Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашняя работа №1

По предмету: «Математическая статистика»

Вариант 2

Студент: Гасанзаде М.А.,
Группа: ИУ7-66Б

Москва, 2020 г.

Задача №1:

Математическое ожидание годового количества осадков для данной местности равно 600 мм. Каково минимальное количество осадков за год с вероятностью, не превышающей величины 0.8?

Решение:

Пусть случайная величина X - годовое количество осадков для данной местности, $M(X) = 600$.
Из-за отсутствия каких-либо данных о распределении X и дисперсии X. Мы используем неравенство Маркова в виде:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{M(X)}{a}$$

Тогда, так как должно быть выполнено $P(X \geqslant a) \leqslant 0.8$, то:

$$\frac{M(X)}{a} = 0.8 \quad ; \quad a = \frac{M(X)}{0.8} = \frac{600}{0.8} = 750$$

Итак, $P(X \geqslant 750) \leqslant 0.8$

Ответ: Найдено минимальное значение = 750мм.

Задача №2

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x)=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi\, x}}e^{-\theta x},\quad x>0$$

Решение:

$M(X)=\bar{x}B$

Найдём математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi\cdot x}}\cdot e^{-\theta x}dx=\left\{\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2\,tdt \end{matrix}\right\}=\int_{0}^{+\infty} t^2\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi\cdot t^2}}\cdot e^{-\theta t^2}\cdot 2\,tdt=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} 2\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}\cdot t^2\cdot e^{-\theta t^2}dt=\left\{\begin{matrix} t=\frac{z}{\sqrt{2\theta}} \\ dt=\frac{dz}{\sqrt{2\theta}} \end{matrix}\right\}=\frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{z^2}{2\theta}\cdot e^{\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2\theta}}=\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} z^2\cdot e^{\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot z^2\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2\theta}\left(D(z)+M^2(z)\right)=\frac{1}{2\theta}(1+\theta^2)=\frac{1}{2\theta}$$

где, будем учитывать что последний интеграл, это начальный момент второго порядка для $z\sim N(0;1)$, таким образом :

$D(z)=1\quad M(z)=0\quad (z\quad \textit{распределена}\quad \textit{нормально})$

Получаем: $\frac{1}{2\theta}=\bar{x}B$

Ответ:

$\theta=\frac{1}{2\bar{x}B}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{N}(x_1+\ldots+x_N)}$ - это и есть искомая оценка.

Задача №3
С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x_5}=(x_1,\ldots,x_5)$.
Закон распределения следующий:

$$f_x(x)=\theta\, e^{-\theta x} \quad ,x>0$$

Выборка $\vec{x_5}=(2{,}3{,}5{,}8{,}22)$

Решение:
Функция правдоподобия:

$$L(x_1;x_2;\ldots;x_N)=f_X(x_1)\cdot f_X(x_2)\cdot\ldots\cdot f_X(x_N)=\theta\cdot e^{-\theta x_1},\ldots,\theta\cdot e^{-\theta x_N}=\theta^N\cdot\theta\cdot e^{-\theta\cdot(x_1+\ldots x_N)}=$$
$$=\theta^N\cdot e^{-\theta\cdot N\cdot\bar{x}}$$

$$\ln L=\ln\left(\theta^N\cdot e^{-\theta\cdot N\cdot\bar{x}}\right)=N\cdot\ln\theta-\theta\cdot N\cdot\bar{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln L)=0$$

$$\frac{N}{\theta}-N\cdot\bar{x}=0$$

$$\frac{1}{\theta}=\bar{x}$$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{N}{x_1+\ldots x_N}$$

Ответ:

$\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{N}{x_1+\ldots x_N}$ **-** искомая оценка.

Вычисления по выборке:

$$\hat{\theta}=\frac{5}{2+3+5+8+22}=0.125$$

Задача №4

Расстояние до навигационного знака оценивают средним арифметическим результатов независимых измерений, выполненных n однотипными дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки и производятся каждым дальномером 1 раз, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением $\varsigma = 10$ м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы с вероятностью 0.9 абсолютная величина ошибки при определении расстояния до навигационного знака не превышала 10 м?

Решение:

Доверительный интервал, для неизвестного математического ожидания (в данном случае искомого расстояния) нормально распределенной генеральной совокупности ($\varsigma = 10$), будет таким:

$$\bar{x} - u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\varsigma}{\sqrt{N}} < \boldsymbol{a} < \bar{x} + u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\varsigma}{\sqrt{N}}$$

Искомая ошибка $\Delta = u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\varsigma}{\sqrt{N}}$, по условию $\Delta \leq 10$.

$$\frac{u_{1-\varepsilon} \cdot 10}{\sqrt{N}}$$

$$\sqrt{N} \geq u_{1-\varepsilon}$$

$$N \geq (u_{1-\varepsilon})^2$$

$$\gamma = 0.9$$

$$\varepsilon = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0.9}{2} = 0.05$$

$u_{1-0.05} = 1.64$ - квантиль стандартизированного нормального распределения (из таблиц)

Получаем: $N \geq (1.64)^2 = 2.69$

Ответ: 3