#自然数

Peano定义的自然数

1. 0是自然数
2. 如果n是自然数，则n的后继元素也是自然数
3. 0不是任何自然数的后继元素
4. 如果两个自然数的后继元素相等，则这两个自然数相等
5. 如果有一个自然数的子集也包含0，同时也包含之中每一个元素的后继元素，则每一个自然数都落在这个集合之中

核心：如何定义后继？

定义4.1 封闭

F 是函数，$A \subseteq domF$

A 在函数 F 下**封闭**（closed）

$$\Leftrightarrow F(A) \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow F : A \to A$$
$$\Leftrightarrow F是A上一元运算$$

后继：把一个自然数映射为另一个自然数

Peano系统的五条公设

三元组$< M, F, e >$，M 为集合，$F : M \to M$，e 为首元素

1. $e \in M$
2. M 在 F 下封闭
3. $e \notin ranF$

4. F 是单射
5. $A \subseteq M \wedge e \in A \wedge A$在$F$下封闭 $\Rightarrow A = M$ **极小性公理**

后继、归纳集

定义4.2 后继

设 A 是集合（**注意是集合**）

则 A 的**后继**：$A^{+} = A \cup \{A\}$

> 后继的特征：$A \subseteq A^{+} \wedge A \in A^{+}$，既是自身的子集，又是自身的元素。

定义4.3 归纳集

A 是归纳集 $\Leftrightarrow$

1. $\emptyset \in A$ （空集是归纳集的***元素***!）
2. $\forall x(x \in A \rightarrow x^{+} \in A)$

> A 是归纳集 $\Leftrightarrow A$ 含有 $\emptyset$ 且对后继封闭

定义4.4 自然数

自然数是属于每个归纳集的集合

自然数的记号

- $0 = \emptyset$
- $1 = \emptyset^{+} = \{\emptyset\} = \{0\}$

- $2 = \emptyset^{++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \emptyset^{+++} = \{0, 1, 2\}$
- $\dots$
- $n = (n-1)^+ = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

> $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots$
> $0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \dots$

定义4.5 自然数集

设 $D = \{v | v\text{是归纳集}\}$

称 $\cap D$ 为全体自然数集合，记作 N

$N = \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

定理4.1

N 是最小的归纳集

> ***对比***:
> 自然数 是 **属于** 每个归纳集的集合
> 自然数集 是 **包含于** 每个归纳集的集合

定理4.2

$< N, \sigma, \emptyset >$ 是 Peano系统

其中 $\sigma : N \to N$是后继函数，$\forall n \in N, \sigma(n) = n^+$

整数定义

[[第 4 章 自然数.pdf#page=30&selection=0,0,0,4|第 4 章 自然数, 页面 30]]

整数运算的定义

[[第 4 章 自然数.pdf#page=31&selection=0,0,0,7|第 4 章 自然数, 页面 31]]

有理数定义

[[第 4 章 自然数.pdf#page=32&selection=0,0,0,5|第 4 章 自然数, 页面 32]]

实数的定义

戴德金（Dedekind）分割

设 Q 是全体有理数

$S, T \subset Q$ 构成一个 Dedekind 分割

如果:

1. $S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$
2. $S \cup T = Q$
3. $(\forall x \in S \wedge \forall y \in S) \rightarrow x < y$

每个 Dedekind 分割都称为一个实数

数学归纳法

目标：证明 $\forall n \in N$， $P(n)$ 为真

步骤：

1. 构造 $S = \{n | n \in N \wedge P(n)\}$
2. 证明 S 是归纳集

1. $\emptyset \in S$
2. $\forall n(n \in S \to n^+ \in S)$
3. $\Rightarrow S = N$

定理 4.3

任何自然数的元素均为它的子集

[[第 4 章 自然数.pdf#page=39&selection=2,1,3,14|第 4 章 自然数, 页面 39]]

定理 4.4.

$\forall m, n \in N, m \in n \Leftrightarrow m^+ \in n^+$

定理 4.5

任何自然数都不是自己的元素

定理 4.6

$\emptyset$ 属于 0 外的任何自然数

过程示范:

令 $S = \{n | n \in N \wedge n \neq 0 \wedge \emptyset \in n\} \cup \{0\}$

1. $\emptyset \in S$，显然
2. $$n \in S \Rightarrow n^+ \in S:$$ $$n \in S \Rightarrow n = 0 \vee \emptyset \in n$$ $$n = 0 \Rightarrow n^+ = \{\emptyset\} \Rightarrow \emptyset \in n^+ \Rightarrow n^+ \in S$$ $$\emptyset \in n \wedge n \subseteq n^+ \Rightarrow \emptyset \in n^+ \Rightarrow n^+ \in S$$ $$\Rightarrow S = N$$

定理 4.7（三歧性）

$\forall m, n \in N, m \in n, m = n, n \in m$ 中恰有一式成立

传递集

如何判断一个集合的元素的元素还是集合的元素？

[[第 4 章 自然数.pdf#page=48&selection=0,4,0,25|第 4 章 自然数, 页面 48]]

定义 4.7 传递集

集合 A 为**传递集**

A 的元素的元素还是 A 的元素

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in y \wedge y \in A \rightarrow x \in A)$

定理 4.10

A 为传递集 $\Leftrightarrow \cup A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq A) \Leftrightarrow A \subseteq P(A)$

定理 4.11

A 为传递集 $\Leftrightarrow P(A)$ 为传递集

定理 4.12

A 为传递集 $\Rightarrow \cup(A^{+}) = A$

定理4.13

每个自然数都是传递集

定理 4.14

自然数集 N 是传递集

递归定理

设 A 为集合， $a \in A, F : A \to A$

则存在唯一函数 $h : N \to A$

使得 $h(0) = a$

且 $\forall n \in N, h(n^+) = F(h(n))$

递归定义：

$$a \in A, F : A \to A$$
$$h(0) = a$$
$$h(n+1) = F(h(n)), \forall n \in N$$

递归定理说： $h : N \to A$ 存在且唯一

加法、乘法

自然数集上的二元运算

[[第 4 章 自然数.pdf#page=67&selection=0,0,0,10|第 4 章 自然数, 页面 67]]