公交最佳路线模型及求解

摘要

本题是一个选取公交网络中最佳路线的优化问题。根据相关文献对乘客心理的调查研究、乘客对票价敏感程度及公交问询服务角度对查询者分成四类人群。然后根据查询者分类确定四种相应的最佳路线选取原则：1）在换乘次数最少的前提下出行耗时（含票价转化时间）最短；2）在换乘次数最少的前提下出行耗时（不含票价转化时间）最短；3）在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（含票价转化时间）最短；4）在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（不含票价转化时间）最短。

对于问题一和问题二，本文分别针对四种最佳路线选取原则建立了优化模型。出行耗时（含或不含票价转化时间）最短作为模型的优化目标。对换乘次数的优化采取不同的处理方法，在对应最佳线路选取原则 1 和 2 的模型中，换乘次数最少为约束条件。对应原则 3 和 4 的模型中，换乘次数不大于乘客的心理承受上限为约束条件。

求解时利用站点信息矩阵确定线路之间的邻接矩阵，然后找到满足换乘次数约束的所有路线，再利用站点信息矩阵等确定这些路线的出行耗时，进而选择出最佳路线。对题目中给出的六对站点进行应用，成功找到了满足四种查询者要求的最佳路线。

对于问题三，本文以换乘次数最少为第一优化目标，以耗时最短为第二优化目标，建立了动态规划模型。将换乘次数设为阶段，将站点作为各阶段的状态，状态变量为由起始站经过若干次换乘到达该状态的最少时间，以换乘次数增加使得状态变量减小作为状态转移条件。目标为由起始站到终点站耗时最小。另外，为了降低复杂度，增加优化准则：各阶段首先考虑终点站状态的状态转移，然后判断是否已获得最优解，若否，才需考虑该阶段除终点站以外各状态的状态转移。此外，本文给出了该动态规划模型所对应的算法流程，可以编程实现。

本文建立的优化模型适应性强。求解算法时间复杂度为 $O(\max\{\text{线路数}^2, \text{站点数}\})$，能很快的响应查询者的请求。

关键词： 公交网络　最佳路线选取原则　优化模型　站点信息矩阵　邻接矩阵　动态规划

问题重述

这些年来，城市的公交系统有了很大发展，北京市的公交线路已达 800 条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，其核心是线路选择的模型与算法，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。

要求解决如下问题：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）。

(1)、S3359→S1828　(2)、S1557→S0481　(3)、S0971→S0485

(4)、S0008→S0073　(5)、S0148→S0485　(6)、S0087→S3676

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3、假设又知道所有站点之间的步行时间，给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

模型假设

1. 假设不考虑堵车等不确定因素，相邻站之间的行驶时间一定，并且换乘时间一定。
2. 假设乘客选择线路只受换乘次数、出行耗时、票价因素的影响，不受线路舒适度等因素的影响。
3. 假设乘客对换乘次数的承受能力有上限值。

问题分析

公交系统可抽象为一个网络，站点是网络的节点，而站点之间的线路是网络节点的关联。搜索与生成公交最优出行路径的理论模型也即求解公交网络最优路径的算法。在研究模型与算法之前，我们首先需要确定以下几个问题：

1. 影响乘客选择线路的因素：
   - 换乘次数：乘客在完成一次出行过程中换公汽或地铁的次数。
   - 出行距离：包括车上距离和车外距离，车外距离指的是乘客为了乘车而步行的距离；
   - 出行耗时：指乘客在一次出行过程中所需的时间。它也包括车上和车外部分，车外耗时除了在车外距离部分所耗的时间外还包括在车站等车的时间；
   - 出行费用：指的是乘客在完成一次出行过程中所花的车费。
   - 乘车舒适度：由车辆种类，车内设施或车上服务等因素决定。
2. 查询者分类：

   不同乘客对于选择线路的各项因素的要求都是不同的，有些人优先考虑换乘次数。有些人则优先考虑出行耗时，出行距离或乘车舒适度。

   参考文献[1]中对公交乘客出行心理的调查研究，说明出行者选用换乘次数最少作为首要优化目标，而以出行耗时最少为第二重要因素， 以出行距离最短为第三重要因素。

   从公交问询服务的角度考虑，以出行耗时最少作为目标为宜。但是查询者对

换乘次数都有一个心理承受上限，所以，换乘次数仍要考虑。

当出发地与目的地确定的情况下，出行耗时少的路径一般出行距离也相对较短。所以，我们不再考虑出行距离。

对于乘车舒适度，由于其不容易量化，所以我们假设不同线路舒适度的差异不影响乘客对线路的选择。

对于出行费用，在换乘次数确定的情况下，不同路径的票价差一般为一元或两元。乘坐公汽的乘客通常有两类，一类是为了上班等原因固定乘坐某条线路，这类人群一年中大部分时间都要乘坐相同的线路，所以一般会考虑换乘次数和票价因素。另一类是为了购物或办公等偶尔乘坐某条线路。这类人群，对几元的票价差不会很在意。所以，不会考虑票价因素。

综上所述，从乘客心理调查研究，乘客对票价的敏感程度及公交问询服务角度考虑，可以将查询者分成四类，如表1所示：

表1 查询者分类

	换乘次数	出行耗时	票价
人群一	敏感	次敏感	敏感
人群二	敏感	次敏感	不敏感
人群三	次敏感	敏感	敏感
人群四	次敏感	敏感	不敏感

3. 最佳路线选取原则：

本文依据人群分类确定四种最佳路线选取原则。

1） 在换乘次数最少的前提下出行耗时（含票价转化时间）最短；
2） 在换乘次数最少的前提下出行耗时（不含票价转化时间）最短；
3） 在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（含票价转化时间）最短。
4） 在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（不含票价转化时间）最短。

模型建立与求解

第一问：仅考虑公汽

符号说明：

1. H^1：上行线路站点信息矩阵。
2. H^2：下行线路站点信息矩阵。
3. A：线路之间的邻接矩阵。
4. C：票价信息矩阵。
5. t_p：票价转化时间函数。
6. $S(s,k)(k=1,2,...,n;n为正整数)$：站 s 所在的线路号。
7. $G(l,s_1,s_2)$：线 l 上站 s_1 到站 s_2 的站间隔。
8. t_0：出行耗时（单位：分钟）。

9. $\cos t$:全程所花费用（单位：元）。

10. $fei(i, s_1, s_2)$：i 号线上站 s_1 到站 s_2 的票价（单位：元）。

11. ZS^k：第 k 次换乘时的中转站集合。

12. zs^k：第 k 次换乘时的中转站。

13. $CirS$：环路起始站与始发站的站间隔。

14. $CirN$：环路总站数。

15. $C_{\max}$：乘客对换乘次数的承受上限。

模型准备：

1. 站点信息 H^1及H^2

为了记录每条线路上的站点信息，定义矩阵：

$$H^1 = [h^1_{ij}] 及 H^2 = [h^2_{ij}]$$

其中

$$h^1_{ij} = \begin{cases} 0 & 站点j不在i号上行线上 \\ m & 站点j是i号上行线的第m站 \end{cases}$$

$$h^2_{ij} = \begin{cases} 0 & 站点j不在i号下行线上 \\ m & 站点j是i号下行线的第m站 \end{cases}$$

2. 邻接矩阵 A

- 邻接矩阵的基本概念

邻接矩阵是图论中的重要理论，邻接矩阵和有向图之间有着一一对应的关系，即从邻接矩阵可以画出唯一的有向图，反之，根据有向图可以写出唯一的邻接矩阵．具体的讲，对于有 n个要素的系统$(p_1 p_2, \ldots, p_n)$，定义邻接矩阵A如下：

$$array = [a_{ij}]$$

式中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 当线段从p_i指向p_j时 \\ 0 & 没有线段从p_i指向p_j \end{cases}$$

- 公交线路系统邻接矩阵模型

假定某城市共有n条公交线路，可以把n条公交线路抽象为n个顶点，任意两条公交线路之间的联系取决两者之间有无交点(共同的停靠站点)，相应地该两条线路之间的矩阵元素值为1或者0，这样就把城市公交线路系统可以抽象为$n*n$邻接矩阵．可以借用邻接矩阵的特性和算法，来解决公交线路换乘问题．不失一般性，我们假定某城市有1路、2路、3路、4路这四条公交线路，组成的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

该矩阵表明，1路与2路有共同的停靠站点，1路和2路的各站点间最多经过1次换乘就可到达，1路与3路、4路没有共同的停靠站点，经过1次换乘无法到达．其他依次类推．邻接矩阵表示了公交线路系统各条公交线路之间的直接关系，也可称为直接关系矩阵，其特点是对角线上的值为1．通过对直接关系矩阵的计算，可以得到有关系统更多的信息．按布尔法则进行乘法和加法运算，即

$$0+0=0,\ 1+0=1,\ 1+1=1$$
$$0*0=0,\ 1*0=0,\ 1*1=1$$

可以得到：

$$A^2=A*A=\begin{bmatrix}1&1&0&1^{*}\\1&1&0&1\\1&1^{*}&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

A^2 中带“*”号的元素，表明换乘2次可以实现的公交线路的连通情况．同理可得：

$$A^3=A^2*A=\begin{bmatrix}1&1&0&1^{*}\\1&1&0&1\\1&1^{*}&1&1^{**}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

A^3 中带“**”号的元素，表明换乘3次可以实现的公交线路的连通情况．同理可得：

$$A^4=A^2*A=\begin{bmatrix}1&1&0&1^{*}\\1&1&0&1\\1&1^{*}&1&1^{**}\\0&0&0&1\end{bmatrix}=A^3$$

上式表明再计算下去，已没有意义，此矩阵称为可达矩阵，计算到此为止．矩阵中带“*”号的元素是原直接关系矩阵中所没有的，它反映出了系统要素间的间接关系．

一般的，我们可以得到可达矩阵R，

$$A^{r-2}\neq A^{r-1}=A^r=R,r<=n-1$$

该可达矩阵不仅反映了公交线路中直接换乘关系，而且反映了它们之间的多次换乘关系(间接关系)．

- 由站点信息矩阵确定邻接矩阵 A

初始化邻接矩阵 A 的所有元素为0。对站点信息矩阵 H^1 进行列扫描，如果存

在 $H[l_1][j]\neq 0$ 并且 $H[l_2][j]\neq 0$，则表明线路 l_1 与线路 l_2 有共同站点 j，所以 $A[l_1][l_2]=1$。扫描完毕后，即可得到邻接矩阵 A。

3. 票价信息矩阵 C

为了表示每条线路的票价信息，定义矩阵：

$$C=[c_i]$$

其中 $c_i=k(k=1,2,...,n;n$ 为票价方式的种类总数）

4. 票价转化时间函数

对于票价因素的考虑，我们参考文献[3]将其转化成时间。然后与出行耗时相加，选择相加结果最小的线路作为最佳路线。转化函数如下：

$$t_p=\frac{480ab}{c}$$

式中

a——法定年工作天数

b——票价

c——居民人年均收入

模型建立：

根据问题分析中的最佳路线选取原则，我们建立了优化模型。此问题涉及三个目标：换乘次数最少，出行耗时最少，票价最低。其中优先级最高的是换乘次数；其次是出行耗时；对于人群一，还需要考虑票价因素。

在本模型中，换乘次数作为约束条件来考虑，在满足换乘次输最少的情况下我们再优化出行耗时和票价。

- 约束条件：换乘次数最少。

记出发站为 s，目的站为 d。线路 l_s 经过出发站 s，线路 l_d 经过目的站 d。根据邻接矩阵 A^n 的含义，若出发站到目的站的实际最小换乘次数为 ZN，则约束条件为：

$$\begin{cases} A^{ZN}[l_s][l_d]=1 \\ A^{ZN\text{-}1}[l_s][l_d]=0 \\ H^1[l_s][s]\neq 0 \text{且} H^1[l_d][d]\neq 0 \text{或者} H^2[l_s][s]\neq 0 \text{且} H^2[l_d][d]\neq 0 \end{cases}$$

- 站间隔函数：

在已知站点信息 H^1 及 H^2 后，可知任何线路上两个站点的站间隔。例如：对于线路 x，欲知站点 j_1 到 j_2 的站间隔，只需计算 $H^1[x][j_2]-H^1[x][j_1]$，如果结果为负数，或者 $H^1[x][j_1],H^1[x][j_2]$ 至少有一个为0，则表明应该走线路 x 的下行线。重新计算

$H^2[x][j_1]-H^2[x][j_2]$ 作为站点 j_1到j_2 的站间隔。

需要注意的是，如果线路 x 是环线，则 $h_{xj}^1=h_{xj}^2$(其中j为站点号)。如果站点 i 是除了是线路 x 的第 m_1站还是第m_2 站且 $m_2>m_1$，则 $h_{xi}^1=h_{xi}^2=m_2$。

计算站点 j_1到j_2 的站间隔公式为

((出发站号－目的站号）+2*环路起始站与始发站的站间隔）%环路总站数

例如：对于环线 x^*：1—>2—>3—>4—>5----->2----->1。环路起始站为 2 号站，始发站为 1 号站，所以，环路起始站与始发站的站间隔为 1。环路 2—>3—>4—>5--->2 总站数为 4。又因为 2 号站既是第 2 站还是第 6 站，所以 $h_{x2}^1=h_{x2}^2=6$。

如果计算站 2 到站 3 的站间隔 $G(x^*,2,3)$，则 $G(x^*,2,3)=(6-3+2\times1)\%4=1$。而站 3 到站 2 的站间隔 $G(x^*,3,2)=(3-6+2\times1)\%4=3$。结果正确。

综上可得站间隔函数如下：

$$G(l,s_1,s_2)=\begin{cases}H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1], & H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1]>0 \text{and} H^1[l][s_1]\neq 0\\ H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1], & H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1]>0 \text{and} H^2[l][s_1]\neq 0\\ (H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1])+2*\text{CirS})\%\text{CisN}, & l\text{是环线}\end{cases}$$

其中，$CirS$ 是环路起始站与始发站的站间隔，$CirN$ 是环路总站数。

- 目标函数：
  - 出行耗时：

出行耗时=车内时间+换乘时间。对于车内时间的确定，我们需要知道每条线路上的起点和终点，以及站之间的行使时间。对于换乘时间，需要确定换乘方式和换乘次数。

对于第一问，由于只考虑公汽线路，而且题目中假设相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间)为 3 分钟；公汽换乘公汽平均耗时为 5 分钟。

所以得到出行耗时函数如下：

$$t_o=3*(G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+G(l_d,zs^{ZN},d))+5*ZN$$

  - 票价转化时间：

对应上边的出行耗时函数，全程所花费用函数如下：

$$\cos t=fei(l_0,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}fei(l_i,zs^i,zs^{i+1})+fei(l_{ZN},zs^{ZN},d)$$

所以，全程费用转化成时间为：

$$\mathrm{t_p}=\frac{480a\times\cos t}{c}$$

对于人群一，由于其对票价敏感，所以优化目标为： min （$\mathrm{t_o}$+$\mathrm{t_p}$）。

对于人群二，由于其对票价不敏感，所以优化目标为： min　$\mathrm{t_o}$。

为表示简洁，我们将人群一和人群二的优化目标合并为： min （$\mathrm{t_o}+\alpha\times\mathrm{t_p}$）

其中$\alpha=1$表示人群一，$\alpha=0$表示人群二。
综上所述，我们对人群一和人群二建立优化模型 1.1 如下：

$$\min\quad(\mathrm{t_o}+\alpha\times\mathrm{t_p})$$

$$st.\begin{cases}\mathrm{A}^{\mathrm{ZN}}[l_s][l_d]=1\\ \mathrm{A}^{\mathrm{ZN\text{-}1}}[l_s][l_d]=0\\ H^1[l_s][s]\neq 0 and H^1[l_d][d]\neq 0 or H^2[l_s][s]\neq 0 and H^2[l_d][d]\neq 0\\ t_o=3*(G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+G(l_d,zs^{ZN},d))+5*ZN\\ \cos t=fei(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}fei(l_i,zs^i,zs^{i+1})+fei(l_d,zs^{ZN},d)\\ \mathrm{t_p}=\dfrac{480a\times\cos t}{c}\\ \mathrm{zs^k}\in ZS^k\quad(\mathrm{k=1,2,...ZN})\\ G(l,s_1,s_2)=\begin{cases}H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1], & H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1]>0\mathrm{and}H^1[l][s_1]\neq 0\\ H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1], & H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1]>0\mathrm{and}H^2[l][s_1]\neq 0\\ (H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1])+2*\mathrm{CirS})\%\mathrm{CisN}, & l\text{是环线}\end{cases}\\ l_s,l_i,l_d\text{是1到520的正整数}\end{cases}$$

对于人群三和人群四，类似于人群一和人群二。令$\alpha=1$表示人群三，$\alpha=0$表示人群四。最小换乘次数的约束改为换乘次数小于乘客对换乘次数的承受上限$C_{\max}$最终建立模型 1.2 如下：

$$\min\quad(\mathrm{t_o}+\alpha\times\mathrm{t_p})$$

$$st.\begin{cases}\mathrm{ZN}\leq\mathrm{C_{max}}\\ H^1[l_s][s]\neq 0 and H^1[l_d][d]\neq 0 or H^2[l_s][s]\neq 0 and H^2[l_d][d]\neq 0\\ t_o=3*(G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+G(l_d,zs^{ZN},d))+5*ZN\\ \mathrm{zs^k}\in ZS^k\quad(\mathrm{k=1,2,...ZN})\\ G(l,s_1,s_2)=\begin{cases}H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1], & H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1]>0\mathrm{and}H^1[l][s_1]\neq 0\\ H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1], & H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1]>0\mathrm{and}H^2[l][s_1]\neq 0\\ (H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1])+2*\mathrm{CirS})\%\mathrm{CisN}, & l\text{是环线}\end{cases}\\ l_s,l_i,l_d\text{是1到520的正整数}\end{cases}$$

算法描述：

首先根据每条线路上的站点信息得到H^1和H^2矩阵，由H^1和H^2矩阵得到线路的邻接矩阵。继而可得到在一定换乘次数的前提下，任何一个出发站到目的站的所有路径。最后根据站之间行驶时间，换乘时间及相关线路的票价方式可得到对应不同人群的最佳路径。

模型 1.1 的算法 a.1 具体流程描述如下：

Step1：得到描述每条线路站点信息的矩阵H^1及H^2。

Step2：根据矩阵H^1及H^2得到邻接矩阵A。

Step3：找到出发站s所在的线路号$S(s,k)(k=1,2,...,n;n\text{为正整数})$及目的站所在的线路号$S(d,l)(l=1,2,...,m;m\text{为正整数})$。

Step4：如果存在l_0，$l_0 \in S(s,k)\text{且}l_0 \in S(d,l)$，使得$H[l_0][s] \neq 0$并且$H[l_0][d] \neq 0$。则出发站和目的站存在直达线路$l_0$。转 Step7。

Step5：如果存在$i \in S(s,k), j \in S(d,l)$使得$A[i][j]=1$，则出发站和目的站存在一次转乘路径。求得中转站集合：

$$ZS^1=\{zs^1 \mid H^1[i][zs^1] \neq 0\text{且}H^1[j][zs^1] \neq 0\text{或}H^2[i][zs^1] \neq 0\text{且}H^2[j][zs^1] \neq 0\}$$

转 Step7。

Step6：计算$A^n[i][j]$，幂n从 2 开始每次加 1，直到存在$i \in S(s,k), j \in S(d,l)$使得$A^n[i][j]=1$。则最少换乘次数为$n$，记换乘路线集为$R=\{l_1 l_2,...,l_n\}$。其中$l_k$满足$A^{n-k-1}[i][l_{n-k}]=1\text{且}A^{k+1}[l_{n-k}][j]=1(k=0,1,...,n-1)$。再依次按照 Step5 中求中转站集合的方法依次求出$l_k l_{k+1}(k=1,2,...,n)$的中转站集合ZS^k。

Step7：利用得到的换乘次数最少的线路方案，票价信息矩阵及中转站集合计算出每个线路方案所耗时间，选择耗时最少的方案作为最佳路径。

模型 1.2 的算法 a.2 具体流程描述如下：

Step1 至 Step5 以及 Step7 同算法 a.1。Step6 修改如下：

Step6：计算$A^n[i][j]$，幂n从 2 开始每次加 1 直到$n=C_{\max}$。对所有成功路线的换乘次数n，记换乘路线集为$R=\{l_1 l_2,...,l_n\}$。其中l_k满足$A^{n-k-1}[i][l_{n-k}]=1$ 且$A^{k+1}[l_{n-k}][j]=1$ $(k=0,1,...,n-1)$。再依次按照 Step5 中求中转站集合的方法依次求出$l_k l_{k+1}(k=1,2,...,n)$的

中转站集合 ZS^k 。

模型求解：

1、确定站点信息矩阵 H^1 及 H^2 。

根据附件中数据，得知公汽线路共 520 条，站点共 3957 个。所以，矩阵 H^1 及 H^2 各有 520*3957 个元素，属于稀疏矩阵，可采用数组直接存储也可采用三元组存储。虽然直接存储很占空间，但是，访问元素比用三元组存储要快。考虑到公交线路的查询应该在尽量短的时间内响应，所以，我们求解时采用直接存储。

2、邻接矩阵 A 。

按照模型准备中提到的方法，我们可由得到的站点信息矩阵 H^1 及 H^2 计算出邻接矩阵 A 。因为共 520 条线路，所以，矩阵 A 的大小为 520*520。

3、票价信息矩阵 C 。

观察附件 1.1.txt 中数据，得到票价方式共两种：分段计价及统一票价。所以票价信息矩阵C的元素 $c_i=\begin{cases}1 & \text{公汽线路i计价方式为统一票价}\\ 2 & \text{公汽线路i计价方式为分段计价}\end{cases}$

4、票价函数。

$$fei(i,s_1,s_2)=\begin{cases}1 & c_i=1 or c_i=2 and G(i,s_1,s_2)\le 20\\ 2 & c_i=2 and 21\le G(i,s_1,s_2)\le 40\\ 3 & c_i=2 and G(i,s_1,s_2)\ge 41\end{cases}$$

5、票价转化时间函数。

通过网上查询，法定年工作天数为 251 天。中国 2005 年城镇居民人年均收入为 10493 元。农村居民人年均收入为 3254.9 元，考虑到目前在中国，公交线路网只存在于城镇中，所以票价转化函数中的居民人年均收入取 10493 元。即

$$t_p=\frac{480\times 251\times \text{票价}}{10493}=11\times \text{票价}\ \text{（min）}$$

6、 C_{max} 的确定：

复杂的公交网络只存在于大中城市，而且在现在经济条件下，交通线路非常便利，一般某个地方到另一个地方均可以直达或转乘一次车，很少需要专程两次的。更极少存在某个地方到另一个地方需要转乘两次以上的。所以，实例求解时我们取 $C_{max}=2$ 。

7、算例结果：

根据算法描述及以上得到的信息，我们利用 MATLAB 进行实例求解。结果如下：

- 人群一：在换乘次数最少的前提下出行耗时（含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)	合成时间(分钟)
1	$S3359 \xrightarrow{L436} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ $S3359 \xrightarrow{L436} S1784 \xrightarrow{L217} S1828$	1	101	3	134
2	$S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L} S0481$ L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3	145
3	$S0971 \xrightarrow{L13} S2184 \xrightarrow{L417} S0485$	1	128	3	161
4	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$ S 可以是：S0291，S0491，S2683，S3614	1	83	2	105
	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L474} S0073$ S 可以是：S0400，S2633，S3053				
	$S0008 \xrightarrow{L355} S \xrightarrow{L345} S0073$ S 可以是：S2303，S3917				
	$S0008 \xrightarrow{L463} S2083 \xrightarrow{L57} S0073$				
5	$S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S \xrightarrow{L417} S0485$ S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3	139
6	$S0087 \xrightarrow{L454} S3496 \xrightarrow{L209} S3676$	1	65	2	87

- 人群二：在换乘次数最少的前提下出行耗时（不含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)
1	$S3359 \xrightarrow{L436} S1784 \xrightarrow{L167} S1828$ $S3359 \xrightarrow{L436} S1784 \xrightarrow{L217} S1828$	1	101	3
2	$S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L} S0481$ L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3
3	$S0971 \xrightarrow{L13} S2184 \xrightarrow{L417} S0485$	1	128	3
4	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$ S 可以是：S0291，S0491，S2683，S3614	1	83	2
	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L474} S0073$ S 可以是：S0400，S2633，S3053			

	$S0008 \xrightarrow{L355} S \xrightarrow{L345} S0073$ S 可以是：S2303，S3917			
	$S0008 \xrightarrow{L463} S2083 \xrightarrow{L57} S0073$			
	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$ S 可以是：S2559，S3315			3
	$S0008 \xrightarrow{L159} S2559 \xrightarrow{L464} S0073$			
5	$S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S \xrightarrow{L417} S0485$ S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3
6	$S0087 \xrightarrow{L454} S3496 \xrightarrow{L209} S3676$	1	65	2

- 人群三：在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)	合成时间(分钟)
1	$S3359 \xrightarrow{L} S2027 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$ L 可以是：L324，L469，L484 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792 $S3359 \xrightarrow{L} S2903 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$ L 可以是：L15，L123，L132，L352，L366，L436，L474 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792 $S3359 \xrightarrow{L1} S \xrightarrow{L27} S1784 \xrightarrow{L2} S1828$ L2 可以是：L167，L217 L1 与 S 对应关系： L484 对应 S1746，S2027，S3697，S3727 L324 对应 S2027 L15，L123，L132，L352，L366，L474 对应 S2903	2	73	3	106
2	$S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L} S0481$ L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3	145
3	$S0971 \xrightarrow{L} S1609 \xrightarrow{L140} S2654 \xrightarrow{L469} S485$ L 可以是：L13，L24，L94，L119，L263	2	106	3	139
4	$S0008 \xrightarrow{L43} S1383 \xrightarrow{L296} S2184 \xrightarrow{L345} S0073$ $S0008 \xrightarrow{L198} S \xrightarrow{L296} S2184 \xrightarrow{L345} S0073$ S 可以是：S1383，S1691，S3766	2	67	3	100
5	$S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S \xrightarrow{L417} S0485$ S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3	139
6	$S0087 \xrightarrow{L454} S3496 \xrightarrow{L209} S3676$	1	65	2	87

- 人群四：在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（不含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)
1	$S3359 \xrightarrow{L} S2027 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$ L 可以是：L324，L469，L484 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792	2	73	3
	$S3359 \xrightarrow{L} S2903 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$ L 可以是：L15，L123，L132，L352，L366，L436，L474 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792			
	$S3359 \xrightarrow{L1} S \xrightarrow{L27} S1784 \xrightarrow{L2} S1828$ L2 可以是：L167，L217 L1 与 S 对应关系： L484 对应 S1746，S2027，S3697，S3727 L324 对应 S2027 L15，L123，L132，L352，L366，L474 对应 S2903			
2	$S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L} S0481$ L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3
3	$S0971 \xrightarrow{L13} S2184 \xrightarrow{L417} S0485$	1	128	3
4	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$ S 可以是：S0291，S0491，S2683，S3614	1	83	2
	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L474} S0073$ S 可以是：S0400，S2633，S3053			
	$S0008 \xrightarrow{L355} S \xrightarrow{L345} S0073$ S 可以是：S2303，S3917			
	$S0008 \xrightarrow{L463} S2083 \xrightarrow{L57} S0073$			
	$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$ S 可以是：S2559，S3315			3
	$S0008 \xrightarrow{L159} S2559 \xrightarrow{L464} S0073$			
5	$S0148 \xrightarrow{L308} S0036 \xrightarrow{L156} S \xrightarrow{L417} S0485$ S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3
6	$S0087 \xrightarrow{L454} S3496 \xrightarrow{L209} S3676$	1	65	2

结果分析：

由对人群一和人群二的求解结果可知，公汽经过的线路，其票价相差较小，但时间相差较大。分析原因，由于经过的站越多，耗时就越大，票价也只增不减。但票价增长的速率远小于时间增长的速率，所以优化时间是合理的。

对于耗时相同，但票价有差异的路线，例如第 4 组，同时优化时间和票价也是有意

义的。

分析对人群三和人群四的求解结果，与相应的人群一和人群二的解对比可知，当增加换乘次数时，第一、三、四组解的全程耗时（含票价转化时间）均减小了。其中，第一组解是路线耗时减小引起的，其余都是由路线耗时间和票价折中导致的。

查询者可以根据自己的需求选择不同的最佳线路。

第二问：同时考虑公汽和地铁线路

符号说明：

在第一问的基础上，增加两个符号说明。

1. $T_g(l_i)$：l_i 号线上站之间的平均行使时间（单位：分钟）。

2. $T_h(l_i,l_j)$：从 l_i 号线换乘到 l_j 号线上所花时间（单位：分钟）。

模型建立：

同时考虑公汽和地铁线路的情况下，我们仍然针对两类人群分别建立模型。

与仅考虑公汽的差别仅在于出行耗时的变化。因为相邻地铁站平均行驶时间与相邻公汽站平均行驶时间不同，且增加三种换乘方式：地铁换乘地铁；地铁换乘公汽；公汽换乘地铁。

为了得到出行所耗时间，我们建立如下两个函数：

- 站之间平均行使时间函数：

$$T_g(l_i)=\begin{cases}3 & l_i\text{是公汽线}\\ 2.5 & l_i\text{是地铁线}\end{cases}$$

- 换乘时间函数：

$$T_h(l_i,l_j)=\begin{cases}5 & l_i,l_j\text{均是公汽线路}\\ 4 & l_i,l_j\text{均是地铁线路}\\ 7 & l_i,l_j\text{分别是地铁线路和公汽线路}\\ 6 & l_i,l_j\text{分别是公汽线路和地铁线路}\end{cases}$$

所以，出行耗时函数修改为

$$t_o=T_g(l_s)*G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_g(l_i)*G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+T_g(l_d)*G(l_d,zs^{ZN},d)$$
$$+T_h(l_s,l_1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_h(l_i,l_{i+1})+T_h(l_{ZN},l_d)$$

其他公式，第二问与第一问相同。

所以，针对人群一和人群二，建立模型 2.1 如下：

$$\min \quad (\mathrm{t_o}+\alpha\times \mathrm{t_p})$$

$$
st.\begin{cases}
\mathrm{A}^{\mathrm{ZN}}[l_s][l_d]=1 \\
\mathrm{A}^{\mathrm{ZN\text{-}1}}[l_s][l_d]=0 \\
H^1[l_s][s]\neq 0 and H^1[l_d][d]\neq 0 or H^2[l_s][s]\neq 0 and H^2[l_d][d]\neq 0 \\
t_o=T_g(l_s)*G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_g(l_i)*G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+T_g(l_d)*G(l_d,zs^{ZN},d) \\
\qquad +T_h(l_s,l_1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_h(l_i,l_{i+1})+T_h(l_{ZN},l_d) \\
T_g(l_i)=\begin{cases}3 & l_i\text{是公汽线} \\ 2.5 & l_i\text{是地铁线}\end{cases} \\
T_h(l_i,l_j)=\begin{cases}5 & l_i,l_j\text{均是公汽线路} \\ 4 & l_i,l_j\text{均是地铁线路} \\ 7 & l_i,l_j\text{分别是地铁线路和公汽线路} \\ 6 & l_i,l_j\text{分别是公汽线路和地铁线路}\end{cases} \\
\mathrm{cos}\,t=fei(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}fei(l_i,zs^i,zs^{i+1})+fei(l_d,zs^{ZN},d) \\
\mathrm{t_p}=\dfrac{480a\times \mathrm{cos}\,t}{c} \\
\mathrm{zs^k}\in ZS^k \quad (\mathrm{k=1,2,...ZN}) \\
G(l,s_1,s_2)=\begin{cases}H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1], & H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1]>0\mathrm{and}H^1[l][s_1]\neq 0 \\ H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1], & H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1]>0\mathrm{and}H^2[l][s_1]\neq 0 \\ (H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1])+2*\mathrm{CirS})\%\mathrm{CisN}, & l\text{是环线}\end{cases}
\end{cases}
$$

针对人群三和四，建立模型 2.2 如下：

$$\min \quad (\mathrm{t_o}+\alpha\times \mathrm{t_p})$$

$$st.\begin{cases} \mathrm{ZN}\le \mathrm{C_{max}} \\ H^1[l_s][s]\ne 0 and H^1[l_d][d]\ne 0 or H^2[l_s][s]\ne 0 and H^2[l_d][d]\ne 0 \\ t_o = T_g(l_s)*G(l_s,s,zs^1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_g(l_i)*G(l_i,zs^i,zs^{i+1})+T_g(l_d)*G(l_d,zs^{ZN},d) \\ \qquad +T_h(l_s,l_1)+\sum_{i=1}^{ZN-1}T_h(l_i,l_{i+1})+T_h(l_{ZN},l_d) \\ T_g(l_i)=\begin{cases}3 & l_i\text{是公汽线}\\ 2.5 & l_i\text{是地铁线}\end{cases} \\ T_h(l_i,l_j)=\begin{cases}5 & l_i,l_j\text{均是公汽线路}\\ 4 & l_i,l_j\text{均是地铁线路}\\ 7 & l_i,l_j\text{分别是地铁线路和公汽线路}\\ 6 & l_i,l_j\text{分别是公汽线路和地铁线路}\end{cases} \\ \mathrm{zs^k}\in ZS^k \quad (\mathrm{k=1,2,...ZN}) \\ G(l,s_1,s_2)=\begin{cases}H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1], & H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1]>0 \mathrm{and} H^1[l][s_1]\ne 0\\ H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1], & H^2[l][s_2]-H^2[l][s_1]>0 \mathrm{and} H^2[l][s_1]\ne 0\\ (H^1[l][s_2]-H^1[l][s_1])+2*\mathrm{CirS})\%\mathrm{CisN}, & l\text{是环线}\end{cases} \\ l_s,l_i,l_d\text{是1到520的正整数} \end{cases}$$

模型求解：

1、 确定站点信息矩阵 H^1及H^2 。

根据附件中数据，得知地铁线路共 2 条，地铁T_1,T_2线分别记为 521 号线和 522 号线，在模型一的两个站点信息矩阵中各增加两行。如果站点 s 与地铁站 d 对应，且地铁站 d 是线 $i(i=521 or 522)$ 上行线的第 m 站，则 $H^1[i][s]=m$ 。同理可补充下行线矩阵 H^2 的第 521 行和 522 行元素。

2、确定邻接矩阵 A 。

根据修改后的站点矩阵，修改邻接矩阵 A，行、列各增加两行，分别对应地铁线一和地铁线二。所以，邻接矩阵 A 大小变为 522*522。

3、确定票价信息矩阵 C 。

考虑地铁线路后，票价方式增加至三种：分段计价、公汽统一票价及地铁统一票价。所以票价信息矩阵C的元素 如下：

$$\mathrm{c_i}=\begin{cases}1 & \text{线路i为公汽线路且计价方式为统一票价}\\ 2 & \text{线路i计价方式为分段计价}\\ 3 & \text{线路i为地铁线路且计价方式为统一票价}\end{cases}$$

4、确定票价函数。

在第一问票价函数基础上增加地铁线路的票价计算。

$$fei(i,s_1,s_2)=\begin{cases}1 & c_i = 1 or c_i = 2 and G(i,s_1,s_2)\le 20\\ 2 & c_i = 2 and 21\le G(i,s_1,s_2)\le 40\\ 3 & c_i = 2 and G(i,s_1,s_2)\ge 41 \text{ or} c_i\text{=3}\end{cases}$$

5、算例结果：

问题二的算法流程与第一问相同，对题目中的六对站点进行求解，结果如下：

● 人群一：在换乘次数最少的前提下出行耗时（含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)	合成时间(分钟)
1	S3359 $\xrightarrow{\text{L436}}$ S1784 $\xrightarrow{\text{L167}}$ S1828 S3359 $\xrightarrow{\text{L436}}$ S1784 $\xrightarrow{\text{L217}}$ S1828	1	101	3	134
2	S1557 $\xrightarrow{\text{L363}}$ S1919 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S2424 $\xrightarrow{\text{L}}$ S0481 L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3	145
3	S0971 $\xrightarrow{\text{L13}}$ S2184 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485	1	128	3	161
4	S0008 $\xrightarrow{\text{L159}}$ S $\xrightarrow{\text{L58}}$ S0073 S 可以是：S0291，S0491，S2683，S3614 S0008 $\xrightarrow{\text{L159}}$ S $\xrightarrow{\text{L474}}$ S0073 S 可以是：S0400，S2633，S3053 S0008 $\xrightarrow{\text{L355}}$ S $\xrightarrow{\text{L345}}$ S0073 S 可以是：S2303，S3917 S0008 $\xrightarrow{\text{L463}}$ S2083 $\xrightarrow{\text{L57}}$ S0073	1	83	2	105
5	S0148 $\xrightarrow{\text{L308}}$ S0036 $\xrightarrow{\text{L156}}$ S $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485 S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3	139
6	S0087 $\xrightarrow{\text{T2}}$ S3676	0	35	3	68

● 人群二：在换乘次数最少的前提下出行耗时（不含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)
1	S3359 $\xrightarrow{\text{L436}}$ S1784 $\xrightarrow{\text{L167}}$ S1828 S3359 $\xrightarrow{\text{L436}}$ S1784 $\xrightarrow{\text{L217}}$ S1828	1	101	3
2	S1557 $\xrightarrow{\text{L363}}$ S1919 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S2424 $\xrightarrow{\text{L}}$ S0481 L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3

<table>
<tr><td>3</td><td>$S0971 \xrightarrow{L13} S2184 \xrightarrow{L417} S0485$</td><td>1</td><td>128</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">4</td><td>$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$
S 可以是：S0291，S0491，S2683，S3614</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="6">83</td><td rowspan="4">2</td></tr>
<tr><td>$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L474} S0073$
S 可以是：S0400，S2633，S3053</td></tr>
<tr><td>$S0008 \xrightarrow{L355} S \xrightarrow{L345} S0073$
S 可以是：S2303，S3917</td></tr>
<tr><td>$S0008 \xrightarrow{L463} S2083 \xrightarrow{L57} S0073$</td></tr>
<tr><td>$S0008 \xrightarrow{L159} S \xrightarrow{L58} S0073$
S 可以是：S2559，S3315</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>$S0008 \xrightarrow{L159} S2559 \xrightarrow{L464} S0073$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$S0148 \xrightarrow{L24} S1487 \xrightarrow{T1} S466 \xrightarrow{L51} S0485 \pm$
$S0148 \xrightarrow{L24} S1487 \xrightarrow{T1} S464 \xrightarrow{L} S0485$
L 可以是：L104，L395，L469</td><td>2</td><td>87.5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$S0087 \xrightarrow{T2} S3676$</td><td>0</td><td>35</td><td>3</td></tr>
</table>

- 人群三：在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（含票价转化时间）最短。

<table>
<tr><th></th><th>最优线路</th><th>换乘次数</th><th>线路耗时(分钟)</th><th>票价(元)</th><th>合成时间(分钟)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>$S3359 \xrightarrow{L} S2027 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$
L 可以是：L324，L469，L484
S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">73</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">106</td></tr>
<tr><td>$S3359 \xrightarrow{L} S2903 \xrightarrow{L201} S \xrightarrow{L41} S1828$
L 可以是：L15，L123，L132，L352，L366，L436，L474
S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792</td></tr>
<tr><td>$S3359 \xrightarrow{L1} S \xrightarrow{L27} S1784 \xrightarrow{L2} S1828$
L2 可以是：L167，L217
L1 与 S 对应关系：
L484 对应 S1746，S2027，S3697，S3727
L324 对应 S2027
L15，L123，L132，L352，L366，L474 对应 S2903</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$S1557 \xrightarrow{L363} S1919 \xrightarrow{L417} S2424 \xrightarrow{L} S0481$
L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254</td><td>2</td><td>112</td><td>3</td><td>145</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$S0971 \xrightarrow{L} S1609 \xrightarrow{L140} S2654 \xrightarrow{L469} S485$
L 可以是：L13，L24，L94，L119，L263</td><td>2</td><td>106</td><td>3</td><td>139</td></tr>
</table>

4	S0008 $\xrightarrow{L43}$ S1383 $\xrightarrow{L296}$ S2184 $\xrightarrow{L345}$ S0073 S0008 $\xrightarrow{L198}$ S $\xrightarrow{L296}$ S2184 $\xrightarrow{L345}$ S0073 S 可以是：S1383，S1691，S3766	2	67	3	100
5	S0148 $\xrightarrow{L308}$ S0036 $\xrightarrow{L156}$ S $\xrightarrow{L417}$ S0485 S 可以是：S2210，S3332，S3351	2	106	3	139
6	S0087 $\xrightarrow{T2}$ S3676	0	35	3	68

- 人群四：在换乘次数少于心理承受上限的前提下，出行耗时（不含票价转化时间）最短。

	最优线路	换乘次数	线路耗时(分钟)	票价(元)
1	S3359 $\xrightarrow{L}$ S2027 $\xrightarrow{L201}$ S $\xrightarrow{L41}$ S1828 L 可以是：L324，L469，L484 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792 S3359 $\xrightarrow{L}$ S2903 $\xrightarrow{L201}$ S $\xrightarrow{L41}$ S1828 L 可以是：L15，L123，L132，L352，L366，L436，L474 S 可以是：S458，S1671，S1783，S1790，S1792 S3359 $\xrightarrow{L1}$ S $\xrightarrow{L27}$ S1784 $\xrightarrow{L2}$ S1828 L2 可以是：L167，L217 L1 与 S 对应关系： L484 对应 S1746，S2027，S3697，S3727 L324 对应 S2027 L15，L123，L132，L352，L366，L474 对应 S2903	2	73	3
2	S1557 $\xrightarrow{L363}$ S1919 $\xrightarrow{L417}$ S2424 $\xrightarrow{L}$ S0481 L 可以是：L516，L460，L447，L312，L254	2	112	3
3	S0971 $\xrightarrow{L94}$ S567 $\xrightarrow{T1}$ S466 $\xrightarrow{L51}$ S485 S0971 $\xrightarrow{L94}$ S567 $\xrightarrow{T1}$ S464 $\xrightarrow{L}$ S485 L 可以是：L104，L395，L469 S0971 $\xrightarrow{L119}$ S567 $\xrightarrow{T1}$ S466 $\xrightarrow{L51}$ S485 S0971 $\xrightarrow{L119}$ S567 $\xrightarrow{T1}$ S464 $\xrightarrow{L}$ S485 L 可以是：L104，L395，L469	2	96	5
4	S0008 $\xrightarrow{L}$ S3874 $\xrightarrow{T2}$ S522 $\xrightarrow{L525}$ S0073 L 可以是：L150，L259	2	55	5
5	S0148 $\xrightarrow{L24}$ S1487 $\xrightarrow{T1}$ S466 $\xrightarrow{L51}$ S0485± S0148 $\xrightarrow{L24}$ S1487 $\xrightarrow{T1}$ S464 $\xrightarrow{L}$ S0485 L 可以是：L104，L395，L469	2	87.5	5
6	S0087 $\xrightarrow{L21}$ S630 $\xrightarrow{T2}$ S3676	1	33	4

结果分析：

对于人群一和人群二的求解结果，分析前 1-4 组，问题一、二的相应解均相同。

分析第 5 组，乘客可以换乘地铁 T1，换乘 2 次，耗时 87.5 分钟，全程票价为 5 元；

问题 1 第 5 组结果：仅通过公汽线路，换乘 2 次，耗时 106 分钟，全程票价 3 元。

两者比较，可知，换乘地铁节省时间，但票价较贵。所以，可以针对不同的乘客提交不同的结果（考虑票价或不考虑票价）。

分析第 6 组，乘客可以通过地铁线 T2 直达，耗时 35 分钟，全程票价 3 元；

问题 1 第 6 组结果：仅通过公汽线路，换乘 1 次，耗时 65 分钟，全程票价 2 元。

两者比较，可知，乘地铁节省半小时，而且不需换乘，而仅比公汽线路贵 1 元，乘客选择地铁直达比较方便。当然，选择因人而异。

由此看来，模型选择换乘次数，线路耗时，票价为优化目标，以及针对不同乘客对优化目标的敏感度提供多种结果，使模型更加完善，更加合理。

分析人群三的求解结果，与人群一的相应解对比可知，当增加换乘次数时，第一、三、四组解的路线耗时均减小了，一、三组减少了大约半小时，四组减少较小。

分析人群四的求解结果，与人群二的相应解对比可知，当增加换乘次数时，第一、三、四、六组解的路线耗时均减小了，一、三、四组减少了大约半小时，原因是可以换乘地铁。

结果表明，查询者不同的需求对应不同的最佳线路。公交查询系统可以满足不同查询者的需求。

第三问：考虑公汽和地铁线路及步行时间

问题分析：

若考虑站之间的步行时间，则乘客有两种途径到达终点站：

1) 由中转站乘车到达终点站；
2) 由中转站步行到达终点站。

此时，仍以换乘次数最少为第一优化目标函数，以耗时最短为第二优化目标函数。

两种途径的耗时函数分别为：

1) 起始站到达中转站的最短耗时+公交行驶时间+公交票价转换成的时间+该换乘方式对应的平均耗时；
2) 起始站到达中转站的最短耗时+步行到达终点站的时间。

所以只需对两种途径的所有可能线路查找耗时最短的一条即可。

符号说明：

1. 初始时间矩阵 T： 元素 t_{ij} 表示由 i 到 j 所有直达路径中的耗时最短的路线所用的时间；
2. 步行时间矩阵 H： 元素 h_{ij} 表示由 i 到 j 步行所用的时间；
3. 路径阻抗矩阵 M^*： m^*_{ij} 表示由 i 到 j 的最少耗时，可以是直达线路或换乘线路；
4. 路径存储矩阵 R^*： 最少耗时路线，用"&"表示步行，用"%"表示乘车；
5. 路径阻抗值 M： 由要求的始发站到终点站的最少耗时；
6. 路径存储值 R： 由要求的始发站到终点站的最优路线；

7. 票价函数 $C(r)$：　　票价有三类：地铁，单一票价公汽，分段计价公汽，对应的票价 $C(r)$ 分别为 3 元，1 元，1 元或 2 元或 3 元（与公汽行驶经过的站点数有关）；

8. 换乘平均耗时 t_p：　4 种换乘方式分别为：公汽—>公汽，地铁—>地铁，地铁—>公汽，公汽—>地铁，分别对应 5 分钟，4 分钟，7 分钟，6 分钟；

9. 站点总数 n：　　包括公汽站和地铁站。

10. 票价转换时间系数 ct：　参数定义见问题 1 分析。

模型建立：

设起始站为 A，终点站为 B。

建立如下动态规划模型：

1．阶段 y：由 A 经过 y 次换乘到达各站；

2．阶段 y 的状态：由 A 经过 y 次换乘到达的站点；

3．状态变量：由 A 经过 y 次换乘到达该状态即站点的最少时间，即 $i = A$ 时的 m_{ij}^*；

4．状态转移方程：依据问题分析，此处有两个状态转移方程，即两种途径的耗时函数最小化：

1) $Ttemp1 = \min\{m^*_{ik} + t_{kj} + ct \bullet c_{kj} + t_p \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$；

2) $Ttemp2 = \min\{m^*_{ik} + h_{kj} \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$

5．状态转移条件：换乘次数增加 1，由 A 经过一定换乘次数到达该状态的时间会减小，即 $m^*_{ij} > Ttemp1$ 或 $m^*_{ij} > Ttemp2$；

6.　目标函数：由 A 到 B 耗时最短的路线和时间。

为了降低复杂度，提高运算效率，提出如下优化准则：

优化准则：各阶段首先考虑 B 状态的状态转移，然后判断 M 是否有限，即 A 到 B 的最优路径是否确定，若否，才需考虑该阶段除 B 以外各状态的状态转移。

算法描述：

Step1：由给定的路线，建立初始时间矩阵 T，即查找出任意两站之间的最短直达时间。由给定的步行时间确定步行时间矩阵 H。对 M^* 与 M 初始化为 ∞，对 R^* 与 R 初始化为空。

Step2：将步行时间矩阵 H 赋值给路径阻抗矩阵 M^*，作为路径阻抗的初始值，并且，如果 $0 < m^*_{ij} < \infty$，即 i 到 j 步行可达，则令路径存储矩阵 R^* 元素 $r^*_{ij} = "\&j"$。

Step3：若 $M < \infty$，表示已经找到最优路线，则转 **Step5**。

若 $M = \infty$，表示还没有找到最优路线，则

求 $Ttemp1=\min\{m^*{}_{ik}+t_{kj}+ct\bullet c_{kj}+t_p \mid k=1,2,\cdots,n\}$，即增加一次换乘次数，并乘车到达终点的最短时间。包括公交行驶时间，公交票价转换成的时间，以及该换乘方式对应的平均耗时。其中，c_{kj} 由 k 到 j 所对应的路线由 $C(r)$ 求得，t_p 根据具体的换乘方式确定。

i 和 j 分别对应要求的初始站和终点站时，若 $m^*{}_{ij}>Ttemp1$ 且 $m^*{}_{ij}<\infty$，则将所求的最小值赋值给 $m^*{}_{ij}$ 与 M，并将 $r^*{}_{ik}$ 与"%j"串联存入 $r^*{}_{ij}$ 与 R；

若 $m^*{}_{ij}>Ttemp1$ 且 $m^*{}_{ij}=\infty$，则只将最小值赋值给 $m^*{}_{ij}$，将 $r^*{}_{ik}$ 与"%j"串联存入 $r^*{}_{ij}$；

若此时 $M<\infty$，则转 **Step5**，结束查找；否则，即 $M=\infty$，则进行以下操作：

对于非初始站和终点站，若 $m^*{}_{ij}>Ttemp1$，则将所求的最小值赋值给 $m^*{}_{ij}$，并将 $r^*{}_{ik}$ 与"%j"串联存入 $r^*{}_{ij}$.

Step4：若 $M<\infty$，表示已经找到最优路线，则转 **Step5**。

若 $M=\infty$，表示还没有找到最优路线，则

求 $Ttemp2=\min\{m^*{}_{ik}+h_{kj} \mid k=1,2,\cdots,n\}$，即先到达中转站，然后步行到达终点的最短时间。

i 和 j 分别对应要求的初始站和终点站时，若 $m^*{}_{ij}>Ttemp2$ 且 $m^*{}_{ij}<\infty$，则将 $Ttemp2$ 赋值给 $m^*{}_{ij}$ 与 M，并将 $r^*{}_{ik}$ 与"& j"串联存入 $r^*{}_{ij}$ 与 R；

若 $m^*{}_{ij}>Ttemp2$ 且 $m^*{}_{ij}=\infty$，则只将 $Ttemp2$ 赋值给 $m^*{}_{ij}$，将 $r^*{}_{ik}$ 与"& j"串联存入 $r^*{}_{ij}$；

若此时 $M<\infty$，则转 **Step5**，结束查找；否则，即 $M=\infty$，则进行以下操作：

对于非初始站和终点站，若 $m^*{}_{ij}>Ttemp2$，则将所求的最小值赋值给 $m^*{}_{ij}$，并将 $r^*{}_{ik}$ 与"& j"串联存入 $r^*{}_{ij}$.

Step5：若 $M<\infty$，表示已经找到最优路线，则查找结束。

若 $M=\infty$，表示还没有找到最优路线，则转 **Step3.**

模型及算法评价

模型评价：

1. 问题一中模型中数据结构的运用方便的表示了线路信息。应用邻接矩阵巧妙的对换乘次数进行了约束。利用站点信息矩阵可快速的计算出任何一条线路上任何两个站点之间的站间隔。
2. 问题二中的模型是问题一中模型的扩展，通过增加 l_i 号线上站之间的平均行驶时间函数以及从 l_i 号线换乘到 l_j 号线上所花时间函数，使得此优化模型具有广泛的实用

性，可以应用于各种公交网络。

3. 前两问题均针对四类人群求出最佳路线，满足了查询者的各种不同需求。
4. 模型三的基本思想是动态规划，但由于增加了优化准则，即最优解确定以后，不需要再对当前阶段的其余状态进行操作。这就降低了运算复杂度。

另外，该模型中需要预先存储$n \times n$维的矩阵（n为站点总数），例如初始时间矩阵，步行时间矩阵，路径阻抗矩阵，这就需要大量的存储空间。

但需要指出的是，该问题中设计的算法中单个最小路径阻抗的求解是两个$1 \times n$维的向量之间的加法运算，其复杂度不高。而且对于公交换乘次数最少为优化目标的模型，阶段数一般不会太大，以 1，2 居多。所以算法的总体复杂度大约为$2n$或$4n$。

算法评价：

针对问题一和问题二的优化模型，可用穷举法搜索出最佳路线，但是时间复杂度会很高，而公交线路选择的自主查询系统应该保证查询响应时间尽量快。

本文提出的算法站点信息矩阵和邻接矩阵可提前算出，对于任何出发站和目的站，此算法能够快速的求出最佳路线。但是由于数据量很大，对矩阵的存储需要占用很大空间。

模型改进

1. 对出行时间及票价因素的综合考虑我们可以采用多种方式，如分别对出行时间和票价分级量化再加权作为目标。
2. 建立以换乘次数、出行时间、票价为自变量的乘客满意度函数，从搜出的路径中选出乘客满意度最大的一条作为最佳路线。

参考文献

[1]杨新苗，王炜，马文腾. 基于GIS的公交乘客出行路径选择算法[J]. 东南大学学报，2000，30(6)：87-91.
[2]吴稼豪. 国外公交网络优化设计综述[J]. 系统工程，1986， 4 (3)： 22—26.
[3]何胜学，范炳全。公交网络最优路径求解算法. 交通运输工程与信息学报，第5卷第1期2007年3月
[4]宋兆基 徐流美，《Matlab 6.5 在科学计算中的应用》[M]，北京，清华大学出版社，2005
[5]姜启源，谢金星，叶俊。《数学模型》(第三版)[M].北京，高等教育出版社，2003
[6]韩中庚。《数学建模方法及其应用》[M]。北京，高等教育出版社，2003
[7]严蔚敏，吴伟民。《数据结构》。北京，清华大学出版社 1997