

## Вопросы для подготовки к модулю 3

1. Формулы включения и исключения (с выводом).
2. Задача о числе сюръекций одного конечного множества на другое.
3. Ладейные полиномы и методы их вычисления (с доказательством основных теорем).
4. Вывод формулы для числа подстановок с запрещенными позициями.
5. Однородные линейные рекуррентные соотношения (ОЛРС) с постоянными коэффициентами. Понятие решения, фундаментальной системы решений (ФСР). Теорема о связи между решениями и начальными условиями.
6. Теорема об общем решении ОЛРС как линейной комбинации фундаментальных решений.
7. Характеристический полином и характеристическое уравнение ОЛРС. Структура общего решения в случае вещественных и комплексных корней характеристического полинома.
8. Неоднородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Поиск частного решения методом подбора. Принцип суперпозиции (без доказательства).
9. Понятие действия группы на множестве. Стабилизаторы и орбиты. Лемма Бернсайда (с доказательством).
10. Функции разметки. Понятие эквивалентных функций разметки. Структурный перечень функций разметки.
11. Циклический (цикловой) индекс группы. Теорема Пойа (с выводом числа классов эквивалентности, без доказательства утверждения о структурном перечне классов эквивалентности).

## Типовые задачи

1. Сколь много положительных целых чисел, меньших или равных числу 2300, взаимно простых с 700?
2. Найти число ломаных, ведущих из точки  $A(0,0)$  в точку  $D(10,10)$ , проходящих через точку  $B(3,4)$  и не проходящих ни через одну из точек  $C_1(1,3)$ ,  $C_2(5,5)$ ,  $C_3(6,8)$ . Вершины ломаной имеют целые неотрицательные координаты, каждое звено ломаной направлено либо вверх, либо вправо.
3. Найти число всех перестановок из 6 элементов с запрещенными парами:  $(3,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,1)$ ,  $(4,2)$ ,  $(5,4)$ ,  $(5,5)$ ,  $(5,6)$ .
4. Найти общее решение соотношения  $x_n = x_{n-1} + 3x_{n-2}$ .
5. Найти решение соотношения при заданных начальных условиях:  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 4$ ,  $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .
6. Найти общее решение для соотношения  $x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3} - 2^n$ .
7. Записать вид общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения:

$$x_n = x_{n-2} + 6x_{n-3} + 4x_{n-4} + 2^n n^3 \sin \frac{2n}{3}$$

8. Найти структурный перечень двухцветных раскрасок правильного пятиугольника.
9. Найти число двухцветных раскрасок 9-клеточной доски.