1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.
2. Сформулировать и доказать второе неравенство Чебышева.
3. Для последовательности случайных величин сформулировать определения сходимости по вероятности и слабой сходимости. Сформулировать закон больших чисел.
4. Сформулировать закон больших чисел. Доказать закон больших чисел в форме Чебышева.
5. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышева. Доказать следствие этого закона для одинаково распределенных случайных величин и закон больших чисел в форме Бернулли.
6. Сформулировать центральную предельную теорему. Доказать интегральную теорему Муавра-Лапласа.
7. Сформулировать определение случайной выборки и выборки, вариационного ряда. Записать выражения для функций распределения случайной выборки и крайних членов вариационного ряда.
8. Сформулировать определение начальных и центральных выборочных моментов порядка k, выборочного среднего и выборочной дисперсии. Являются ли эти статистики несмещенными оценками своих теоретических аналогов?
9. Сформулировать определения эмпирической функции распределения и выборочной функции распределения. Сформулировать и доказать теорему о сходимости выборочной функции распределения.
10. Понятия интервального статистического ряда, эмпирической плотности, гистограммы, полигона частот.
11. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение несмещенной точечной оценки. Показать, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии. Записать формулу для исправленной выборочной дисперсии.
12. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение состоятельной оценки. Привести примеры состоятельной и несостоятельной оценок (с обоснованием).
13. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания в классе линейных оценок.
14. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Доказать теорему о единственности эффективной оценки.
15. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Определение количества информации по Фишеру. Сформулировать теорему о неравенстве Рао-Крамера.
16. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.
17. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод моментов построения точечной оценки. Привести пример.
18. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод максимального правдоподобия построения точечной оценки. Привести пример.
19. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики и изложить общий алгоритм построения γ-доверительного

интервала для скалярного параметра.
20. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае известной дисперсии.
21. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае неизвестной дисперсии.
22. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины.

1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.

3. Для последовательности случайных величин сформулировать определения сходимости по вероятности и слабой сходимости. Сформулировать закон больших чисел.

5. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышева. Доказать следствие этого закона для одинаково распределенных случайных величин и закон больших чисел в форме Бернулли.

7. Сформулировать определение случайной выборки и выборки, вариационного ряда. Записать выражения для функций распределения случайной выборки и крайних членов вариационного ряда.

9. Сформулировать определения эмпирической функции распределения и выборочной функции распределения. Сформулировать и доказать теорему о сходимости выборочной функции распределения.

1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.

Теорема 9.1. Для каждой неотрицательной *случайной величины* X, имеющей *математическое ожидание* $\mathbf{M}X$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}X}{\varepsilon},$$

называемое ***первым неравенством Чебышева***.

◀ Доказательство проведем для *непрерывной случайной величины* X с *плотностью распределения* $p(x)$ (для геометрической интерпретации доказательства удобно воспользоваться рис. 9.1). Поскольку случайная величина X является неотрицательной, то

$$\mathbf{M}X = \int_0^{+\infty} xp(x)\,dx.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательное, то при уменьшении области интегрирования интеграл может лишь уменьшиться. Поэтому

$$\mathbf{M}X = \int_0^{\varepsilon} xp(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x)\,dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x)\,dx.$$

Заменяя в подынтегральном выражении сомножитель x на ε, имеем

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x)\,dx \geqslant \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)\,dx.$$

Остается заметить, что последний интеграл (равный площади области, заштрихованной на рис. 9.1) представляет собой вероятность события $X \geqslant \varepsilon$, и, значит,

$$\mathbf{M}X \geqslant \varepsilon \mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\},$$

откуда и вытекает первое неравенство Чебышева. Аналогично первое неравенство Чебышева доказывается и для дискретной случайной величины, при этом нужно только заменить интеграл суммой. ▶

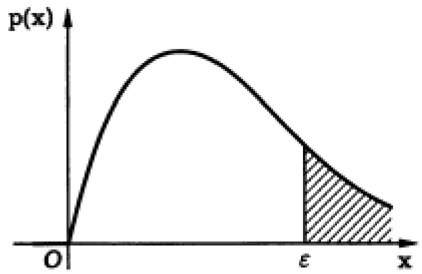

Рис. 9.1

3. Для последовательности случайных величин сформулировать определения сходимости по вероятности и слабой сходимости. Сформулировать закон больших чисел.

Определение 9.2. Если последовательность X_1, X_2, ..., X_n, ... случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n| < \varepsilon\} = 1,$$

то говорят о ***сходимости*** этой последовательности к нулю ***по вероятности***. Сходимость к нулю по вероятности записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Определение 9.4. Последовательность функций распределения $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ сходится к предельной функции распределения $F(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

для любых x, являющихся точками непрерывности $F(x)$. Такую сходимость называют ***слабой сходимостью*** последовательности ***функций распределения*** и обозначают

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F(x).$$

Определение 9.5. Последовательность X_1, X_2, ..., X_n, ... случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел*** (***слабому***), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

5. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышева. Доказать следствие этого закона для одинаково распределенных случайных величин и закон больших чисел в форме Бернулли.

Теорема 9.3. Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *независимых случайных величин* такова, что существуют $\mathbf{M}X_i = m_i$ и $\mathbf{D}X_i = \sigma_i^2$, причем дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leqslant C < +\infty$), то для последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ выполнен закон больших чисел.

При этом говорят также, что к последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин применим ***закон больших чисел в форме Чебышева***.

<ДОКАЗАТЬ СЛЕДСТВИЕ ЭТОГО ЗАКОНА ДЛЯ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СВ>

Закон больших чисел в форме Бернулли:

Пусть проводится n испытаний по *схеме Бернулли* и Y_n- общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюдаемая частота успехов

$$r_n = \frac{Y_n}{n}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для $\forall\, \xi > 0$

$$P\{|r_n - p| \geq \xi\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

7. Сформулировать определение случайной выборки и выборки, вариационного ряда. Записать и обосновать выражения для функций распределения случайной выборки и крайних членов вариационного ряда.

Генеральная совокупность - мн-во возможных значений СВ X.
Закон распределения генеральной совокупности - закон распределения СВ X.
Случайная выборка - совокупность независимых СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и СВ X. При этом n - объем случайной выборки, а СВ X_i - элемент случайной выборки.

Выборка из генеральной совокупности (**реализация случайной выборки** X_n) - любое возможное значение x_n = $(x_1, \dots, x_n)$ случайной выборки X_n, где n - объем выборки, x_i - элемент выборки.

Вариационным рядом (выборки) называют последовательность чисел

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)},$$

удовлетворяющих условию

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(i)} \le \dots \le x_{(n)}$$

где x(1) - наименьший, x(n) - наибольший из элементов выборки.

Последовательность случайных величин

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(n)}$$

называют **вариационным рядом случайной выборки**, где $X_{(i)}$ - СВ, которая при каждой реализации случайной выборки X_n принимает значение, равное i-му члену вариационного ряда.

Для **крайних членов вариационного ряда** случайной выборки X(1) и X(n) их функции распределения имеют вид

P{ X(1) < x **}** = 1 - (1 - F(x))^n
P{ X(n) < x **}** = F(x)^n.

Эти соотношения позволяют находить неизвестную функцию распределения F(x) генеральной совокупности X, имея в эксперименте лишь результаты измерений либо величины X(1), либо X(n).

9. Сформулировать определения эмпирической функции распределения и выборочной функции распределения. Сформулировать и доказать теорему о сходимости выборочной функции распределения.

Определение 1.5. ***Эмпирической функцией распределения*** называют скалярную функцию $F_n(x)$, которая определена для любого $x \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n}, \tag{1.4}$$

где n — объем выборки.

ния. Рассмотрим функцию $n(x, \vec{X}_n)$, которая для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ и каждой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ принимает значение, равное числу элементов в выборке $\vec{x}_n$, меньших x.

Определение 1.4. Функцию

$$\widehat{F}(x, \vec{X}_n) = \frac{n(x, \vec{X}_n)}{n}, \tag{1.3}$$

где n — объем случайной выборки, будем называть ***выборочной функцией распределения.***

Теорема 1.1. Для любого фиксированного x последовательность случайных величин $\{\widehat{F}(x; \vec{X}_n)\}$ сходится по вероятности при $n \to \infty$ к значению $F(x)$ функции распределения генеральной совокупности X в точке x.

◀ При любом фиксированном x выборочная функция распределения $\widehat{F}(x; \vec{X}_n)$ есть относительная частота события $\{X < x\}$. В соответствии с законом больших чисел в форме Бернулли, относительная частота при $n \to \infty$ сходится по вероятности к вероятности события $\{X < x\}$. Следовательно,

$$\widehat{F}(x; \vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{P}\{X < x\} = F(x). \quad ▶$$

11. Постановка задачи идентификации неизв. парам-ов закона распр. СВ. Определение точечной оценки. Определение несмещенной точечной оценки. Показать, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии. Записать формулу для исправленной выборочной дисперсии.

Пусть X - СВ, закон распределения которой известен до вектора $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_1)$неизвестных параметров (т.е. известен тип функции F(x,Θ)распределения СВ X). Если задать значение вектора Θ, то эта функция распределения будет известна полностью. ***Задача***: по имеющимся реализациям СВ X оценить значение вектора Θ.

Точечной оценки параметра Θназывается статистика $\Theta(\mathrm{X}n)$, где Xn - случайная выборка. $\Theta = \Theta(x_n)$- **значение точечной оценки** (xn - реализация выборки).

Определение 2.2. Статистику $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют ***несмещенной оценкой*** параметра θ, если ее математическое ожидание совпадает с θ, т.е. $\mathbf{M}\widehat{\theta}(\vec{X}_n) = \theta$ для любого фиксированного n.

Теорема 2.2. Если $\vec{X}_n$ — случайная выборка из генеральной совокупности X с конечной дисперсией σ^2, то выборочная дисперсия $\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ — смещенная состоятельная оценка σ^2.

◀ Действительно,

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big((X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu)\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)^2 + \frac{1}{n}n(\overline{X} - \mu)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\overline{X} - \mu)^2.$$

Используя свойства математического ожидания, получим

$$\mathbf{M}\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \mathbf{M}(\overline{X} - \mu)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}(X_i - \mu)^2 - \mathbf{M}(\overline{X} - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i - \mathbf{D}\overline{X} =$$

$$= \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$

т.е. $\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ — смещенная оценка для дисперсии.

13. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Опр-е точечной оценки. Опр-е

эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой мат. ожидания в классе линейных оценок.

Пусть X - СВ, закон распределения которой известен до вектора $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_1)$неизвестных параметров (т.е. известен тип функции F(x,Θ)распределения СВ X). Если задать значение вектора Θ, то эта функция распределения будет известна полностью. ***Задача***: по имеющимся реализациям СВ X оценить значение вектора Θ.

Точечной оценки параметра Θназывается статистика $\Theta(\mathrm{X}n)$, где Xn - случайная выборка. $\Theta \;=\; \Theta(x_n)$- **значение точечной оценки** (xn - реализация выборки).

Пусть 1) X - СВ; 2) F(x, Θ)- ф-я распр. СВ X, известная с точностью до пар-ра Θ

3) $\widehat{\Theta_1}$,$\widehat{\Theta_2}$- две несмещенные точечные оценки параметра Θ.

Несмещенная оценка $\hat{\theta}$ называется ***эффективной*** оценкой параметра, если она обладает наименьшей дисперсией среди оценок Θ.

Пусть X - СВ, ∃ MX=m - неизв.

Покажем, что $\widehat{m_1} = \widehat{X_n}$ явл. эфф. оценкой в классе линейных оценок для m.

а) лин. оц. имеет вид $\widehat{m}(\underline{X_n}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. При этом $M[\widehat{m}] = m\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Т.к. оценка должна быть несмещенной, то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

б) $D[\widehat{m}] = D[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i] =/Xi\; -\; \text{независ.}/ = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 DXi = \delta^2\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2$

Подберем λ_i так, чтобы $D[\widehat{m}]$была минимальной:

{ $\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 \to min$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

}

Составим функцию Лагранжа:

$$\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) = {\lambda_1}^2 + \dots + {\lambda_n}^2 - \mu(\Sigma\lambda_i - 1) \;\to\; min$$

Необх. условия экстремума:

{ $\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_i} = 2\lambda_i - \mu = 0 \quad i = \underline{1,n}$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = \Sigma\lambda_i - 1 = 0$$

}

$\lambda_i = -\frac{\mu}{2} = \frac{1}{n}$ => $\widehat{m} = \sum \frac{1}{n} X_i = \underline{X_n}$

15. Постановка задачи идентификации неизв. параметров закона распределения СВ. Опр-е точечной оценки. Опр-е эффективной оценки. Определение количества информации по Фишеру. Сформулировать теорему о неравенстве Рао-Крамера.

Пусть X - СВ, закон распределения которой известен до вектора $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_1)$неизвестных параметров (т.е. известен тип функции F(x,Θ)распределения СВ X). Если задать значение вектора Θ, то эта функция распределения будет известна полностью. ***<u>Задача</u>***: по имеющимся реализациям СВ X оценить значение вектора Θ.

Точечной оценки параметра Θназывается статистика $\Theta(\mathrm{X}n)$, где Xn - случайная выборка. $\Theta = \Theta(x_n)$- **значение точечной оценки** (xn - реализация выборки).

Пусть 1) X - СВ; 2) F(x, Θ)- ф-я распр. СВ X, известная с точностью до пар-ра Θ
3) $\widehat{\Theta_1}, \widehat{\Theta_2}$- две несмещенные точечные оценки параметра Θ.

Несмещенная оценка $\hat{\Theta}$ называется ***эффективной*** оценкой параметра, если она обладает наименьшей дисперсией среди оценок Θ.

Теорема 2.4 (***неравенство Рао — Крамера****). Пусть рассматриваемая параметрическая модель является регулярной и $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ — несмещенная оценка неизвестного параметра θ. Тогда имеет место неравенство

$$\mathbf{D}\,\widehat{\theta}(\vec{X}_n) \geqslant \frac{1}{nI(\theta)}, \tag{2.2}$$

где

$$I(\theta) = \mathbf{M}\left(\frac{\partial \ln p(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2.$$

Здесь $I(\theta)$ — ***количество информации по Фишеру**** в одном наблюдении, а $p(t;\theta)$ — плотность распределения генеральной совокупности X в случае *непрерывной статистической модели* и вероятность события $\{X = t\}$ в случае *дискретной статистической модели.*

2. Сформулировать и доказать второе неравенство Чебышева

Теорема 9.2. Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $\mathbf{D}X = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо ***второе неравенство Чебышева***

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

◄ Для доказательства воспользуемся утверждением первого неравенства Чебышева. Применяя к случайной величине

$$Y = (X - \mathbf{M}X)^2$$

это неравенство, в котором ε заменено на ε^2, получаем

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon\} = \mathbf{P}\{(X - \mathbf{M}X)^2 \geqslant \varepsilon^2\} = \\ = \mathbf{P}\{Y \geqslant \varepsilon^2\} \leqslant \frac{\mathbf{M}Y}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

что и доказывает второе неравенство Чебышева. ►

4. Сформулировать закон больших чисел. Доказать закон больших чисел в форме Чебышева.

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ – послед. сл. в.

2) $\exists\, MX_i = m_i$, $i \in \mathbb{N}$

Опр. Говорят, что посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяет ЗБЧ, если $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4. Сформулировать ЗБЧ. (3в.)

Доказать ЗБЧ в ф. Чебышева.

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ – послед. независ. случ. величин

2) $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$

3) σ_i^2 огранич. в совокупности, т.е. $\exists C > 0$:

$$\forall i \in N: \sigma_i^2 \le C$$

Тогда посл-ть $X_1, X_2, \dots$ удовл. ЗБЧ.

Док-во: 1) Рассм. посл-ть $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in N$,

т.е. $\begin{cases} \overline{X}_1 = X_1 \\ \overline{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \\ \overline{X}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \\ \dots \end{cases}$

$$M[\overline{X}_n] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \{X_i \text{ – незав.}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \le \{\sigma_i^2 \le C\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}$$

2) Исп. 2ое нер-во Чебышева для посл. $\overline{X}_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X}_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i}_{M\overline{X}_n}| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2},$$

т.к. $D[\overline{X}_n] \le \frac{C}{n}$, то

$\forall \varepsilon > 0$

$$0 \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

$n \to \infty$: $P \to 0$, $\frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$, т.е. удовл. ЗБЧ

6. Сформулировать центральную предельную теорему. Доказать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

④ Центральная предельная теорема

Пусть (1) $X_1 \dots X_n \dots$ — посл-ть незав. СВ.

2) X_i одинаково распред. & 3) $\exists MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$.

Составим посл-ть $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$. Тогда,

$M\bar{X}_n = m$, $D\bar{X}_n = \frac{1}{n^2}\sum DX_i = \frac{\sigma^2}{n}$ (незав.)

Составим СВ $Y_n = \frac{\bar{X}_n - M\bar{X}_n}{\sqrt{D\bar{X}_n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum X_i - m}{\sigma/\sqrt{n}}$. Тогда

$MY_n = 0$, $DY_n = 1$

Теорема: пусть вып. усл. 1-3), тогда посл-ть Y_n слабо сходится к СВ $Z \sim N(0,1)$, т.е.

$$F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

Центр. пред. теорема. Пусть: 1) $X_1, X_2, \dots$ — посл-ть независ. случ. величин

2) все X_i, $i \in N$ одинак. распредел.

3) $\exists MX_i = m$ $\exists DX_i = \sigma^2$, $i \in N$.

Рассм. случ. величину $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ для неё $M\bar{X}_n = m$, $D\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$

Рассм. $Y_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$

для неё $MY_n = M\left[\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\left(M[\bar{X}_n] - m\right) = 0$

$DY_n = D\left[\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma^2/n} D[\bar{X}_n - m] = \frac{n}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n} = 1$

th) Пусть выполн. усл. (1)-(3). Тогда посл-ть Y_n слабо сходится к сл. вел. $Z \sim N(0,1)$, т.е.

$$\forall x \in R \quad F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \quad \blacksquare$$

8. Сформулировать определение начальных и центральных выборочных моментов порядка k, выборочного среднего и выборочной дисперсии. Являются ли эти статистики несмещенными оценками своих теоретических аналогов?

Опр. Выборочным средним наз-тся статистика

$$\hat{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Опр. Выборочной дисперсией наз. стат.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Опр. Начальным выборочным моментом порядка k наз-тся статистика

$$\hat{\mu}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

пор-ка k

Опр. Центральным выборочным моментом наз-тся статистика

$$\hat{\nu}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$$

"ню" с крышечкой

Очевидно, что $\hat{\mu}_1 = \overline{X}$, $\hat{\nu}_2 = \hat{\sigma}^2$. Да, являются

10. Понятия интервального статистического ряда,эмпирической плотности,гистограммы, полигона частот.

Статистическим рядом для выборки называют таблицу, которая в первой строке содержит значения z(1), …, z(m) (z(1) < … < z(m)), а во второй - числа их повторений. Чисто n_i, показывающее, сколько раз встречался элемент z(i) в выборке, называют **частотой**, а отношение n_i / n - **относительной частотой** этого значения.

Исходные данные группируют также следующим образом: отрезок J = [x(1), x(n)], содержащий все выборочные значения, разбивают на m промежутков J_i, как правило одинаковой длины Δ. При этом считают, что каждый промежуток содержит свой левый конец, но лишь последний промежуток содержит и свой правый конец. При таком соглашении каждая точка отрезка J содержится в одном промежутке J_i. Далее, для каждого промежутка J_i, подсчитывают число n_k элементов выборки, попавших в него (при этом n = n_1 + … + n_m), а результаты представляют в виде таблицы, которую называют **интервальным статистическим рядом.**

Эмпирической плотностью распределения, соответствующей реализации x_n случайной выборки X_n из генеральной совокупности X, называют функцию p_n(x), которая во всех точках интервала J_i, i = 1, m, принимает значение $\frac{n_i}{n\Delta}$, а вне интервала J равна нулю, т.е.

p_n(x) = {

$$\frac{n_i}{n\Delta}, x \in J_i$$
$$0, x \notin J_i$$

}

График функции p_n(x), представляющий собой кусочно постоянную функцию на промежутке J = [z(1), z(m)], называют **гистограммой**.

Полигон частот - это ломаная, отрезки которой соединяют середины горизонтальных отрезков, образующих прямоугольники в гистограмме.

12. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение состоятельной оценки. Привести примеры состоятельной и несостоятельной оценок (с обоснованием).