何将竞赛中的创意转变成对于社会有益的实际成果，也一直是数学建模工作者们努力的一个方向。本题在竞赛之后又得到高教出版社的支持，将资源配置问题进一步研究下去，争取获得实际成果，在这一方面企业起到很好的作用，也是对数学建模事业的有力推动。

## The Allocation and Strategic Decision Problems of Press Resources

MENG Da-zhi, ZHANG Yan, SUN Shou-xia

(Beijing Polytechnic Univ., Beijing 100022)

**Abstract:** This passage describes procedure of putting forward and China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling 2006. In this paper, we discussion the allocation and strategic decision problems of press resources and shows the suggestion of author's the idea of solving the problems and gives introduction and comment on papers of participants.

**Keywords:** mathematical modeling; strategic decision; press resources



文章编号:1005-3085(2006)07-0064-07

## 艾滋病疗法评价及疗效预测模型

徐 科, 孙开栋, 潘洪雷

指导教师: 李新民

(山东理工大学, 山东淄博 255049)

**编者按:** 本文的特点是采用多因素方差分析法评价四种疗法的优劣。在考虑四种疗法的费用时, 建立了增量成本-效应模型, 所得结论较符合实际情况, 建立的模型和求解方法具有一定的可行性和有效性。

**摘 要:** 本文首先利用二次曲线回归分别得到反映测量时间  $t$  与 CD4 个数和 HIV 浓度的回归方程。结合最优停药准则, 计算得出的最佳治疗终止时间为第 27 周。为了研究年龄、疗法和测量时间三因素对 CD4 的影响, 本文建立了多因素方差分析模型, 然后通过多重比较检验可知最优疗法为疗法 4。在考虑医疗费用的情况下, 利用增量成本-效用模型得知第 3 种疗法最优。

**关键词:** 二次曲线; 多元方差分析; 增量成本-效应模型

**分类号:** AMS(2000) 62J05; 62J10

**中图分类号:** O212.1; O212.6

**文献标识码:** A

### 1 符号说明

$CD_t$ : CD4 个数 (CD4count),

$V_t$ : HIV 浓度 (VLoad),

$L_t$ :  $L_t = \log(CD_t + 1)$ ,

$M_t$ :  $M_t = \log V_t$ ,

$t$ : 测量时刻 (周数),

$\varepsilon_t$ : 测量误差,

$y_{ijkl}$ : 对于处于第  $j$  个年龄段的人, 采用第  $i$  种疗法, 在第  $k$  个测量时间段内测得的  $\log(CD4count + 1)$  的第  $l$  个观察值,

$\mu$ : 总平均,

$\alpha_i$ : 第  $i$  种疗法的效应,

$\beta_j$ : 第  $j$  个年龄段的效应,

$\gamma_k$ : 第  $k$  个测量时间段的效应,

$(\alpha\gamma)_{ik}$ : 第  $i$  种疗法与第  $k$  个测量时间段的交互效应,

$\varepsilon_{ijkl}$ : 试验误差,

$U_i$ : 采用第  $i$  种疗法的患者每周  $\log(CD4count + 1)$  改变量的平均值,

$C_i$ : 采用第  $i$  种疗法每周所需要的成本。

### 2 基本假设

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , 且相互独立;

$\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$ , 且相互独立。

### 3 模型的建立与求解

#### 3.1 问题一的模型建立与求解

##### 3.1.1 模型的建立

$CD_t$  和  $V_t$  的大小是评判艾滋病患者病情严重程度的两项重要指标, 而这两项指标均与测量时刻  $t$  有关, 为了使拟合曲线相对平滑, 我们将  $CD_t$  和  $V_t$  分别做如下变换:  $L_t = \log(CD_t + 1)$ ,  $M_t = \log V_t$ 。  $L_t$  和  $M_t$  分别服从非线性模型

$$L_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad M_t = g(t) + \varepsilon_t,$$

通过  $L_t$  的散点图(图1)和  $M_t$  的散点图(图2), 结合用药对病情随时间变化的影响, 利用最小二乘法对数据进行二次曲线拟合, 即

$$Y = b_0 + b_1t + b_2t^2.$$

##### 3.1.2 模型求解

首先根据医学知识确定最优停药准则:  $CD4$  数量达到最大并开始下降, 而  $HIV$  浓度达到最小并开始上升时为最佳停止用药时间。下面分情况求解模型(拟合的原理及方法见[4]):

###### 1) 综合考虑整个原始数据

利用原始数据, 分别做  $t$  与  $L_t$  和  $M_t$  的二次曲线拟合。利用统计软件 SPSS, 以  $t$  为自变量,  $L_t$  为因变量, 做二次曲线回归得回归方程

$$L_t = 1.8128 + 0.0251t - 0.0005t^2, \quad \text{即 } CD_t = 10^{1.8128+0.0251t-0.0005t^2} - 1.$$

经检验知  $p$  值为 0, 说明拟合的模型显著性成立。拟和图形见图 1。

然后再以  $t$  为自变量,  $M_t$  为因变量, 做二次曲线回归得回归方程

$$M_t = 0.6260 - 0.0212t + 0.0004t^2, \quad \text{即 } V_t = 10^{0.6260-0.0212t+0.0004t^2}.$$

经检验知  $p$  值为 0, 说明拟合的模型显著性成立。拟和图形见图 2。

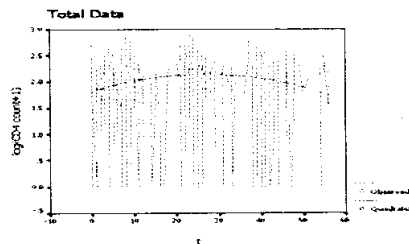


图1:  $CD4$  个数与时间的回归曲线

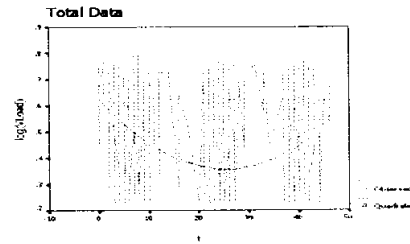


图2:  $HIV$  浓度与时间的回归曲线

根据  $t$  与  $L_t$  的二次曲线, 计算每个测量时刻  $t$  对应的预测值  $L_t$ , 并找出其中最大值为 2.1458, 其对应时刻为第 27 周。根据  $t$  与  $M_t$  的二次曲线, 计算每个测量时刻  $t$  对应的预测值  $M_t$ , 并找出其中最小值为 0.3573, 其对应时刻为第 25 周。根据最优停药准则, 由 3 可知停药时间的范围为 (25, 27), 为了保守治疗, 我们取第 27 周作为最佳治疗终止时间。

2) 在第0周测得的336个数据中,以CD4个数200为界,将病人分成两组

医学研究表明,CD4个数小于200个/mm<sup>3</sup>时,机会性感染频率相对较大,病情相对较严重[2]。考虑到病人在开始接受治疗之前的病情严重程度存在差异,我们选取第0周测得的336个数据作为服药前的初始数据,并以CD4的个数200为界,把 $CD_t < 200$ 的病人作为一组,视为重病患者, $CD_t > 200$ 的病人为另一组,视为轻病患者。

利用1中方法,计算得知:病重患者的最佳治疗终止时间为第27周,轻病患者的最佳治疗终止时间为26周。

### 3.1.3 结果与讨论

为确定最佳治疗终止时间,我们既考虑了全部356个病人的总体情况,也分开讨论了服药前的318个重病患者(0周时的CD4个数小于200)和18个轻病患者(0周时的CD4个数大于200)的情况。对于整个群体,我们确定的最佳治疗终止时间为第27周,此时模型预测的CD4个数为138.8943, HIV浓度为2.2822;对于服药前的重病患者,我们同样确定最佳治疗终止时间为第27周,此时模型预测的CD4个数为136.2777, HIV浓度为2.3062;而对于轻病患者,我们确定的最佳治疗终止时间为第26周,此时模型预测的CD4个数为304.0001, HIV浓度为1.8694。由于重病患者占总病人数的绝大部分,所以两者的最佳治疗终止时间相同,均为第27周;而对于一小部分在服药前的CD4数就超过200的轻病患者来说,最佳治疗终止时间则提前一周,为第26周。将重病患者和轻病患者分开讨论的好处在于避免两者的观测值相互影响,致使求出的模型过于笼统,另一方面,这样做不至于延长轻病患者的治疗时间。

### 3.1.4 模型评价及改进

用二次曲线模型拟合的优点在于:

1) 与函数插值不同,二次曲线模型不要求拟合曲线通过所有的观测点,只要求能反映出数据的变化趋势。由于观测数据本身也存在误差,所以曲线拟合的过程比插值过程得到的结果更能反映客观实际。

2) 模型的预测性强,可对继续用药的效果做一个大体的估计和判断。考虑到用二次曲线模型拟合本题数据的精度不高,有待改进,可以尝试用SPSS中的非线性拟合模块拟合出既能反映数据趋势又能在精度上有所提高的模型。

## 3.2 问题二的模型建立与求解

### 3.2.1 模型的建立

方差分析用于判断控制变量的不同水平是否对观察变量产生显著影响。如果控制变量的确对观察变量产生了显著影响,我们还可以通过进一步分析找出究竟是控制变量的哪个水平对观察变量产生了显著影响。

多因素方差分析中的控制变量个数为两个或两个以上,它的研究目的是要分析多个控制变量的作用、多个控制变量交互作用、以及其他随机因素作用是否对观察变量的分布产生显著影响。本问题共有三个控制变量:疗法、年龄和时间,属于多因素方差分析问题。

由原始数据知, 疗法分为4种, 同时我们根据如下标准, 把年龄分为4组, 时间分为6组。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{疗法1} \rightarrow 1 \\ \text{疗法2} \rightarrow 2 \\ \text{疗法3} \rightarrow 3 \\ \text{疗法4} \rightarrow 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 18\text{岁以下 (少年)} \rightarrow 1 \\ 18\sim 45\text{岁 (青壮年)} \rightarrow 2 \\ 45\sim 60\text{岁 (中年)} \rightarrow 3 \\ 60\text{岁以上 (老年)} \rightarrow 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0\text{周} \rightarrow 1 \\ 2\sim 10\text{周} \rightarrow 2 \\ 10\sim 18\text{周} \rightarrow 3 \\ 18\sim 26\text{周} \rightarrow 4 \\ 26\sim 34\text{周} \rightarrow 5 \\ 34\sim 42\text{周} \rightarrow 6 \end{array} \right.$$

根据此问题的具体情况, 共有三个控制变量: 疗法、年龄、时间, 再结合考虑疗法和时间的交互作用, 建立模型如下

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijkl}, \\ \varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2), \text{且相互独立,} \\ \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^4 \beta_j = 0, \sum_{k=1}^6 \gamma_k = 0, \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^6 (\alpha\gamma)_{ik} = 0. \end{array} \right.$$

### 3.2.2 模型求解

多因素方差分析原理及公式推导可参阅[1], [3], 利用 SPSS 统计软件进行多因素方差分析, 得到

表1: 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F值	p值
疗法	69.391	3	23.130	20.530	0.000
年龄	22.472	3	7.491	6.648	0.000
时间	85.336	5	17.067	15.148	0.000
疗法*时间	48.396	15	3.226	2.864	0.000
误差	5643.458	5009	1.127		
总和	5854.660	5035			

由表1, 观察变量  $\log(CD4count + 1)$  的总变差可以分解为三大部分:

1) 各控制变量独立作用造成的变差, 从表中可知, 不同疗法造成的变差平方和为69.391, 均方为23.130; 不同年龄段造成的变差平方和为22.472, 均方为7.491; 不同测量时间造成的变差平方和为85.336, 均方为17.067。可见, 疗法种类对CD4浓度的影响要大于年龄和测量时间对CD4浓度造成的影响。再从它们的F值看, 分别是20.530, 6.648和15.148, 对应的p值都是0.000, 说明年龄、疗法、时间对CD4浓度都有显著影响;

2) 疗法与时间的交互作用造成的变差。这里, 不同疗法和不同时间交互作用造成的CD4浓度变差平方和为48.396, 均方为3.226, F值为2.864, p值为0.000, 表明不同疗法和不同测量时间的交互作用对CD4浓度有显著性影响;

3) 其他随机因素。

品”，作为命题人的喜悦心情完全淹没了过去的艰辛，同时也有一种特别的成功感和建模的快乐与享受。在此之前，作者对煤矿安全问题也是了解甚少，尤其是对矿井结构和通风系统的构成一无所知，完全是由于对数学建模事业的执着，才走上了一条求学之路。一路走来，不谦虚地说，现在也成了半个煤矿安全生产的“专家”了，从中也让我收获多多，受益匪浅。虽然竞赛结束了，这个题目所提出的问题也基本解决了，但与此有关的很多问题还值得我们研究和思考。例如：虽然煤矿生产有具体的安全规程，为什么还不断地有煤矿安全事故发生，问题的根源在哪里？实际中瓦斯爆炸的界限值为5%~16%，为什么国家规定瓦斯浓度不能超过1%的标准值，这个规定的合理性和根据何在？在现有的大量专业资料中大都应用一些传统的经验公式来对问题进行研究，实际中也是按此执行的，这些经验公式的科学性、合理性又如何？等等问题都是值得我们深思和研究。

致谢：对全国组委会的教授们、河南省平顶山市安全生产监督管理局杨书召局长（高工）、中国矿业大学（北京）秦跃平教授等专家给予的帮助和指导表示衷心的感谢。

#### 参考文献：

- [1] 国家安全生产监督管理局. 煤矿安全规程[M]. 北京：煤炭工业出版社，2004
- [2] 张国枢等. 通风安全学[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，2004
- [3] 徐永昕. 煤矿开采学[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1999
- [4] 徐向义，张先民. 煤矿安全生产技术问答[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1993
- [5] 胡献伍，展良荣. 矿井测风工[M]. 北京：煤炭工业出版社，1997
- [6] 韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2005

## The Mathematical Model of the Problem of Inspecting and Controlling of Gas and Coal Dust

HAN Zhong-geng

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, PLA, Zhengzhou 450002)

**Abstract:** In this paper, according to the grading process of problem D of 2006 Higher Education Press cup Cuncm, the motivation and background of the problem of inspecting and controlling of gas and coal dust are introduced. The practicable solution and its results of the problem are given. Finally, according to the process of grading papers, the comprehensive comments of the solving methods and the existing problems are given.

**Keywords:** coal mine; gas; coal dust; the best amount of ventilation; optimal model

成本-效果分析常需要比较不同治疗方案的成本与效果比值。通常当成本增加时, 其相应的效果也会增加, 但两者不会成正比。当成本增加到一定量时, 效果的增加会逐渐减少或不再增加。此时, 为了选择一个最佳方案, 我们常采用增量成本-效果分析 (incremental cost-effectiveness analysis)。增量成本-效果分析是对一系列成本增加与一系列效果增加的比值进行比较, 以选择其中一个最佳的治疗方案。

增量成本-效用分析的思想: 在治疗方案中, 先选择一个参照方案, 这个参照方案可以是最小的总成本, 也可以是最小的总效果。将最小的总成本或最小的总效果由小到大顺序排列, 将所有方案的总成本和总效果分别减去参照方案中的总成本与总效果而得出增量成本-效果比。增量成本-效果比  $\Delta C / \Delta U$  表示都与参照方案相比, 由每增加 1 个效果单位所增加的成本量来选择 1 个增量成本-效果比  $\Delta C / \Delta U$  最小的治疗方案。 $\Delta C / \Delta U$  一般都为正值, 但也有负值的。当参照方案是以成本从低到高排列, 则  $\Delta C / \Delta U < 0$  表示成本增加而效果减少, 这样的方案当然不在选择内。当参照方案是以总效果从低到高排列, 则  $\Delta C / \Delta U < 0$  表示增加单位效果反而可使成本下降, 这样的方案可以是优选方案[5]。

### 3.3.2 模型求解

1) 利用题目所给的数据可以计算出  $C_i$ 、 $U_i$  相应的值。计算  $U_i$  的方法为: 先计算采用第  $i$  种疗法的每个患者平均每周  $\log(CD4count + 1)$  的改变量, 再计算出采用第  $i$  种疗法的所有患者的平均值。

2) 从 4 个治疗方案中, 选择第一种疗法作为参照方案 (它的总成本最小)。其他疗法先按总成本从小到大排序, 然后将其总成本和总效果分别减去参照疗法中的总成本与总效果而得出 3 个增量成本-效用比。

表3: 增量成本 效用分析表

治疗方案	总成本(C)	总效果(U)	$\Delta C / \Delta U$
1	8.575	-0.01952	-
3	17.15	0.004516	356.805
2	24.15	-0.01406	2854.614
4	25.55	0.006013	664.9239

3) 参照表3中的数据, 结合增量成本-效用模型进行分析: 观察不同疗法的  $\Delta C / \Delta U$  值, 疗法3的增量成本-效用比 356.805 最小, 即与疗法1相比, 每增加 1 个效果单位所增加的成本最小。所以, 在考虑医疗费用的条件下, 疗法3是最优的。

4) 筛选疗法3所有数据, 根据问题一的模型利用 SPSS 对  $\log(CD4count + 1)$  与  $t$  的关系进行二次曲线拟合, 得到模型方程

$$\log(CD4count + 1) = 2.9529 + 0.0042t - 0.0003t^2.$$

经检验  $p$  值为 0.068, 在 0.1 的检验水平下是显著的。

通过计算每一个测量时刻  $t$  对应的预测值  $\log(CD4count + 1)$  可得, 当  $t = 7.71$  时, 曲线到达其最高点。所以, 我们可以确定最佳治疗终止时间为 8, 即在第 8 周时终止治疗。

### 参考文献:

- [1] 王松桂, 陈敏, 陈立萍. 线性统计模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999
- [2] 张可等. 160例成人HIV 感染者/ AIDS 患者机会性感染与CD+4 之间关系分析[J]. 中国性病防治艾滋病, 2003,9(1):5-7

- [3] 薛薇. 统计分析与SPSS的应用[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2001
- [4] 苏金明. 统计软件SPSS12.0 for Windows应用及开发指南[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004
- [5] 徐端正. 生物统计在实验和临床药理学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004

## Models for Effect Evaluation and Forecast of AIDS Treatments

XU Ke, SUN Kai-dong, PAN Hong-lei

Advisor: LI Xin-min

(Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049)

**Abstract:** In this paper, we suggest a quadratic regression method for the CD4, and a quadratic regression method for HIVs. The computed results shows that the best stop time is the 27th week. Multivariate analysis of variance model (MANOVA) is used to quantify the effect of age, treatment and time on CD4 cells. Applying the multiple comparison test, the results show that the treatment 4 is the best one. However, the incremental cost-effectiveness analysis shows the treatment 3 is best when consider costs of four treatments.

**Keywords:** quadratic regression; multivariate analysis of variance model; incremental cost-effectiveness model

文章编号:1005-3085(2006)07-0071-06

## 艾滋病疗法评价及疗效的预测模型

翟远政, 王 岩, 王亚平

指导教师: 张德平

(南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

**编者按:** 本文主要特点是把服药前 CD4 和 HIV 的初始值作为变量放到回归模型中并用逐步回归方法选择出最后的模型。这样做比较合理而且能提高回归系数的精度。

**摘 要:** 本文基于美国艾滋病医疗实验机构 ACTG 公布的临床观测数据, 采用逐步回归和完全二次回归方法建立了艾滋病疗法评价及疗效预测模型, 根据 CD4 和 HIV 浓度随时间的变化关系, 引入  $CH$  值度量疗效的优劣, 对最佳治疗终止时间进行预测, 得到当前疗法对艾滋病只能缓解但难以完全治愈, 并且应在 27 周左右终止治疗。

**关键词:** 疗效评价; 逐步回归方法; 治疗终止时间; 预测模型

分类号: AMS(2000) 92D30

中图分类号: O175.1

文献标识码: A

### 1 基本假设和符号说明

#### 1.1 对问题可作如下假设

- 1) 所有病人的测试记录从其用药的第 0 周开始, 即每个病人开始记录的数据是未服药前测得的;
- 2) 病人之间存在明显个体差异, 即他们的免疫力、对药物及病毒的敏感程度不同, 又由于首次测试记录的特殊性, 我们选取每位病人首次测试的记录 (可认为是人体内未服用药物前 CD4 和 HIV 浓度) 作为这种差异的体现因子;
- 3) 由于 CD4 和 HIV 的浓度与治疗时间  $t$ 、病人的初始状况 (开始测试时病人感染的程度) 有关, 现假设 CD4 和 HIV 的浓度是与时间  $t$  以及 CD4 及 HIV 浓度初始值有关的连续函数;
- 4) 假设艾滋病病人的年龄对其自身的 CD4 和 HIV 浓度的影响是微不足道的, 可以忽略不计。

#### 1.2 文中用到的符号

$t$ : 为测试时间, 以周为单位;

$C(t)$ :  $t$  时刻 CD4 浓度,  $t=0$  时  $C(0)$  为服药前 CD4 浓度的初始值;

$H(t)$ :  $t$  时刻 HIV 浓度,  $t=0$  时  $H(0)$  为服药前 HIV 浓度的初始值;

$\bar{C}(t)$ :  $t$  时刻 CD4 的平均浓度;

$\bar{H}(t)$ :  $t$  时刻 HIV 的平均浓度;

$X$ : 相关矩阵;

$m$ : 大于零的常量。



## 2 模型的建立与求解

### 2.1 问题分析

利用附件1的数据,预测继续治疗的效果,确定最佳治疗终止时间。附件1记录了ACTG320(见附件1)是同时服用 Zidovudine(齐多夫定), Lamivudine(拉莫夫定)和 Indinavir(茚地那韦)3种药物的300多名病人每隔几周测试的CD4和HIV的浓度(每毫升血液里的数量);通过对数据的综合分析,只考虑 $C(t), H(t)$ 与 $C(0), H(0), t$ 之间的关系,忽略在某时刻只有一个观测数据的记录,以增加模型准确性。

### 2.2 模型的建立

首先利用附件1的数据确定初始浓度 $C(0), H(0)$ 的初始矩阵。然后我们用多元多项式回归中的逐步回归和完全二次回归方法确定了时间 $t$ 、个体差异 $C(0), H(0)$ ,对CD4和HIV浓度以及CD4与HIV之间相互影响的回归系数。此系数来源于实验数据本身,因此可以避免人为主观判断的误差,从而可以针对病人病情的严重与否来判断该疗法的好坏。使用初始矩阵由多项式回归方法得到如下初始回归模型

$$\begin{aligned} C(t) &= b_0 + b_1 \times C(0) + b_2 \times H(0) + b_3 \times t + b_4 \times C(0) \times H(0) + b_5 \times C(0) \times t \\ &\quad + b_6 \times C(0)^2 + b_7 \times H(0) \times t + b_8 \times H(0)^2 + b_9 \times t^2, \\ H(t) &= c_0 + c_1 \times C(0) + c_2 \times H(0) + c_3 \times t + c_4 \times C(0) \times H(0) + c_5 \times C(0) \times t \\ &\quad + c_6 \times C(0)^2 + c_7 \times H(0) \times t + c_8 \times H(0)^2 + c_9 \times t^2. \end{aligned}$$

利用逐步回归分析方法进行分析:在初始模型中选取全部的自变量并构造出新的一组矩阵

$$X = [C(0), H(0), t, C(0) \times H(0), C(0) \times t, C(0)^2, H(0) \times t, H(0)^2, t^2].$$

然后利用 Matlab 命令语句 stepwise, 得到逐步回归图 (Stepwise Plot) 和逐步回归表 (Stepwise Table)。如图1, 图2所示。

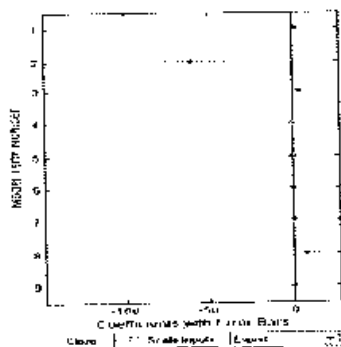


图1: 逐步回归过程

图1中虚线表示该变量的拟合系数与0无显著差异,实线表示有显著差异;点线表明存在模型中的变量,由此说明该模型中存在多余变量。

Column #	Parameter	Confidence Intervals	
		Lower	Upper
1	1.27	0.1359	2.375
2	60.25	140	10.42
3	3.88	-0.0264	7.786
4	0.07847	-0.1175	0.1745
5	-0.0006471	-0.006793	0.005505
6	-0.001617	-0.002546	-0.0005004
7	0.4804	-0.2393	1.17
8	8.237	0.5043	15.97
9	0.1001	0.136	0.06431
RMSE		F	
73.05		186.5	
R-square		P	
0.5276		0	

图 2: 逐步回归表

由图 2 从逐步回归表中可以得出变量  $C(0) \times H(0)$ ,  $C(0) \times t$ ,  $C(0)^2$ ,  $H(0) \times t$ ,  $H(0)^2$  的显著性不好, 移去这些变量之后, 仍然采用命令 stepwise, 得到逐步回归图和逐步回归表, 如图 3, 图 4 所示。

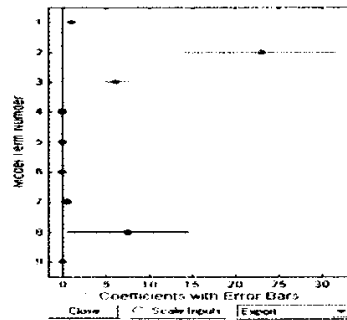


图 3: 逐步回归过程

Column #	Parameter	Confidence Intervals	
		Lower	Upper
1	1.045	0.9837	1.127
2	23.11	14.17	32.05
3	6.221	4.788	7.654
4	-0.006978	-0.1408	0.1258
5	-0.001559	-0.007828	0.003999
6	-0.001643	-0.007865	-0.0000288
7	0.537	-0.1199	1.194
8	7.82	0.4818	13.15
9	-0.0995	-0.1355	-0.06345
RMSE		F	
73.76		403.4	
R-square		P	
0.5169		0	

图 4: 逐步回归表

图 3 中深色点线表示从模型中移去的变量, 从最终结果中可以看出剩余标准差  $RMSE$  并没有显著的变化, 但是统计量  $F$  的明显增大, 并且该逐步回归的  $P$  值为 0, 因此新的回归模型更好。最后对剩余变量 (矩阵) 作多元二次回归, 由此得到模型

$$C(t) = -106.5929 + 1.0452 \times C(0) + 23.1101 \times H(0) + 6.2212 \times t - 0.0995 \times t^2,$$



由此可知, 对  $H(t)$  影响较大的因子为  $H(0), t$ , 由回归分析方法最终求得模型为

$$H(t) = 0.9009 + 0.6955 \times H(0) - 0.1616 \times t + 0.0032 \times t^2.$$

由回归方程, 根据观测数据分别确定 CD4 和 HIV 浓度初值, 由此可得 CD4 浓度  $C(t)$  和 HIV 浓度  $H(t)$  分别随治疗时间  $t$  的变化曲线。

为了估计最佳停药时间, 定义疗效为  $CH = m \times C(t)/H(t)$ , 其中  $m$  为比例系数。显然疗效  $CH$  为  $t$  的函数。由此知疗效  $CH$  由  $C(t), H(t)$  的值决定: 当  $C(t)$  的值越大,  $H(t)$  的值越小时, 疗效也就越好。只需用 Matlab 绘出  $m = 1$  时  $CH$  随治疗时间  $t$  变化曲线即可确定最佳停药时间, 从而预测出疗效。因此可以根据  $CH$  随治疗时间  $t$  变化曲线来预测继续治疗的效果, 确定最佳治疗终止时间。

### 3 模型的应用与评价

问题 1 中要求预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间 (继续治疗指在测试终止后继续服药)。问题的关键是确定影响疗效的因素: HIV 的浓度  $H(t)$  和 CD4 浓度  $C(t)$ 。当 HIV 浓度  $H(t)$  越低, CD4 浓度  $C(t)$  越高, 则治疗效果越好。由于  $H(t)$  与  $C(t)$  是关于  $C(0), H(0)$  和时间  $t$  的二次函数, 因此可以很方便地得到它们之间的变化规律。利用 Matlab 的绘图功能将  $C(t)$  与时间  $t$  及  $H(t)$  与  $t$  的函数曲线关系用图形表示出来直接比较。为消除初始值  $C(0)$  和  $H(0)$  对疗效比较的影响, 每次比较时可以任取一组相同的  $C(0), H(0)$ , 这里不妨取其平均值:  $\bar{C}(0) = 123.2161, \bar{H}(0) = 3.441044$ , 由此得到  $H(t)$  与  $C(t)$  随治疗时间  $t$  的变化曲线, 由图 9 和图 10 给出。

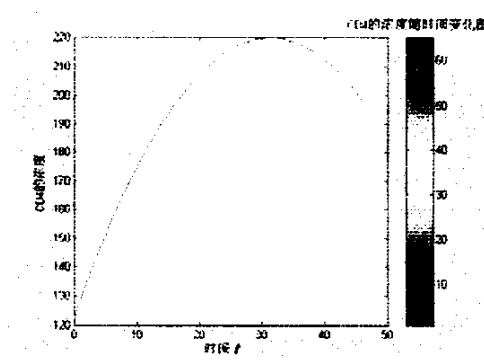
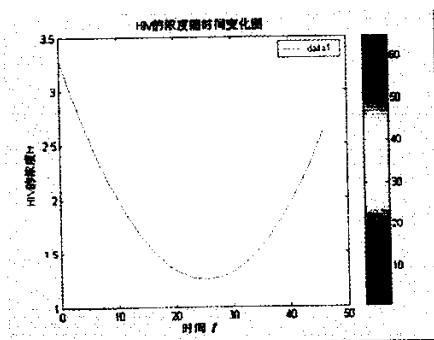
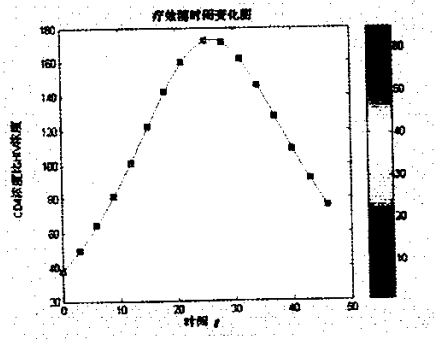


图 9: CD4 浓度随时间  $t$  变化曲线

由图 9 和图 10, 对于某一确定的  $C(0), H(0)$  的值,  $C(t)$  与  $H(t)$  随时间  $t$  的变化分别呈现出这样的趋势: 随着治疗时间  $t$  的推移, HIV 的浓度在药物的作用下起初呈现一定的下降趋势, 然后大幅度增加, 而 CD4 的浓度则是先上升, 然后急剧下降。因此疗效  $CH$  随治疗时间  $t$  的变化有一个明显的先上升然后下降的过程, 如图 11 所示。

图10: HIV 的浓度随时间  $t$  变化曲线图11: 疗效  $CH$  随时间  $t$  变化曲线

这种变化趋势符合目前艾滋病难以治愈、只能缓解的现实状况。同时也表明了模型的数据是基本正确的, 模型的变化趋势在图中所反映的区间内是可靠的。因此, 在艾滋病的治疗过程中应该在某一恰当的时间终止治疗, 此时继续治疗基本上没有意义。同时, 根据  $H(t)$  和  $C(t)$  以及  $CH$  随时间  $t$  的变化曲线, 可以估计出最佳治疗停止时间。由此可得在 27 周左右的时间内, CD4 的浓度达到最大, 而 HIV 的浓度却降到了最低点附近, 即使继续治疗, 病情仍将恶化, 所以应当在此时停止治疗。

#### 参考文献:

- [1] 赵静. 数学建模与数学试验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000

## An Appraisal on Curative Effect of AIDS and its Prediction Model

ZHAI Yuan-zheng, WANG Yan, WANG Ya-ping

Advisor: ZHANG De-ping

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

**Abstract:** This paper appraises the curative effect of AIDS and presents a prediction model by using complete regression method and stepwise regression method based on AIDS clinical data in the United States for medical research agency ACTG. By introducing  $CH$  merits to measure the curative effect of AIDS according to the relation of CD4 and HIV concentration with time  $t$ , and predict the time of termination of the best treatment. The research results show that the current treatment for AIDS can only be alleviated but can not be completely cured, and the treatment should be terminated at 27 weeks.

**Keywords:** appraisal curative effect; stepwise regression method; time of termination; prediction model

文章编号:1005-3085(2006)07-0077-06

## 艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型

林松青, 孙杰华, 向子权

指导教师: 王友娥

(湖南邵阳学院理学与信息科学系, 邵阳 422000)

**编者按:** 本文的特色主要表现在作者采用了专业统计方法, 即单因素和双因素方差分析对问题一、二分别进行了解答。尽管结果不很完善, 但仍不失为一篇很有特色的论文。

**摘 要:** 本文根据题设条件和附件1、附件2提供的临床数据进行整理分类、分析和处理, 对不同问题建立了艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型。首先利用附件1的数据及多元统计分析的方法、假设检验法。得到了最佳治疗终止时间为25周。再利用双因子方差分析的方法, 对附件2的数据进行了处理和分析, 得到不同疗效、不同年龄段、不同服药时间段均对疗效有显著性影响。根据艾滋病治疗的目的尽量产生更多的 CD4, 和在 CD4 浓度明显增加的前提下对样本方差越大越优的原则, 对各个年龄段的4种疗法进行分析和求解, 得到第4种疗法最优的结论。

**关键词:** CD4 浓度; HIV 浓度; 假设检验; 方差分析

**分类号:** AMS(2000) 62F03

**中图分类号:** O172.5; O212.1

**文献标识码:** A

### 1 问题分析与求解

#### 1.1 问题1的分析与求解

利用附件1提供的数据将服药时间分成六个时间段: 0, 1-5, 6-9, 10-25, 26-40, 40以上, 分别计算 CD4 和 HIV 的平均浓度和方差如表1所示。

表 1: CD4 和 HIV 的平均浓度和方差

时间段 (周)	人数	CD4		人数	HIV	
		平均浓度	方差		平均浓度	方差
0	336	86.09524	4567.104	335	5.026946	0.491839
1-5	364	130.1401	8057.571	358	3.276816	1.356931
6-9	344	154.6628	12296.44	335	2.919403	1.349027
10-25	311	174.6785	13679.31	296	2.853041	1.682693
26-40	220	185.6364	13699.4	192	2.917188	2.008611
40以上	86	144.0581	10375.61	51	3.2843414	2.177009

要预测药物继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间, 可用多元统计分析的方法来探讨和研究。用假设检验中 U 一检验法对 CD4 和 HIV 进行检验。先提出原假设和备择假设。

$$\begin{array}{ll}
 \text{CD4} & H_0^{(1)}: u_k = u_{k-1}^{(1)} \quad H_1^{(1)}: u_k > u_{k-1}^{(1)} \quad k = 2, 3, 4, 5, 6, \\
 \text{HIV} & H_0^{(2)}: u_k = u_{k-1}^{(2)} \quad H_1^{(2)}: u_k < u_{k-1}^{(2)} \quad k = 2, 3, 4, 5, 6,
 \end{array}$$

其中  $u_k^{(1)}$  表示服药时间第  $k$  段 CD4 的平均浓度,  $u_k^{(2)}$  表示服药时间第  $k$  段 HIV 的平均浓度。检验的统计量为

$$U_k = \frac{\bar{\xi} - u_{k-1}^{(i)}}{\sigma_{k-1}^{(i)} / \sqrt{n}}, \quad i = 1, 2; k = 2, 3, 4, 5, 6, \quad (1)$$

其中  $\sigma_k^{(1)}$  表示服药时间第  $k$  段 CD4 浓度的样本方差;  $\sigma_k^{(2)}$  表示服药时间第  $k$  段 HIV 浓度的样本方差。这里是假设病人在初始状态时 CD4 和 HIV 分别服从浓度正态分布  $N(u_1^{(1)}, \sigma_1^{(1)})$  和  $N(u_1^{(2)}, \sigma_1^{(2)})$  的前提下进行的。

根据艾滋病治疗的目的, 是尽量减少人体内 HIV 的数量。同时产生更多的 CD4, 至少有效地降低 CD4 减少速度。以提高人体免疫力, 因此在符合以下情况之一均认为可以继续治疗。

- 1) 服药后 CD4 浓度明显提高, HIV 浓度减少;
- 2) 服药后 CD4 浓度平稳, HIV 浓度减少;
- 3) 服药后 CD4 浓度提高, HIV 浓度平稳。

在以下情况之一均认为终止治疗。

- 1) 服药后 CD4 浓度减少, HIV 浓度增加;
- 2) 服药后 CD4 浓度平稳, HIV 浓度增加;
- 3) 服药后 CD4 浓度减少, HIV 平稳。

利用表1的结果分别计算 CD4、HIV 的观察值(1)式, 给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 临界值为  $u_{0.05} = 1.64$  得表2。

表 2: CD4 和 HIV 的显著性分析表

时间段(周)	CD4	显著性	HIV	显著性
1-5	12.4344	显著提高	-41.2181	显著提高
6-9	5.0670	显著提高	-5.6157	显著提高
10-25	3.1832	显著提高	-0.9330	显著提高
26-40	1.3897	无显著性	-0.6852	显著提高
40以上	-3.2942	无显著性	1.8500	无显著性

从表2中不难看出, 在第一个时间段(1-5周)的治疗效果最好, 第二个时间段(6-9周)的治疗效果好, 第三个时间段的治疗效果较好, 第四个时间段(26-40周)基本上没有治疗效果, 第五个时间段(40周以上)治疗效果差。因此最佳的治疗终止时间为25周左右。

### 3.2 问题2的模型建立与求解

为了对4种疗法进行优劣评价, 先用双因子方差分析的方法进行统计分析, 在进行方差分析之前, 先要对附件2的数据进行处理。为了便于分析, 将年龄分成四个年龄段: 0-30, 31-40, 41-50, 50以上。将服药时间分成六个时间段: 0, 1-9, 10-19, 20-28, 29-36, 37以上。对4种疗法, 6个服药时间段, 4个年龄段分别求出 CD4 的平均值如附表1(样本方差见附表2)。

设因子A表示疗法, 取4个水平即4种疗法。因子B表示年龄, 取4个水平即4个不同的年龄段。因子C表示服药时间, 取6个水平即6个服药时间段。下面用双因子方差分析法分析因子A、B、C对疗效的显著性影响, 先建立数学模型。

## 方差分析模型

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \\ \sum \alpha_i = 0; \quad \sum \beta_j = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中诸  $\varepsilon_{ij}$  间相互独立, 且都服从  $N(0, \sigma^2)$  分布,  $\mu_{ij}$  表示在  $(A_i, B_j)$  水平组合下的试验结果。

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{rs} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \mu_{ij}, \\ \mu_i &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \mu_{ij}, \quad \alpha_i = \mu_i - \mu, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \mu_j &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mu_{ij}, \quad \beta_j = \mu_j - \mu, \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

$\alpha_i$  为因子  $A$  的第  $i$  水平的效应;  $\beta_j$  为因子  $B$  的第  $j$  水平的效应。

这个模型要检验的假设有二个

$$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0, \quad (3)$$

$$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0, \quad (4)$$

当  $H_{01}, H_{02}$  为真时

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{S_A/(r-1)}{S_c/(r-1)(s-1)} \sim F(r-1, (r-1)(s-1)), \\ F_B &= \frac{S_B/(s-1)}{S_c/(r-1)(s-1)} \sim F(s-1, (r-1)(s-1)), \end{aligned}$$

$F_A, F_B$  就是用来检验假设  $H_{01}$  和  $H_{02}$  的统计量。其中

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{i=1}^r \frac{y_{i\bullet}^2}{s} - n\bar{y}^2, \quad S_B = \sum_{j=1}^s \frac{y_{\bullet j}^2}{r} - n\bar{y}^2, \quad S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (y_{ij} - \bar{y})^2, \\ S_c &= S_T - S_A - S_B, \quad \bar{y} = \frac{1}{rs} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s y_{ij}, \\ y_{i\bullet} &= \sum_{j=1}^s y_{ij}, \quad \bar{y}_{i\bullet} = \frac{1}{s} y_{i\bullet}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ y_{\bullet j} &= \sum_{i=1}^r y_{ij}, \quad \bar{y}_{\bullet j} = \frac{1}{r} y_{\bullet j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

按照显著性假设检验程序, 对给定的显著水平  $\alpha$ 。当  $F_A > F_{1-\alpha}(r-1, (r-1)(s-1))$  时, 拒绝  $H_{01}$ 。当  $F_B > F_{1-\alpha}(s-1, (r-1)(s-1))$  时拒绝  $H_{02}$ 。下面对因子  $(A, B), (A, C)$  进行双因子方差分析。在附表1中对第1、2、3、4种疗法取列平均值得表3。



表3: CD4 的平均值

年龄 \ 疗法	0-30	31-40	41-50	50以上
1	2.57657	2.683936	2.648225	2.786853
2	2.469664	2.730262	2.835006	2.900373
3	2.76715	2.947038	2.808076	3.149121
4	2.960081	3.03761	2.915706	3.343205

利用 MATLAB 软件计算个偏差平方和得方差分析得表

来源	平方和	自由度	均方和	F比
A	0.3012	3	0.1004	10.3269
B	0.3249	3	0.1083	11.1394
e	0.0875	9	0.0097	

当  $\alpha = 0.05$  时,  $F_{1-\alpha}(3,9) = 3.86$ 。因为  $F_A > F_{1-\alpha}(3,9)$ ,  $F_B > F_{1-\alpha}(3,9)$ , 所以在  $\alpha = 0.05$  显著水平下, 不同疗法不同年龄段对疗效有显著影响。

在附表1中对1、2、3、4种疗法取行平均值得表4。

表4: CD4 的平均值

疗法 \ 服药时间	1	2	3	4
0	2.9792	2.9341	2.9065	2.8536
8	2.8337	2.9708	3.0678	3.1922
16	2.7745	2.8398	2.9776	3.2044
24	2.5542	2.5935	2.7753	2.9989
32	2.5759	2.6454	2.8226	2.9400
40	2.2607	2.4639	2.7661	2.9122

同样用 MATLAB 软件求得各偏差平方和得方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F比
A	0.5020	3	0.1733	7.1004
C	0.4394	5	0.0879	10.3583
e	0.2121	15	0.0141	

当  $\alpha = 0.05$  时,  $F_{1-\alpha}(3,15) = 3.86$ 。因为  $F_A > F_{1-\alpha}(3,15)$ ,  $F_C > F_{1-\alpha}(3,15)$ , 所以当  $\alpha = 0.05$  时, 不同疗法不同服药时间段, 对疗效有显著影响。

综上所述, 不同年龄段, 不同服药时间段对疗效均有显著性影响。根据题目要求判断疗法的优劣是以 CD4 为标准的, 以艾滋病的治疗目的是尽量产生更多的 CD4, 同时在 CD4 明显增加的前提下, 应该是对应的方差越大越好。为简化起见, 我们仅以附表1中不同疗法, 不同年龄段的样本方差的平均值作为指标作为判断标准。故得四种疗法的优劣排序为:

0-30岁: 4-3-1-2

31-40岁: 3-4-2-1

41-50岁: 4-3-2-1

51岁以上: 4-3-1-2

综合以上情况得最优疗法为第4种疗法, 第3种疗法次之, 第2种疗法和第1种疗法再次之。

再利用附表1、2的结果分别用 U 检验法进行分析

$$U_k = \frac{\bar{\xi} - u_{k-1}}{\sigma_k / \sqrt{n}}, \quad k = 2, 3, 4, \quad (5)$$

给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 临界值为  $u_{0.05} = 1.64$  得表5和表6。

表5: CD4 的显著性分析表

年龄	1		2		3		4	
	CD4	显著性	CD4	显著性	CD4	显著性	CD4	显著性
31-40	2.5565	显著提高	6.0345	显著提高	3.6506	显著提高	6.9947	显著提高
41-50	-0.6063	无显著性	1.7624	显著提高	-2.2016	无显著性	-6.4382	无显著性
50以上	1.3070	无显著性	0.5053	无显著性	2.5837	显著提高	3.7303	显著提高

表6: CD4 的显著性分析表

时间	1		2		3		4	
	CD4	显著性	CD4	显著性	CD4	显著性	CD4	显著性
8	-2.7402	无显著性	0.6272	无显著性	2.7161	显著提高	5.4804	显著提高
16	-0.9336	无显著性	-2.0161	无显著性	-1.3118	无显著性	0.1694	无显著性
24	-3.0657	无显著性	-3.5777	无显著性	-2.4694	无显著性	-2.4080	无显著性
32	0.3141	无显著性	0.7256	无显著性	0.5740	无显著性	-0.6652	无显著性
40	-2.4829	无显著性	-1.3128	无显著性	-0.3576	无显著性	-0.1802	无显著性

由表5和表6求出最优疗法的最佳终止时间为: 0-30岁继续治疗; 31-40岁继续治疗; 41-50岁治疗12周; 51岁以上治疗32周。

#### 4 模型评价和改进

1) 本模型利用假设检验法及继续治疗和终止的判别准则, 巧妙地预测了继续治疗的效果, 确立了最佳终止时间。方法科学简单, 对于非数学专业的医务人员来说操作性强。

2) 本模型又用了方差分析的方法分析出不同疗法、不同年龄段、不同服药时间对疗效有显著的影响。最后得出第4种疗法最优的结论。这些方法理论较强, 方法科学操作简单易行。容易被广大医务人员和大学生接受。

3) 本模型假设病人在初始状态之前 ( $t = 0$ ) 的 CD4 浓度和 HIV 的浓度均服从正态分布和设因子 A、B; A、C 在水平组合下的实验结果均服从正态分布的假设比较粗糙与调查数据做出的结果有一定的差异。

**参考文献:**

- [1] 徐全智, 杨晋浩. 数学建模[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003
- [2] 魏宗舒等编. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982
- [3] 何声武主编. 概率论与数理统计[M]. 北京: 经济科学出版社, 1991
- [4] 肖伟等编著. MATLAB程序设计与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

## The Prediction Model about the AIDS Disease Therapy and Curative Effect

LIN Song-qing, SUN Jie-hua, XIANG Zi-quan  
Advisor: WANG You-e

(Department of Science and Information Science, ShaoYang College, ShaoYang Hunan 42200)

**Abstract:** According to the condition of the question and the data of the enclosure 1 and enclosure 2, we establish the estimate model about the AIDS disease therapy and curative effect. At First by making use of the data of the enclosure 1, the diverse covariance analysis of method and the suppose examination method we get the best treatment terminates time being the 25th week. Then, handling the data of enclosure 2 with the square analysis method, we get the conclusions that different curative effect, age segment and medicine time segment all have influence on the therapy. Finally, according to the principle that with the density of CD4 increasing obviously the larger the sample square is, the better the therapy is and the purpose that cure produce more CD4 as much as possible, we get the best therapy is the fourth one.

**Keywords:** the density of CD4; the density of HIV; suppose examination; square analysis

文章编号:1005-3085(2006)07-0083-12

## 艾滋病疗法的评价及疗效的预测

宋兴达, 黄芳媛, 余 磊

指导教师: 教练组

(江西财经大学, 江西南昌 330013)

**编者按:** 该在对 CD4 和 HIV 浓度进行拟合前, 先用插值方法补足每个病人在第 4、8、24、40 周的数值, 使在这些时间点上具有浓度数据的病人数相同, 然后取平均值, 并对这些平均值作拟合, 这是一种正确可行的处理方法。该文还尝试将数据包络分析方法用于问题 3 的解决。

**摘 要:** 首先, 本文应用 Lagrange 线性插值法来统一每一个病人的测试时间点, 使每一个病人的测试时间点均为第 0 周、第 4 周、第 8 周、第 24 周和第 40 周, 并计算出每一位病人的 CD4 浓度和 HIV 浓度在时间段  $[0, 4]$ ,  $[4, 8]$ ,  $[8, 24]$ ,  $[24, 40]$  上的变化量和所有样本的平均变化量, 依据这个变化量来判断某种方案的治疗效果。其次, 通过建立 CD4 浓度和 HIV 浓度的二次和三次模拟方程, 预测最佳治疗终止时间。再次, 通过计算出每一种方案第一个 8 周、第二个 8 周、第三个 8 周、第四个 8 周、第五个 8 周所有病人 CD4 的平均变化量, 来判断方案的优劣。当病人需要考虑四种疗法的费用时, 求出每一种疗法的单位 CD4 绝对变化量的平均费用, 从而以最小平均费用来判定最佳治疗方案。另外, 在考虑费用的评价中, 将费用作为输入因素, CD4 变化量作为输出因素, 本文构造了评价疗法的相对有效性模型——DEA 模型, DEA 模型得到的结果与统计方法得到的结果一致。

**关键词:** 艾滋病; 疗法评价; 疗效预测

**分类号:** AMS(2000) 90C60

**中图分类号:** O29

**文献标识码:** A

### 1 模型假设

- 1) 艾滋病治疗的疗效可通过观察人体内 HIV 的数量变化和 CD4 数量的变化来体现, 即当 HIV 的数量减少和 CD4 数量的增加时, 说明艾滋病治疗有效;
- 2) 根据样本数据特点, 我们规定 4 周为一个月, 一个月为 28 天计算;
- 3) 规定病人的测试区间第 0-8 周、第 8-16 周、第 16-24 周、第 24-32 周、第 32-40 周为治疗的第 1 阶段、第 2 阶段、第 3 阶段、第 4 阶段、第 5 阶段;
- 4) 继续治疗指在测试终止后继续服药, 终止治疗指测试后停止服药;
- 5) 样本数据测试是相互独立的, 即每一位病人任何一个时刻的测试数据不受其他病人的影响, 也不受其本身其他时刻数据的影响;
- 6) 每一位病人是否患艾滋病是相互独立的。

### 2 问题(1)的分析与解决

从附件 1 中的数据我们可以看到, 每位病人的测试时刻并不完全相同, 即样本点测试的时刻不同: 有的病人测试数据不完全, 比如有的病人有 6 个数据点, 而有的病人又只有 3 个数据点; 这些都给问题分析带来了困难, 所以为了使测试时刻一致, 使用 Lagrange 线性插值法<sup>[1]</sup>得到每位病人相同测试时刻的 HIV 值与 CD4 值 (如表 1 所示, 表 1 为线性插值后的附件 1 的部分数据)。在数据处理时, 对于数据点太少的病人, 直接剔除。

Lagrange 线性插值公式取

$$y = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

表1: 应用线性插值以后获得的表1的修正数据

病人编号	测试 CD4 的 时刻 (周)	测得的 CD4 (乘以0.2个/ml)	测试 HIV 的时刻 (周)	测得的 HIV
23424	0	178	0	5.5
23424	4	228	4	3.9
23424	8	126	8	4.7
23424	24	168	24	4.04
23424	40	99	40	5
23425	0	14	0	5.3
23425	4	62	4	2.4
23425	8	100. 4	8	3.44
23425	24	133. 6	24	2.52
23425	40	320	40	1.7
23426	0	101	0	4.5
23426	4	151	4	1.7
23426	8	115	8	1.7
23426	24	145	24	2.7
23426	40	128	40	3.2

在表1中, 我们将每一位病人的测试时刻统一到第0周、第4周、第8周、第24周和第40周。这样我们可以计算出300多名病人同时服用 zidovudine (齐多夫定), lamivudine (拉美夫定) 和 indinavir (茚地那韦) 3种药物, 第0-4周、第4-8周、第8-24周、第24-40周 CD4 浓度和 HIV 浓度的平均变化量, 如表2所示。这也是从总体上来判断这种方式治疗的疗效。

表2: CD4 和 HIV 浓度总体变化量

时间段 (周)	病人 CD4 浓度平均变化量	病人 HIV 浓度平均变化量
0-4	46.48637	-1.78837
4-8	23.15598	-0.31814
8-24	20.36249	-0.11375
24-40	14.99292	0.1512

由此可以看到, 从平均的角度而言, 第0-4周的治疗效果是最好的, CD4 浓度增加较快, HIV 浓度下降较快; 随着时间的推移, 治疗的效果慢慢减弱, CD4 浓度增加缓慢, HIV 浓度减少缓慢; 到第24~40周时, 虽然 CD4 浓度仍在上升, 但 HIV 浓度开始上升, 说明治疗已经失效, 应该立即停止服药。

为了得到最佳治疗终止时间, 还可以建立 CD4 浓度平均变化量与时间  $t$  的关系的模型和 HIV 浓度平均变化量与时间  $t$  的关系的模型。

首先, 画出 CD4 浓度平均变化量  $Y$  与时间  $t$  的散点图, 并添加趋势线, 从图1与图2的对比中可以看到, 用线性拟合效果差, 线性拟合的方程为

$$CD4 \text{ 平均浓度 } (Y) = 2.1565t + 29.447, \text{ 拟合度 } R^2 = 0.7555, \text{ 拟合效果差。}$$

注意 这里的 CD4 平均浓度 ( $Y$ ) 指从第0时刻增加到  $t$  时刻时, 病人的 CD4 浓度平均增加量。

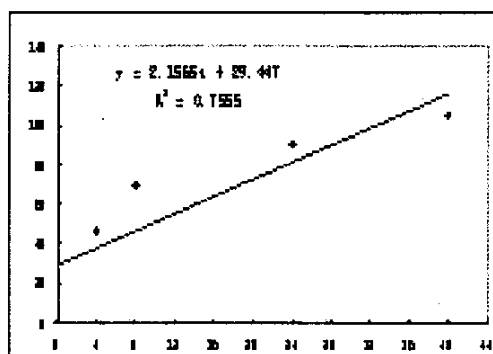


图1: CD4 平均变化量与时间  $t$  的线性关系图

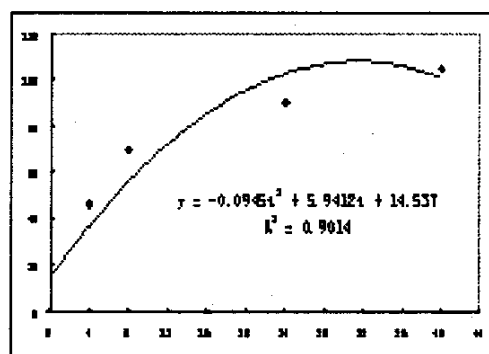


图2: CD4 平均变化量与时间  $t$  的二次曲线关系图

图2显示 CD4 浓度平均变化量  $Y$  与时间  $t$  是非线性关系, 并且从散点图看到是二次函数关系。用二次曲线拟合法得到

$$CD4 \text{ 平均浓度 } (Y) = -0.0945t^2 + 5.9412t + 14.537. \quad (1)$$

拟合度:  $R^2 = 0.9014$ , 说明曲线拟合效果较好, 可用于反映 CD4 平均浓度变化量与时间  $t$  的关系。

对(1)式求导得

$$Y' = -0.1890t + 5.9412,$$

并求出当  $Y$  达到最大时的  $t = 31.4349$ , 即为第31周左右。

其次, 画出 HIV 浓度平均变化量  $Z$  与时间  $t$  的散点图, 通过比较图3与图4, 我们认为 HIV 浓度 ( $Z$ ) 与时间  $t$  的二次函数关系拟合效果稍差一些, 其二次函数曲线关系式为

$$HIV \text{ 平均浓度 } (Z) = 0.0033t^2 - 0.1657t - 0.6194, \text{ 拟合度 } R^2 = 0.6901,$$

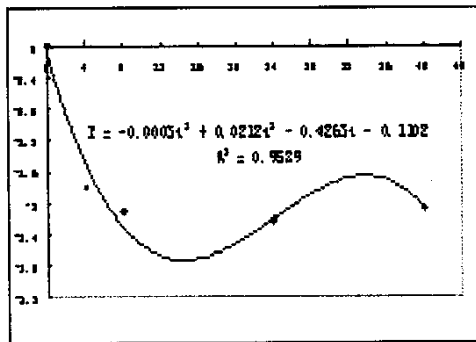
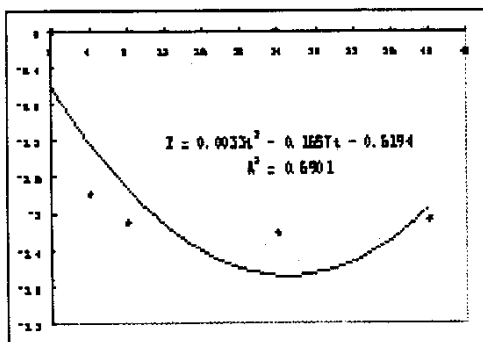


图3: HIV 平均变化量与时间  $t$  的二次曲线关系图      图4: HIV 平均变化量与时间  $t$  的三次曲线关系图

三次曲线拟合效果较好, 拟合度  $R^2 = 0.9589$ , 因此, 用三次曲线进行分析。

$$\text{HIV 平均浓度}(Z) = -0.0003t^3 + 0.0212t^2 - 0.4263t - 0.1102, \quad (2)$$

对(2)式求导得

$$Z' = -0.0009t^2 + 0.0424t - 0.4263,$$

令  $Z' = 0$  得

$$t_1 = 14.5446, \quad t_2 = 32.5665.$$

且当  $Z''|_{t=14.5446} > 0$ 。

所以, 当  $Z$  达到最小时的  $t = 14.5446$ , 即为第15周左右。

由于曲线拟合具有一定的误差, 将曲线拟合计算结果与表2中的变化趋势相结合, 我们可以得到以下结论:

**结论1** 一般而言, 病人同时服用 zidovudine (齐多夫定), lamivudine (拉米夫定) 和 indinavir (茚地那韦) 3种药物的艾滋病治疗方式在半年内有效。治疗时间超过半年, 病情出现反复, 从而最佳治疗终止时间为第25周左右。

### 3 问题(2)的分析与解决

首先, 我们将附件2中的数据按疗法代号进行归类处理。由于在此问题中只有一个关键指标 CD4 的浓度, 所以此问题为单指标评价问题。单指标评价问题通常是通过观测该指标样本数据的平均值及其方差来评价各方案的优劣。

在此问题中, 每位病人观测的时间间隔是8周, 有的观测了一个8周, 有的观测了两个8周, 有的观测了三个8周, 有的观测了四个8周。并且每个8周治疗效果是不一样的, 如可能第一个8周治疗效果比较明显, 而第二个或第三个8周的治疗不一定那么明显。并且每个病人的初始病情也各有不同, 即他血液中所含的 CD4 浓度或 HIV 浓度初始值是不同的, 方案治疗的效果应该主要由 CD4 的变化量来表示<sup>[2-4]</sup>。

根据附件2中的数据, 我们可以获得每一位病人每一个8周的 CD4 浓度变化量数据。为了获得方案的总体效果, 我们求出每一方案对应下的每一个8周病人 CD4 浓度平均变化量, 如表3所示。

表3: 各方案不同周期的 CD4 浓度平均变化量

治疗 方案	第一个8周 CD4 浓度平均变化量	第二个8周 CD4 浓度平均变化量	第三个8周 CD4 浓度平均变化量	第四个8周 CD4 浓度平均变化量	第五个8周 CD4 浓度平均变化量
1	-0.10414	-0.17936	-0.13906	-0.15707	-0.22371
2	0.028504	-0.1915	-0.22912	-0.08313	-0.01971
3	0.143257	-0.38035	-0.13028	-0.21908	0.045265
4	<b>0.395529</b>	-0.12781	-0.1124	-0.18153	-0.08009

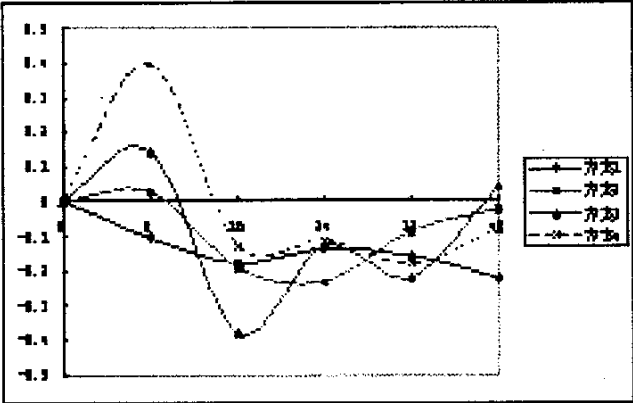


图5: 各方案 CD4 浓度平均变化量与时间的关系图

从表3中的数据，以及图5都明确表示，在30周之前，治疗方案4明显优于其他治疗方案。如果进一步细化，就总体平均而言，则各个时间段的最优治疗方案如表4所示。

表4: 在不同时间段的最佳治疗方案

时间段	第0—8周	第8—16周	第16—24周	第24—32周	第32—40周
最佳治疗方案	第4方案	第4方案	第4方案	第4方案或第1方案	第2方案

**结论2** 若仅以 CD4 浓度为判断指标，则第四个方案的治疗效果为最佳。

我们还可以从每一种方案 CD4 浓度的变化趋势来判断方案的优劣。通过画出各方  
案 CD4 浓度与时间  $t$  变化的散点图和趋势图，如图6-图9所示。



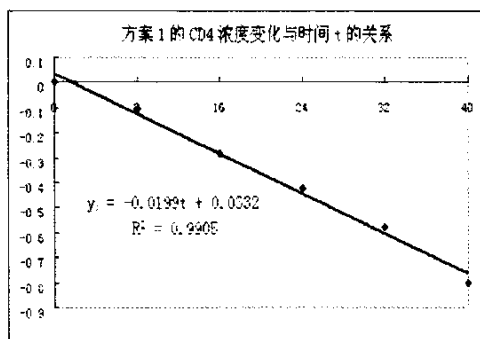


图6: 方案1的 CD4 浓度随时间的变化关系

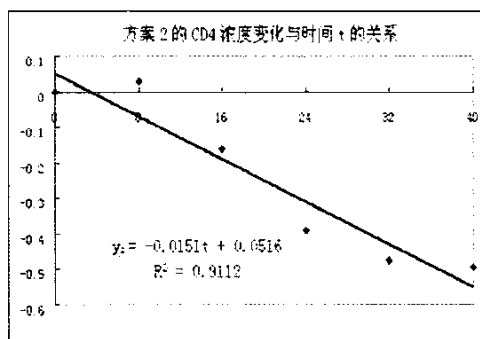


图7: 方案2的 CD4 浓度随时间的变化关系

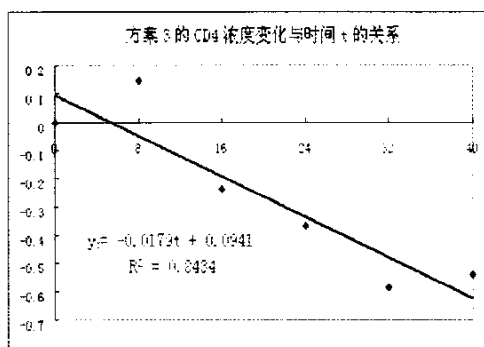


图8: 方案3的 CD4 浓度随时间的变化关系

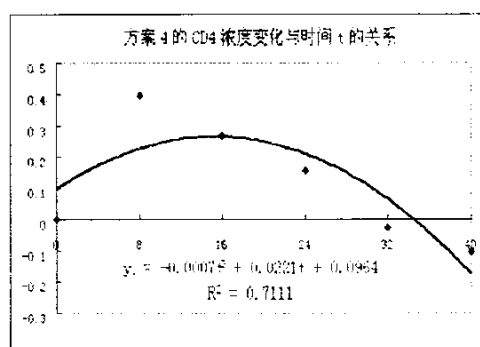


图9: 方案4的 CD4 浓度随时间的变化关系

由此可以看到, 方案1-3用一次线性函数模拟较好, 且一次项系数为负, 说明随着时间的延长 CD4 浓度在减少; 而方案4用二次函数模拟较好, 拟合度为  $R^2 = 0.7111$ , CD4 浓度是先增后减, 而如果方案4用一次函数模拟, 则拟合度只有  $R^2 = 0.2803$ 。

对于方案4, 为了获得最佳治疗时间, 我们可以对拟合方程求导, 求出其极大值点, 也就是 CD4 浓度增长速度为0的点, 即为治疗终止时间。

$$CD4 \text{ 平均浓度}(Y) = -0.0007t^2 + 0.0221t + 0.0964, \quad (3)$$

对(3)式求导得:  $Y' = -0.0014t + 0.0221$ ,

并求出当  $Y$  达到最大时的  $t = 15.7857$ , 即为第16周左右。

**结论3** 对于最佳方案4, 其最佳治疗终止时间为第16周左右。

另外, 在附件2中还出现了病人的年龄, 为了分析不同方案对不同年龄阶段人的影响, 在此问题中, 我们将病人年龄划分为若干个年龄段: 14~25岁, 25~35岁, 36~45岁, 45岁以上。采用统计分析法。

分年龄段计算出每一种治疗方案每一个阶段的 CD4 浓度平均变化量, 并作出其比较图形(图10-图13所示)。从图10-图13, 我们可以看到, 各不同年龄组各方案的治疗效果如表5示。表5中数据说明, 对于各不同年龄段, 疗法4的效果仍是比较明显的, 对于年龄组35~45岁的病人, 疗法3在第1、2阶段有效; 对于年龄组45岁以上的病人, 疗法2在第4、5阶段有效。

表5: 不同年龄段不同治疗阶段的最佳治疗方案

	14~25岁				
阶段	第1阶段	第2阶段	第3阶段	第4阶段	第5阶段
最佳治疗方案	疗法3	疗法1	疗法4	疗法4	疗法2
	25~35岁				
阶段	第1阶段	第2阶段	第3阶段	第4阶段	第5阶段
最佳治疗方案	疗法4	疗法1	疗法4	疗法4	疗法3
	35~45岁				
阶段	第1阶段	第2阶段	第3阶段	第4阶段	第5阶段
最佳治疗方案	疗法3	疗法3	疗法4	疗法4	疗法4
	45岁以上				
阶段	第1阶段	第2阶段	第3阶段	第4阶段	第5阶段
最佳治疗方案	疗法4	疗法1	疗法3	疗法2	疗法2

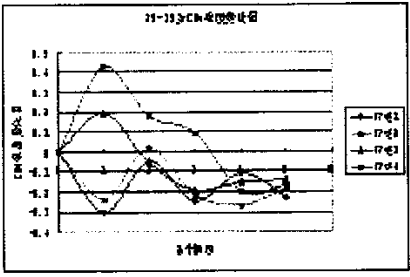
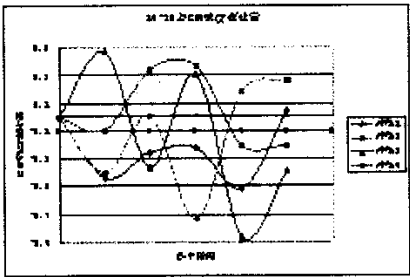


图10: 各方案下14-25岁各阶段的CD4浓度变化量情况 图11: 各方案下25-35岁各阶段的CD4浓度变化量情况

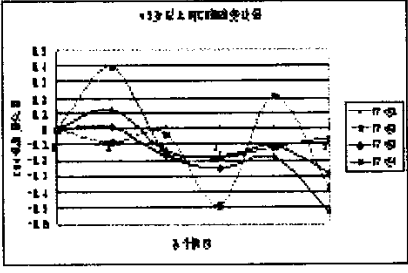
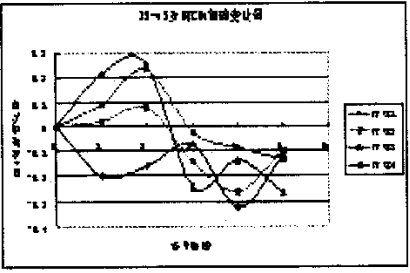


图12: 各方案下35-45岁各阶段的CD4浓度变化量情况 图13: 各方案下45岁各阶段的CD4浓度变化量情况

4 问题(3)的分析与解决

方法1: 统计分析方法

由于4种疗法是每隔8周测试一次, 而4种疗法的用药均为日用药量, 则测算出每种疗法每个测试周期(8周)的单位费用分别为: 第1种疗法68.6美元, 第2种疗法193.2美元, 第3种疗法137.2美元, 第4种疗法204.4美元。

由此可以计算出每一种方案的不同测试周期的 CD4 浓度变化量的单位成本。当考虑成本时,病人希望能以最低的费用获得最好的疗效,CD4 变化量的单位成本最低<sup>[5]</sup>。计算每一种方案的绝对变化量的单位平均成本,如表6所示。

表6: 各方案 CD4 浓度变化的单位成本 单位: 千美元/CD4

	第一个8周	第二个8周	第三个8周	第四个8周	第五个8周	方案CD4绝对变化量平均单位成本
第1种疗法	-0.6587	-0.3825	-0.4933	-0.4367	-0.3067	<b>0.45558</b>
第2种疗法	6.7780	-1.0089	-0.8432	-2.3211	-9.8021	4.15126
第3种疗法	0.9577	-0.3607	-1.0531	-0.6263	3.0310	1.20576
第4种疗法	0.5168	-1.5992	-1.8185	-1.1260	-2.5521	1.52252

取 CD4 浓度绝对变化量平均单位成本最低的为最优方案,则表6显示第1种治疗方案为最佳方案。第一方案的特点是虽然病人的 CD4 浓度在降低,但是降低的幅度很小,而且其费用最低,如图14。

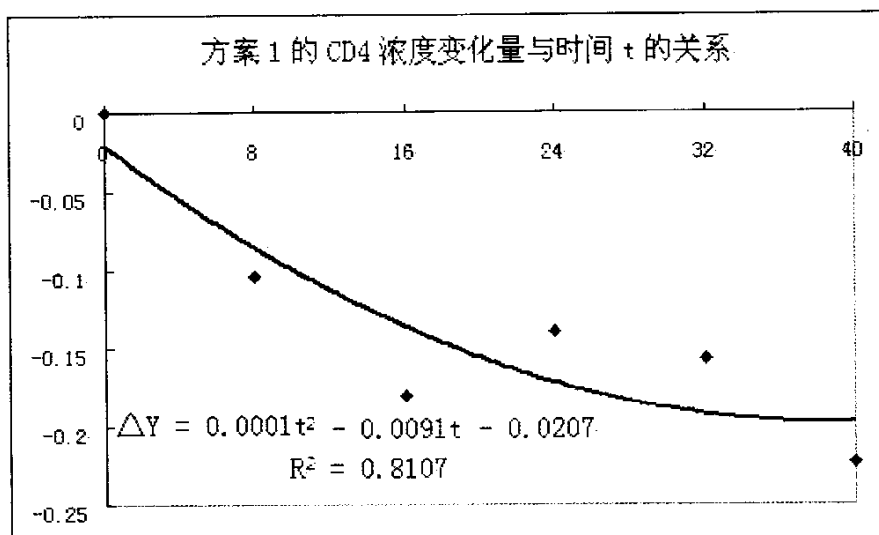


图14: 方案1的 CD4 浓度平均变化量与时间因素  $t$  的关系

下面建立第1个方案的 CD4 浓度变化量与时间因素  $t$  的非线性回归方程

$$CD4 \text{ 浓度平均变化量 } \Delta Y = 0.0001t^2 - 0.0091t - 0.0207, \text{ 拟合度 } R^2 = 0.8107,$$

由此可以看到,该回归方程拟合程度  $R^2 = 0.8107$ ,拟合效果较好,因此,此方程可以用来预测当  $\Delta Y = 0$ ,即 CD 浓度平均变化量为0时,也即是当治疗效果消失时的时间。

令  $\Delta Y = 0$ , 则由上述方程解得  $t = 99.22$ , 即在第 99 周左右, 二年左右为最佳停止治疗时间。

**结论 4** 对于最佳方案 1, 其最佳治疗终止时间为第 99 周左右。

由于本问题是考虑费用情况下, 各方案的治疗效果, 我们还可以构造相对效率评价方法来评价治疗方案的效果。

#### 方法 2 相对效率评价方法 (即 DEA 方法)

由于本问题是评价 4 种治疗方法的相对有效性, 4 种治疗方案的用药不同, 对于不同年龄的病人, 不同阶段得到的治疗效果也不相同, 我们可以采用数据包络分析方法 (Data Envelopment Analysis, 简称 DEA)。DEA 方法是由美国著名运筹学家 Charnes, Cooper 和 Rhodes 等学者在“相对效率评价”概念基础上发展起来的一种新的系统分析方法, 它主要采用数学规划方法, 从投入与产出的角度来评价决策单元 (Decision Making Units, DMU) 的相对有效性。这种相对有效性是指被评价的决策单元在输入一定的资源投入后, 是否规模和技术都发挥到了最佳水平, 从而得到了应有的产出。

评价第  $j_0$  个决策单元的相对效率的  $C^2R$  模型如下

$$\begin{aligned} \min \theta \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + s^- = \theta X_{j_0}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j - s^+ = Y_{j_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_j \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

式中  $\theta$  表示相对效率,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\theta$  值越大, 表示系统执行效率越高;  $j$  表示决策单元个数;  $X_j$  表示第  $j$  个决策单元的输入指标值向量,  $Y_j$  表示第  $j$  个决策单元的产出指标值向量;  $X_{j_0}$  表示第  $j_0$  个决策单元的输入指标值向量,  $Y_{j_0}$  表示第  $j_0$  个决策单元的产出指标值向量;  $\lambda_j$  为模型的规划变量,  $s^-, s^+$  为辅助向量。

在本问题中, 可以将治疗过程看成一个投入产出系统, 投入的是用药, 产出的是病人病情的好转。我们将不同年龄、不同治疗阶段的治疗方法作为决策单元, 如 25~35 岁, 第 0~8 周采用治疗方案 1 作为一个决策单元; 25~35 岁, 第 8~16 周采用治疗方案 1 作为另一个决策单元; 因此, 对于每一个年龄阶段, 都有 20 个决策单元。

在每一个决策单元中, 以 4 种方案的用药费用为输入变量, 以每一个治疗阶段 CD4 的期末值与期初值的比作为输出量。例如年龄在 14~25 岁的病人形成的决策单元的输入输出指标数据如表 7 示。

通过建立各决策单元的  $C^2R$  模型, 应用 EXCEL 中的规划求解, 可获得各决策单元的效率如表 8 所示。

从表 8 可以看到, 对年龄为 14~25 岁的病人, 治疗效果较好的是方案 1 和方案 2, 最差为方案 3; 对年龄为 25~35 岁的病人, 治疗效果较好的是方案 1 和方案 2, 最差仍是方案 3; 对年龄为 35~45 岁的病人, 治疗效果最好的是方案 1; 对年龄为 45 岁以上的病人, 治疗效果最好的是方案 2, 方案 1 在最后阶段效果不太好。

因此, 从相对效率角度反映的是方案 1 效果最好, 方案 3 效果最差。与统计方法得到的结果相一致。

表7: 14~25岁病人形成的决策单元输入输出指标数据

决策单元	Zidovudine (美元)	Didanosine (美元)	Zalcitabine (美元)	Nevirapine (美元)	CD4 浓度比值
方案1 (0-8)	48	25.5	0	0	0.89492
方案1 (8-16)	48	25.5	0	0	0.74935
方案1 (16-24)	48	25.5	0	0	0.91328
方案1 (24-32)	48	25.5	0	0	0.81951
方案1 (32-40)	48	25.5	0	0	1.03820
方案2 (0-8)	96	0	111	0	0.87241
方案2 (8-16)	96	0	111	0	1.04507
方案2 (16-24)	96	0	111	0	0.58488
方案2 (24-32)	96	0	111	0	0.89208
方案2 (32-40)	96	0	111	0	1.18809
方案3 (0-8)	96	51	0	0	1.14199
方案3 (8-16)	96	51	0	0	0.91431
方案3 (16-24)	96	51	0	0	1.13182
方案3 (24-32)	96	51	0	0	0.69890
方案3 (32-40)	96	51	0	0	1.01779
方案4 (0-8)	96	51	0	72	1.01984
方案4 (8-16)	96	51	0	72	1.33902
方案4 (16-24)	96	51	0	72	1.11876
方案4 (24-32)	96	51	0	72	0.99818
方案4 (32-40)	96	51	0	72	0.96003

表8: 考虑疗法费用时不同年龄段各治疗方案的效率

决策单元 (14~25岁)	效率值 (越大越好)	决策单元 (25~35岁)	效率值 (越大越好)
方案1 (0-8)	0.86199	方案1 (0-8)	0.87325
方案1 (8-16)	0.72178	方案1 (8-16)	1.00000
方案1 (16-24)	0.87968	方案1 (16-24)	0.94061
方案1 (24-32)	0.78936	方案1 (24-32)	0.94690
方案1 (32-40)	1.00000	方案1 (32-40)	0.92447
方案2 (0-8)	0.73429	方案2 (0-8)	0.86694
方案2 (8-16)	0.87962	方案2 (8-16)	1.00000
方案2 (16-24)	0.49229	方案2 (16-24)	0.91166
方案2 (24-32)	0.75085	方案2 (24-32)	0.87545
方案2 (32-40)	1.00000	方案2 (32-40)	0.90394

决策单元 (14~25岁)	效率值 (越大越好)	决策单元 (25~35岁)	效率值 (越大越好)
方案3 (0-8)	0.54998	方案3 (0-8)	0.52709
方案3 (8-16)	0.44033	方案3 (8-16)	0.48324
方案3 (16-24)	0.54509	方案3 (16-24)	0.46702
方案3 (24-32)	0.33659	方案3 (24-32)	0.46345
方案3 (32-40)	0.49017	方案3 (32-40)	0.46982
方案4 (0-8)	0.49116	方案4 (0-8)	0.60237
方案4 (8-16)	0.64487	方案4 (8-16)	0.53436
方案4 (16-24)	0.53879	方案4 (16-24)	0.52493
方案4 (24-32)	0.48072	方案4 (24-32)	0.46615
方案4 (32-40)	0.46235	方案4 (32-40)	0.47902
决策单元 (35~45岁)	效率值 (越大越好)	决策单元 (45岁以上)	效率值 (越大越好)
方案1 (0-8)	0.91727	方案1 (0-8)	0.98320
方案1 (8-16)	0.93936	方案1 (8-16)	0.90610
方案1 (16-24)	1.00000	方案1 (16-24)	1.00000
方案1 (24-32)	0.90498	方案1 (24-32)	0.92532
方案1 (32-40)	0.98226	方案1 (32-40)	0.45620
方案2 (0-8)	0.93520	方案2 (0-8)	0.92466
方案2 (8-16)	1.00000	方案2 (8-16)	0.83838
方案2 (16-24)	0.89746	方案2 (16-24)	0.89514
方案2 (24-32)	0.84982	方案2 (24-32)	1.00000
方案2 (32-40)	0.88837	方案2 (32-40)	0.69914
方案3 (0-8)	0.55720	方案3 (0-8)	0.52220
方案3 (8-16)	0.54038	方案3 (8-16)	0.49561
方案3 (16-24)	0.45847	方案3 (16-24)	0.42882
方案3 (24-32)	0.47696	方案3 (24-32)	0.45401
方案3 (32-40)	0.46332	方案3 (32-40)	0.44675
方案4 (0-8)	0.51640	方案4 (0-8)	0.54276
方案4 (8-16)	0.54372	方案4 (8-16)	0.49588
方案4 (16-24)	0.54397	方案4 (16-24)	0.46963
方案4 (24-32)	0.48382	方案4 (24-32)	0.50041
方案4 (32-40)	0.47952	方案4 (32-40)	0.48272

## 参考文献:

- [1] 甘筱青. 数学建模教育及竞赛[M]. 南昌: 江西高校出版社, 2004
- [2] 张兴权, 范江. 抗艾滋病病毒感染治疗的新进展[J]. 中华皮肤科杂志, 2002,35(3):245-247
- [3] 张福杰, 张晨阳. 抗逆转录病毒治疗的时机和用药方案[J]. 中国性病艾滋病防治, 2001,7(4):253-255
- [4] 张福生. 高效抗逆转录病毒疗法的现状[J]. 中国性病艾滋病防治, 2002,6(1):63

- [5] 曹韵贞, 张福杰等. 高效抗逆转录病毒治疗15例人类免疫缺陷病毒感染者一年总结[EB/OL].  
<http://scholar.ilib.cn/Abstract.aspx?A=zhmk200202011> 2006.9.15

## The Evaluation and Prediction of the Effect of AIDS Therapy

SONG Xing-da, HUANG Fang-yuan, YU Lei

Advisor: Instructor Group

(Jiangxi University of Finance & Economics, Jiangxi, Nanchang 330013)

**Abstract:** Firstly, this paper uses Lagrange linear interpolation method to unify the testing time of every patient, to make every testing points be the initial week, the 4th week, the 8th week, the 24th week and the 40th weeks. Then, we calculate each patient's CD4 concentration and HIV concentration changes and to get average changes in the periods of [0,4], [4,8], [8,24], [24,40]. The effectiveness of AIDS therapies are determined. Secondly, according to the second and third order simulation equation of CD4 concentration and HIV concentration, the author predicted the optimum time to terminate treatment. Thirdly, by working out the average changes to the first eight weeks, the second, the third, the fourth and the fifth, the advantage and the disadvantage of every AIDS therapy project could be judged. However, when the costs of AIDS therapy is concerned, the best AIDS therapy method is determined by the minimal average cost. In addition, when cost is considered in evaluation, we constructed a model for evaluation of the relative effectiveness of therapies (DEA model). The results of the DEA model are consistent with the statistical methods.

**Keywords:** AIDS; evaluation of AIDS therapy; treatment effect forecast

文章编号:1005-3085(2006)07-0095-06

## 基于数据统计分析的艾滋病疗效评价方法

王浩淼, 吉进喜, 孙中芳

指导教师: 沈锦仁

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

**编者按:** 该文按初始病情分类, 以个体初始值为二次拟合曲线初值, 统计回归模型清楚、合理, 并进行了统计检验。论文按分类给出个体的治疗评价方法和建议, 对个体检验通过后才认为符合所在类的统计特征。所得结论与实际情况相符程度好, 方法有效性与可行性较好。

**摘 要:** 先按照 CD4 初始浓度将病人分为病情严重、病情中等和病情轻微三类; 然后根据分类, 建立了以下三个模型: 考虑人体抗药性作用的二次多项式回归模型、考虑 CD4 与 HIV 相互作用的微分方程模型、考虑抗药性的指数模型, 对各类进行整体回归。对各个模型均进行  $F$  检验, 并以  $F$  检验的值作为评价模型优劣的依据, 从而得出二次多项式回归模型回归效果最好。并用二次多项式回归模型对各组数据进行预测。对 356 个病人逐个进行回归, 对回归结果进行统计分析得到结论: 在有效治疗中, 最佳停药时间在 24 周以下的人数比例为 90.6%; 其中 1.16% 的病人需要立即停药; 3.09% 的病人可以在医生的建议下持续服药。

**关键词:** 回归; 抛物线;  $F$  检验

**分类号:** AMS(2000) 62J02

**中图分类号:** O212.1

**文献标识码:** A

### 1 问题一: 数据的拟合及疗效的预测

根据对问题和数据的初步分析, 我们可以得出如下结论:

- 1) CD4 和 HIV 浓度的变化是非线性的。
- 2) CD4 和 HIV 浓度相互抑制, 初始的浓度表现了病人的病情; CD4 的浓度不可能无限的上升, HIV 浓度不可能无限的下降。随着 CD4 的浓度的提高, 由于抗药性的影响, 药物自身的药效降低, HIV 的抑制作用加强, CD4 的浓度的增长速率会减慢, 逐渐变为负增长, 同时 HIV 浓度增长率会不断提高, 最后导致病情恶化。

根据以上分析, 我们建立了三个不同的模型分别对数据进行拟合, 并进行  $F$  检验, 比较其优劣。

#### 1.1 模型一: 抛物线回归模型

考虑到病人在治疗前的病情是各不相同, 即初始的 CD4 和 HIV 浓度是不同的, 治疗效果对初始病情的不同会有所区别, 因而对病人按初始病情的不同分成三类(重度、中度、轻度), 并结合医学临床的 CD4 浓度统计意义, 制定分类标准见表 1,  $C_{i0}$  表示 CD4 的初始浓度。

表1: 按 CD4 初始浓度分类

类别	分类标准	特征
III 类(重度)	$C_{i0} \leq 50$	病情严重极易感染
II 类(中度)	$50 < C_{i0} \leq 200$	急需药物抑制
I 类(轻度)	$C_{i0} > 200$	轻微感染



对各类病人的浓度变化函数减去各个病人的初始浓度后,用二次函数进行回归

$$\begin{cases} C(t) - C_{i0} = v_1 t - u_1 t^2, \\ H(t) - H_{i0} = -v_2 t + u_2 t^2, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $u_1 > 0, v_1 > 0, u_2 > 0, v_2 > 0$ 。

上式右边可写  $t(v_1 - u_1 t)$ ,  $-t(v_2 - u_2 t)$ 。 $v_1 - u_1 t$  表示单位时间 CD4 的增加量,其随时间的增加而减少,而  $v_2 - u_2 t$  是单位时间 HIV 的减少量,其随时间的延长而减少。

引入:  $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - C_{i0} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n_i)$ ,  $m$  是该类中有效数据的病人数,  $n_i$  是第  $i$  个病人除初始数据的数据数。

模型中的残差平方和为

$$Q(u_1, v_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{C}_{ij} - v_1 t_j + u_1 t_j^2)^2, \quad (2)$$

利用最小二乘法求  $u_1, v_1$  得结果如表 2。

表2: 抛物线回归结果

	CD4	HIV
III 类(重度)	$C_1(t) = -0.6860t^2 + 18.402t$	$H_1(t) = 0.2730t^2 - 13.3955t$
II 类(中度)	$C_2(t) = -0.1803t^2 + 8.5743t$	$H_2(t) = 0.2064t^2 - 9.7483t$
I 类(轻度)	$C_3(t) = -0.0401t^2 + 1.9667t$	$H_3(t) = 0.1656t^2 - 7.6376t$

下面对回归结果进行  $F$  检验,从统计学中的方差分析理论可知,当预测量方差不变时,回归方差愈大,残差方差愈大,于是我们就用它们之间的比值来衡量回归方程的效果好坏。

总平方和为

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (C_{ij} - \bar{C}_i)^2, \quad (3)$$

其中  $\bar{C}_i$  是第  $i$  个病人的数据平均数,其自由度为  $f_S = \sum_{i=1}^m n_i - m$ 。

回归平方和  $U = S - Q$ , 其中自由度  $f_U = 2$ ,  $f_Q = \sum_{i=1}^m n_i - m - 2$ , 统计量  $F = \frac{U/f_U}{Q/f_Q}$  遵从自由度为  $(2, \sum_{i=1}^m n_i - m - 2)$  的  $F$  分布。代入数据得表 3。

表3: 抛物线模型的  $F$  统计量

	III 类(重度)	II 类(中度)	I 类(轻度)
$F_{CD4}$	25.249044	249.840275	191.448144
$F_{HIV}$	25.264092	251.783040	192.854176
$F_{\alpha}(\alpha = 0.05)$	3.85	3.86	4.26

从检验结果来看,三类病人的回归函数均通过  $F$  检验,说明减去初始浓度后用二次抛物线拟合数据效果很好。

### 1.2 模型二：考虑 CD4 和 HIV 相互作用模型

根据生物医学理论，CD4 和 HIV 在人体内环境条件下，与种群竞争模型相似。CD4 不直接对 HIV 作用，而是通过提高人体的免疫机能来抑制 HIV 病毒；HIV 能直接使 CD4 感染而裂解，使 CD4 数量急剧减少，HIV 迅速增加，导致 AIDS 发作。

由此对种群竞争模型进行合理简化，利用微分方程建立回归函数

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = k_1 C(t) - k_2 H(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = -k_3 H(t), \end{cases} \quad (4)$$

$k_1$  表示 CD4 浓度在用药后的自增长率， $-k_2$  表示 HIV 对 CD4 的裂解作用， $-k_3$  表示 HIV 在药物作用下的疗效作用。

解此常微分方程得

$$\begin{cases} C(t) = \frac{k_2 H_{i0}}{k_1 + k_2} e^{-k_3 t} + (C_{i0} - \frac{k_2 H_{i0}}{k_1 + k_2}) e^{k_1 t}, \\ H(t) = H_{i0} e^{-k_3 t}, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  是待拟合的参数，而  $C_{i0}$ 、 $H_{i0}$  是初始浓度，用病人数据可以回归出  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  结果见表 4。

表4: 相互作用模型的结果

	III 类(重度)	II 类(中度)	I 类(轻度)
$k_1$	0.223150	0.257339	0.217371
$k_2$	21.667835	-1.492198	19.401320
$k_3$	-0.036347	-0.032391	-0.026540

### 1.3 模型三：考虑抗药性的指数模型

根据生物种群的增长模型，在不考虑有其他物种影响的情况下，建立如下模型

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \lambda_1 C(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = -\lambda_2 H(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  是常数， $\lambda_1$  表示 CD4 的自增长速率，它反映了药效的好坏。考虑到生物个体具有抗药性，用药时间延长，药效会降低，设  $\lambda_1$  不是常数，而是一个关于  $t$  减少的函数。

构造

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = \frac{\lambda_c}{(1+t)^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(t) = \frac{\lambda_h}{(1+t)^2}$$

其中  $\lambda_c$ 、 $\lambda_h$  是常数。于是(6)式就转化为

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \frac{\lambda_c}{(1+t)^2} C(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{\lambda_h}{(1+t)^2} H(t), \end{cases} \quad (7)$$

代入初值，可解得

$$\begin{cases} C(t) = C_{i0} e^{\frac{t}{1+t} \lambda_c}, \\ H(t) = H_{i0} e^{-\frac{t}{1+t} \lambda_h}, \end{cases} \quad (8)$$

用数据对函数中的  $\lambda_c$ 、 $\lambda_h$  进行拟合，得结果见表 5。

表5: 考虑抗药性模型的结果

	$\lambda_c$	$\lambda_h$
III(重度)	0.305231	-0.761181
II(中度)	0.533192	-0.699261
I(轻度)	1.362004	-0.584324

#### 1.4 模型的 $F$ 检验结果比较

以上构建的三个模型,  $F$  检验结果对比如表6。

表6: 三种模型在各类的  $F$  统计量

	III类(重度)	II类(中度)	I类(轻度)
二次多项式模型	25.249044	249.840275	191.448144
考虑 CD4 和 HIV 相互作用模型	24.499472	249.000045	190.499488
考虑抗药性的指数模型	11.353523	156.068819	100.108535

从表6可以看出: 抛物线模型的拟合效果最好, 考虑相互作用模型次之。

#### 1.5 疗效的分析与预测

根据以上讨论可知, 抛物型模型的拟合程度最好, 因此我们选用抛物线函数来预测各个分类的药效。不考虑每个人的初值, 仅讨论各个分类 CD4 和 HIV 浓度变化的一致趋势, 从而来预测各个分类的总的治疗效果。我们用 CD4 的浓度变化曲线预测继续治疗效果。

当  $\frac{dC(t)}{dt} > 0$  时, CD4 浓度呈现增长趋势, 这表明药物作用明显, 可以继续用药。

当  $\frac{dC(t)}{dt} = 0$  时, 表明药物对于病情起到了很好的抑制作用, 应当继续用药。

当  $\frac{dC(t)}{dt} < 0$  时, CD4 浓度呈现下降趋势, 这时需做进一步分析。

给定一个阈值  $\eta$ , 表示不用药时艾滋病人体内 CD4 浓度减少的速率。从网上查得: CD4 一年减少 350 个/ml, 可得  $\eta = 1.3425$  (单位: 0.2 个/ml\*周)。作进一步讨论:

当  $\frac{dC(t)}{dt} > -\eta$  时, 表明药物对病情还有抑制作用, 应当继续用药。

当  $\frac{dC(t)}{dt} \leq -\eta$  时, 表明药物对这类病人已失去效用, 应当停药, 寻求其它的治疗方法。

根据 CD4 的浓度变化曲线我们用这两种方法来预测中分类 I 的中止用药时间。

1) 令  $\frac{dC_1(t)}{dt} = 0$ , 求得  $t_1$ ;

2) 令  $\frac{dC_1(t)}{dt} = -\eta$ , 求得  $t_2$ 。

$t_1$  表示药物仅起到抑制作用的时间,  $t_2$  是最佳停药时间。各个分类的疗效预测如表7。

表7: 抛物线模型预测疗效

	III类(重度)	II类(中度)	I类(轻度)
$t_1$	13.41253644	23.77787022	24.52244389
$t_2$	14.39103499	27.50083195	41.26184539

#### 1.6 利用回归模型对 356 个病人逐个回归

我们用拟合程度最好的抛物线模型对 356 个病人逐个回归。

CD4 浓度函数:  $C_i(t) = C_{i0} + vt - ut^2$ , 根据求得回归参数的特征将通过检验的 259 个有效的分析源分为四类, 并统计各个类的人数, 得结果见表8。

表8: 抛物线模型预测疗效

类别	参数特征	特点	用药情况	人数	占总人数比例
A	$v < 0, u < 0$	浓度一直上升	一定范围内可服药	8	3.09%
B	$v < 0, u > 0$	浓度一直下降	立即停止用药	2	1.16%
C	$v > 0, u > 0$	浓度先增加后降低	服用一段时间然后终止	232	90.6%
D	$v > 0, u < 0$	浓度先降低后增加	建议继续观察	17	5.15%

该治疗方案针对不同病情的病人疗效不可能一样, 有 1.16% 的人不适应或者需要立即停药; 而有 90.6% 人适合选择性治疗, 大约在 24 周时停止治疗, 或者换其它更为有效的治疗方法。当然其中有 5.15% 的病人情况不稳定、效果疑似, 有待观察研究, 这与实际情况是吻合的。

## 2 问题二：四种疗法的评判标准和评判结果

附录给出四种疗法, 共 1300 个病人, 每个病人若干个时间点上的 CD4 浓度的统计数据。首先对每种疗法按 CD4 初始浓度的大小分为重度、中度、轻度三类。分类情况见表 9。

表9: 四种不同治疗方法下的病人的分类 (单位: 人)

分类	疗法 1	疗法 2	疗法 3	疗法 4
III(重度)	75	114	91	105
II(中度)	189	192	174	166
I(轻度)	56	79	62	59

从问题一中可知, 用抛物线模型来拟合效果最好。这里对每种疗法, 每一类的病人用如下二次曲线来拟合:  $C(t) = C_{i0} + vt - ut^2$  用回归的方法, 求得各类病人回归系数  $u$ 、 $v$  见表 10。

表10: 不同疗法下的三类病人的回归结果

参数 $v$ 、 $u$	疗法 1	疗法 2	疗法 3	疗法 4
III(重度)	(0.5159, 0.0126)	(0.3876, 0.0107)	(1.0000, 0.0235)	(0.13542, 0.0341)
II(中度)	(-0.0103, 0.1446)	(0.5432, 0.4115)	(1.038, 0.027)	(2.2302, 0.0557)
I(轻度)	(-1.27, 0.0085)	(-1.402, 0.0024)	(1.0722, -0.044)	(2.603, 0.069)

$\frac{dC}{dt}$  表示 CD4 浓度的变化率, 即用药后的疗效, 我们用  $\frac{dC}{dt}$  作为评判四种疗法的优劣。因为  $C(t)$  是二次函数,  $\frac{dC}{dt}$  是一次函数, 是随时间而变化的。因此列出不同时间上四种疗法的  $\frac{dC}{dt}$  的值。在这里我们求得治疗后的 CD4 浓度值增加为初值的 1.1 倍, 1.25 倍, 1.5 倍, 2 倍时的疗效见表 11。

表11: 不同类的不同疗法在不同的时间上  $C'$  值

类别	疗法	1.1 倍时	1.25 倍时	1.5 倍时	2.0 倍时	最佳停药时间
III(重度)	疗法 1	5	8.3	1.5625	0	25
III(重度)	疗法 2	5	5	0	0	19
III(重度)	疗法 3	10	12.5	16.67	12.5	24
III(重度)	疗法 4	10	24.8	22.6	20	23
II(中度)	疗法 1	0	0	0	0	0
II(中度)	疗法 2	0	0	0	0	0
II(中度)	疗法 3	3.3	3.125	0	0	22
II(中度)	疗法 4	10	9.47	8.48	0	20
I(轻度)	疗法 1	0.065	0.156	0.296	0.543	74
I(轻度)	疗法 2	0.164	0.75	0.678	1.176	58
I(轻度)	疗法 3	0	0	0	0	0
I(轻度)	疗法 4	1.129	0.26	0.382	0.764	18

从表 11 来看, 总体上疗法 4 最好。

#### 参考文献:

- [1] 腾加俊, 沈锦仁. 数学建模[M]. 南京: 南京出版社, 2003
- [2] 罗建军. MATLAB教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005
- [3] 梁国业, 廖建平. 数学建模[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2004
- [4] 董肇君. 系统工程与运筹学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003

## AIDS Treatment Evaluation Based on the Statistical Analysis

WANG Hao-miao, JI Jin-xi, SUN Zhong-fang

Advisor: SHEN Jin-ren

(Meteorology Institute, People's Liberation Army University of Science and Technology)

**Abstract:** According to the initial CD4 count, we divide the patients into 3 groups, serious, secondary, light. Then we consider the following three models: The quadratic regression model considering the role of the human resistance, the differential equation model considering the interaction between HIV and CD4, the index model considering resistance. The regression and the  $F$  test are done to every model. The  $F$ -test values is the basis for quality evaluation model. Quadratic regression model is used to obtain the best results. And Quadratic regression model is used to predict the data. The regression, results of the 356 patients gives effective treatment and the best time the percentage of the patiente whose stopping time less them 24 weeks is 90.6%; 1.16% of the patients requires immediate withdrawal; 3.09% patients can sustaine medication under a doctor's recommendation.

**Keywords:** quadratic; regression;  $F$ -test

文章编号:1005-3085(2006)07-0101-08

## 艾滋病疗法评价及疗效预测问题评析

边馥萍<sup>1</sup>, 姜启源<sup>2</sup>

(1- 天津大学数学系, 天津 300072; 2- 清华大学数学科学系, 北京 100084)

**摘 要:** 本文简述 2006 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题的实际背景和一般的解法, 并对同学论文中的一些问题做了简单的评析。

**关键词:** HIV; CD4; 数学模型; 预测

**分类号:** AMS(2000) 90C90; 62J05

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 问题的背景

艾滋病的医学全名为“获得性免疫缺陷综合症”(以下简称 AIDS), 是人体感染了人类免疫缺陷型病毒(以下简称 HIV)引起的, 当 HIV 感染者的免疫功能受到病毒的严重破坏时, 感染者便发展为 AIDS 病人。随着免疫力的降低, 人体会越来越频繁和严重地感染上各种致病微生物, 最终会因各种复合感染而死亡。AIDS 已成为当前人类社会最严重的瘟疫之一。联合国艾滋病规划署和世界卫生组织发表的《2005 年度全球艾滋病疫情报告》显示, HIV 感染者总人数已达 4030 万, 自 1981 年以来的死亡总人数为 2500 万。我国 HIV 感染者也已有 100 万人, 专家预测, 如不采取积极有效的措施, 到 2010 年 HIV 感染者将超过 1000 万人。AIDS 的预防及治疗已经成为全社会共同的责任。在 HIV 感染过程中, 病毒以活动、静止两种状态存在于宿主细胞里。含有静止期病毒的细胞一旦被激活, 整合到宿主细胞中的病毒 DNA 开始转录为 RNA, 在病毒结构蛋白及各种粒酶作用下, 经装配病毒 RNA 核心颗粒, 从细胞膜上获得包膜, 成为成熟的 HIV 病毒。成熟的 HIV 再感染新的细胞。随着病毒的复制繁殖, 在机体免疫系统起重要作用的 CD4 细胞数量呈进行性减少。HIV 感染后出现的动态进展过程包含着不同的发展阶段, 如图 1 所示。

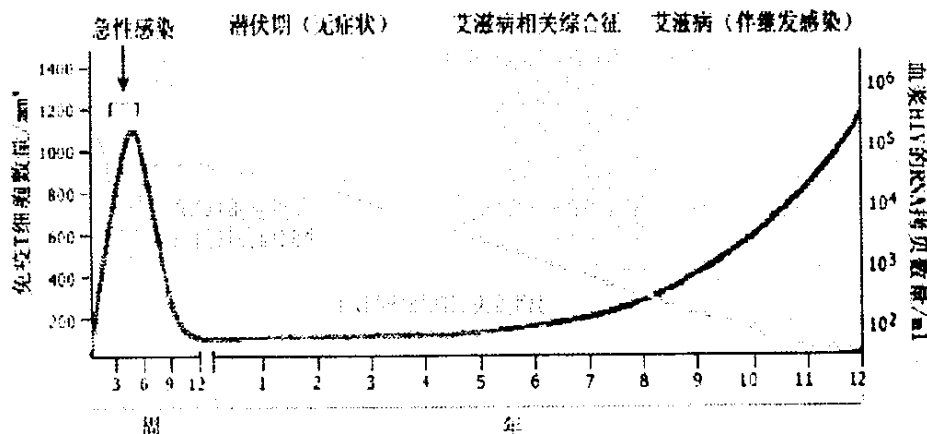


图1: 艾滋病感染的临床过程

对于 HIV 感染的治疗, 现在以针对 HIV 的高效抗逆转录病毒疗法为主。病毒载量是评估治疗方案效果的最重要指标,

(目前认为治疗有效的标志是在开始治疗 8 周后, 血浆病毒载量降低 1 个 log (10 倍), 4 至 6 个月降低到低于检测下限 (< 500 拷贝/mL)。

治疗过程中何时需要改变治疗方案? 由于目前抗逆转录酶病毒药物数量有限, 改变方案意味着感染者将来选择范围缩小了, 所以要非常慎重。临床上需要改变治疗方案的原因有: 最新临床试验结果提示, 感染者正在使用的不是最佳治疗方案; 感染者虽然采用高效的治疗方案, 但 CD4 细胞数量继续下降; 患者有临床进展表现或严重的毒副作用, 使之难以坚持治疗。题目中提出要为患者预测继续治疗的效果, 及确定最佳治疗终止时段, 所采用的 ACTG320 数据与 193A 数据都来源于美国最大的 AIDS 医疗试验机构 ACTG 的报告。

HIV 浓度的测试成本很高, 而 CD4 细胞数量的降低是免疫缺陷进展的直接标志, 被认为是最重要的预见 HIV 感染状态的参考, 也是各类疗法的有效评价指标。在 193A 报告中给出的不同人群、不同疗法的评价指标是 CD4 细胞的数量。

患者的治疗是一个长期的、只能延缓生命的过程, 特别是对于发展中国家的一些患者, 需要考虑治疗的费用, 所以题目中提出, 在考虑治疗成本的前提下, 如何选择最佳疗法与终止时间。这里, 药品价格是从网上查到的。

## 2 问题的解法简述

解决这个问题最常用的方法是统计方法, 这也是大多数同学用的办法, 结合同学的做法可作如下简述。

1. 利用 ACTG320 数据预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间

如果随机取若干个病人, 画出他们 CD4 和 HIV 浓度随时间变化的图形 (散点图), 可以看出多数的 CD4 大致有先增后减的趋势, HIV 大致有先减后增的趋势, 启示我们从统计的角度可以建立时间的二次函数模型。

纵向数据分析是生物医学统计中常用的处理这类问题的方法<sup>[1]</sup>。记第  $i$  病人第  $j$  次测量时间为  $t_{ij}$ , 测量的 CD4 (或 HIV) 值为  $y_{ij}$ , 建立回归模型

$$y_{ij} = b_{i0} + b_{i1}t_{ij} + b_{i2}t_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad (1)$$

其中  $b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}$  是回归系数,  $\varepsilon_{ij}$  是随机误差, 服从零均值、方差  $\sigma^2$  的正态分布,  $n$  是病人数,  $n_i$  是第  $i$  病人的测量次数。将模型(1)的回归系数分解为

$$b_{ik} = b_k + \eta_{ik}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2)$$

其中  $b_k$  称固定效应参数 (与哪个病人无关),  $\eta_{ik}$  称随机效应参数, 服从零均值、方差为常数的正态分布。将(2)代入(1)得到如下的混合模型

$$\begin{cases} y_{ij} = b_0 + b_1t_{ij} + b_2t_{ij}^2 + \eta_{i0} + \eta_{i1}t_{ij} + \eta_{i2}t_{ij}^2 + \varepsilon_{ij} \\ \eta = (\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2})^T \sim N(0, D) \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \\ \eta, \varepsilon_{ij} \text{相互独立} \end{cases}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_2^2 & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_3^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

这里  $D$  是随机效应的协方差矩阵, 如果忽略  $\eta_{ik}$  对于  $k$  的相关性, 可以将  $D$  简化为对角阵。根据数据  $t_{ij}, y_{ij}$  估计  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) 及  $D, \sigma^2$  的方法为

记

$$Y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \dots \\ y_{in_i} \end{pmatrix}, \quad X_i = \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} & t_{i1}^2 \\ 1 & t_{i2} & t_{i2}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{in_i} & t_{in_i}^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

则由(3)可知

$$Y_i \sim N(X_i b, X_i D X_i^T + \sigma^2 I_{n_i}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

记  $V_i = X_i D X_i^T + \sigma^2 I_{n_i}$ , 可以得到(5)的似然函数

$$L(b, D, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \left\{ (2\pi)^{-\frac{n_i}{2}} |V_i|^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (Y_i - X_i b)^T V_i^{-1} (Y_i - X_i b) \right) \right\}, \quad (6)$$

求出(6)的最大值点就得到参数  $b_k (k = 0, 1, 2)$  及  $D, \sigma^2$  的估计值, 用 SAS 软件可以方便地实现。

$b_k$  的大小反映的是按照模型(1)全体病人的总体效应, 在预测继续治疗的效果或确定最佳治疗终止时间时, 利用  $b_k$  得到的是平均意义下的数字结果。而  $d_k^2$  的大小则反映因不同病人而异的分散性, 注意到(2)式, 在  $\eta_{ik}$  服从正态分布的假设下, 容易计算回归系数  $b_{ik}$  属于任意区间的概率, 于是在预测继续治疗的效果或确定最佳治疗终止时间时, 可以给出数字结果在一定置信度下的置信区间。

利用二次函数回归模型, 由 CD4 曲线的最大值点和 HIV 曲线的最小值点可以预测继续治疗的效果或确定最佳治疗终止时间。

纵向数据分析需要较专门的统计知识和软件, 作为它的简化, 不妨只用普通的统计知识(回归分析)和软件(如 MATLAB), 按照模型(1)对每个病人计算出回归系数  $b_{ik}$ , 并对  $i$  求出平均值和方差, 作为上面  $b_k$  和  $d_k^2$  的近似值来应用。

当然, 如果只要求得到全体病人的总体参数, 就可以将模型(1)简化为

$$y_{ij} = b_0 + b_1 t_{ij} + b_2 t_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (7)$$

由此计算出来的回归系数也作为上面  $b_k$  的近似值来应用, 只不过模型(7)的剩余方差将很大, 因为它相当于模型(3)中  $D$  和  $\sigma^2$  所造成的随机误差的总和。

如果考虑病人初始状态 ( $t = 0$  时的 CD4 和 HIV) 的不同对模型的影响, 可以将(1)和(7)中的  $y_{ij}$  定义为第  $i$  病人第  $j$  次测量的 CD4 (或 HIV) 与初始值之差或之比, 也可以先按照病人初始状态分类, 然后对于每一类建立回归模型。

## 2. 利用 193A 数据评价 4 种疗法的优劣

可以对每种疗法建立如前面(1)或(7)的回归模型, 只是可增加一个年龄变量, 或者先按年龄分类, 再对每一类建立模型。也可以再引入几个 0-1 变量, 表示不同的疗法, 建立统一模型。

利用数据计算出回归模型的系数以后, 要评价 4 种疗法的优劣, 可以进行疗法的两两比较, 即检验它们的回归系数是否有显著差异。

解决这个问题的另一种统计方法是方差分析。疗法当然是必选的因素, 如果还考虑年龄和初始状态, 用双因素分析则比较复杂, 可以先按这些因素分类, 再做疗法的单因素分析。

线性规划是解决这个问题的另一种方法, 简述如下。



为了利用 193A 数据评价 4 种疗法的优劣, 首先进行数据分析, 构造决策单元 (DMUs), 然后构造线性规划模型, 并利用其最优解, 判断决策单元是否达到最优<sup>[2]</sup>。

对 1309 位患者按年龄分组: 如 14 到 25 岁, 25 到 35 岁, 35 到 45 岁, 及 45 岁以上分为 4 组。在每个年龄组中, 按照 4 种疗法和 4 个治疗阶段 (0 到 10 周, 10 到 20 周, 20 到 30 周, 30 到 40 周), 可以得到 16 个决策单元。取 4 种药品的数量作为输入, 取患者在治疗各个阶段末的 CD4 与开始治疗时的 CD4 的比值作为输出。

设 4 种药品在第  $j$  单元的数量分别为  $x_{1j}$  (齐多夫定),  $x_{2j}$  (去羟基苷),  $x_{3j}$  (扎西他滨),  $x_{4j}$  (奈韦拉平),

$$y_{1j} = \frac{e^{\log(CD4+1)_{end}} - 1}{e^{\log(CD4+1)_{beginning}} - 1},$$

并定义决策单元  $DMU_{j_0}$  的效率评价指标为

$$h_{j_0} = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i x_{ij_0} + v_0}{u_1 y_{1j_0}}.$$

其中  $v_i$  为输入的权重,  $u_1$  为输出的权重。权重处理成变量的形式, 在求解过程中确定它们。

$h_{j_0}$  越小, 表明  $DMU_{j_0}$  能够用相对较少的输入得到相对较多的输出。

1) 作为评价模型首先建立分式规划模型如下<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} \min \quad & V_P = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i x_{ij_0} + v_0}{u_1 y_{1j_0}} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{i=1}^4 v_i x_{ij} + v_0}{u_1 y_{1j}} \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 4, \\ & u_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

若令  $t = \frac{2}{u_1 y_{1j_0}}$ ,  $\omega_i = tv_i$ ,  $\mu_1 = tu_1$ , (8) 式改写为如下的线性规划模型

$$\begin{aligned} \min \quad & V_P = \sum_{i=1}^4 \omega_i x_{ij_0} + \omega_0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^4 \omega_i x_{ij} - \mu_1 y_{1j} + \omega_0 \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \mu_1 y_{1j_0} = 1, \\ & \omega_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 4, \\ & \mu_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

规划(9)的对偶规划模型是

$$\begin{aligned} \max \quad & V_D = \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ij_0}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{1j} - s_1^+ = \alpha y_{1j_0}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & s_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ & s_1^+ \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

求解上述模型, 根据决策单元的有效性, 评价疗法。

2) 关于预测模型可参考<sup>[3-5]</sup>

对 DMU 未知输出的走向进行预测的基础, 是假设未知 DMU (用  $DMU_{j_0}$  表示) 相对于已知的 DMU 是有效的。如果已知  $DMU_{j_0}$  的输入向量为  $(x_{1j_0}, x_{2j_0}, x_{3j_0}, x_{4j_0})^T$ , 预测模型(11)得出的输出  $y_{1j_0}^*$ , 对输出的期望是越大越好, 建立预测输出模型(11),

$$\begin{aligned} \max \quad & y_{1j_0} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij_0}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{1j} = y_{1j_0}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

这样, 不同年龄段的患者就可以根据各种疗法在治疗各个阶段的效率和自己经济情况决定采用哪种疗法、治疗到哪个阶段。

### 3 对同学论文中出现问题的评析

在用统计方法的论文中主要有以下问题。

#### 1. 只做数据拟合, 不做统计检验

已知一组数据  $(x_k, y_k), k = 1, 2, \dots, n$  和一个形式已定、参数  $\beta$  待定的模型(曲线)  $y = f(x, \beta)$ , 确定参数  $\beta$  使数据与模型在误差平方和最小的意义下拟合得最好, 这就是人们熟悉的最小二乘拟合。确定参数  $\beta$  有现成的计算公式和软件, 很容易实现。如在这个题目中假设 CD4 (或 HIV) 与测试时间有一次或二次、三次函数模型, 根据数据可以算出模型的参数。问题是这样得到的模型有无显著意义, 它的置信度多大, 用它作预测时准确程度如何。这些问题只做数据拟合是无法解决的, 需要用回归分析方法做统计检验。

为了简洁地说明统计检验的必要性, 看下面的数字例子。假设有两组数据  $(x, y_1)$  和  $(x, y_2)$ , 见表1。

表1: 两组统计数据

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y_1$	1.04	1.22	1.38	1.59	1.80	1.99	2.21	2.39	2.65	2.83
$y_2$	0.28	0.61	2.19	2.56	2.49	1.17	3.17	1.29	2.11	3.27

分别拟合两条直线

$$y_1 = a_1 x + b_1, \quad y_2 = a_2 x + b_2,$$

用最小二乘法根据上面两组数据容易计算出  $a_1, b_1, a_2, b_2$  的估计值

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 0.2013, & \hat{b}_1 &= 1.0040, \\ \hat{a}_2 &= 0.2025, & \hat{b}_2 &= 1.0025, \end{aligned}$$

即两条直线几乎完全一样, 但是把这两组数据的散点图和两条直线作图对比一下(图2), 直观告诉我们, 用数据  $(x, y_1)$  得到的模型远比用  $(x, y_2)$  得到的模型来得可靠和准确, 而回归分析可以定量地描述模型的可靠和准确程度。

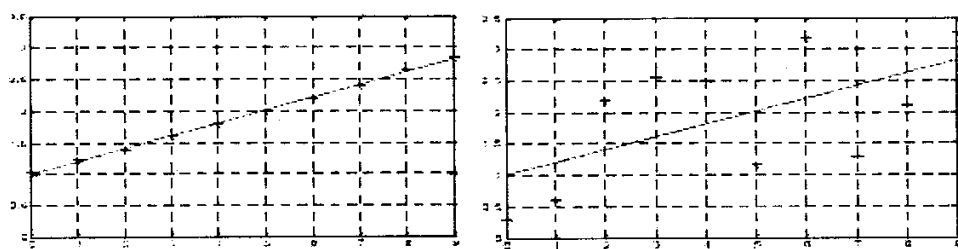


图2: 左图: 数据  $(x, y_1)$  的散点图(+)和拟合直线  $y_1 = a_1x + b_1$ ;  
右图: 数据  $(x, y_2)$  的散点图(+)和拟合直线  $y_2 = a_2x + b_2$

用实现回归分析的软件(常用的 MATLAB 的统计工具箱即可)可以得到结果见表2(置信区间的置信度=5%)

表2: 回归置信区间

	决定系数 $R^2$	F值	P值	剩余方差 $\sigma^2$	a的置信区间	b的置信区间
$y_1 = a_1x + b_1$	0.9985	5294	< 0.0001	0.0006	[0.1950, 0.2077]	[0.9699, 1.0381]
$y_2 = a_2x + b_2$	0.3528	4.361	0.0702	0.7761	[-0.0211, 0.4262]	[-0.1915, 2.1966]

对于第1个模型, 所有指标均表明模型与数据拟合得很好。对于第2个模型,  $R^2$  的数值表明在  $y_2$  的变化中(在与均值偏差平方和的意义下)只有35%是由  $x$  决定的, 其余由随机因素引起;  $F$  值很小, 导致  $p$  值大于0.05, 于是在常用的置信度  $\alpha = 5\%$  下该模型没有显著意义;  $a$  的置信区间包含零点, 即  $a = 0$  (这时模型无任何意义)落在置信水平为95%的区间内。这些指标均表明该模型不能反映数据  $(x, y_2)$  的变化规律。

用这两个模型作预测, 其结果的准确程度也有很大差别。比如对于  $x = x_0 = 5.5$ , 预测值为  $\hat{y}_{10} = \hat{a}_1x_0 + \hat{b}_1 = 2.1113$ ,  $\hat{y}_{20} = 2.1165$ , 二者相差无几, 但是它们的置信区间(置信水平95%)分别为  $[2.0621, 2.1606]$  和  $[0.3899, 3.8432]$ , 显然用第2个模型作预测没有什么价值。

这个例子表明, 用一个模型去拟合一组数据时不能只计算其参数, 应该做统计检验, 对模型(包括得到的参数)的显著性进行分析。如果需要用几个模型(如  $x$  的一次函数、二次函数、...)去拟合一组数据, 比较哪个较好时, 就更要借助统计分析。

## 2. 对原始数据先取平均再用平均值做拟合

在这个题目给的数据中大多数病人的测试时间是0, 4, 8, ... (周), 个别病人是5, 7, ... (周), 有些同学为了得到 CD4 (或 HIV) 的变化趋势, 先在每个时间点上对 CD4 取平均, 再用平均值做拟合, 而不管有的时间点上上百个病人的 CD4, 而有的时间点上只有几个病人的 CD4。

这样做有什么问题呢? 让我们看一个似乎有些极端、可是非常简明的数字例子, 说明这样做拟合可能产生的后果。设有这样的一组数据  $(x, y)$ :  $x = 0, y = 0 : 0.05 : 2$  (以步长0.05从0到2取值);  $x = 1, y = 1 : 0.05 : 3$ ;  $x = 2, y = 0.2$ , 在图3中左图上共84个点。对数据  $(x, y)$  拟合一条直线, 得  $y = 0.7647x + 1.0784$ , 如图3中左图。而如果先在  $x = 0, 1, 2$  对  $y$  取平均, 得到图3中右图的3个点, 再拟合一条直线, 得  $y = 1.3333$ , 如图3中右图, 它显然不能反映原始数据  $(x, y)$  的变化趋势。这是因为取平均后的3个点在做拟合时的权

重相同, 但是  $x = 0, 1$  的点都是 41 个原始数据的平均值, 而  $x = 3$  的点只是 2 个原始数据的平均值。

读者可以对一般情况进行讨论, 看看在什么条件下对原始数据先取平均再用平均值做拟合与直接对原始数据做拟合的结果才是一样的。

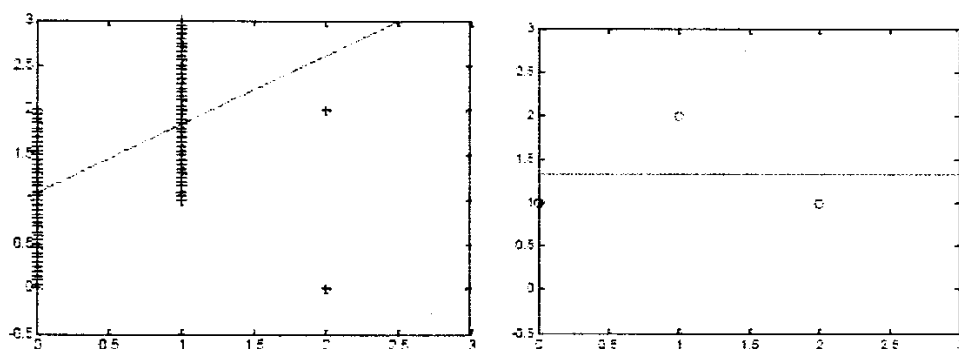


图3: 左图: 数据  $(x, y)$  的散点图(+)和拟合直线;  
右图: 数据  $(x, y)$  对  $y$  取平均后的散点图(o)和拟合直线

### 3. 拟合过度

这个题目给的 CD4 (或 HIV) 随时间的变化虽大体上是先增后降(或先降后增), 但仔细看来却有起伏, 为了拟合这些起伏有些同学用时间的 4 次、5 次甚至更高次数的多项式, 称之为拟合过度。事实上, 这些起伏是由与时间本身无关的其它随机因素引起的, 不应该用增加时间的高次项来拟合。极端的情况是, 对于数据  $(x_k, y_k), k = 1, 2, \dots, n$ , 用  $x$  的  $n-1$  次多项式拟合“最好”, 这条曲线通过全部  $n$  个点, 误差为零, 可是这已经变成多项式插值了。插值一般用于节点数据很精确时插值点的计算问题, 适用本题的显然是拟合而非插值。一般地说, 多项式拟合不要超过 3 次, 对于本题如果用统计检验做显著性分析, 可以发现多数情况是以时间的 2 次多项式为好。

### 4. 只按照图形做直观的定性判断, 不做定量分析

为了比较 4 种疗法的优劣, 有些同学对每种疗法的 CD4 (或取平均) 做散点图, 或折线(散点连线)图, 直观地比较疗法的优劣。对于本题这样做虽然也能得到正确的结果, 但是第一, 这种做法没有普遍的指导意义, 对于其它问题或数据, 这样做不一定能得到结果, 第二, 一种疗法的 CD4 散点图(或折线图)在另一种疗法的上面, 从统计意义上并不能表明其显著性。作为数学建模题目应该给出定量的处理方法。

### 5. 双指标处理不当

对于 CD4 和 HIV 两个指标的处理, 常用的方法是用某种函数形式将二者结合在一起。考虑到 CD4 越大越好, HIV 越小越好, 一些同学取二者之差或二者之商为综合指标, 这样简单处理的问题在于, 这两个指标量纲不同, 数量级差别较大。恰当的办法是, 先分别将其归一化(如将数值变换到 0-1 之间), 然后取加权平均。

除了用统计方法以外, 我们看到一些同学采用微分方程、灰色系统预测方法建模, 根据生态学中描述生灭关系的鲁特尔-伏尔脱拉方程, 建立微分方程组, 而且方程组的形式仅是简单

的一阶线性方程组。由于方程组中各项参数未知,因而将参数视为灰系数。还有的采用一阶一元灰色模型,即 GM(1, 1), 求灰系数。一般的说此方法不大适用于本题, 因为微分方程模型通常求得的是解析解, 或数值解, 因而模型要有一定精度, 求解过程复杂; 它可以求出整体最优解, 对于局部的最优性问题显得束手无策; 需要确定输入、输出之间关系的显式表达式, 过程复杂, 而且需要先确定系数。

不能用灰色预测方法求得这些系数, 采用灰色系统作预测时要知道输入变量的未来值。我们建议采用此类方法建模的同学看文献<sup>[6]</sup>, 从中了解如何采用微分方程最优控制模型, 描述在免疫系统中 CD4 细胞与 HIV 病毒的相互作用过程, 其方程形式比较复杂, 而且其参数是已知的, <sup>[6]</sup>中所研究的 CD4 细胞与 HIV 相互作用过程只是在 50 天左右, 这些参数值不适用于长周期。

某些同学还采用了层次分析法, 模糊评价, 时间序列, 神经网络等方法建立模型, 也不一定合适。简单的说, 层次分析法, 模糊评价用于半定性, 半定量问题转化为定量分析, 本题是定量问题的计算。时间序列模型需要有足够长的样本长度, 这里给出的观测值的个数太少。至于神经网络, 适用于继代分析, 这里不再详述, 希望同学们能对某种数学方法的应用范围能有进一步的理解, 而不是拿来简单套用。

#### 参考文献:

- [1] Geert Molenberghs, Geert Verbeke. Models for Discrete Longitudinal Data[M]. New York: London Springer, 2005.
- [2] 魏权龄. 评价相对有效性的DEA方法[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1988
- [3] Bian F P, Cui L Y, Lawrence Lessner. DEA-based anti-HIV immunotherapy model[J]. Progress in Natural Science, 2004,14(9):828-832
- [4] Bian F P et al. The efficiency valuation of DMUs with undesirable outputs[J]. Transaction of Tianjin University. 2002,8(4):295
- [5] Bian F P, Fan Y. Prediction model of data envelopment analysis with undesirable outputs[J]. Transactions of Tianjin University, 2004,10(1):34-38
- [6] Hem Raj Joshi. Optimal control of an HIV immunology model[J]. Optimal control applications and methods, 2002,23:199-213

## The Comments on the Solution of the Assessment and Prediction of the AIDS Treatments

BIAN Fu-ping<sup>1</sup>, JIANG Qi-yuan<sup>2</sup>

(1- Tianjin University, Tianjin 300072; 2- Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract:** In this paper the we give the background and general solutions and make the brief comments on the contest problem B for CUMCM-2006.

**Keywords:** AIDS; HIV; CD4; mathematical models; prediction.

文章编号:1005-3085(2006)07-109-08

## 易拉罐形状和尺寸的最优设计

郭文飞, 王继利, 李明阳

指导教师: 曹华林

(海军航空工程学院, 青岛 266041)

**编者按:** 本文所建立模型中的目标函数和约束条件的确定过程叙述清楚, 比较全面, 对计算方法及其执行以及所用的软件有明确的说明。

**摘 要:** 本文对易拉罐的最优设计主要从用料最省的角度进行研究。首先运用多次测量求平均值的方法确定出易拉罐的实际尺寸。然后分别就易拉罐为圆柱体和组合体(圆柱体及圆台)两种情况进行研究。当易拉罐为正圆柱体时, 以圆柱体高度与半径的比例关系确定易拉罐形状符合最优设计。当易拉罐为组合体时, 以不同设计要求逐步改进, 求得易拉罐实际尺寸符合最优设计。最后将易拉罐上端的圆台改为球台作为自己的最优设计。求解过程中主要用到: Lagrange 乘子法、重积分、条件极值法及数学软件 (Matlab、Lingo) 等。

**关键词:** Lagrange; 条件极值法

**分类号:** AMS(2000) 90C30

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 模型假设

- 1) 所取易拉罐各面的厚度均匀;
- 2) 易拉罐的顶盖和下底盖都是规则的平面;
- 3) 易拉罐都是规则的多面体;
- 4) 不考虑温度对测量仪器的影响;
- 5) 易拉罐用同种材料制成。

### 2 问题分析

在对易拉罐的形状进行研究时, 首先分析出模型可能需要的数据, 利用相应的工具多次测量求平均值确定出易拉罐各项尺寸的大小。易拉罐的形状为一正圆柱体时, 并没有对各部分的壁厚做出说明, 在求解的过程中可分易拉罐各面厚度相同和不同两种情况进行求解, 确定出高度与半径的比值关系, 并与实际测量数据进行分析比较, 判断易拉罐设计的合理性; 在易拉罐形状为组合体时, 求解过程仍以材料最省为最优设计, 但同时要满足上、下顶面的强度要求, 还要满足加工方面的要求, 建立一个广泛的最优化模型。然后假设多种情况对模型进行逐步改进, 最终求解既满足材料最省, 又满足其他方面(如强度、美观、加工等)要求的易拉罐形状和尺寸, 与实际测量值进行比较, 分析其设计的合理性。最后根据多面体中球体表面积与体积比值最小的基本原理, 将易拉罐上部的圆台设计为球台。

### 3 模型的建立与求解

#### 3.1 问题一

##### 3.1.1 需要测量的数据

模型中可能用到的数据种类有罐直径、罐高、罐壁厚、顶盖厚、圆台高、顶盖直径、圆柱体高、罐底厚、罐内体积等。

##### 3.1.2 各数据的测量方法

**直接测量：**罐桶直径、罐高、圆台高、顶盖直径、圆柱直径这几种数据类型属于外部属性，可以直接进行测量。测量时可用游标卡尺(50分度)对相关部位进行直接测量，计算出直径和高等。

**间接测量：**对于厚度的测量都可用下面第一种方法，体积的测量可用第二种方法。

1) 对易拉罐进行刨切，由于易拉罐厚度和顶盖厚度较小，可利用螺旋测微器进行测量；

2) 取一个量筒(500ml)和空的易拉罐，首先将清水倒入易拉罐中直至与罐口相平；然后将易拉罐中的水倒入量筒中进行读数，即得到了易拉罐的体积见表1。

表1: 易拉罐(可口可乐)各项尺寸列表

数据种类	实测数据					平均值	单位
罐高	12.06	12.04	12.06	12.08	12.06	12.06	cm
罐桶直径	6.62	6.60	6.58	6.58	6.66	6.61	cm
罐壁厚	0.112	0.106	0.099	0.101	0.095	0.103	mm
顶盖厚	0.295	0.298	0.321	0.304	0.311	0.306	mm
罐底厚	0.303	0.289	0.305	0.294	0.310	0.300	mm
圆台高	1.01	1.01	1.00	0.98	1.02	1.01	cm
顶盖直径	6.02	6.00	6.02	5.98	6.00	6.01	cm
圆柱体高	11.04	11.02	11.06	11.08	11.06	11.05	cm
罐内体积	364.9	365.2	364.5	364.0	365.6	364.8	cm <sup>3</sup>

##### 3.1.3 易拉罐体积的说明

根据测量数据也可以得出，对于标注为355ml的可口可乐易拉罐，它的实际罐体容量为365ml，所以在以下题目的求解过程中对于易拉罐的容积都以365ml为标准进行计算。

#### 3.2 问题二

##### 3.2.1 模型建立

由于壁厚不同会对用料体积产生影响，所以分别建立壁厚均匀相等的感性模型和壁厚不等的理性模型。

###### 1. 感性模型

**目标：**假设易拉罐是一个正圆柱体，易拉罐各处厚度均匀且非常薄(可忽略其厚度)时。就不用具体考虑易拉罐用料的体积，只以易拉罐的表面积最小为目标就可使用料最省。设易拉罐罐高为  $h$ ，罐体圆柱体部分圆的半径  $r$ ，目标为  $\min S(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$

**主要约束：**易拉罐的容积是一个固定的常量。在忽略罐壁厚的情况下我们可以认为易拉罐的体积与它的容积等价。设易拉罐的罐内体积  $V(r, h) = \pi r^2 h = 365\text{cm}^3$

以易拉罐罐内体积和饮料容量相同为约束条件，制作易拉罐需要的原用料最省为目标建立

## 最优化模型

$$\min S(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V(r, h) = \pi r^2 h = 365, \\ r > 0, h > 0. \end{cases} \quad (2)$$

## 2. 理性模型

**目标:** 由于引入了易拉罐的厚度, 需要研究易拉罐的罐壳体积。以易拉罐的用料体积最小为目标, 可使制造易拉罐的用料最省。易拉罐的用料体积主要分成三个部分: 顶盖所用的用料体积、罐底所用的用料体积、侧面所用的用料体积。假设除易拉罐的顶盖外, 罐的厚度相同, 记作  $b$ ; 顶盖的厚度为  $k \times b$  ( $k$  表示倍数); 易拉罐的半径为  $r$ , 直径为  $d$ ; 罐高为  $h$ ; 罐内体积为  $V$ ; 所用用料的总体积为  $S_V$ 。则易拉罐顶盖用料体积为  $\pi r^2 kb$ , 易拉罐底用料体积为  $\pi r^2 b$ , 易拉罐侧面用料体积为

$$(\pi(r+b)^2 - \pi r^2)(h + (1+k)b) = 2\pi hbr + 2\pi(1+k)b^2r + \pi hb^2 + \pi(1+k)b^3,$$

综上可得易拉罐用料的总体积为

$$S_V(r, h) = 2\pi hbr + \pi(1+k)br^2 + 2\pi(1+k)b^2r + \pi hb^2 + \pi r(1+k)b^3.$$

**主要约束:** (同感性模型)

因为  $b \ll r$ , 为简化模型求解, 所以  $b^2, b^3$  的项可以忽略, 从而建立如下最优化模型

$$\min S_V(r, h) = 2\pi rhb + \pi r^2(1+k)b, \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V(r, h) = \pi r^2 h = 365, \\ r > 0, h > 0. \end{cases} \quad (4)$$

## 2.2.2 模型求解

对于以上模型都可用多种方法求解, 感性模型可以通过条件极值法和利用数学软件直接求解, 理性模型可以通过 Lagrange 乘子法, 条件极值法和利用数学软件 Lingo 直接求解。

## 1. 感性模型求解

## 1) 条件极值法

模型中共有两个变量  $r$  和  $h$ , 体积的限制为  $V_0 = \pi r^2 h$ , 将上面的表达式代入到目标函数中可得:  $S = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$   $r \in (0, +\infty)$

由  $\frac{ds}{dr} = 0$  可得  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ , 对  $r$  求二阶导数可得:  $\frac{d^2s}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V_0}{r^3} > 0$ ,

故  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$  时, 取极小值, 且是唯一极值点。所以,  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时,  $S$  取最小值。

由  $h = \frac{V_0}{\pi r^2} = 2 \times \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi r}}$ , 可以确定:  $h = 2r$ 。

## 2) 借助数学软件求解

利用数学软件 Lingo 求解得出:  $r = 3.87\text{cm}$ ,  $h = 7.74\text{cm}$ ,  $S(r, h) = 282.7\text{cm}^2$ , 根据半径与高度的大小可确定:  $h = 2r$ 。

## 2. 理性模型求解

## 1) 求条件极值法



由  $\pi r^2 h = V_0$  解出  $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ , 代入  $S(r, h)$  得

$$S(r, h(r)) = b \left[ \frac{2V_0}{r} + \pi(1+k)r^2 \right],$$

由  $\frac{ds}{dr} = 0$  可得:  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}}$ , 所以

$$h = \frac{V_0}{\pi} \left( \sqrt[3]{\frac{2(1+k)\pi}{V_0}} \right)^2 = 2(1+k) \left( \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}} \right) = (1+k)r,$$

$$S'' = 4b \left[ 2\pi(1+r) + \frac{2V_0}{r^3} \right] > 0, \quad r > 0.$$

因此  $r$  使  $S$  达到极小值, 且是唯一极值点。所以,  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}}$  时,  $S$  取最小值。

另外, 还可运用算术几何不等式对目标函数进行求解得:  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}}$ , 即高度  $h$  与  $r$  的关系式为  $h = (1+k)r$  时, 用料体积最省。

2) Lagrange 乘子法 (见参考文献[3])

3) 结果检验

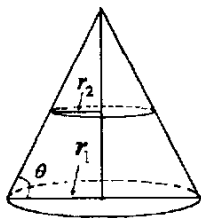
通过两种方法求得的结果相同, 说明模型的正确性。经过以上两种方法推导得到易拉罐的罐高  $h = (1+k) \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}}$ , 罐的半径  $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+k)\pi}}$ , 因此易拉罐的半径与罐高之比  $\frac{r}{h} = \frac{1}{1+k}$ 。又因测量数据易拉罐的顶盖厚大约是罐壁厚的3倍, 即  $k=3$ 。代入  $\frac{r}{h} = \frac{1}{1+k}$  可得罐的半径与罐高之比为 1:4, 而实际测量的数据大概也是这个比例, 根据半径与高度的比值能够说明易拉罐的形状符合用料省的最优设计。

### 3.3 问题三

#### 3.3.1 模型建立

##### 1. 易拉罐容积的确定

对于易拉罐的简化形状, 可将其分成两部分考虑, 上部分为一正圆台, 下部分为一正圆柱体。



1) 正圆台部分体积:  $V_1 = \frac{\pi(r_1^3 - r_2^3) \tan \theta}{3}$

2) 正圆柱部分体积:  $V_2 = \pi r_1^2 h$

综上可得: 易拉罐结构的总体积为

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi(r_1^3 - r_2^3) \tan \theta}{3} + \pi r_1^2 h.$$

根据测量数据, 易拉罐壁厚  $b \ll r_1, b \ll r_2, b \ll h$ ; 因此在确定易拉罐的容积  $V_p$  时可近似看成体积, 即

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi(r_1^3 - r_2^3) \tan \theta}{3} + \pi r_1^2 h.$$

## 2. 易拉罐用料体积 $S_V$ 的确定

易拉罐用料主要包括四部分: 上顶面  $S_{V1}$ 、圆台回转面  $S_{V2}$ 、圆柱回转面  $S_{V3}$ 、下底面  $S_{V4}$ 。根据问题二可知, 并且由于易拉罐壁厚  $b \ll r_1, b \ll r_2, b \ll h$ ; 为简化计算, 在求易拉罐用料体积  $S_V$  时, 可近似看成各个面的面积与其厚度乘积之和, 忽略各个面由于相交产生的体积偏差。在求各个面的面积时, 以外表面的测量值为准。设圆柱回转面的厚度  $b$  为一单位, 上顶面、圆台回转面、下底面分别是圆柱回转面厚度的  $k_1, k_2, k_3$  倍。因此易拉罐用料体积为

$$S_V(r_1, r_2, h, \theta) \approx S_{V1} + S_{V2} + S_{V3} + S_{V4} = \pi r_2^2 k_1 b + \frac{\pi(r_1^2 - r_2^2)k_2 b}{\cos \theta} + \pi r_1^2 k_3 b + 2\pi r_1 h b,$$

于是, 可根据易拉罐容积一定, 用料体积最省的最优化设计建立以下模型

$$\min S_V(r_1, r_2, h, \theta), \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V_P(r_1, r_2, h, \theta) = V_0, \\ r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, h \geq 0, \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

### 3.3.2 模型求解

在求解过程中, 为满足设计要求, 设上顶面、圆台回转面、下底面分别是圆柱回转面厚度的  $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 1$  倍, 下面分别用两种方法对模型求解。

方法一: Lingo 软件求解

本模型属于最优化模型, 可利用 Lingo 软件直接求解得到: 上顶盖半径  $r_2 = 0\text{cm}$ , 圆柱体半径  $r_1 = 4.2\text{cm}$ , 圆台倾斜角  $\theta = 41.8^\circ$ , 圆柱体高度  $h = 5.9\text{cm}$ , 所用材料  $V_p = 2.76\text{cm}^3$ 。

方法二: Lagrange 乘子法和 Matlab 软件求解

首先构造 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L(r_1, r_2, h, \theta) &= S_V(r_1, r_2, h, \theta) + \lambda V_P(r_1, r_2, h, \theta) \\ &= k_1 b \pi r_2^2 + \frac{k_2 b \pi (r_1^2 - r_2^2)}{\cos \theta} + 2b \pi r_1 h + k_3 b \pi r_1^2 \\ &\quad + \lambda \left[ \frac{1}{3} \pi \tan(r_1^3 - r_2^3) + \pi r_1^2 h - 365 \right], \end{aligned}$$

分别对  $r_1, r_2, \theta, h$  求偏导, 并使之为零, 与  $V_P(r_1, r_2, h, \theta) - 365 = 0$  联立得到如下方程组

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\cos \theta} r_1 + 2k_3 b \pi r_1 + 2\pi h + \lambda \pi r_1^2 \tan \theta + 2\lambda \pi h r_1 = 0, \\ 2k_1 b \pi r_2 - \frac{2k_2 b \pi r_2}{\cos \theta} - \lambda \pi r_2^2 \tan \theta = 0, \\ k_2 b \pi (r_1^2 - r_2^2) \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\lambda \pi (r_1^3 - r_2^3)}{3 \cos^2 \theta} = 0, \\ 2b \pi r_1 + \lambda \pi r_1^2 = 0, \\ \frac{1}{3} \pi \tan(r_1^3 - r_2^3) + \pi r_1^2 h - 365 = 0. \end{cases}$$

上述方程组, 利用 Matlab 软件中的 fsolve 函数求解得到: 上顶盖半径  $r_2 = 0$ , 圆柱体半径  $r_1 = 4.0154\text{cm}$ , 圆台倾斜角  $\theta = 41.7^\circ$ , 圆柱体高度  $h = 5.8112\text{cm}$ , 乘子  $\lambda = -0.4981$ , 所用材料  $V_p = 2.7053\text{cm}^3$ 。

**结果说明：**通过观察数据，两种方法求得的结果基本一样，各项取其平均值，得到上顶盖半径  $r_2 = 0$ ，圆柱体半径  $r_1 = 4.1\text{cm}$ ，圆台倾斜角  $\theta = 41.75^\circ$ ，圆柱体的高度  $h = 5.86\text{cm}$ ，此时所用材料  $V' = 2.73\text{cm}^3$ 。根据以上两种求解方法所求数据相同，但与易拉罐的实际形状和尺寸相差很大。需要对模型作出进一步改进。

### 3.3.3 模型改进一

上述模型中，在处理易拉罐底面厚度时是简化为与圆柱体壁厚相同来解决的，但通过实际测量发现底面厚度与圆柱体壁厚是不相等的，并且底面厚度与顶面厚度相同都为  $3b$ ，即此时  $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 3$ ，将修改后的值代入模型，求得上顶盖半径  $r_2 = 0\text{cm}$ ，圆柱体半径  $r_1 = 3.1\text{cm}$ ，圆台倾斜角  $\theta = 41.8^\circ$ ，圆柱体高度  $h = 10.8\text{cm}$ ，所用材料  $V_p = 3.55\text{cm}^3$ 。

观察数据会发现，与问题一中实测数据进行比较，相差仍然比较大，所以还要对模型进行改进。

### 3.3.4 模型改进二

在模型改进一中，只对易拉罐的各种壁厚进行了分析研究，发现并不能满足现实情况，所以要从其他方面考虑，通过对易拉罐的观察发现，易拉罐顶盖实际上并不是平面的，略有上拱，顶盖实际上是半径为  $3 + 0.4 + 0.2 = 3.6\text{cm}$  的材料冲压而成的，从顶盖到圆柱体部分的斜率为  $0.3$ ，这些要求也许保证了和易拉罐的薄的部分的焊接(粘合)很牢固、耐压。所有这些都是物理、力学、工程或材料方面的要求，简单通过求材料最省是得不到满意的结果的，所以要对其进行改进，假设易拉罐的上顶盖半径是已知的，通过问题一数据分析得到  $r_2 = 3.005\text{cm}$ ，将此值代入本题模型，并利用两种方法，求得易拉罐形状的各项尺寸如下表所示：上顶盖半径  $r_2 = 3.0\text{cm}$ ，圆柱体半径  $r_1 = 3.25\text{cm}$ ，圆台倾斜角  $\theta = 73.9^\circ$ ，圆柱体高度  $h = 10.2\text{cm}$ ，所用材料  $V_p = 4.12\text{cm}^3$ 。

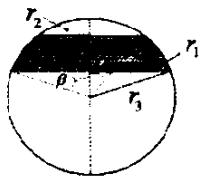
## 3.4 问题四

### 3.4.1 提出自己易拉罐的最优设计

通过对所测量易拉罐的观察分析，发现这种易拉罐还不是最省材料的，根据多面体中球体的表面积与其体积的比值最小的原理，提出将易拉罐中的圆台设计成球台。

### 3.4.2 模型的建立

#### 1. 球台部分的求解



运用重积分求得球台体积  $V_1$  为

$$V_1 = \frac{2\pi r_3^3 (\cos \alpha - \cos \beta)}{3} + \frac{\pi}{3} \left( \frac{r_2^3}{\tan \alpha} - \frac{r_1^3}{\tan \beta} \right).$$

球台上表面的面积  $S_{V1} = \pi r_2^2$ ，球台弧形部分表面积  $S_{V2}$ ，根据二重积分用球面坐标对其表面积积分可求得球台部分表面积为

$$S_{V2} = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta r_3^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi r_3^2 (\cos \alpha - \cos \beta).$$

#### 2. 圆柱体部分的求解

设圆柱体的高为  $h$ , 底面半径为  $r_1$ , 圆柱体的壁厚为  $b$ , 底面厚度为  $kb$ . 圆柱体的体积  $V_2 = \pi r_1^2 h$ , 侧面表面积  $S_{V3} = 2\pi r_1^2 h$ , 圆柱体的底面积  $S_{V4} = \pi r_1^2$ .

### 3. 易拉罐的容积

由于  $b \ll r$ , 所以易拉罐的整体体积看成易拉罐的容积, 所以总的易拉罐容积  $V$  为

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h) &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{2}{3}\pi r_3^3(\cos \alpha - \cos \beta) + \frac{1}{3}\pi \left( \frac{r_2^3}{\tan \alpha} - \frac{r_1^3}{\tan \beta} \right) + \pi r_1^2 h. \end{aligned}$$

### 4. 易拉罐所用材料的体积

由于薄片的体积等于面积乘以厚度, 所以易拉罐所用材料的体积  $S_V$  为

$$\begin{aligned} S_V(\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h) &= kb \times S_{V1} + b \times S_{V2} + b \times S_{V3} + kb \times S_{V4} \\ &= kb\pi r_2^2 + 2b\pi r_3^2(\cos \alpha - \cos \beta) + 2b\pi r_1 h + kb\pi r_1^2, \end{aligned}$$

综上所述, 在易拉罐体积一定的条件下, 以总用料最少为目标建立最优化模型如下

$$\min S_V(\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h), \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V(\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h) = V_0, \\ r_2 = r_3 \times \sin(\alpha), \\ r_1 = r_3 \times \sin(\beta), \\ r_1 > 0, r_2 > 0, \\ r_3 > 0, h > 0, \\ 0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

#### 3.4.3 模型求解

##### 1. 模型简化

在本模型中有不少数据是不能通过材料最省来确定的, 它们的尺寸与其他方面(如焊缝长度、工时少、运输方便等)有关系, 所以通过以上模型不能对其求解, 进行简化如下:

1)  $k$  值的确定是根据易拉罐顶盖和底盖所需要的强度来确定的不能因为材料省而使  $k$  值变小, 通过问题一的测量数据可以得到  $k = 2.9881$ ;

2) 顶盖其实不是完全的平面形, 而是向上拱起的, 是由薄片挤压而成, 并且考虑到罐体的美观、实用性、运输方便等, 其大小不能通过求材料最省得到, 根据问题一的测量数据得到  $r_2 = 3.005\text{cm}$ .

##### 2. 求解方法

###### 方法一 Lingo 软件求解

本模型属于最优化模型, 在求解时可利用 Lingo 软件求解. 所得结果: 圆柱体半径  $r_1 = 3.24\text{cm}$ , 球台的半径  $r_3 = 3.24\text{cm}$ , 圆柱体高  $h = 9.77\text{cm}$ , 与弧形部分有关的角  $\alpha = 1.17$ ,  $\beta = 1.57$ , 此时所用材料为  $4.10\text{cm}^3$ .

###### 方法二: Lagrange 乘子法和 Matlab 软件求解

构造 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h) &= kb\pi r_2^2 + 2b\pi r_3^2(\cos \alpha - \cos \beta) + 2b\pi r_1 h + kb\pi r_1^2 \\ &\quad + \lambda \left( \frac{2}{3}\pi r_3^3(\cos \alpha - \cos \beta) + \frac{1}{3}\pi \left( \frac{r_2^3}{\tan \alpha} - \frac{r_1^3}{\tan \beta} \right) + \pi r_1^2 h - 365 \right). \end{aligned}$$

分别对  $\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, h$  求偏导, 并把  $b = 0.0102\text{cm}$ ,  $k = 2.9881$ ,  $r_2 = 3.005\text{cm}$ ,  $V_0 = 365\text{cm}^3$  带入以上方程组, 利用 Matlab 中的 fsolve 函数求解(编程略)得: 圆柱体的半径  $r_1 = 3.2463\text{cm}$ , 球台所在球体的半径  $r_3 = 3.2465\text{cm}$ , 圆柱体的高  $h = 9.7679\text{cm}$ , 与弧形部分有关的两个角度  $\alpha = 1.1689$ ,  $\beta = 1.57$ , 所用材料为  $4.0979\text{cm}^3$ 。

对两种方法所得结果, 求算术平均值得到易拉罐各项尺寸, 圆柱体半径为  $3.24\text{cm}$ , 圆柱体的高度为  $9.77\text{cm}$ , 圆柱体上顶盖为  $0.31\text{mm}$ , 球台上顶盖半径为  $3\text{cm}$ , 球台弧形部分壁厚为  $0.1\text{mm}$ , 圆柱体底面厚度为  $0.31\text{cm}$ 。

#### 3.4.4 结果说明

此种设计, 易拉罐所用的总材料体积为  $4.10\text{cm}^3$ , 实际所用材料总体积为  $4.12\text{cm}^3$  (问题三已求), 所以这种设计能节省  $0.49\%$  的材料。由新设计的易拉罐可得圆柱体的高度为  $9.77\text{cm}$ , 直径为  $6.48\text{cm}$ , 直径与高度的比值为, 这也是基本符合“黄金分割”的。

#### 参考文献:

- [1] 叶其孝. 数学建模教育与国际数学建模竞赛[G]. 中国工业与应用数学学会《工科数学》杂志社, 1994
- [2] 飞思科技产品研发中心. MATLAB7基础与提高[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005
- [3] 叶其孝. 初探大学生数学建模竞赛的深入开展[EB/OL]. 北京理工大学, [HTTP://jkkx.cnit.edu.cn/qkfile/](http://jkkx.cnit.edu.cn/qkfile/)
- [4] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

## The Optimal Design of an Easy-pull Can in Shape and Size

GUO Wen-fei, WANG Ji-li, LI Ming-yang

Advisor: CAO Hua-lin

(Naval Aeronautical Engineering Academy, Qingdao 266041)

**Abstract:** This thesis studies the optimal design for easy-pull can to have efficient use of materials. Firstly, the value which averages the repeated measurements is determined as the actual size of the can. Secondly, the cylinder and pop combined (cylinder and cone) are studied respectively. When the shape of the can is a cylinder, we confirm the optimal design according to the ratio of height and radius, while the easy-pull can is a combination, its actual size is obtained by gradual improvement. Finally, we substitute the frustum of a cone for the frustum of a ball and take it as our optimal design. In the whole process of this research, Lagrange method, integral, conditional extremum and mathematics software (Matlab, Lingo) are used.

**Keywords:** lagrange method; integral

文章编号:1005-3085(2006)07-0117-03

## 易拉罐的优化设计

叶其孝

(北京理工大学数学系, 北京 100081)

**摘 要:** 本文讲述了“易拉罐形状和尺寸的最优设计”问题的命题、建模和求解, 评述了学生递交的论文中的优缺点, 提出了若干建议。

**关键词:** 易拉罐; 数学建模; 约束优化问题

**分类号:** AMS(2000) 97U60; 97C70

**中图分类号:** O221.2

**文献标识码:** A

### 1 命题

我第一次接触到易拉罐形状和尺寸是看了[1]中的一篇短文“精明的罐装”, 我才明白为什么可口可乐易拉罐的“直径”和“高”之比不是很多高等数学(微积分)教材中的例题或习题: “直圆柱的体积已知, 求使得表面积最小的直径和高之比”中的结论。这是一个应用导数求极值的很好又简单的问题。其结论是: 直径和高之比为1。但是我们看到的易拉罐几乎没有这样的。该文说假设易拉罐是直圆柱体, 那么只要顶盖的厚度是其余部分的3倍, 能够使材料最省的罐内圆柱体部分的直径和高之比为1/2。我对355毫升的可口可乐易拉罐做了粗略的测量, 发现大体上就是这样。后来我又了解到在上世纪40年代可口可乐易拉罐的形状和尺寸确实如此。为什么后来又改为现在的样子: 大体上是上面是一个直圆台下面是一个直圆柱体组成的容器呢? 我自己做了许多计算, 发现非常有趣。也觉得这是一个可以融入高等数学(微积分)教学的体现数学建模思想和方法的很好的例子。我就开始编写与之有关的教学单元, 并多次在国内外报告, 引起听众的兴趣。同时, 全国组委会也了解到很多大专的同学反映赛题偏难, 主要是要用到的数学很多参赛同学可能没有学过。这就提出了一个很有挑战性的问题: 能不能出一些尽可能只用到像微积分那样的数学方法, 又能充分体现数学建模思想和方法的赛题呢? 我就大胆地命了这道题。全国组委会也觉得可以试一试, 并进一步听取大家的反馈意见。

### 2 建模和求解

**2.1** 应该了解铝质可口可乐易拉罐的制作过程, 大体上是先由一块板材冲压成一个直圆柱的杯子, 再利用铝的延性, 在加热条件下, 把罐的侧边拉到一定的高度(因而变薄了), 略为收口, 和较厚的同质圆片焊接, 内外涂层, 灌装、测试等。这对于研究本问题来说, 实际上是很重要的。只有少部分队在论文中明确说明了这一点。正如不少论文引用的参考文献[2]中所说的, “随着饮料包装市场竞争的不断加剧, 对众多的制罐企业而言, 如何在易拉罐生产中最大限度地减少板材厚度, 减轻单罐重量, 降低生产成本, 是企业追求的重要目标。”这当然不是数学, 至少不能单靠数学就能解决的问题。但是, 在满足各种物理条件下的最薄的铝板已经做出来时, 在给定饮料量后, 易拉罐不同的形状和尺寸所用材料是不同的, 怎样使之最小, 数学建模就有用武之地了。这就是本问题要求同学们完成的任务。

**2.2 测量。**虽然有点“事后诸葛亮”，主要的目的是要对各部分的厚度之比有一个大体上的了解，以备以后验证模型之用。绝大部分队，无论是相当精确或是比较粗糙，都做得十分认真，体现了科学的、实事求是的态度。经我们了解，在美国，这种形状易拉罐各部分(以千分之一英寸为单位)的厚度大致如下：底部厚：8-11，侧壁厚：4，颈部厚：6，顶盖厚：9。据说在其他地方生产的易拉罐，各部分的厚度可以略有变化。另外一点是罐内容量(体积)不是355毫升(355cm<sup>3</sup>)，大约是365毫升(365cm<sup>3</sup>)，有些队没有注意这点，把罐内饮料量当作355毫升来算是有点问题的。

**2.3** 把易拉罐近似看成直圆柱体的情形。这时，易拉罐所用的材料(目标函数)为

$$SV(r, h) = (\pi(r+b)^2 - \pi r^2)(h + (\alpha + \beta)b) + \alpha b \pi r^2 + \beta b \pi r^2, \quad (1)$$

其中  $b$  是侧壁的厚度， $r, h$  分别是易拉罐内部的半径和高， $\alpha b, \beta b$  分别表示顶盖和底部的厚度。约束条件是罐内体积已知，即

$$V = \pi r^2 h. \quad (2)$$

其中  $V$  已知。约束优化问题(1)，(2)可以手算解决，得到的结果为  $r/h = 1/2$ 。

[3]或者在网上公布的我的报告都已经有了详细的结果，有的队在参考文献中列出了，并作出自己的理解，这是实事求是的良好学风。但是也有的队直接把我在网上的讲稿的有关部分，不管是否与本问题直接有关，图形及 Mathematica 的语句，甚至连一些并不妥当的内容，都不加分析地拷在他们的论文里，而且在参考文献中根本不提是从那里来的。这是一种很不好的学风。

**2.4** 易拉罐近似地由直圆台和直圆柱体组成。容易验算把2.3中的直圆柱体的上部收收口，就可以减少焊接量，从而节省成本。可以验算所用的材料也比直圆柱形的易拉罐所用的材料少。这说明数学建模的成果是核心的成果，但是在现实中，它往往被大量的制造技术和外观包装所掩盖。为什么会这样是非常值得我们思考的问题。这也说明只靠数学单打独斗是不行的，必须和其他专业结合，紧密合作才行。这时易拉罐的颈部可以由过点  $(0, r), (h, R)$  的直线段和过点  $(0, r+b), (h, R+b)$  的直线段绕轴旋转而得的圆台壳来代替(不过它的厚度小于  $b$  为  $\frac{bh}{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}$ ，因此目标函数(易拉罐所用材料的体积)可以近似地表为

$$SV(r, R, h, H, \alpha, \beta) = b\pi[\alpha(b+r)^2 + \beta(b+R)^2 + h(b+r+R) + (b+2R)H], \quad (3)$$

其中  $b$  是侧壁的厚度， $r, h$  分别是易拉罐圆台部分的半径和高， $R, H$  分别是易拉罐直圆柱体部分的半径和高， $\alpha b, \beta b$  分别表示顶盖和底部的厚度。或者认为面积乘厚度就是所用的易拉罐的材料(这时在角点处缺一定体积的材料)，则目标函数(易拉罐所用材料的体积)可以近似地表为

$$SV(r, R, h, H, \alpha, \beta) = b\pi[\alpha r^2 + \beta R^2 + h(r+R)\sqrt{h^2 + (R-r)^2} + R^2 H], \quad (4)$$

约束条件都是罐内体积已知，即

$$V = \pi h(r^2 + rR + R^2)/3 + \pi R^2 H, \quad (5)$$

其中  $V$  已知。(3)，(5)或(4)，(5)是自变量数日超过2的约束优化问题，要用数学软件，例如，Matlab, Mathematica, Lingo 等来求解。各队大体上是用这两个模型，还要加上一些附加的约束，例如因为顶盖有拉环，所以  $r$  有限制，因为要用手握住，所以  $R$  有限制，等等。可以把约束(5)解出一个变量，例如  $H$ ，再代入(3)或(4)，变成3个变量的约束优化问题，或

用 Lagrange 乘数法。有的队从求临界点开始, 发现问题, 再应用各种有一定合理性的假设来求得合理的解。但是很少有队通过 Taylor 公式 (Hesse 矩阵的正定性) 来验证所找到的临界点是否确实是目标函数达到极小, 这是一个缺憾。

**2.5** 至于作出自己的最优设计。几乎所有的队都想到: 如果体积一定, 球体是各种几何体中表面积最小的。各队想象并设计了各种易拉罐, 其中有, 上面是半球下面是直圆柱体, 然后在半球切掉一个适当尺寸的球冠(球缺), 下面挖掉适当尺寸的球缺, 其形状更接近我们见到的易拉罐, 并有一定的计算; 有的从艺术的角度设想包括葫芦形在内的各种易拉罐, 但是很难计算, 更不能与前面形状的易拉罐所用的材料进行比较了。

### 3 建议

**3.1** 数学建模是帮助我们 from know how (知识, 即知道怎么做) 提升到 know why (知道为什么要这样做) 的重要手段和方法, 这对于培养学生的原创性是非常有帮助的。所以参加包括数学建模竞赛在内的数学建模活动, 对于优秀学生来说是很值得的。

**3.2** 从阅卷可以看出许多同学有不少可能是很好的想法, 但是由于时间关系没有深入去做, 在赛后继续阶段是很值得去做的, 以求得一个肯定的结果。对于年青人来说一时的获奖或者不获奖并不重要, 重要的是是否善于总结, 是否有一股不做彻底不罢休的刻苦的坚持精神。

**3.3** 作为教师来说, 我们最大的宽慰是学生欢迎我们的讲课和辅导, 特别是, 多年后学生还在说某某老师教给了我哪些数学时我们会更加高兴。为此, 我们必须进一步与时俱进地钻研数学, 深入了解学校、专业和学生的情况, 提高自己的教学质量。而学习、钻研并一定程度的实践数学建模的思想和方法, 介入数学建模竞赛, 在赛前赛后指导同学参赛, 一定会提高自己的研究水平、教学质量以及对数学本身的认识, 从而有利于成为受学生欢迎的教师。

**3.4** 一个学校的最高目标就是要培养出能够为社会做出贡献的学生。领导要高瞻远瞩, 要认识到数学对于培养高质量学生的重要性。为此教师是关键。一个好学校的标志之一就是有一支优秀的教师队伍。因此一定要培养自己的教师, 而培养数学教师的很好的方法是请他们参与、指导学生参加数学建模竞赛, 从中得到锻炼。学生参赛积极性是很高的, 也是有可能的, 因为参赛总是少数同学。每个学校总有一些数学基础相当坚实、对数学又比较有兴趣的学生, 如果能把他们组织起来, 在课余给予一定的辅导, 完全有可能参赛并取得较好的成绩的。

#### 参考文献:

- [1] Consortium for mathematics and its applications (COMAP), Principles and Practice of Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc, 1997; 中译本: 申大维, 叶其孝等译. 数学的原理与实践[M]. 北京: 高等教育出版社和施普林格出版社, 1998, 15
- [2] 韩向东, 李志见. 铝质易拉罐成形工艺及模具[J]. 模具工业, 2004, (4): 17-21
- [3] 叶其孝. 最优化-导数的应用教学单元[J]. 工程数学学报, 2005, 22(8): 8-14

## Optimal Design of Pull-tab Cans

YE Qi-xiao

(Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract:** In this paper, design and formulation of the contest problem "Optimal design of the shape and dimension of beverage cans" are stated. Reviews for teams' papers submitted to the national judging are given. Recommendations for encouraging students from two-year or three-year colleges and tertiary vocational and technical education schools to participate in the MCM, teachers training are given.

**Keywords:** pull-tab cans; mathematical modeling; constrained optimization problem



文章编号:1005-3085(2006)07-0120-07

## 瓦斯和煤尘对煤矿安全生产影响的研究

徐 华, 刘晓丽, 潘嘉程

指导教师: 姜英姿

(徐州工程学院, 徐州 221008)

**编者按:** 行文流畅, 鸿篇巨制。涉及到影响煤矿安全的诸多因素, 本文的特色是运用层次分析的办法加以处理。通风系统网络图的绘制, 为组成规划问题各类约束条件铺设基础。

**摘 要:** 本文通过计算绝对、相对瓦斯涌出量判断出该矿为高瓦斯矿井, 然后运用模糊综合评判法对矿井的安全程度进行定性分析, 得出矿井安全性为优的结论, 运用数据分析结合正态分布, 由逆概率性质推出在安全操作情况下矿井发生爆炸的概率为 0, 最后以总通风量最少为目标建立规划模型, 同时引入矿通系数使结果更加符合实际情况。

**关键词:** 等级鉴定; 安全性评价; 模糊综合评判; 目标规划

**分类号:** AMS(2000) 90C05

**中图分类号:** O221.1

**文献标识码:** A

### 1 模型中的符号说明

$Q_{CH_4}$ : 矿井的绝对瓦斯涌出量;

$Q_{\eta}$ : 矿井中不同地点处的风量;

$P$ : 矿井发生爆炸事故的概率;

$Q_{zj}$ : 矿井的总通风量;

$k_{\text{矿通}}$ : 矿井的矿通系数;

$N$ : 一个月的工作天数;

$C_{ij}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班次总风流中的瓦斯浓度;

$A_i$ : 第  $i$  天矿井的日产量;

1, 2, 3, 4, 5: 各井巷中风量的分流节点;

$Q_{zj}, Q_{zh}$ : 煤矿总进风量和总回风量(总出风量);

$k_a, k_b$ : 通向掘进工作面与采煤工作面 II 巷道中对应两风门的可控系数;

$Q_{j1}, Q_{q1}, Q_{h1}$ : 进风巷 I、采煤工作面 I、回风巷 I 中所需的风量;

$Q_{j2}, Q_{q2}, Q_{h2}$ : 进风巷 II、采煤工作面 II、回风巷 II 中所需的风量;

$Q_{jj}, Q_{jh}$ : 掘进工作面的进风量与回风量(局部通风机的额定风量);

$Q_{yy}$ : 局部通风机所在的巷道中所需要的余裕风量。

$q_{CH_4}$ : 矿井的相对瓦斯涌出量;

$C_n$ : 矿井中不同工作面、巷道的瓦斯浓度;

$D_n$ : 矿井中不同工作面、巷道的煤尘量;

$v_{ij}$ : 矿井中第  $i$  天第  $j$  个班次的风速;

$s_m$ : 第  $m$  种类别巷道的断面面积;

### 2 问题的分析建模与求解

#### 2.1 煤矿等级鉴定模型的建立与求解

判断矿井等级的标准是瓦斯涌出量, 而涌出量又分为绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量, 故只要算出这两个值并观察其隶属范围, 再根据标准作出判断即可。

### 2.1.1 模型的建立

绝对瓦斯涌出量是单位时间内的瓦斯涌出量, 该量与各巷道断面面积、风速和瓦斯浓度有关。相对瓦斯涌出量是单位质量煤矿的瓦斯涌出量, 它不仅与矿井的绝对瓦斯涌出量有关, 还与煤矿产量有关。则可得:

绝对瓦斯涌出量模型

$$Q_{CH_4} = \max \frac{\sum_{j=1}^3 \nu_{ij} \cdot s_m \cdot C_{ij}}{3},$$

相对瓦斯涌出量模型

$$q_{CH_4} = \frac{\max(\sum_{j=1}^3 \nu_{ij} \cdot s_m \cdot C_{ij}) \cdot N}{3 \times \sum_{i=1}^{30} A_i}.$$

### 2.1.2 模型的求解

根据矿井绝对瓦斯量模型与相对瓦斯量模型, 利用 Mathematica 5.0 计算, 再以《煤矿安全规程》第一百三十三条分类标准为依据作出判断, 则鉴定结论见表 1:

表 1: 矿井瓦斯等级报告表

矿井××		指标				×年×月×日
监测点	三旬中最大一天的 涌出量(m <sup>3</sup> /min)	月实际工 作日(d)	月产煤 量(t)	月平均日 产量(t/d)	相对涌出 量(m <sup>3</sup> /t)	矿井瓦 斯等级
总回风巷	10.40207	30	18175	605.833	24.7689	高

## 2.2 煤矿不安全性评价模型的建立与求解

在鉴别出该煤矿为“高瓦斯矿井”后, 需解决的问题是判断煤矿的不安全性(即发生爆炸的可能性)。此处用两种方法来测定煤矿的不安全性, 一是采用层次分析法的思想进行模糊评判来定性分析, 二是采用数理统计的方法对发生爆炸事故的可能性进行定量分析。

### 2.2.1 定性分析

若瓦斯和煤尘都不存在, 则矿井绝对不会发生爆炸。据常理可推断两者的浓度越大发生爆炸的可能性越大。为了便于理解, 逆向考虑煤矿的安全性, 进而转化成不安全性。运用模糊综合评判法知识, 对煤矿中各监测点的安全性进行打分, 作定性分析。

由背景资料知煤矿的不安全性主要来自爆炸事故的发生, 爆炸分为瓦斯爆炸和煤尘爆炸。瓦斯爆炸的条件包括氧气浓度、火源、瓦斯浓度; 煤尘爆炸的条件包括氧气浓度、火源、煤尘浓度, 并且煤尘爆炸下限浓度与瓦斯浓度有关。为了更直观地表示他们的关系, 画出如下综合评判体系层次图见图 1。

根据模糊评判相关知识计算出各因素在特定条件下的权值, 经一致性检验, 结果符合要求, 进而算出各因素的最终权重。如表 2。接着, 用矿井安全程度的得分来判定其安全性见表 3。

再根据安全计算原则, 在数据表中找出各监测点瓦斯和煤尘浓度的最大值, 并由其得出打分见表 4。

在上述基础上, 利用以下公式, 便可得出各监测点的综合安全性  $S$ ,

$$S = \sum_{j=1}^7 D_{ij} \cdot \omega_j, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

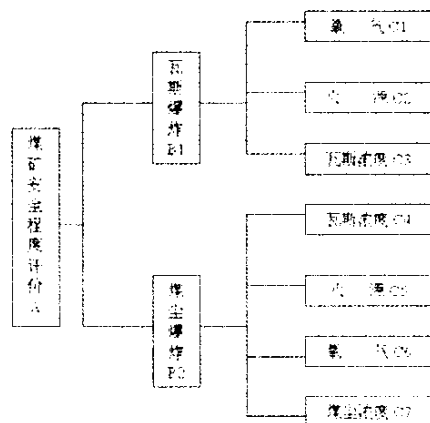


图 1: 模糊综合评判体系图

表 2: 影响煤矿安全的各因素的最终权重

各因素权重	氧气C1	火源C2	瓦斯浓度C3	瓦斯浓度C4	火源C5	氧气C6	煤尘浓度C7
瓦斯爆炸(0.75)	0.428571	0.428571	0.142857	-	-	-	-
煤尘爆炸(0.25)	-	-	-	0.125	0.375	0.375	0.125
最终权重	0.32	0.32	0.11	0.03	0.09	0.09	0.03

表 3: 得分与安全程度之间关系表

得 分	100-90	90-80	80-70	70-60	60-40	40-20	20-0
安全程度	优	良	良好	一般	不好	较差	差

表 4: 各因素的打分

	氧气C1	火源C2	瓦斯浓度C3	瓦斯浓度C4	火源C5	氧气C6	煤尘浓度C7
工作面I	100	100	84	48	100	100	20
工作面II	100	100	78	26	100	100	25
掘进面	100	100	93	78	100	100	26
回风巷I	100	100	83	45	100	100	22
回风巷II	100	100	76	21	100	100	28
总回风巷	100	100	86	32	100	100	29

其中  $\omega_j$  表示第  $j$  项技术指标的层次总排序的权重;  $D_{ij}$  表示对第  $i$  个监测点对第  $j$  项因素的专家打分值。则可算出 6 个监测点的安全程度得分, 据此可作出安全性评价见表 5。

表 5: 各监测点得分

监测点	工作面I	工作面II	掘进面	回风巷I	回风巷II	总回风巷
得分	94	93	96	94	93	94
安全程度	优	优	优	优	优	优

以上 6 个监测点都在 90-100 (分) 范围, 安全程度均为优, 则根据安全计算原则, 总体安全程度取最小值 93, 即矿井的安全性为优。

2.2.2 定量分析

煤矿的爆炸分为瓦斯爆炸和煤尘爆炸。由于矿井中安装了瓦斯传感器, 浓度超标会预警, 所以不会发生瓦斯爆炸; 而煤尘爆炸只能是在瓦斯浓度小于 1.5%, 煤尘浓度达到爆炸底线的情况下发生。为了便于计算, 把瓦斯浓度分为 (0-0.5%), (0.5%-1%) 及 (1%-1.5%) 三个阶段考虑, 对应的下限分别取  $22.5\text{g}/\text{m}^3$ ,  $15\text{g}/\text{m}^3$ ,  $10.5\text{g}/\text{m}^3$ 。

对所给数据进行分析, 根据正态分布图和  $P-P$  图认为数据符合正态分布特征, 故假设这些数据成正态分布。

根据监测数据推算出正态分布函数中相应的两个参数-期望  $\mu$  和方差  $\sigma$ , 所得参数值见表 6。

表 6: 各监测点瓦斯和煤尘的  $\mu$  和  $\sigma$

工作面I		工作面II		掘进面		回风巷I		回风巷II		
瓦斯	煤尘	瓦斯	煤尘	瓦斯	煤尘	瓦斯	煤尘	瓦斯	煤尘	
$\mu$	0.6731	7.8739	0.8738	7.6334	0.2297	7.3477	0.7236	7.4798	0.9227	7.2404
$\sigma$	0.03744	0.18427	0.0842	0.09453	0.0431	0.18874	0.03867	0.20779	0.08654	0.12143

由此可得到正态分布的概率密度函数, 再用定积分就可算出任意区间内矿井的爆炸概率。

只要工作面 I、工作面 II、掘进工作面、回风巷 I、回风巷 II 中的任何一个爆炸就说明煤矿爆炸的事件发生了。利用逆概性质, 得出煤矿发生爆炸的概率模型如下

$$P = 1 - \prod_{i=1}^5 (1 - P_i).$$

$$\begin{aligned}
P_i &= \sum_{j=1}^3 P_{Hij} P_{\text{煤}ij} \\
&= \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{H1}} e^{-\frac{(x-\mu_{H1})^2}{2 \times \sigma_{H1}^2}} dx \cdot \int_{22.5}^{3000} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{\text{煤}1}} e^{-\frac{(x-\mu_{\text{煤}1})^2}{2 \times \sigma_{\text{煤}1}^2}} dx \\
&\quad + \int_{0.5}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{H2}} e^{-\frac{(x-\mu_{H2})^2}{2 \times \sigma_{H2}^2}} dx \cdot \int_{15}^{3000} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{\text{煤}2}} e^{-\frac{(x-\mu_{\text{煤}2})^2}{2 \times \sigma_{\text{煤}2}^2}} dx \\
&\quad + \int_1^{1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{H3}} e^{-\frac{(x-\mu_{H3})^2}{2 \times \sigma_{H3}^2}} dx \cdot \int_{10.5}^{3000} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_{\text{煤}3}} e^{-\frac{(x-\mu_{\text{煤}3})^2}{2 \times \sigma_{\text{煤}3}^2}} dx,
\end{aligned}$$

求解得出矿井的爆炸概率为0。这个结果符合实际,因为通过对以前事故的分析,其绝大部分与违规操作、一些不可预测事件有关。而本模型是建立在不考虑这些因素的基础上的,所以0是切合实际情况的。从这一点分析,可看出在安全操作且无不可预测事件发生的情况下是不可能发生煤矿爆炸事故的。

### 2.3 最佳总风量模型的建立与求解

#### 2.3.1 理想状态下的最佳通风模型

该问题是一定约束条件下的最优化问题。要求同时考虑风速、瓦斯、煤尘因素以及各井巷的分流情况,确定煤矿所需的最佳总通风量。则可建立以总进风量最少为目标函数的规划模型。进一步分析,必须同时满足四组约束条件,分别是:各巷道对风速的不同要求、瓦斯传感器的报警限制要求、煤尘在瓦斯浓度的影响下的引爆下限的要求与各节点的风量分流情况。通风系统的示意图转换为网络拓扑图见图2。

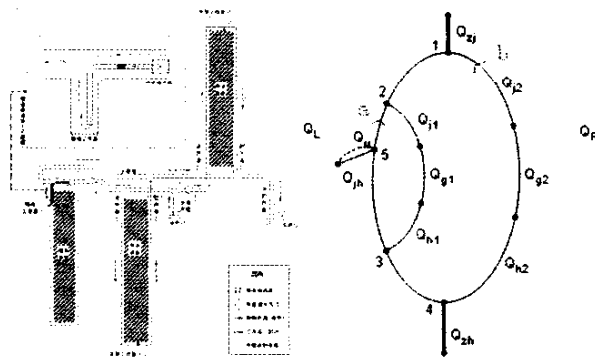


图 2: 标有节点的煤矿通风系统示意图及网络拓扑图

目标函数和约束条件为

$$\min Q_{zj} = Q_L + Q_R,$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& Q_R = Q_{j2} = Q_{g2} = Q_{h2}, \\
& Q_{R23} = Q_{j1} = Q_{g1} = Q_{h1}, \\
& Q_{zj} = Q_{zh} = Q_L + Q_R, \\
& Q_R = Q_{zj} \cdot k_b, \\
& Q_L = Q_{12} = Q_{R23} + Q_{L23} = Q_{34}, \\
& Q_{L23} = Q_{25} = Q_{53} = Q_{12} \cdot k_a, \\
& Q_{25} = Q_{53} = Q_{jh} + Q_{yy} = Q_{jj} + Q_{yy} \text{ 且 } Q_{yy} \geq 0.15Q_{25}, \\
& Q_{zj}, Q_{zh} \leq 8 \times 60 \times 5, \\
& Q_{34}, Q_{53} \leq 8 \times 60 \times 5, \\
& 0.25 \times 60 \times \leq Q_{j1}, Q_{h1}, Q_{j2}, Q_{h2} \leq 6 \times 60 \times 4, \\
& 0.25 \times 60 \times \leq Q_{g1}, Q_{g2} \leq 6 \times 60 \times 4 \\
& 0.25 \times 60 \times \leq Q_{jj}, Q_{jh} \leq 6 \times 60 \times 4 \\
& 0.25 \times 60 \times \leq Q_{25} \leq 6 \times 60 \times 4
\end{aligned} \right. \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.t.} \left\{ \begin{aligned}
& C_{g1} = 28.6608 - 0.143575Q_{g1} + 0.000246879Q_{g1}^2 - 1.4239 \times 10^{-7}Q_{g1}^3 < 1.0\%, \\
& C_{g2} = 14270.7 - 84.8848Q_{g2} + 0.168307Q_{g2}^2 - 0.000111234Q_{g2}^3 < 1.0\%, \\
& C_{h1} = 10.5684 - 0.559849Q_{h1} + 0.000107674Q_{h1}^2 - 7.01295 \times 10^{-8}Q_{h1}^3 < 1.5\%, \\
& C_{h2} = 6502.69 - 39.3175Q_{h2} + 0.0752714Q_{h2}^2 - 0.0000492869Q_{h2}^3 < 1.5\%, \\
& C_{jj} = 0.716065 - 0.00423079Q_{jj} + 0.0000112842Q_{jj}^2 - 9.47171 \times 10^{-9}Q_{jj}^3 < 1.0\%, \\
& C_{zh} = 124.144 - 0.232252Q_{zh} + 0.00014571Q_{zh}^2 - 3.05048 \times 10^{-8}Q_{zh}^3 < 1.5\%, \\
& D_{g1} = 3.21658 + 0.00825295Q_{g1} < \delta_{mg1}, \\
& D_{g2} = 5.01253 + 0.00520188Q_{g2} < \delta_{mg2}, \\
& D_{h1} = 4.8359 + 0.00520188Q_{h1} < \delta_{mh1}, \\
& D_{h2} = 5.5091 + 0.00340209Q_{h2} < \delta_{mh2}, \\
& D_{jg} = 2.99329 + 0.00809685Q_{jg} < \delta_{mjg}, \\
& D_{zh} = 5.8648 + 0.000765682Q_{zh} < \delta_{mzh}, \\
& \delta_{mn} = (1.00462 - 0.624347C_n + 0.144081C_n^2 + 0.011934C_n^3) \times 30, \\
& n = g1, g2, h1, h2, jg, zh,
\end{aligned} \right. \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& C_{g1} = 28.6608 - 0.143575Q_{g1} + 0.000246879Q_{g1}^2 - 1.4239 \times 10^{-7}Q_{g1}^3 < 1.0\%, \\
& C_{g2} = 14270.7 - 84.8848Q_{g2} + 0.168307Q_{g2}^2 - 0.000111234Q_{g2}^3 < 1.0\%, \\
& C_{h1} = 10.5684 - 0.559849Q_{h1} + 0.000107674Q_{h1}^2 - 7.01295 \times 10^{-8}Q_{h1}^3 < 1.5\%, \\
& C_{h2} = 6502.69 - 39.3175Q_{h2} + 0.0752714Q_{h2}^2 - 0.0000492869Q_{h2}^3 < 1.5\%, \\
& C_{jj} = 0.716065 - 0.00423079Q_{jj} + 0.0000112842Q_{jj}^2 - 9.47171 \times 10^{-9}Q_{jj}^3 < 1.0\%, \\
& C_{zh} = 124.144 - 0.232252Q_{zh} + 0.00014571Q_{zh}^2 - 3.05048 \times 10^{-8}Q_{zh}^3 < 1.5\%, \\
& D_{g1} = 3.21658 + 0.00825295Q_{g1} < \delta_{mg1}, \\
& D_{g2} = 5.01253 + 0.00520188Q_{g2} < \delta_{mg2}, \\
& D_{h1} = 4.8359 + 0.00520188Q_{h1} < \delta_{mh1}, \\
& D_{h2} = 5.5091 + 0.00340209Q_{h2} < \delta_{mh2}, \\
& D_{jg} = 2.99329 + 0.00809685Q_{jg} < \delta_{mjg}, \\
& D_{zh} = 5.8648 + 0.000765682Q_{zh} < \delta_{mzh}, \\
& \delta_{mn} = (1.00462 - 0.624347C_n + 0.144081C_n^2 + 0.011934C_n^3) \times 30, \\
& n = g1, g2, h1, h2, jg, zh,
\end{aligned} \right. \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& C_{g1} = 28.6608 - 0.143575Q_{g1} + 0.000246879Q_{g1}^2 - 1.4239 \times 10^{-7}Q_{g1}^3 < 1.0\%, \\
& C_{g2} = 14270.7 - 84.8848Q_{g2} + 0.168307Q_{g2}^2 - 0.000111234Q_{g2}^3 < 1.0\%, \\
& C_{h1} = 10.5684 - 0.559849Q_{h1} + 0.000107674Q_{h1}^2 - 7.01295 \times 10^{-8}Q_{h1}^3 < 1.5\%, \\
& C_{h2} = 6502.69 - 39.3175Q_{h2} + 0.0752714Q_{h2}^2 - 0.0000492869Q_{h2}^3 < 1.5\%, \\
& C_{jj} = 0.716065 - 0.00423079Q_{jj} + 0.0000112842Q_{jj}^2 - 9.47171 \times 10^{-9}Q_{jj}^3 < 1.0\%, \\
& C_{zh} = 124.144 - 0.232252Q_{zh} + 0.00014571Q_{zh}^2 - 3.05048 \times 10^{-8}Q_{zh}^3 < 1.5\%, \\
& D_{g1} = 3.21658 + 0.00825295Q_{g1} < \delta_{mg1}, \\
& D_{g2} = 5.01253 + 0.00520188Q_{g2} < \delta_{mg2}, \\
& D_{h1} = 4.8359 + 0.00520188Q_{h1} < \delta_{mh1}, \\
& D_{h2} = 5.5091 + 0.00340209Q_{h2} < \delta_{mh2}, \\
& D_{jg} = 2.99329 + 0.00809685Q_{jg} < \delta_{mjg}, \\
& D_{zh} = 5.8648 + 0.000765682Q_{zh} < \delta_{mzh}, \\
& \delta_{mn} = (1.00462 - 0.624347C_n + 0.144081C_n^2 + 0.011934C_n^3) \times 30, \\
& n = g1, g2, h1, h2, jg, zh,
\end{aligned} \right. \quad (4)
\end{aligned}$$

(1)表示通风系统的风量平衡限制约束;(2)表示根据《煤矿安全规程》,各巷道及工作面的风速限制约束;(3)表示根据《煤矿安全规程》,各巷道及工作面对瓦斯报警浓度的限制约束;(4)表示煤尘在各自巷道及工作面瓦斯浓度影响下的引爆下限的限制约束。

利用 Lingo 8.0 编程求解,理想状态下最佳通风量的结果见表7。

表 7: 理想状态下的最佳通风量

需风量	总通风量	工作面I	工作面II	额定风量
数值(m <sup>3</sup> /min)	1293.597	459.6501	493.409	289.4573

### 2.3.2 实际情形下的通风模型

在实际中, 存在一个矿通系数  $k_{\text{矿通}}$ , 它包含了实际情况中存在的各种不稳定因素对整个通风系统的影响。而它导致的直接结果是一定时间内, 矿井总进风量大于总回风量, 那么宏观上, 可利用总进风量与总回风量的比值作为矿通系数  $k_{\text{矿通}}$  的表达式, 则有

$$k_{\text{矿通}} = \frac{Q_{zh}}{Q_{zh}}; \quad \text{又} \quad k_{\text{矿通}} \approx \frac{Q_{g1} + Q_{g2} + \frac{Q_{Q_{jh}}}{0.85}}{Q_{zh}} \quad \text{或} \quad k_{\text{矿通}} \approx \frac{Q_{h1} + Q_{h2} + \frac{Q_{Q_{jh}}}{0.85}}{Q_{zh}}.$$

利用 Mathematica 5.0 软件求解得到

$$k_{\text{矿通}1} = 1.09111, \quad k_{\text{矿通}2} = 1.05672,$$

则可得  $k_{\text{矿通}} = k_{\text{矿通}1}^2 / k_{\text{矿通}2}$ , 最终算得  $k_{\text{矿通}} = 1.12663$ , 则实际情形下的通风量分别见表 8。

表 8: 实际情形下的通风量

需风量	总通风量	工作面I	工作面II	额定风量
数值( $\text{m}^3/\text{min}$ )	1457.4	501.531	538.366	315.831

通过检验, 发现上述结果不仅能排除矿井中的瓦斯, 还不会引起二次扬尘。

### 3 模型评价

对于问题(2), 运用了模糊数学评判的方法, 在很大程度上反映了方案的属性, 但还是带有一些主观因素。对于问题(3), 将煤矿通风系统示意图转化为网络拓扑图, 简化了问题, 且同时考虑理想状态和实际状态下的情形, 模型具有很强的现实意义。

#### 参考文献:

- [1] 马世志. 矿井通风、瓦检、瓦斯防治技术与措施[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2003
- [2] 于不凡, 王佑安. 煤矿瓦斯灾害防治及利用技术手册[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2000
- [3] 全国煤炭技工教材编审委员会编. 矿井通风与安全[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2003
- [4] 谢金星. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

## Influence of Gas and Coal Dust on the Coal mine Safety

XU Hua, LIU Xiao-li, PAN Jia-cheng

Advisor: JIANG Ying-zi

(Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221008)

**Abstract:** Firstly, this paper calculates the relative and abstract amount of gas, from which a high-density gas well can be judged. Then by fuzzy integrated evaluating method, a qualitative analysis of safety for the well is appraised as excellent. Then probability of well explosion is zero under the guidance of safe operation, which works out by data analysis, normal distribution and inverse probability. At last, a planning model is established based on minimum ventilation, and the ventilation coefficient makes the result more realistic.

**Keywords:** degree appraise; safety evaluation; fuzzy integrated judge; planning

文章编号:1005-3085(2006)07-0127-06

## 煤矿爆炸数学模型分析

桂 霄, 吴黎雳, 霍雨佳

指导教师: 雷玉洁

(第三军医大学, 重庆 400038)

**编者按:** 本文按照不同的标准对煤矿安全进行评估, 其中不乏独特的见解。希望看到关于有效性的比较, 毕竟井下轰然一炸, 结果是唯一的。非线性规划模型中肯, 而有关漏风的分析和处理显得推敲入微。

**摘 要:** 根据题目中所给的瓦斯与煤尘浓度以及《煤矿安全规程》得出判断煤矿类型的判别方法, 利用 Matlab 7.1 对总回风巷和两个采煤工作面的绝对及相对瓦斯涌出量进行求解, 判断该煤矿为高瓦斯煤矿; 从几个角度分析该煤矿在目前状况下发生爆炸的可能性, 分别建立矿井的爆炸可能性模型, 利用 Matlab 7.1 求解, 综合考虑分析, 确定该煤矿发生爆炸的可能性为  $\mu = 1.88\%$ , ( $\sigma = 1.24\%$ ); 最后通过调节各工作面的风量, 考虑在漏风、不漏风以及各工作面的瓦斯与煤尘的影响, 建立非线性规划模型, 综合运用 Matlab 7.1、SPSS 12.0 和 Lingo 8.0 进行求解, 得出总通风量的最优调节方案。

**关键词:** 煤矿爆炸; 不安全度; 非线性规划;

分类号: AMS(2000) 90C30

中图分类号: O221.2

文献标识码: A

### 1 模型的假设

- 1) 各个巷道的横截面积相等;
- 2) 风速在管道中均匀变化;
- 3) 在不同瓦斯浓度下的煤尘爆炸下限浓度是均匀分布的。

### 2 主要变量及符号假设

$v_{ij}$	风速(m/s)	$S$	横截面积
$Q_{ij}$	进风量	$G_{ij}$	绝对涌出量
$g_{ij}$	相对涌出量	$\mu_{ij}$	发生事故的可能性
$H_{ij}$	不安全程度	$L_{ij}$	煤尘的爆炸下限
$g(v_{ij})$	风速对应瓦斯浓度的函数	$f(v_{ij})$	风速对应煤尘浓度的函数
$l$	煤尘浓度		

### 3 问题分析

问题一, 应根据题中已知, 计算出总回风巷、两个采煤工作面的相对瓦斯涌出量与绝对涌出量, 判断该煤矿是低瓦斯矿井还是高瓦斯矿井。

问题二, 考虑不安全因素主要与瓦斯浓度与煤尘浓度有关, 将其分为由瓦斯浓度引起的不安全度与由煤尘浓度引起的不安全度。前者根据《煤矿安全规程》第一百六十八条法规的规



定,划分为警报浓度以下、警报浓度与断电浓度之间和断电浓度以上3个部分进行评定;后者根据该瓦斯浓度下的煤尘爆炸最低极限,通过构建的不安全度模型进行评定。最后对二者进行综合评定。

问题三,将总的通风量分配给两个采煤工作面和一个掘进工作面,通过两个风量调节风门和一个局部通风机对各个工作面的供给风量进行分配,保证各个工作面的瓦斯浓度与煤尘浓度不会引发安全事故,求出最佳的总通风量。再考虑有漏风的情况下,风量在通道中的改变,求出此时的最佳总通风量。

#### 4 模型的建立与求解

##### 1、问题一

##### 1) 计算总回风巷的相对和绝对瓦斯涌出量

根据单位时间的通风量等于管道的横截面积与通风速度的乘积,可以得到可得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天第  $k$  个时段的通风量为

$$Q_{ijk} = S \cdot v_{ijk} \cdot 60,$$

根据绝对涌出量等于风量乘以瓦斯浓度<sup>[2]</sup>,可以得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天第  $k$  个时段的绝对瓦斯涌出量为

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^3 Q_{ijk} \cdot c_{ijk}.$$

再根据相对涌出量等于绝对涌出量除以产量再乘以时间<sup>[2]</sup>,就可以得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天的相对瓦斯涌出量为

$$g_{ij} = \frac{G_{ij}}{A_j} \cdot 60 \cdot 24,$$

利用以上建立的模型,可以应用 Matlab 7.1 软件<sup>[3]</sup>得到30天在各处的绝对瓦斯涌出量和在总回风巷处的相对瓦斯涌出量见表1。

表1: 各工作面瓦斯涌出量

工作面I	工作面II	掘进工作面	回风巷I	回风巷II	总回风巷	
					绝对	相对
3.797163	4.402577	1.23461	3.65797	4.695487	7.804797	18.56146

可见,矿井的绝对瓦斯涌出量  $G_{ij} < 40$ ,而在总回风巷处的相对瓦斯涌出量  $g_{ij} > 10$ 。

##### 2) 计算两个采煤工作区的判断工作面的相对和绝对瓦斯涌出量

由上述模型,根据瓦斯浓度和煤尘的产生量在各工作面的比例将煤的日产量分配到两个采煤工作面,进而可用 Matlab 7.1 软件分别得到两个采煤工作面的相对和绝对瓦斯涌出量见表2。

表2: 采煤工作面的瓦斯涌出量

采煤工作面I			采煤工作面II		
绝对瓦斯涌出量	相对瓦斯涌出量(瓦斯)	相对瓦斯涌出量(煤尘)	绝对瓦斯涌出量	相对瓦斯涌出量(瓦斯)	相对瓦斯涌出量(煤尘)
3.797163	20.75995	17.78724	4.402577	18.53574	21.27402

可以看出两个采煤工作面的绝对瓦斯涌出量均小于  $40\text{m}^3/\text{min}$ , 而相对瓦斯涌出量均大于  $10\text{m}^3/\text{t}$ 。结合总回风巷的计算结果, 根据高、低瓦斯矿井的判断标准, 获得结论: 该瓦斯矿井为高瓦斯矿井。

## 2、问题二

### 1) 由引起警报点的个数直接计算可能性

对应6个监测点, 每个监测点在30天中每天都有3个班次, 得到540个数据点。将发生警报即看作会发生爆炸, 则在其中可以引起警报的数据点为各个监测点中瓦斯浓度大于或等于1.0%的, 在540个数据点中符合该条件的共有25个, 得到在全局中的不安全程度为

$$\mu = \frac{n}{N} = \frac{25}{540} = 0.04630,$$

即, 发生爆炸事故的可能性为4.63%。

### 2) 矿井的爆炸可能性模型

#### (I) 初等的倒数模型

由于随着  $L_{ij} - l_{ij}$  的值减小,  $\mu$  的值增大, 说明二者成反比例。当比例系数为1时, 就有

$$\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - l_{ij}}, \quad L_{ij} > l_{ij},$$

根据附表1中的数据进行拟合, 得到关于煤尘爆炸浓度下限的上、下界的方程分别为

$$L_{ij} = 3.6450c_{ij}^2 - 25.9801c_{ij} + 49.1939,$$

$$l_{ij} = 2.2857c_{ij}^2 - 15.9429c_{ij} + 29.6000,$$

结合附表2中给定的数据, 应用倒数模型进行计算可以得到各个数据点对应的爆炸的可能性。再对其期望与标准差<sup>[4]</sup>进行求解, 应用 Matlab 7.1 软件就能够得到爆炸的可能性为

$$\mu = 6.19\% \quad (\sigma = 2.63\%),$$

该模型在离爆炸下限的数值较大范围内, 结果的效果较好; 在1接近  $L$  时(在  $L-1 \sim L$  的范围之内), 会造成爆炸的可能性大于100%, 与真实情况不符。所以要进行修正。

#### (II) 修正后的倒数模型

假设修正后的模型为

$$\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - (l_{ij} + a)} + b \quad L_{ij} > l_{ij},$$

当煤尘的浓度为0时, 爆炸的可能性为0; 当煤尘的浓度为  $L_{ij}$  时, 爆炸的可能性为1, 即100%。代入模型, 可得到:  $0 = \frac{1}{L-a} + b$  和  $1 = -\frac{1}{a} + b$ 。

联立二者, 并结合实际, 求解可以  $a$ 、 $b$  的值分别为:  $\frac{L_{ij} - \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}}{2}$  和  $\frac{2}{-L_{ij} - \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}}$ 。

由此可以得到改进后的模型为

$$\mu_{ij} = \frac{2}{L_{ij} + \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}} - 2l_{ij}} - \frac{2}{L_{ij} + \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}}.$$

结合附表2中给定的数据, 应用倒数模型进行计算可以得到各个数据点对应的爆炸的可能性。再对其求得期望与标准差进行求解, 就能够得到爆炸的可能性为

$$\mu = 1.88\% \quad \sigma = 1.24\%.$$

### (III) 瓦斯与煤尘影响不安全度的模型

将不安全程度分为由瓦斯浓度引起的不安全程度和由煤尘浓度引起的不安全程度两个部分, 取其中最大值的作为矿井的不安全度, 即

$$H = \max(H_1, H_2).$$

#### a) 由煤尘浓度引起的不安全程度

煤尘浓度的影响是由于浓度与爆炸下限的临近, 引起了矿井的不安全事故。选取爆炸下限的组中值进行拟合, 得到煤尘的爆炸下限与瓦斯浓度的关系式

$$L_{ij} = 2.9654c_{ij}^2 - 20.9615c_{ij} + 39.3970,$$

将各个监测点各个班次所测量的煤尘浓度转化成为百分制的数, 为

$$H_1 = \frac{l_{ij}}{L_{ij}} \cdot 100.$$

#### b) 由瓦斯浓度引起的不安全程度

瓦斯所引起的不安全事故为报警和断电。

因为断电会影响煤矿的正常生产, 所以断电的危险程度比煤尘浓度的影响大, 警报的危险程度根据瓦斯断电浓度与警报浓度的关系进行确定。由煤尘浓度引起的不安全程度的最大值为 31.9, 由于断电危险大, 所以其不安全程度为 32, 报警的不安全程度为 21。即

$$H_2 = \begin{cases} 0 & \text{瓦斯浓度低于报警浓度} \\ 21 & \text{瓦斯浓度高于报警浓度低于断电浓度} \\ 32 & \text{瓦斯浓度高于断电浓度} \end{cases}$$

#### c) 矿井的不安全度

将所得的 540 个数据点的不安全度做散点图见图1。

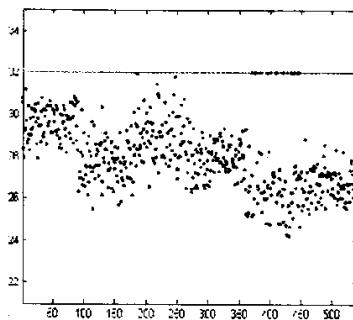


图1: 各数据点不安全度 0~21 间为安全, 21~32 间为较危险, 32~80 间为危险, 80~100 间为高度危险

由以上标准可以判断出整个煤矿中的所有点都是处在 21~32 这一区间内的。可以认为该煤矿是较危险的。

### 3、问题三

## 1) 不考虑漏风的情况

总的风量  $Q$  是在进风口处的风速  $v$  与主巷道断面面积  $S_1$  的乘积。在进入矿井后, 按照作用效果可以分成3个部分: 采煤工作面I获得的风量, 采煤工作面II获得的风量与掘进工作面获得的风量。可以得到在进风口的风速与各处风速和断面面积的关系为

$$v = \frac{S_2 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 + S_1 \cdot v_3}{S_1},$$

并且根据《煤矿安全规程》第一百零一条法规可以得到各处的风速范围为

$$\begin{aligned} 0 < v &\leq 8, \\ 0.25 &\leq v_i \leq 4, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

局部通风机所在的巷道中至少需要有15%的余裕风量

$$S_1 \cdot v_3 \geq 15\% \cdot v \cdot S_1,$$

根据局部通风机不同的额定风量, 可以得到从局部通风机的风筒中所排出的风速为

$$v_3 = \begin{cases} \frac{S_1 \cdot v_3}{S_1} & 150 \leq S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \leq 400 \\ \frac{400}{60 \cdot S_1} & S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \geq 400. \end{cases}$$

安全程度应满足各处均不会发生报警, 即, 瓦斯浓度应与煤尘浓度应满足

$$\begin{aligned} 0 < c_{ij} = g(v_{ij}) &< 1.0, \\ 0 < l_{ij} = f(v_{ij}) &< L_{ij}. \end{aligned}$$

先对在同一风速时的瓦斯浓度进行平均化, 求得平均值。再将每个风速和其对应的瓦斯浓度平均值应用 SPSS 12.0 软件进行相关性分析。得出  $p < 0.001$ 。于是, 可以认为风速与瓦斯浓度的相关性较好, 呈相关系数为  $-0.445$  的负相关关系。同理, 对风速与煤尘的数据做处理, 二者的相关系数为  $0.589$  的正相关关系。

并且, 事故发生的可能性应当不高于问题二中所求得的发生事故可能性的期望, 于是, 又有安全性的约束条件为

$$\mu' < \mu.$$

综合各个工作面, 进、回风巷以及安全程度, 得到最终的规划模型

$$\begin{aligned} \min v &= \frac{S_2 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 + S_1 \cdot v_3}{S_1} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} S_1 \cdot v_3 \geq 15\% \cdot v \cdot S_1, \\ 0 < v \leq 8, \\ 0.25 \leq v_i \leq 4, \quad i = 1, 2, 3, \\ 0 < g(v) < 1.0, \\ 0 < f(v) < L, \\ \mu' < \mu. \end{cases} \end{aligned}$$

应用 Lingo 8.0 软件求解, 得到结果见表3。

表3: 不漏风情况的风量

	风速(m/s)	风量(m <sup>3</sup> /min)
进风口	3.84	1152.00
工作面I	1.48	355.20
工作面II	1.48	355.20
局部通风机	1.48	400.00

## 2) 考虑漏风的情况

根据附表2中所给出的数据,可以得到风量的主巷道到达工作面I的系数、主巷道到达工作面II的系数、进风口到达主巷道的系数和回风巷到达总回风巷的系数  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ 、 $p_4$  依次为 0.8964、1.0101、0.9241、1.082, 各约束条件不变, 只改变目标函数为

$$\min v' = \frac{S_2 \cdot v'_1}{p_1} + \frac{S_2 \cdot v'_2}{p_2} + S_1 \cdot v'_3$$

应用 Lingo 8.0 软件求解<sup>[5]</sup>, 得到结果见表4。

表4: 漏风情况的风量

	风速(m/s)	风量(m <sup>3</sup> /min)
进风口	3.99	1197.00
工作面I	1.48	355.20
工作面II	1.48	355.20
局部通风机	1.48	400.00

## 参考文献:

- [1] 国家安全生产监督管理局. 煤矿安全规程[M]. 北京: 煤矿工业出版社, 2004
- [2] 矿井瓦斯涌出[EB/OL]. <http://www.bsgs.cn/b6/sb7.1.htm>. 2006,9
- [3] MATLAB7基础与提高[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005,4
- [4] 易尔. 军事医学统计学[M]. 西安: 第四军医大学出版社, 2006,8
- [5] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005,7

## The Analysis of Coal-mine Explosion's Mathematical Modeling

GUI Xiao, WU Li-li, HUO Yu-jia

Advisor: LEI Yu-jie

(Third Military Medical University, Chongqing 400038)

**Abstract:** Depending on the concentration of the gas and the grime, which were presented in the theme, and the Regulation of Coal Mine's Security, we can elicit the method how to judge the type of coal mine. We use Matlab 7.1 to calculate the relative and absolute effused quantity of the gas in the total windy lane and the two working planes, so that we can judge the coal mine presented in the theme is a high-concentration-gas mine. In order to analyze the probability of the mine exploding at present status from several aspects, we established a model called the Model of the Probability of the Mine Exploding, using Matlab 7.1 calculate, and acquired the probability is  $\mu = 1.88\%$ , ( $\sigma = 1.24\%$ ). At last we established another model, which is a nonlinear-program model, concluding the affection of the all working planes' gas and grime in the seeped-wind and no-seeped-wind status, and comprehensively used Matlab 7.1, SPSS 12.0 and Lingo 8.0 to calculate, acquiring the best method of controlling the total quantity of the wind.

**Keywords:** coal-mine explosion; nonlinear-program model; unsecurity

文章编号:1005-3085(2006)07-0133-08

## 煤矿瓦斯和煤尘监测与控制问题的数学模型

韩中庚

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

**摘 要:** 本文针对2006年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛的D题“煤矿瓦斯和煤尘监测与控制”问题, 首先概括地介绍了这个问题的立意与背景, 然后给出了这个问题一种可行的解决方案及结果, 最后根据评卷情况对问题的解决方法和答卷中存在的问题做了综合评述。

**关键词:** 煤矿; 瓦斯; 煤尘; 最佳通风量; 优化模型

**分类号:** AMS(2000) 90C30

**中图分类号:** O221.2

**文献标识码:** A

### 1 问题的立意与背景

煤矿安全生产是目前社会重点关注的热点问题之一, 尤其是在能源紧张, 对煤炭的需求量不断增加的情况下, 煤矿的安全生产问题更是值得我们关注, 这也是建设平安和谐社会的重要组成部分。据不完全统计, 2005年, 全国煤矿共发生死亡事故3341起, 共死亡5986人, 其中瓦斯爆炸事故405起, 死亡2157人, 占总死亡人数的36.0%。在58起一次死亡10人以上的特大事故中, 瓦斯事故40起, 占69%。一次死亡百人以上事故5起。这些事故所造成的经济损失是重大的, 给社会和伤亡人员的家庭所造成影响与损失是无法估量的。我们注意到, 大部分事故的罪魁祸首都是瓦斯或煤尘爆炸, 瓦斯在煤矿的开采中是不可避免的。因此, 矿井下的瓦斯和煤尘对煤矿的安全生产构成了重大威胁, 做好煤矿井下瓦斯和煤尘的监测与控制是保证煤矿安全生产的关键所在。

瓦斯爆炸必须具备的三个条件是: 一定浓度的甲烷; 一定温度的引火源; 足够的氧气浓度。在实际矿井中, 为了保证煤矿工人的正常工作, 必须向井下输送新鲜的空气, 为此, 井下空气中的含氧量(一般在30%左右)是充足的。另一方面, 由于矿井下采煤的机械化作业的环境, 产生火花是不可避免的, 因此引起瓦斯爆炸的引火温度和氧气浓度条件是客观满足的, 于是预防煤矿瓦斯爆炸的方法只有是监测和控制井下瓦斯的浓度。降低井下瓦斯浓度的基本方法就是通过通风系统将瓦斯排出井外, 从降低瓦斯浓度的角度, 风速越大越好。但是井下风速过大, 将会增加巷道空气中的煤尘浓度, 一方面影响工人的正常工作和健康, 另一方面主要是煤尘浓度过高遇火也会引起爆炸。煤尘爆炸必须同时具备三个条件: 煤尘本身具有爆炸性; 煤尘必须悬浮于空气中, 并达到一定的浓度; 存在能引燃煤尘爆炸的高温热源。但是当矿井的空气中混入一定浓度的瓦斯和煤尘时, 就使得瓦斯和煤尘爆炸的限值大大地降低, 不安全的因素增加。井下巷道的通风系统成为问题的关键, 井下风速过大或过小都是不安全的, 保持在一定的范围内是最好的。为了确保煤矿的安全生产, 国家制定了《煤矿安全规程》(以下简称《规程》), 《规程》详细地规定了煤矿预防瓦斯爆炸的措施和操作规程, 以及相应的标准。《规程》要求煤矿都必须要有合理的通风系统, 并安装瓦斯自动监控系统, 瓦斯监控系统要求所有的采煤工作面和回风巷及部分进风巷都要设置安装瓦斯传感器, 每个传感器都与地面控制中心相连, 当井下瓦斯浓度超标时, 控制中心将自动切断电源, 停止采煤工作, 人员撤离采煤现场。所以煤矿瓦斯与煤尘的监测与控制在煤矿的安全生产中起着关键性的作用。

正是在这样的背景下,我们提出了“煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制”问题。起初我们自然地想到一系列的问题,诸如在采煤过程中瓦斯和煤尘是如何产生的、变化的规律是什么、如何对其进行动态的监测、又如何根据矿井下的瓦斯和煤尘的浓度来合理地设置通风系统、安全生产的标准是什么?既然国家制定了“煤矿安全规程”,煤矿都有相应的通风系统和监测手段,为什么还会屡屡发生爆炸事件?我们带着这些问题,先后两次到河南平顶山相关煤矿进行调查,咨询了有关的煤矿安全生产的监测管理专家和技术人员,实地参观了煤矿的通风监测控制系统,并调阅了有关的瓦斯和煤尘浓度、风速和风量、超标报警、煤的产量等大量的监测数据资料。同时,查阅了煤矿实际的通风设计图纸,详细地了解了通风系统的设计原理和结构。根据这些一手材料简化成为一个可以用数学建模方法研究的问题,最后在煤矿通风系统专业有关专家的指导下,经反复修改而形成题目。在问题的形成过程中,力求做到切合实际,并利用通俗的专业语言来表述问题。

## 2 煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制

根据问题的要求,假设巷道断面面积的大小是基本均匀的,内部的形状和巷道壁是近似相同的。依据所给的监测数据信息来研究需要解决的三个问题。

### 2.1 判别该煤矿是低瓦斯矿还是高瓦斯矿

按照《规程》要求,当井下瓦斯的相对涌出量不超过  $10\text{m}^3/\text{t}$ ,且绝对涌出量不超过  $40\text{m}^3/\text{min}$  时为低瓦斯矿。当相对涌出量大于  $10\text{m}^3/\text{t}$ ,或绝对涌出量大于  $40\text{m}^3/\text{min}$  时为高瓦斯矿。更严重的称为瓦斯突出矿。所谓的瓦斯绝对涌出量是单位时间涌出的瓦斯的体积,在此用  $G$  表示,单位为  $\text{m}^3/\text{d}$ ,或  $\text{m}^3/\text{min}$ 。瓦斯相对涌出量是平均日产 1 吨煤所涌出的瓦斯量,在此用  $g$  表示,单位为  $\text{m}^3/\text{t}$ 。

已知巷道风速为  $v(\text{m/s})$ ,而巷道的平均断面积为  $s\text{m}^2$ ,则风量为

$$Q = 60 \cdot s \cdot v (\text{m}^3/\text{min}).$$

如果风流中的平均瓦斯浓度为  $C_g\%$ ,则瓦斯绝对涌出量为

$$G = \frac{1}{100} Q \cdot C_g (\text{m}^3/\text{min}).$$

又考虑到该煤矿的日产量为  $A_d(\text{t/d})$ ,则该煤矿瓦斯的相对涌出量为  $g = G/A_d(\text{m}^3/\text{t})$ 。由问题所给的监测数据,对于每一个工作面 and 掘进面,取每天的早班、中班和晚班的三组数据中瓦斯浓度为  $C_{gk}^{(i)}$ ,相应的风速为  $v_k^{(i)}$ ,断面面积为  $4\text{m}^2$ ,则风量为  $Q_k^{(i)} = 4v_k^{(i)} \cdot 60$ ,于是各工作面的瓦斯绝对涌出量为

$$G_k^{(i)} = \frac{1}{100} Q_k^{(i)} \cdot C_{gk}^{(i)} (\text{m}^3/\text{min}), \quad i = 1, 2, \dots, 90; \quad k = 1, 2, 3.$$

由于总回风巷的断面面积为  $5\text{m}^2$ ,则总通风量为

$$Q_k^{(i)} = 4 \cdot v_k^{(i)} \cdot 60, \quad k = 4, 5, \quad Q_6^{(i)} = 5 \cdot v_6^{(i)} \cdot 60, \quad i = 1, 2, \dots, 90.$$

经计算可知总回风量大约为  $1558.9\text{m}^3/\text{min}$ 。

类似地,由总回风巷的瓦斯浓度和风速可以计算出该煤矿总的瓦斯绝对涌出量

$$G_6^{(i)} = \frac{1}{100} Q_6^{(i)} \cdot C_{g6}^{(i)} (\text{m}^3/\text{min}), \quad i = 1, 2, \dots, 90$$

和相对涌出量

$$g_6^{(i)} = \frac{C_6^{(i)}}{A_d^{(i)}} (\text{m}^3/\text{t}), \quad i = 1, 2, \dots, 30.$$

由题目所给的实际数据, 计算可以得到各工作面的瓦斯绝对涌出量和总回风巷的绝对瓦斯涌出量与相对涌出量的具体结果, 则瓦斯的绝对涌出量平均值为  $9.7482 \text{m}^3/\text{min}$  和相对涌出量的月平均值为  $23.1705 \text{m}^3/\text{t}$ , 由此可以判断该煤矿为高瓦斯矿。

## 2.2 统计分析煤矿的不安全的程度

考虑到该煤矿的实际情况, 包含有两个开采工作面、一个掘进工作面、两条回风巷和一条总回风巷, 即5个主要的监测点, 每一个地方的出现不安全的情况都会对整个煤矿构成威胁, 为此需要对每一个监测点的数据都应该考虑。根据题目所给出的540组监测数据, 既要考虑瓦斯和煤尘浓度单项指标超标的情况, 同时还要考虑瓦斯和煤尘的相互作用使得出现不安全的情况。即随着瓦斯浓度的增高, 煤尘爆炸浓度下限急剧下降, 使得煤矿不安全的因素增加。

根据上述的分析, 我们来研究该煤矿出现不安全情况下的统计概率。作如下的统计计算:

- 1) 各工作面瓦斯浓度超标: 使  $C_{gk}^{(i)} > 1.0$  ( $k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 90$ ) 的次数为  $n_1 = 5$ ;
- 2) 巷道瓦斯浓度超标: 使  $C_{gk}^{(i)} > 1.0$  ( $k = 4, 5; i = 1, 2, \dots, 90$ ) 的次数为  $n_2 = 20$ ;
- 3) 煤尘与瓦斯混合超标: 即使得

$$\{0 < C_{gk}^{(i)} < 0.5; 22.5 \leq C_{mk}^{(i)} \leq 50, \quad k = 1, 2, \dots, 6; i = 1, 2, \dots, 90\}$$

和

$$\{0.5 \leq C_{gk}^{(i)} < 1.0; 15 \leq C_{mk}^{(i)} \leq 37.5, \quad k = 1, 2, \dots, 6; i = 1, 2, \dots, 90\}$$

的总次数为  $n_3 = 0$ 。

综合上述, 经过对实际数据作统计计算则可以得到该煤矿的不安全的概率为

$$p_a = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3 \times 540} \approx 0.0154.$$

由此可以看出该煤矿不安全程度还是比较大, 即发生安全事故的可能性是很大的, 应该进一步改进煤矿的通风系统。

## 2.3 确定最佳的通风量和风量的调节控制

### 2.3.1 对问题的分析

根据煤矿开采工作中的实际情况以及《规程》的实际要求, 要确定采煤工作面和巷道所需要的通风量, 其原则有以下几点:

- 1) 采煤工作面的瓦斯浓度不超过1%, 其他有害气体都不超过《规程》规定;
- 2) 采煤工人平均每人所需风量不小于  $4 \text{m}^3/\text{min}$ , 即保证充分的吸氧量;
- 3) 采煤工作面温度不超过  $26^\circ\text{C}$ , 要保持良好的通风条件;
- 4) 保证爆破作业所需要的风量;
- 5) 能够有效的排出瓦斯和煤尘, 但又不能造成煤尘飞扬。

实际中, 对于前4项要求是希望风速越大越好, 而一般说来在正常情况下, 第2~4项都能保证满足。对于第5项则需要控制风速在一定的范围内为最佳。对于井下的瓦斯而言, 降低浓度的基本办法就是通风, 而且瓦斯的浓度随着风速的增大而单调减小。

对于矿井下的煤尘是不可避免的, 风速太小不能将煤尘带走, 风速太大虽可能带走一些浮尘, 但又可扬起一些积尘, 即当风速大于  $1.5 \text{m/s}$  时, 风速越大煤尘浓度就越高。所以对于矿井下的煤尘而言风速不宜过小, 也不宜过大, 适宜最佳。单纯考虑矿井下的瓦斯和煤尘与风速



的关系,就有一个寻求最佳风量的问题,即保证瓦斯和煤尘都控制在《规程》规定的安全范围内,寻求一个最佳的通风量。

同时注意到,当矿井的空气混合了一定瓦斯和煤尘,以及其他的一些易燃有害气体后,瓦斯和煤尘的爆炸下限将会大大的降低,而混合的浓度越高,爆炸的下限值就越低。另外加上一些其他的不确定因素的影响,使得二者的关系发生一些随机性的变化。

### 2.3.2 确定瓦斯浓度与风速的关系

由上面的分析,对于各工作面 and 回风巷的瓦斯浓度除了与风速有关以外,还与瓦斯的涌出量有关,而且涌出量是一个不可控的因素,而且瓦斯的涌出量是不确定的。实际上,瓦斯的浓度与风速成反比,也与巷道断面面积成反比。于是有各监测点的瓦斯浓度与风速的近似关系为

$$a_k + \varepsilon_k = C_{gk} s_k v_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (1)$$

其中  $v_k$  为第  $k$  个监测点的平均风速,  $a_k$  事实上是瓦斯绝对涌出量的均值,  $\varepsilon_k$  是随机误差,不妨设  $\varepsilon_k$  服从于正态分布  $N(0, \sigma_k)$ ,  $s_k = 4.5 (k = 1, 2, \dots, 6)$  为断面面积。

根据题目中的监测数据作最小二乘拟合可得拟合系数  $a_k$  和方差  $\sigma_k$  如下表1所示。

表1: 瓦斯浓度与风速的关系拟合系数

拟合系数值	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$a_k$	6.32	7.34	2.06	6.09	7.82	16.26
$\sigma_k$	0.29	0.70	0.38	0.29	0.72	0.87

由此即可得到各工作面与回风巷的瓦斯浓度随风速变化的近似关系。

### 2.3.3 确定煤尘浓度与风速的关系

矿井中煤尘浓度的高低只与风速的大小有直接的关系。一般说来,煤尘与风速应该呈非线性的关系,但注意到实际中监测出的风速变化范围很小,相对比较稳定,而且都在 1.9m/s 以上。为此,我们可以在这个较小的范围内视为近似的线性关系,于是不妨假设各监测点的煤尘浓度与风速的关系近似为

$$C_{mk}(v_k) = b_k \cdot v_k + c_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (2)$$

其中  $v_k$  为第  $k (k = 1, 2, \dots, 6)$  个监测点的平均风速,根据问题所给的监测数据作最小二乘拟合可得拟合系数如下表2所示。

表2: 煤尘浓度与风速的关系拟合系数

拟合系数值	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$b_k$	1.9807	1.2485	1.9432	1.2546	0.8165	0.2297
$c_k$	3.2166	5.0125	2.9933	4.8359	5.5091	5.8648

由此即可得到各工作面与回风巷的煤尘浓度随风速变化的近似关系。

### 2.3.4 确定煤矿的最佳通风量

这里所说的最佳通风量是指在保证各工作面 and 回风巷瓦斯浓度与煤尘浓度都不超标的情况下,寻求煤矿的最小的通风量,即保证全煤矿的安全生产。则总通风量最小为目标,以相应的

通风要求为约束建立如下的优化模型

$$\begin{aligned} \min Q &= 300v_6 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 240(v_1 + v_2 + v_3) \leq 240(v_4 + v_5) + \frac{240v_3}{0.85}, \\ 0 \leq C_{gk}(v_k) \leq 1.0 (k=1, 2, \dots, 6), \\ 0 \leq C_{mk}(v_k) \leq 22, \text{ if } 0 \leq C_{gk}(v_k) \leq 0.5 (k=1, 2, \dots, 6), \\ 0 \leq C_{mk}(v_k) \leq 15, \text{ if } 0.5 < C_{gk}(v_k) \leq 1.0 (k=1, 2, \dots, 6), \\ 0.25 \leq v_k \leq 4 (k=1, 2, 3), \\ 0.25 \leq v_k \leq 6 (k=4, 5), \\ 0 \leq v_6 \leq 8, \\ 150 \leq 240v_3 \leq 400, \\ v_1 \leq v_4, v_2 \leq v_5, \\ 300v_6 \geq 240(v_4 + v_5) + \frac{240v_3}{0.85}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

说明

目标函数: 总的通风量最小,  $Q_0$  为局部通风机的额定风量;

约束条件1: 总通风量与总回风量的守恒, 不等号是实际都会有漏风的现象, 会有差别;

约束条件2: 《规程》要求工作面的瓦斯浓度不能超过1.0%;

约束条件3和4: 在不同瓦斯浓度下对煤尘浓度的要求范围;

约束条件5, 6和7: 《规程》要求工作面、巷道和总回风巷的风速标准;

约束条件8: 实际中局部通风机的额定风量范围;

约束条件9: 考虑巷道可能出现漏风的情况;

约束条件10: 是对巷道分流的要求, 以保证巷道风流的压力。

注意 由于瓦斯涌出量的随机性变化的影响, 根据(1)式有

$$C_{gk}(v_k) = \frac{a_k + \varepsilon_k}{s_k v_k}, \quad k=1, 2, \dots, 6,$$

其中  $\varepsilon_k$  服从于正态分布  $N(0, \sigma_k)$ 。所以在求解规划模型(3)的过程中, 按统计学中的  $3\sigma$  原则, 取  $\varepsilon_k$  为  $3\sigma_k (k=1, 2, \dots, 6)$ , 且可以保证99.7%的致信度, 即将随机性的影响控制在0.3%以内。于是规划模型(3)就可化为线性规划求解。

由(1), (2)式, 用 LINGO 求解可以得到问题的解: 最佳的通风量为

$$Q_{\min} = 2093.47 \text{ m}^3/\text{min},$$

局部通风机额定风量为

$$Q_0 = 240 \times v_3 = 319.92 \text{ m}^3/\text{min},$$

各工作面和回风巷的最佳风速为

$$v_1 = 2.9958, v_2 = 3.933, v_3 = 1.3333, v_4 = 2.9958, v_5 = 4.1583, v_6 = 6.9782 (\text{m/s}).$$

### 2.3.5 风量的调节与控制

考虑到总进风量

$$Q_{\min} = 2093.47 \text{ m}^3/\text{min},$$

由求解结果, 根据

$$Q_k = 60s_k r_k (\text{m}^3/\text{min}).$$

则可计算出各工作面 and 回风巷的最佳风量 (平均值) 为

$$Q_1 = 718.992, Q_2 = 943.992, Q_3 = 319.992, Q_4 = 718.992, Q_5 = 997.992, Q_6 = 2093.47 (\text{m}^3/\text{min}).$$

即开采工作面A的风量为  $719\text{m}^3/\text{min}$ ; 开采工作面B的风量为  $944\text{m}^3/\text{min}$ ; 掘进工作面的总风量为  $320\text{m}^3/\text{min}$ , 即局部通风机的额定风量为  $Q_0 = 320\text{m}^3/\text{min}$ ; 回风巷1的风量为  $719\text{m}^3/\text{min}$ ; 回风巷2的风量为  $998\text{m}^3/\text{min}$ ; 总回风巷的风量为  $2094\text{m}^3/\text{min}$ .

实际中通过两个风门调节控制两个进风巷的风量, 再用局部通风机送风到掘进巷。从而保证该矿井正常的通风系统的安全的通风量。

### 2.3.6 结果的分析与检验

通过如上模型及其求解结果, 该煤矿为高瓦斯矿, 现有的通风系统还不能满足安全生产的需要, 还存在有一定的不安全因素, 即发生安全事故的可能性还比较大。从安全生产的角度, 需将总通风量从原来的  $1558.9\text{m}^3/\text{min}$  提高到  $2094\text{m}^3/\text{min}$ , 同时按照问题3的方案来控制调节各工作面的通风量进行模拟检验表明, 使得生产的安全性大大地提高, 不安全的概率从原来的0.0154减小到0.009, 大大地提高了安全系数, 从某种意义上讲也可以提高日产量。

## 3 对问题的综合评述

对于“煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制”这个实际问题, 起初考虑是按甲组的问题来拟定的, 但由于题目本身的特性和专业性等问题, 最后简化为乙组的一个赛题。尽管如此, 这个题目还是产生了一定的影响, 也受到了一些同行们较高的评价。对于这样一个专业性较强的实际问题, 让乙组 (特别是专科) 的学生三天来完成确实不易, 但从实际的答卷来看, 其结果还是令人欣慰的, 这也反映出了全国大学生数学建模的水平都在普遍地提高。

对于问题1)而言, 基本上都是依据绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量两项指标判断确定该煤矿为高瓦斯矿, 主要是相对涌出量指标超过  $10\text{m}^3/\text{t}$ 。

对于问题2)而言, 要求根据题目所给出的30天 (每天3次) 6个观测点的风速、瓦斯和煤尘等指标的监测数据来统计判断该煤矿不安全的程度, 即发生安全事故的可能性是多少。从送全国的答卷来看, 解决问题的方法主要有三类: 一类是由已知的监测数据做统计计算得到相应的统计概率, 即出现指标超标的次数与总监测次数之比, 但很多的答卷中的总监测次数为540是不对的, 应该是  $3 \times 540 = 1620$ , 即“30天 $\times$ 每天3次 $\times$ 6个监测点 $\times$ 3项指标”。为此, 发生安全事故的概率为

$$p_a = \frac{25}{1620} \approx 0.0154.$$

第二类对所监测数据作统计分析, 假设服从正态分布规律, 并估计其均值和方差, 自定义所谓的安全性指标和相应的标准, 进行检验和判断得出结论。这类方法总体可行, 但缺少客观性和可信度, 将问题考虑的过于复杂化, 同时对假设和安全性指标定义的合理性缺少依据。第三类方法是仅依据煤尘爆炸下限随瓦斯浓度变化的关系作简单的数据拟合 (指数拟合, 或二次拟合、三次拟合等), 并自定义所谓的安全性指标和相应的标准, 对问题进行检验和判断得出结论, 这类方法有明显的的不合理性。

对于问题3)是这个题目的核心问题, 主要是根据煤矿开采工作中的实际情况以及《规程》的实际要求, 确定采煤工作面和巷道所需通风量的主要原则是: “采煤工作面的瓦斯浓度不超

过1%，其他有害气体都不超过《规程》规定（在这里只考虑瓦斯和煤尘）：能够有效的排出瓦斯和矿尘，但又不能造成煤尘飞扬”。解决问题的主要思路是三个步骤：

1) 确定瓦斯浓度与风速的关系：各工作面 and 回风巷的瓦斯浓度与风速、断面面积以及瓦斯涌出量有关，瓦斯涌出量是不可控、不确定的因素，断面面积视为常数，可设瓦斯浓度与风速成反比，利用题目中各监测点瓦斯浓度和风速的数据，确定瓦斯浓度与风速的近似关系；

2) 确定煤尘浓度与风速的关系：矿井中煤尘浓度与风速有直接关系，一般说来它们呈非线性关系，在风速不大时煤尘浓度随着风速的增加而变小，当风速较大时煤尘浓度随着风速的增加而变大。但是注意到在实际监测中风速变化范围很小，相对稳定，可以在这个较小的范围内视为近似的线性关系，用题目中的数据来确定；

3) 确定最佳通风量与风量分配：所谓最佳通风量是指在保证各工作面 and 回风巷瓦斯浓度与煤尘浓度都不超标的情况下，寻求矿井的最小通风量，形成一个优化问题：目标是总的通风量最小，约束条件应包括：按照各井巷风量的分流情况及总通风量与总回风量基本守恒（实际上存在漏风）得到的关系；各工作面的瓦斯浓度不超过1%；在不同瓦斯浓度下煤尘浓度的允许范围；各工作面、巷道和总回风巷的风速标准；局部通风机的额定风量范围；以及巷道可能出现漏风的情况等。一般应该是一个线性（或非线性）规划模型，求解可以得到总通风量、各工作面通风量和局部通风机的额定风量。结果原则上应比现在的总通风量（约  $1560\text{m}^3/\text{min}$ ）要大，安全性提高，并且按基本守恒原则分配到各工作面。

从送全国评阅的答卷来看，几乎所有答卷都建立了相应的优化模型，其模型的具体形式是百花齐放，千奇百怪，几乎没有两份是相同的，这也反映出了这个题目的开放性和答案的不惟一性。但存在的主要问题大体上有以下几个方面：一个方面是只考虑三个工作面的安全问题做了局部优化，没有考虑回风巷瓦斯浓度的超标也会发生爆炸事故的可能性。实际上，即使是每一个工作面的瓦斯浓度都不超标，风流汇集到总回风巷后也会使瓦斯浓度超标，用这种局部优化所得到的通风量都偏小，不安全的可能性加大。第二个方面是基于问题2)中自定义的安全性指标最大为目标和相应的标准为约束建立优化模型，所得结果都有明显的不合理性，对实际问题难以解释，也就是基于一个不合理的目标和约束，得到不合理的结论，通常所得到的通风量都偏大。第三个方面是约束条件考虑的不全面，即对实际中可能造成不安全的因素没有全部考虑进去，所得到的通风量结果一般都偏小，实际中还存在着不安全的因素。但也让我们欣慰地看到，有些参赛队的答卷在问题的处理上考虑的非常全面细致，对问题的分析透彻深入。有的答卷将煤矿的通风系统归结为一个串联和并联的系统，从总风量分流守恒的角度考虑风量的合理分配；有的还考虑了漏风和渗风的情况，使得安全性更强，更符合实际；还有一些很好的做法，都是有创造性的想法。另外也有个别的参赛队，在问题的处理中有不当的做法，例如：完全依据文献中的经验公式，主观地给出一些相应的参数假设和取值，缺少一定的说服力；有的队把这个问题理解为一个综合评价问题，利用层次分析、综合加权、模糊综合评判等方法得到一些无关的结果，这也反应出部分学生对实际问题的理解和把握不够准确。

#### 4 结束语

2006年高教社杯全国大学生数学建模竞赛圆满地结束了，至此，这项赛事已经走过第15个年头，竞赛规模已发展到了空前程度，也进入了一个辉煌的时期。通过这项活动培养出了一大批优秀的人才，也促进了大学数学的教学改革，作为一个数学建模积极的参与者和受益者也为此感到高兴。对于“煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制”问题，从开始构思、收集资料，到一线煤矿调查研究，最后形成问题，经历了一个艰辛的过程。竞赛后看到同学们一篇篇的“优秀作