1、(1). $cnt \approx \sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \frac{n}{2^k} = n\sum_{k=0}^{[\log_2 n]} (\frac{1}{2})^k \approx 2n.$

(2) 外层循环 $[\log_2 n]+1$ 次，复杂度 $O(\log n)$.

对每个外层循环迭代 i，内层循环约为 $\frac{n}{i}$.

$$T(n) = \sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \frac{n}{2^k} = n\sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \frac{1}{2^k} \leq 2n.$$

$\Rightarrow$ 时间复杂度为 $O(n)$.

2. (1) 当n足够大时 $3^n < T(n) = n^3 \times 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n$.

$\Rightarrow$ $T(n)$ 复杂度为 $\Theta(3^n)$.

(2) $T(n) = \cancel{T(n)}\sum_{k=2}^{n}[T(k)-T(k-1)] + T(1).$

$= \sum_{k=2}^{n}\Theta(k) + T(1)$

$= \Theta(n^2) + T(1)$

$T(n)$ 复杂度为 $\Theta(n^2)$.

(3) 调和级数 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

即 $T(n)$ 复杂度为 $\Theta(\log n)$.

(4). $\sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) \approx \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

$\Rightarrow \Theta(\ln(n!)) = \Theta\left(\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right) = \Theta(n\ln n).$

即 $T(n)$ 复杂度为 $\Theta(n\ln n)$

3. (1) 证明: $a>b>1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $b^n\leqslant a^n \Rightarrow b^n=O(a^n)$.

$\forall\ c\in\mathbb{N}$. 当 $n>\log_{\frac{a}{b}}c>0$ 时, 有 $(\frac{a}{b})^n>c$. 即 $a^n>cb^n$.

由c的任意性知 $a^n\neq O(b^n)$. $\square$.

(2) 证明: $T(n)=T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)+1$

$T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)=T(\lfloor\frac{n}{2^2}\rfloor)+1$

$\vdots$

$$T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor-1}}\right\rfloor\right)=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}}\right\rfloor\right)+1.$$

累加得 $T(n)=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}}\right\rfloor\right)+\lfloor\log_2 n\rfloor$.

$$\frac{n}{2^{\log_2 n}}\leqslant\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}}<\frac{n}{2^{\log_2 n-1}}.$$

$$\Rightarrow 1\leqslant\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}}<2 \quad \Rightarrow \left\lfloor\frac{n}{2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}}\right\rfloor=1.$$

$$\Rightarrow T(n)=T(1)+\lfloor\log_2 n\rfloor=\lfloor\log_2 n\rfloor.$$

$$\Rightarrow T(n)=O(\log n).$$

$\square$.