Занятие 11. Доверительное оценивание. Распределение по закону Пуассона

Пусть $X \sim P(\lambda)$.

Нужно построить доверительную оценку для λ.

Эффективную статистику для оценки λ можно получить, используя следствие теоремы Рао-Крамера

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Подзадача доверительного оценивания (как и в общем случае) построение центральной статистики. Нужно найти распределение $\hat{\lambda}$ и подобрать преобразование, которое делает распределение новой статистики не зависящей от неизвестных параметров.

Рассмотрим $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, - сумму пуассоновских случайных величин.

Задача: найти распределение Y.

Можно доказать, что, если $X_i \sim P(\lambda)$, то $\sum_{j=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$

$$P\left\{\hat{\lambda} = \frac{k}{n}\right\} = P\{n\hat{\lambda} = k\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}.$$

Получение центральной статистики неразрешимая задача. Выбранный подход не позволяет решить задачу.

11.1. Использование ЦПТ для построения доверительной оценки.

В силу ЦПТ, в пределе выполняется

$$P\left\{\frac{\hat{\lambda}-M(\hat{\lambda})}{\sqrt{D(\hat{\lambda})}}<x\right\}\to F_{N(0,1)}(x)$$

$$M(\hat{\lambda})=\frac{1}{n}n\lambda=\lambda.$$
$$D(\hat{\lambda})=\frac{1}{n^2}n\lambda=\frac{\lambda}{n}$$

$$P\left\{\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<x\right\}\to F_{N(0,1)}(x)$$

Получена центральная статистика.

Доверительный интервал

$$P\left\{h_{(1-\alpha)/2}<\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<h_{(1+\alpha)/2}\right\}\approx\alpha$$

Нужно разрешить относительно λ два неравенства.

$$\begin{array}{l} h_{(1-\alpha)/2}<\sqrt{n}\,\dfrac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{n}\,\dfrac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<h_{(1+\alpha)/2}\end{array}\Rightarrow \text{ Введем } z=\sqrt{\lambda}\ \Rightarrow$$

$$z\in\left(-\frac{h_{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{n}}-\sqrt{\frac{h^2_{(1-\alpha)/2}}{n}+\hat{\lambda}},-\frac{h_{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{h^2_{(1-\alpha)/2}}{n}+\hat{\lambda}}\right)$$
$$z\in\left(-\infty,-\frac{h_{(1+\alpha)/2}}{\sqrt{n}}-\sqrt{\frac{h^2_{(1+\alpha)/2}}{n}+\hat{\lambda}}\right)$$

или

$$z\in\left(-\frac{h_{(1+\alpha)/2}}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{h^2_{(1+\alpha)/2}}{n}+\hat{\lambda}},\infty\right)$$

Пересечение двух областей дают область

$$z \in \left(-\frac{h_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{h^2_{(1+\gamma)/2}}{n} + \hat{\lambda}}, -\frac{h_{(1-\gamma)/2}}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{h^2_{(1-\gamma)/2}}{n} + \hat{\lambda}} \right)$$

(обе границы положительны)

$$\lambda \in \left(\left[-\frac{h_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{h^2_{(1+\gamma)/2}}{n} + \hat{\lambda}} \right]^2, \left[-\frac{h_{(1-\gamma)/2}}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{h^2_{(1-\gamma)/2}}{n} + \hat{\lambda}} \right]^2 \right)$$

11.2. ДЗ. Решить задачу о доверительном оценивании λ.

Пусть $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Задача: построить доверительную оценку для λ.

1. Взять точечную статистику $\hat{\lambda}$. а) Попытаться найти точное распределение $\hat{\lambda}$ б) Если пункт (а) удастся выполнить, попытаться построить центральную статистику. в) Если пункт (б) удастся сделать построить доверительный интервал λ.
2. Если предыдущий пункт не удастся, попробовать предыдущую задачу с параметром $\theta = 1/\lambda$.
3. Если предложенными выше способами построить оценку не удастся, использовать ЦПТ.