

2005 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛的题目是：_____ B 题 DVD 在线租赁 _____

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）：_____

所属学校（请填写完整的全名）：_____ 国防科学技术大学 _____

参赛队员（打印并签名）：1. _____ 李蓬蓬 _____

2. _____ 朱小满 _____

3. _____ 解 炜 _____

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：_____ 指导教师组 _____

日期：_____ 2005 年 9 月 19 日 _____

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2005 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

B 题 DVD 在线租赁

摘要

本文在 DVD 在线租赁背景下，对 DVD 的租赁与归还，网方的购买与分配以及需求预测等相关问题做了模型研究。

首先，对题中给出的表示会员对各 DVD 的偏爱程度的偏好指数进行修正，提出了绝对满意度和相对满意度的合理定义。

第一问是在预知市场需求的情况下，确定各 DVD 采购量的问题。本文首先建立了基于 DVD 租用次数限制的通用 (General Model) 模型 (GM)，结果见表 1。又从实际考虑，建立了以 Poission 过程模拟 DVD 归还过程的随机服务 (Random Server Model) 模型 (RS)，结果见表 2。

第二问是对现有 DVD 的一次性分配问题。本文建立了 0-1 整数线性规划模型 (BIP) 利用 Lingo 软件进行求解。得到所有会员的最大绝对满意度之和为 $E = 24746$ ，相对满意度 $\xi = 0.9165$ ，给出了前 30 名会员的 DVD 获得情况 (结果见正文)，并进一步给出 1000 个会员的个人相对满意度统计结果直方图。

第三问是多目标规划问题。本文结合抽样统计的相关知识，建立了 0~1 规划模型。在双目标规划的求解处理上，本文采取以满意度为限制条件，以碟的总量最小为目标进行规划的方式寻优，得出相对满意度与最小采购总量的关系曲线。以利润最大和满意度最大的为目标，推荐给网管一种相对满意度为 1，最小购买量为 3047 张 DVD 的具体采购方案 (结果见正文)。

针对第四问，本文重点讨论了 VIP 会员的存在问题，VIP 会员与普通会员的权重不同时的加权规划模型，和 VIP 会员有优先权情况下的分层规划模型，分别求出相关结果。还简单讨论了会员的信用度、邮递时间、租赁规则等实际问题。

本文建模的过程中，每个环节都尽量考虑实际情况，所以模型的实际应用性和扩展性很强。

表 1 GM 模型求解结果

DVD 名称		DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月 50%的人看到	正常估计	6250	3125	1563	782	313
	悲观估计	9000	4500	2250	1125	450
	乐观估计	5000	2500	1250	625	250
三个月 95%的人看到	正常估计	3959	1980	1032	516	198

表 2 RS 模型求解结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月 50%	5085	2543	1271	636	254
三个月 95%	3921	1961	981	490	196

1. 问题重述

在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员，对有兴趣的 DVD，在线提交订单，网站就会尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD，网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数和每次租赁的碟数有限制。会员归还后方可继续下次租赁。请考虑以下问题：

- 1) 通过问卷调查得到了愿意观看这些 DVD 的人数的比例。此外，历史数据显示，60%的会员每月租赁 DVD 两次，而另外的 40%只租一次。假设网站现有 10 万个会员，对表 1 中的每种 DVD 来说，应该，保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50%在一个月内能够看到该碟至少要准备贮备的张数，要求保证在三个月内至少 95%的想看的会员能够看到该 DVD。
- 2) 给出 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单，要求进行分配，使会员获得最大的满意度并且要具体列出前 30 位会员分别获得哪些 DVD。
- 3) 考虑表 2，从网站经营管理人员的立场出发，决定每种 DVD 的购买量，这些 DVD 分配要求，才能使一个月内 95%的会员得到他想看的 DVD，并且满意度最大？
- 4) 从网站经营管理人员的立场出发，在 DVD 的需求预测、购买和分配中等方面，明确提出相关问题，并建立相应的数学模型。

2. 问题分析

2. 1, 会员分类的定义

A 类会员：每月租赁 DVD 两次的会员；

B 类会员：每月租赁 DVD 一次的会员；

说明：两类会员可以没有严格的区分，在不同的月份同一会员的类别也可能改变，但是从整体上看，A 类会员和 B 类会员在总人数中的比率必须分别为 60% 和 40%。

2. 2 对同一张碟在一个月内允许被租借次数的两种不同理解。

我们经过查阅在线租赁网站，发现网上租赁有些是没有归还期限的（只要求保持每月交纳会员费，例如亚马逊网站的在线 DVD 租赁业务），即使有也是一个最后截止日期（从租赁之日起计算），没有明确要求在某一固定日期归还的。于是出现了两种不同的理解：

理解一：同一张碟在一个月内最多被允许租借两次。

该网站 60%的会员每月租赁 DVD 两次，另外的 40%只租一次，并且该网站租赁 DVD 碟处于一种供不应求的状态。给出如下假设：

假设，A 类会员在每月一号租借的碟十五号归还，再租借其他的碟到月底归还。

B 类会员在一号租借碟，到月底归还。

根据上述假设，可以认为一张碟在一个月内至多被租出两次。

理解二：同一张碟在一个月内允许被多次租借

从实际角度出发，为了充分利用现有资源，DVD 碟应该被允许被多次租借，即：碟一经归还，立即可以再次租出，考虑到网站商务的连续性，在任意 30 天内，每天都有现有碟租出和已租碟归还的操作。

我们可以考虑用正态函数来拟合会员借到碟后，归还碟的具体时间分布，进行计算机仿真求解。

同时，考虑到一个月中每天归还 DVD 的会员人数（以天为单位）是随机的。我们知道，假设 $N[t]$ 为时间 $[0, t]$ 内到达系统的顾客数，如果符合以下三个条件，

- (1) 平稳性：在 $[t, t + \Delta t]$ 内有一个顾客到达的概率为 $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$;
- (2) 独立性：任意两个不相交区间内顾客到达情况相互独立；
- (3) 普通性：在 $[t, t + \Delta t]$ 内多于一个顾客到达的概率为 $O(\Delta t)$;

则称 $\{N[t], t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程（文献[1]）。

从这个角度出发，也可认为每天归还 DVD 的会员人数为 Poisson 过程。

2.3 现有碟的分配问题

现有碟的一次性分配是一个大型的线性规划（LP）问题，我们建立 0-1 整数线性规划（Binary Integer Programming）模型(BIP)，利用规划软件 Lingo 求解。规划目标是使会员获得最大满意度。

既然是一个考虑到大型的规划问题，面向的是大量的会员，这里所谓的最大满意度应该理解为立足于会员总体讨论。

2.4 有关第三问的思考

本问是一个多目标规划问题，求解目标是 DVD 的总量最小和通过合理分配使会员满意度最高。

1. 会员看到碟的含义

题目中明确给出：每个会员每次租赁获得 3 张 DVD，意味着每个会员一次租到 3 张碟才算看到碟。但是我们注意到，题目中给出，网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。可见，网站应有一定的自主灵活性。

如果网站每次发货都必须是 3 张一次，同时算作会员看到一次。但是我们不保证每次所给的 3 张碟都是会员想看的新碟。我们只要保证其中至少一张符合要求，其他的不做要求（可以用旧碟代替），就可算作会员看到一次。

同时我们查阅到沃尔玛、Netflix 公司、Blockbuster 公司的在线租赁 DVD 的成熟的商业运作模式，我们得出结论：每次保证会员看到至少一张碟即可认为是该会员看到。

2. 保证一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD

认为只要保证给出的分配方案至少满足使想看到该碟的人中 95% 的能够看到想看的碟中至少一张即可。

3. 模型假设

1. 假设问卷调查，所得数据符合统计规律。
2. 假设邮寄时间可以忽略不计。
3. 假设不同会员对某一种 DVD 的喜好指数是相互独立的。

同一会员对不同种 DVD 的喜好指数也是相互独立的。

4. 假设 DVD 碟一经归还，立即租出。

解释：本网站租赁 DVD 碟处于一种供不应求的状态，故作此假设。

5. 假设 A 类会员在每月一号租借的碟十五号归还，再租借其他的碟到月底归还。

B 类会员在一号租借碟，到月底归还。

注：本假设不适用于 DVD 碟在一个月内允许被多次（大于 2 次）租借的情况。

6. 不同 DVD 的采购价格相同。

4. 变量说明与名词解释

全局变量：

E ……绝对满意度总和;

E_0 ……绝对满意度最大值;

ξ ……相对满意度;

q_{ij} ……题中所给表格2中，第*i*个会员对第*j*种DVD碟的偏好指数;

n_{ij} ……修正后的第*i*个会员对第*j*类DVD碟的偏好指数;

D_i ……需要采购的第*i*种碟片的数量; ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

M_i ……第*i*种碟在规定时限内的被租借的总次数;

局部变量：

第一问 RS 模型：

x_{ij} ……*B*类会员在第*j*天租借的第*i*种碟的数量总和;

y_{ij} ……本月租两次的人在第*j*天租借的第*i*种碟的数量总和;

$p(x_{jk})$ ……*B*类会员在第*k*天归还其在第*j*天租借的DVD的比率, ($j < k < j+60$)

$p(y_{jk})$ ……*A*类会员在第*k*天归还其在第*j*天租借的DVD的比率, ($j < k < j+30$)

第三问模型：

s_{ijk} ……*A*类会员*i*在第*k*次分配中租赁第*j*种碟($k = 1, 2$)

t_{ij1} ……*B*类会员*i*在第一次分配中租赁第*j*种碟

t_{ij2} ……*B*类会员*i*在第二次分配中租第*j*种碟

说明：以上三个变量均为 0 / 1 变量，租到为 1，未租到为 0。

d_A ……*A*类会员中没租到碟的人数;

d_B ……*B*类会员中没租到碟的人数;

第一次分配：从网站的立场出发，DVD 在一个月第一次被租借出，称之为网站方的对 DVD 的第一次分配。

第二次分配：一个月所有返还碟本月内再次被租借，称为网站方的第二次分配。

5. 模型的建立与求解

满意度的定义：**1，偏好指数的修正：**

题中给出的表示偏爱程度的数字越小表示会员的对该碟的偏爱程度越高，我们称之为偏好指数。

为了计算中排除偏好指数为 0 的情况的干扰。我们对题目中所给表格 2 作出如下处理，得到经过修正后的偏好指数：

偏好指数为 0 时，修正方程为 $n_{ij} = q_{ij}$

偏好指数不为 0 时，修正方程为 $n_{ij} = 11 - q_{ij}$

例如：

题目所给表格 2 中 C0025 号会员对 D003 号碟的偏好指数 $q_{25,3} = 8$ ，

那么修正后他对该碟的偏好指数为 $n_{25,3} = 11 - q_{25,3} = 3$

2，相对满意度的定义：
$$\xi = \frac{E}{E_0}$$

其中，E 表示绝对满意度总和; E_0 绝对满意度最大值;

1) 个人相对满意度：

个人绝对满意度 E：该名会员得到的所有 DVD 所对应的偏好指数之和。

个人绝对满意度最大值 E_0 ：

A 类会员： E_0 为该会员对各种碟的偏好指数中最大的六个数之和。

B 类会员： E_0 为该会员对各种碟的偏好指数中最大的三个数之和。

个人相对满意度：
$$\xi = \frac{E}{E_0}$$

2) 在具体的分配方案下，所有会员的总的相对满意度：

所有会员的绝对满意度总和 E：所有会员的个人绝对满意度之和。

所有会员的绝对满意度最大值 E_0 的求解见下解释：

经过对修正后偏好指数的数据统计，我们得出在所有会员中对自己有需求意向的碟的偏好指数从 10 到 1 出现的次数如下表：

满意度值	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
统计结果	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	791	582

第二问的求解是一个一次性分配问题，由于每个会员最多能租借到 3 张 DVD，那么每个会员都得到自己偏好指数排名前 3 位的碟时，总体满意度视为 1。

从宏观统计的角度，此时的总满意度最大值 $E_0 = 27000$

第三问的求解存在返还碟的再次分配的情况，由于有 60% 的碟会被返还，考虑到一个人不会重复租借同一种碟，同上分析：

$$\text{此时, } E_o = 60\% * \sum_1^{1000} (10+9+8+7+6+5) + 40\% * \sum_1^{1000} (10+9+8) = 37800$$

$$\text{最终: 所有会员的相对满意度为: } \xi = \frac{E}{E_o}$$

注：上述情况只符合宏观统计，分析题目所给表格 2 可知，并不是每一个会员在借 3 张碟时的最大偏好指数都能取到 27。

5. 1 第一问求解

模型一：基于 DVD 碟租用次数限制的通用（General Model）模型

根据问题分析可知，一张 DVD 在第一次被租借后，如果被归还，那么本月内可以有二个会员看到该碟。

给出如下模型：

$$2 * k * D_i + (1-k) * D_i = M_i$$

说明：k 表示在每月第一批次租借 D_i 碟的会员中，A 类会员所占比例， $(1-k)$ 表示 B 类会员所占比例， M_i 表示一个月内看到第 i 种碟的总人数。

模型求解：

1. 一个月内至少 50% 的会员看到 DVD1 的情况：

首先我们默认抽样调查符合统计规律。

$$M_1 = 20000 * 50\% = 10000$$

正常情况下，认为第一批租借碟的会员中，A 类占 60%，B 类占 40%，

即：k=0.6， $M_1=10000$ 时，带入求解得： $D_1 = 6250$ 张

从悲观估计的角度出发，在 20000 个会员中最多有 8000 个 B 类会员，认为都分布于 M_1 中，

即： $2 * D_1 = M_1 - 8000$ 解得： $D_1 = 9000$ 张

$$\text{此时: } k = \frac{8}{9}$$

从乐观估计的角度出发，上述 8000 个 B 类会员，认为都不分布于 M_1 中，

即： $2 * D_1 = M_1$ 解得： $D_1 = 5000$ 张

$$\text{此时: } k = 1$$

2. 保证三个月内至少 95% 的希望看到该碟的会员能够看到 DVD1 的情况：

由于 95% 的比例相当大，其中的两类会员的分布应该符合整体分布情况。

基于上文的假设，每个月月末所有租出的碟都返还回来，相当于每个月的情况都是独立并且等价的。

$$\text{易知: } 2 * k * D_i + (1 - k) * D_i = \frac{1}{3} * M_i$$

此时， M_i 表示三个月内看到第 i 种碟的总人数。

$k=0.6$ 时，代入解得： $D_1 = 3958.3 = 3959$ 张

按照上述思想，求得第一问的解为：

表 1 通用模型全解结果

DVD 名称		DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月 50% 的人看到	正常估计	6250	3125	1563	782	313
	悲观估计	9000	4500	2250	1125	450
	乐观估计	5000	2500	1250	625	250
三个月 95% 的人看到	正常估计	3959	1980	1032	516	198

由于该模型的求解基于几个很理想化的假设，我们考虑到从实际角度出发，为了充分利用现有资源，DVD 碟应该被允许被多次租借，才能保证网站商务的连续性，同时提高碟的利用率，使碟的准备量更小，为此我们给出随机服务模型。

5. 1. 2 随机服务模型 (Random Server Model) 简称 RS 模型。

有问题分析知每天归还 DVD 的会员人数 (以天为单位) 是随机的，是一个 Poission 过程。

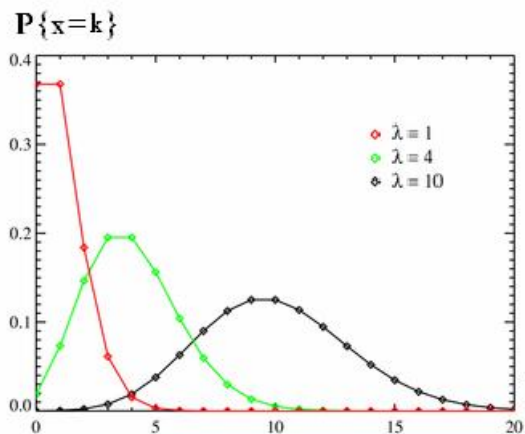
模型二. Poission 过程模拟每天归还 DVD 的会员人数 (以天为单位)。

λ 的估计：

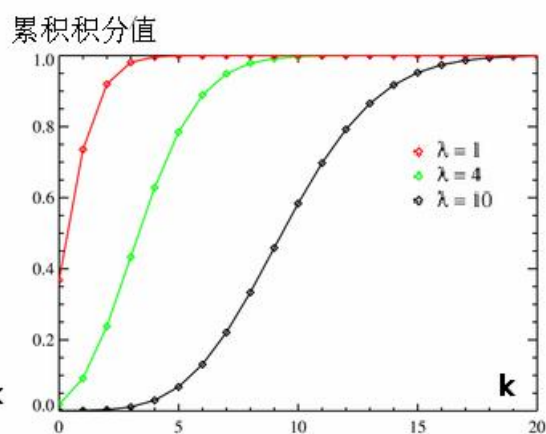
$$\text{Poission 分布: } P\{x=k\} = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^k}{k!} (k=0,1,2,\dots)$$

在 $(0, 2\lambda)$ 区间内累积积分值可近似为 1 ($\lambda \geq 3$) (文献 [1])。如图一所示：

泊松分布的概率密度函数图像



泊松分布的累积积分函数图像



图一

结合本题，作为一个统计性的规律，考虑到各个月之间的连贯性，一个月内借两次就是在 30 天内必须归还一次 (注：由于供不应求，我们假设 DVD 碟一经归还立即被租出)，就是在上述泊松函数的累积积分图像中，横坐标为 30 时积分值为 1。

即 $2\lambda = 30$ 得出 $\lambda = 15$
同理，一个月内借一次的情况， $\lambda = 30$

RS 模型的约束条件：

初始条件： $x_{i1} = D_i * 40\%$ $y_{i1} = D_i * 60\%$

随机模型约束： $p(x_{j,j+k}) = e^{-30} * 30^k / k!$

$$p(y_{j,j+k}) = e^{-15} * 15^k / k!$$

第 i 天借出的碟中符合不同约束模型的数目：

$$x_{ij} = 40\%(x_{ij} + y_{ij})$$

$$y_{ij} = 60\%(x_{ij} + y_{ij})$$

第 i 天租借出的数目等于该天归还的数目：

$$x_{ij} + y_{ij} = \sum_{n=1}^j x_{in} * p(x_{nj}) + \sum_{n=1}^j y_{in} * p(y_{nj}), (j = 2, 3, 4, \dots)$$

租借总人数的约束：

$$\sum_{j=1}^{30} (x_{ij} + y_{ij}) = M_i$$

上述约束条件描述了一个随机服务模型，随机主要体现在归还碟时间上的随机性，目标函数就是寻求某一 DVD 的准备量最小。

RS 模型： $\min D_i \quad (i=1,2,3,4,5)$

$$St. \begin{cases} p(x_{j,j+k}) = e^{-30} * 30^k / k! \\ p(y_{j,j+k}) = e^{-15} * 15^k / k! \\ x_{ij} = 40\%(x_{ij} + y_{ij}) \\ y_{ij} = 60\%(x_{ij} + y_{ij}) \\ x_{ij} + y_{ij} = \sum_{n=1}^j x_{in} * p(x_{nj}) + \sum_{n=1}^j y_{in} * p(y_{nj}), (j = 2, 3, 4, \dots) \\ \sum_{j=1}^{30} (x_{ij} + y_{ij}) = M \end{cases}$$

模型求解： 我们采用 C++编程(文献[7])求解。

表二 RS 模型求解结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月内 50%	5085	2543	1271	636	254
三个月内 95%	3921	1961	981	490	196

由于是基于一个随机的归还进行的求解，所以在此没有必要考虑所谓的悲观或者乐观情况，随机情况符合统计规律。

通过对比表一和表二中的数据可知，用随即服务模型可以有效的拟合实际情况，并且减少碟的准备量。

5. 2 第二问，现有碟分配(BIP 模型)

现有碟的一次性分配是一个大型的线性规划（LP）问题，我们建立 0-1 整数线性规划（Binary Integer Programming）模型(BIP)(文献[6])，在 0-1 型整数线性规划模型(BIP)中，

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \cdots \text{表示第 } i \text{ 个会员没有租借到第 } j \text{ 种碟;} \\ 1 \cdots \text{表示第 } i \text{ 个会员租借到第 } j \text{ 种碟;} \end{cases}$$

模型建立：

规划的目的是实现总体绝对满意度的最大

目标函数：

$$\max E = \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} m_{ij} * n_{ij}$$

由于本问是一个一次分配问题，最大可能满意度值 $E_0 = 27000$

租赁规则约束：

$$\sum_{j=1}^{100} m_{ij} \leq 3$$

每种 DVD 数量是有限的，题目已给出，

DVD 数量限制：

$$\sum_{i=1}^{1000} m_{ij} \leq D_i$$

综上所述：

BIP 模型

$$\max E = \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} m_{ij} * n_{ij}$$

$$St. \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} m_{ij} \leq D_i \\ \sum_{j=1}^{100} m_{ij} \leq 3 \end{cases}$$

模型求解：

求解中，我们采用 C++ 编程对数据进行处理，实现在 Lingo 中的相关矩阵的输入，然后进行大规模 BIP 问题的求解。

结果：所有会员的绝对满意度之和为 $E = 24746$

相对满意度： $\xi = E/E_0 = 24746/27000 = 0.9165$

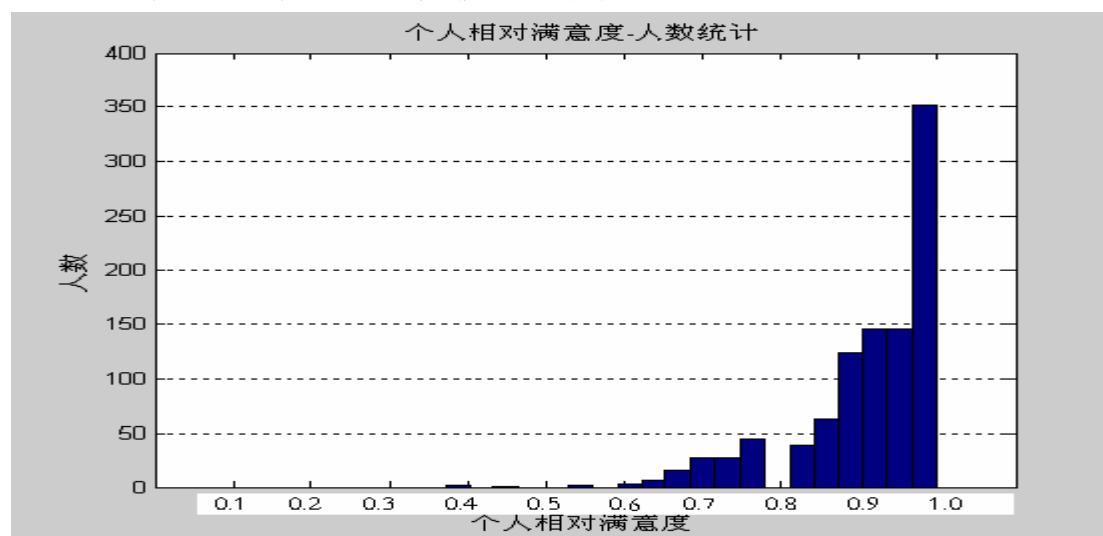
表三 最大满意度下前 30 名会员获得的 DVD 情况表

会员 编号	获得的 DVD 编	个人相 对满意	会员 编号	获得的 DVD 编号	个人相 对满意	会员 编号	获得的 DVD 编号	个人 相
----------	--------------	------------	----------	------------	------------	----------	---------------	---------

	号	度		度			对满 意度
C0001	8 41 98	0.814	C0011	59 63 66	0.963	C0021	45 50 53 0.926
C0002	6 44 62	0.963	C0012	2 31 41	0.852	C0022	38 55 57 1.0
C0003	32 50 80	0.963	C0013	21 78 96	1.0	C0023	29 81 95 1.0
C0004	7 18 41	1.0	C0014	23 52 89	0.889	C0024	37 41 76 0.963
C0005	11 66 68	1.0	C0015	13 52 85	0.926	C0025	9 69 81 0.963
C0006	19 53 66	0.963	C0016	10 84 97	0.963	C0026	22 68 95 1.0
C0007	26 66 81	0.852	C0017	47 51 67	1.0	C0027	50 58 78 0.778
C0008	31 71 X	0.630	C0018	41 60 78	1.0	C0028	8 34 X 0.704
C0009	53 78 100	1.0	C0019	66 84 86	0.963	C0029	26 30 55 0.963
C0010	41 55 85	0.815	C0020	45 61 89	1.0	C0030	37 62 98 0.926

注明：上述表格中，会员 C0008 和 C0028 只借到了两张想看到的碟，另外一张用 X 表示产生这一结果的原因是：在总满意度最大这一目标下，在已经分配到两张碟后，这两位会员有租借意愿的所有的碟都已经被分配完毕。但是还有其他的碟没有租借出，从这些碟中任意给会员 C0008 和 C0028 一人一张即可，对满意度没有贡献。

在本问求得的分配方案下，我们对每一名会员的个人相对满意度进行统计，1000 个会员的个人相对满意度统计结果见下图：



图二 会员的个人相对满意度统计结果

由图二可以看出，满意度大于 0.8 的人占绝大多数，因此，我们认为结果比较理想。

5. 3 第三问求解

5. 3. 1 抽样分析

在本题中，只能在已经确定 1000 名会员中两类会员的确切标号的前提下才能求解。经过初步的数据分析，我们发现，不同的碟各个几乎在各个方面的数据上都比较趋于一致。

我们采取随机抽样(文献[2])的方法，在 1000 名会员中随机抽取其中的 600 名，指定为 A 类会员，通过规划，求解此时的总体最大满意度。多次抽样将结

果进行比较，得出如下结论：

结论：在本问的相关约束下，当 DVD 的具体数量一定时，按照第一次分配的总量的 60% 的比例，任意指定 600 名会员归还所借的碟，总体最大满意度的变动非常小，可以认为不变。

下面给出两种抽样所得的数据对比：

表四

相对满意度	将前 600 个会员视为 A 类会员时的最小购碟量 $D_{前}$	将后 600 个会员视为 A 类会员时的最小购碟量 $D_{后}$	相对偏差 $(D_{后} - D_{前}) / D_{前}$
0.1	247	248	0.4%
0.2	490	489	-0.2%
0.261		*619	
0.263	*624		
0.3	764	763	-0.13%
0.4	1022	1017	-0.49%
0.5	1284	1286	-0.16%
0.6	1577	1538	-2.47%
0.7	1835	1835	0
0.8	2165	2164	-0.046%
0.9	2571	2572	0.039%
1.0	3047	3039	-0.26%

*值表示在该假设下，要保证一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD 所需的最小购碟量。

很容易看出，在不同的最大相对满意度（从 0.1 到 1.0）作为约束条件时，表中给出的两种差别很大的抽样分别对应的最小采购总量之间的相对偏差几乎可以忽略不计。由此可见，采取指定的方式，确定会员的类别，对总体最大满意度可以认为没有影响。

5.3.2 模型建立

基于以上结论，A 类会员在 1000 名会员中的不同分布情况跟总体最大满意度无关，只会影响到具体的不同的碟的数量分配。因此，我们制定编号在前 600 的会员均为 A 类会员。

本问是一个多目标规划问题，规划的目标是使 100 种碟的总量最小，同时要求满意最大，我们把满意度作为限制条件，通过在不同满意度条件下来求解碟的总量最小的方式实现求解：

$$\text{目标函数：} \min \sum_{i=1}^{100} D_i$$

$$\text{满意度限制：} \sum \sum s_{ij} \times n_{ij} + \sum \sum t_{xy} \times n_{xy} \geq E$$

所有的碟在第一次分配时都会借出：

$$\sum_{x=1}^c \sum_{i=1}^{100} t_{xi1} + \sum_{y=601}^{1000} \sum_{j=1}^{100} s_{yj1} = \sum_{k=1}^{100} D_k,$$

月中借出的碟不超过总碟的 60%:

$$\sum_{z=c+1}^{600} t_{zi2} + \sum_{y=601}^{1000} t_{yj2} \leq 60\% * \sum_{k=1}^{100} D_k;$$

每一个人每次最多租到三张碟:

$$\sum_{j=1}^{100} s_{ijk} \leq 3(k=1,2), \sum_{j=1}^{100} t_{ijk} \leq 3(k=1,2)$$

每个人在月内不会重复租同一张碟:

$$s_{ij1} \times s_{ij2} = 0$$

月内没租到碟的会员占总会员数的 5%:

$$d_A + d_B \leq 1000 * 5\%$$

其中,

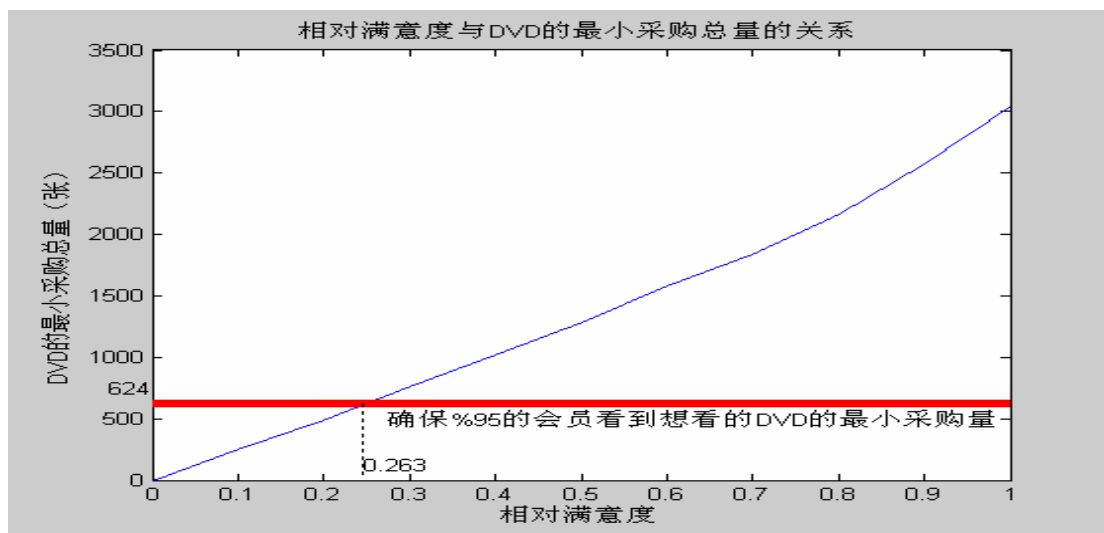
$$d_A = \sum_{y=601}^{1000} \prod_{k=1}^2 \prod_{j=1}^{100} (1 - s_{yjk})$$

$$d_B = \sum_{x=1}^c \prod_{i=1}^{100} (1 - t_{xi1}) + \sum_{x=c+1}^{400} \prod_{i=1}^{100} (1 - t_{xi2})$$

5. 3. 3 模型求解:

经过求解,发现 100 种 DVD 的总量只要大于 624,就可以保证至少存在一种合理的分配方案,使得至少 95%的会员能看到他们想看的 DVD。

通过给定的一系列绝对满意度限制,我们通过计算得出相对满意度与 DVD 最小采购总量的关系如图:



图三 相对满意度与 DVD 最小采购总量的关系图

从网站盈利最大化和尽量满足会员需求的角度出发,我们推荐给出上图中相对满意度为 1 时对应的 100 种 DVD 的购买量作为网络运营管理人员的参考:

表五 相对满意度为 1 时 100 种碟的具体采购方案 (总量为 3047 张)

26	34	32	35	27	27	29	30	34	27
30	32	27	29	24	37	31	30	34	32

32	28	24	28	27	30	26	22	28	34
30	32	34	28	37	34	27	29	28	32
45	37	27	34	39	28	30	26	31	30
35	29	32	26	30	37	30	29	32	35
25	25	31	40	30	39	30	34	35	34
34	33	27	30	26	23	25	32	27	33
31	20	24	24	30	29	34	25	27	30
35	30	29	30	34	24	34	31	22	32

说明：该表中数据的排列顺序为：第一行从左到右依次为第一到第十种碟的采购数量，以后各行依此类推。

在此种采购方案下，当相对满意度为 1 时，前 30 名会员分别获得的 DVD 的具体情况，见下表：

表六 前 30 名会员分别获得的 DVD 的具体情况

会员编号	获得的 DVD 编号	会员编号	获得的 DVD 编号	会员编号	获得的 DVD 编号
C0001	1 8 11 49 82 98	C0011	19 59 61 63 66 82	C0021	2 25 45 50 53 65
C0002	5 6 42 44 62 71	C0012	2 5 7 31 45 98	C0022	25 38 55 57 81 86
C0003	4 31 32 50 80 90	C0013	21 49 78 80 92 96	C0023	29 36 67 75 81 95
C0004	7 18 23 41 49 68	C0014	23 42 43 46 52 89	C0024	37 41 43 72 76 79
C0005	11 12 21 34 66 68	C0015	13 24 52 70 85 88	C0025	9 23 69 81 90 94
C0006	16 19 27 53 66 67	C0016	6 10 48 76 84 97	C0026	8 22 68 83 91 95
C0007	8 26 45 66 81 82	C0017	5 11 31 47 51 67	C0027	6 22 38 42 50 58
C0008	15 17 31 35 71 99	C0018	12 17 41 60 78 81	C0028	8 34 46 47 57 82
C0009	10 17 53 70 78 100	C0019	25 66 67 84 86 90	C0029	26 30 33 44 55 89
C0010	5 41 55 60 67 85	C0020	18 33 40 45 61 89	C0030	1 37 62 70 84 98

5. 4 在需求预测、购买和分配中值得研究的一些重要问题

我们注意到，现实中的网站往往是有会员等级制度的，VIP（very important person）会员与普通会员相比，资格更老，贡献更大，对网站的生存更加重要，网站应当在各个环节给予更多地照顾。

观察第二问的分配方案，我们发现会员 C008 和 C028 的个人满意度仅为 63.0%和 70.4%，比其他大部分的会员低很多，这就相当于牺牲了 C008 和 C028 的利益而保全了其他会员的利益，在会员彼此无差别，即会员不分等级的情况下，这样做自然没什么问题，如果他们是 VIP 会员呢？

5. 4. 1 资源分配环节引入 VIP 会员后的模型

我们通过多目标规划中经常用到的修改目标函数[文献(4)]的方法，将 VIP 机制引入到第二问建立的 0-1 整数规划模型，从而解决在有会员等级制度的情况下 DVD 的分配问题。

假设编号前 500 的会员（C001~C500）为 VIP 会员。租赁规则、现有各 DVD 数量及各会员的需求均与第二问同。

加权规划模型：

将第二问模型的目标函数改为普通会员(G)的满意度与 VIP 会员(V)的满意度之和，即

$$\max E = \sum G_{xi} \times n_{xi} + \sum P \times V_{yj} \times n_{yj}, x \neq y$$

其中 G、V 为 0~1 变量，对应普通会员和 VIP 会员是否获得相应的 DVD，P 为 VIP 会员满意度的权重，可根据现实情况，如经验、印象、统计规律来确定。比如，以往的统计数据显示，一个 VIP 会员给网站带来的收益相当于两个普通会员带来的收益，则可设普通会员的满意度权重为 1，VIP 会员的满意度权重为 2，

该目标函数的其他约束条件与第二问中 **BIP** 模型同：我们解得 DVD 的分配方案为：

表七 加权规划模型求解的前 30 名 VIP 会员获得 DVD 的方案

会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度	会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度	会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度
C0001	8 11 98	92.6%	C0011	59 63 66	96.3%	C0021	45 50 53	92.6%
C0002	6 44 62	96.3%	C0012	2 7 31	100%	C0022	38 55 57	100%
C0003	32 50 80	96.3%	C0013	21 78 96	100%	C0023	29 81 95	100%
C0004	7 18 41	100%	C0014	23 43 52	100%	C0024	37 41 76	96.3%
C0005	11 66 68	100%	C0015	13 52 85	92.6%	C0025	9 69 94	100%
C0006	19 53 66	96.3%	C0016	10 84 97	96.3%	C0026	22 68 95	100%
C0007	8 26 81	100%	C0017	47 51 67	100%	C0027	22 50 58	92.6%
C0008	31 35 71	85.2%	C0018	41 60 78	100%	C0028	8 34 82	100%
C0009	53 78 100	100%	C0019	66 84 86	96.3%	C0029	26 30 55	96.3%
C0010	55 60 85	100%	C0020	45 61 89	100%	C0030	37 62 70	96.3%

与第二问的表三中相比较，前 30 名（VIP）会员的个人满意度有大幅度提高，这说明用加权的方式修改了目标函数后，模型对解决有会员等级制度的情况下 DVD 的分配问题是有效的。

分层规划模型：

在很多情况下，如果把 VIP 会员的满意度与普通会员的满意度联系起来考虑，权重是难于确定的。那么就不如把两类会员满意度看作问题的两个方面，分开考虑，分层作规划，给予 VIP 会员优先权，在确保 VIP 会员满意度最高的情况下，使普通会员的满意度尽可能高。具体说来，就是以 VIP 会员总的满意度：

$$\max E_1 = \sum V_{yj} \times n_{yj}, x \neq y,$$

为第一层规划的目标函数，把求得的解作为第二层规划的约束条件，再以普通会员总的满意度：

$$\max E_2 = \sum G_{xi} \times n_{xi}, x \neq y$$

为第二层规划的目标函数，从而求得整个分配方案。

通过第一层规划，我们解得前 30 名会员的 DVD 分配方案为：

表八 分层规划模型求解的前 30 名 VIP 会员获得 DVD 的方案

会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度	会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度	会员编号	获得的 DVD 编号	个人相对满意度

C0001	8 82 98	100%	C0011	19 59 63	100%	C0021	2 45 53	96.3%
C0002	6 44 62	96.3%	C0012	2 7 31	100%	C0022	38 55 57	100%
C0003	4 50 80	100%	C0013	21 78 96	100%	C0023	29 81 95	100%
C0004	7 18 41	100%	C0014	23 43 52	100%	C0024	37 41 76	96.3%
C0005	11 66 68	100%	C0015	13 52 85	92.6%	C0025	9 69 94	100%
C0006	16 19 53	100%	C0016	10 84 97	96.3%	C0026	22 68 95	100%
C0007	8 26 81	100%	C0017	47 51 67	100%	C0027	22 42 58	100%
C0008	31 35 71	85.2%	C0018	41 60 78	100%	C0028	8 34 82	100%
C0009	53 78 100	100%	C0019	66 84 86	96.3%	C0029	30 44 55	100%
C0010	55 60 85	100%	C0020	45 61 89	100%	C0030	1 37 62	100%

分层规划求得的分配方案与加权规划的相比，VIP 会员 C001~C030 的满意度又有了更大的提高。

两种模型之间的联系：

当随着权重 P 的增大，两种方法求得的解将越来越接近，其实分层规划就是极限情况下的加权规划。

若设 $f_1(G, V, n, P)$ 为加权法规划出的目标函数值， $f_2(G, V, n)$ 为层次规划法解出的目标值，则有：
$$f_2(G, V, n) = \lim_{P \rightarrow +\infty} f_1(G, V, P, n)。$$

注意：此处的等号表示规划上的等价，而非数值上的相等，

多等级规划模型：

当会员等级有更多的分类时，处理方法与上完全类似，不再赘述。

邮寄时间：

第一问的模拟中，我们假设邮政系统的效率足够高，即 DVD 寄去与寄回都可以在一天的时间里完成。但这一假设显然与实际情况有差距，沃尔玛、netflix、blockbuster 美国这三家大的网上影片租赁公司，均只承诺，预订后三天内顾客可收到 DVD。并且，容易想象对于不同的邮寄距离，邮件到达的时间也不相同。所以，在第一问的建模中，应当引入邮寄时间变量 t ，并考虑其分布，用计算机生成大量随即数 t 进行仿真，以 monte carlo 方法模拟，从而得到最少储碟量与保证百分之几的需求者可看到该 DVD 的对应关系，解决第一问。

网络下载：

可考虑以网络下载的方式取代邮寄方式，这样既可以避免 DVD 邮寄过程中的磨损，又可以方便订购者更快的看到想看的电影，还可以资源共享，一碟多人看，一举多得。

DVD 的价格：

第三问在各 DVD 采购数量的规划上，我们按照经济性原则，以 DVD 总购买量最小为目标进行规划，这是基于各 DVD 价格相同的前提，现实中应当以各 DVD 的价格为权重，与其购买量相乘，再对 100 类 DVD 总体求和，以此为目标规划，这才是真正符合经济性原则的。

租赁规则：

题设中的租赁规则为会员一月内只可租借两次，且每次限定三张，这与实际中网上影片租赁公司的运营模式很不相符。现实中各公司在线租赁影片都采取如下方式，即：在因特网上选择并订购你想观看的影片，3 天以内你就能收到第一张想看的 DVD 光碟，当你把 DVD 用预付费的信封寄会以后，网方就会按照你预订的顺序把下一部影片寄给你。对于不同的预订计划你可以同时保留 2~8 部影片。与现实中普遍采取的租赁规则相比，题设规则对于每月租赁次数和每次租赁碟数的限制同时也限制了会员消费，从而影响网站的经济利益。一次租赁三张的方式对于网方来说具有更高的风险性，也对会员的信誉提出了要求。

会员信誉：

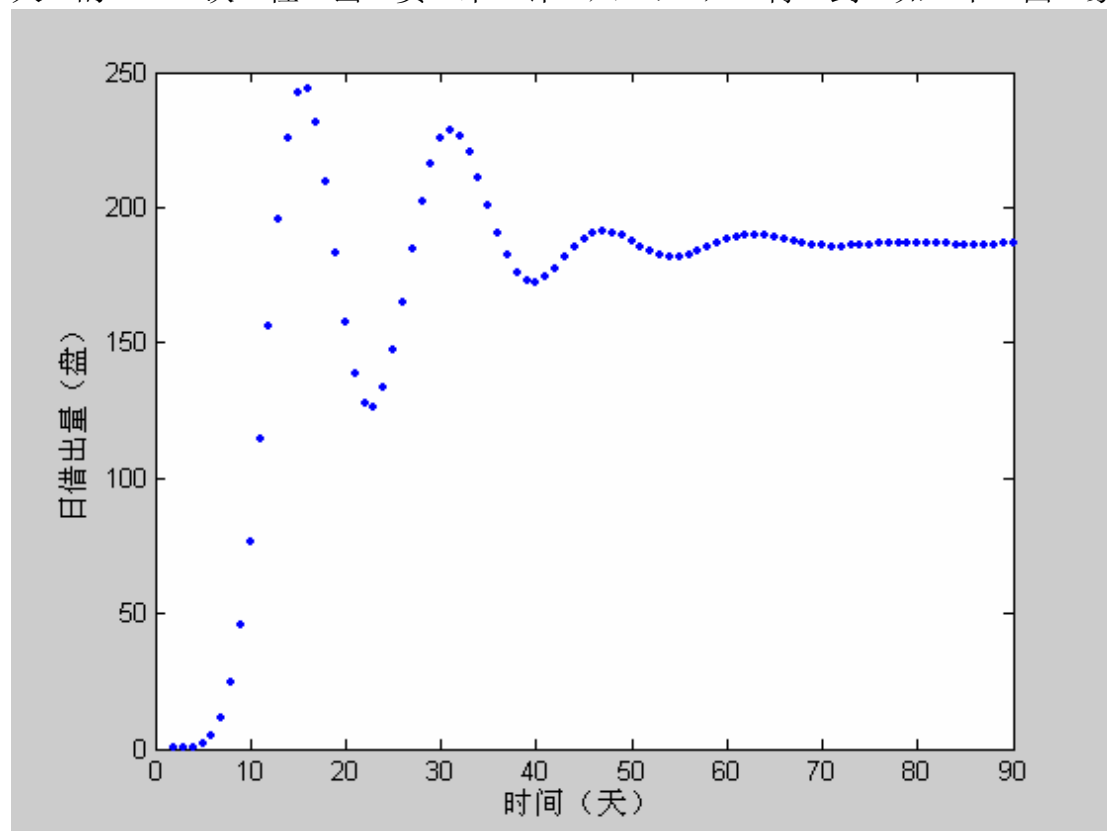
对于历史记录上信誉高的会员（无欠费和迟还纪录），可以允许他一次租借更多的 DVD，这就在本题的模型中，引入了相应的租借数量限制矩阵作为约束，模型适用性更广，不过模型的求解时间（或者说程序的运行时间）也将更长。

统计方法：

本题第二、三问是以 0~1 规划为模型，用软件进行求解的，这在本题 10 万个变量的规模下，暂且可行。但对于现实中会员人数的数量级更高时，对所有会员整体上一次规划用软件求解是不可能的。在这种情况下，我们仍可以抽取足够多的会员作为样本，从而缩小软件求解规模，多次抽取样本，以样本特征估计整体。

6.模型检验

根据第一问中建立的泊松分布模型，用计算机模拟 DVD1 每天的借出量（第一天的一次性出货未计入），得到如下图象



由该图像可以说明两点：

1. 前两个月内日出货量有明显波动，离原点越近，波动也越大，这是因为原点为初始发货点，即在这之前没有 DVD 的借入借出，对于一月来说也就没有上月的回收，借入接出量处于不平衡状态，离初始发货点（原点）越近，这种不平衡也就越强。好像宇宙大爆炸理论中，时空上离爆炸的奇点越近，受它的影响越强，能量也就越高，状态也越不稳定。
2. 另一方面，在两个月后，我们发现日借出量趋平稳，这符合现实中同一 DVD 每天的借出量不应有太大差异的事实。又好像宇宙大爆炸之后，物质渐渐趋于静寂。

7.模型评价

优点：

1. 确定规划和随机模拟相结合。本模型着眼于更贴近实际地解决问题，兼顾求解的复杂程度，将确定性与随机性因素统一考虑，二者互为补充，互相印证。
2. 可拓展性强。由于本模型充分考虑了租赁规则、商家目标以及会员感受，因此任意条件的改动都会灵敏地反映在模型中，从而影响规划结果，为商家决策提供指南。

缺点：

囿于商业运作理论知识的缺乏，对一些因素（比如满意度）的把握可能欠妥当。

8.参考文献

- [1]李德，钱颂迪，运筹学，北京：清华大学出版社，1982
- [2]盛聚等，概率论与数理统计，北京：高等教育出版社，2001
- [3]张志涌等，精通 MATLAB6.5 版教程，北京：北京航空航天大学出版社，2003
- [4]吴翊，吴孟达等，数学建模的理论与实践，长沙：国防科技大学出版社，1999
- [5]胡运权，运筹学教程，北京：清华大学出版社，1982
- [6]徐玖平，胡知能等，运筹学(II类)，北京：科学出版社，2004
- [7]姚庭宝，语言及编程技巧，长沙：国防科技大学出版社，2003