Теория вероятностей. Вопросы к РК2

Этот файл — вырезка из лекций, которая составляется для удобства подготовки к РК. Можно сказать, что составляется она один раз: всякие ошибки, будь они типографическими или смысловыми, будут, скорее всего, исправлены только в конспекте лекций.

1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 3 балла

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

Определение. *Говорят, что в результате случайного эксперимента наступило событие A, если в результате данного эксперимента был реализован один из входящих в A элементарных исходов.*

Определение. *События A и B называются несовместными, если их произведение пусто ($AB = \emptyset$). В противном случае события A и B называются совместными.*

Пусть A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение. *События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)\,P(B)$.*

Связь несовместности и независимости: если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то из несовместности следует зависимость (если одно событие произойдёт, то мы определённо знаем, что другое событие произойти уже не может). Частный случай: если $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$, то A и B независимы.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Пусть

1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;
2. $\mu(\Omega) < \infty$, где μ — некая мера.

   Если $n = 1$, то μ — это длина; если $n = 2$, то μ — площадь; если $n = 3$ — объём. Можно определить меры и при больших n;
3. Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию $A \subseteq Q$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω.

Тогда

Определение. *Вероятностью случайного события* $A \subseteq \Omega$ *называют число*

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

1. Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);

2. Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω, а лишь некоторые из них;

3. Набор подмножеств множества Ω, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, ...

   Эти соображения приводят к следующему определению.
   Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;

2. $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω.

Определение. β *называется сигма-алгеброй*[1] *событий, если выполнены условия:*

1. *Если* $A \in \beta$, *то* $\overline{A} \in \beta$; [2]

2. *Если* $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, *то* $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \beta$.

Простейшие следствия:

1. $\Omega \in \beta$;

[1] При ведении лекций слово «сигма» иногда заменялось на букву δ (дельта — `\delta` в LaTeX). Буква «сигма» выглядит как σ. Лектор говорит, что корректнее всего словосочетание «сигма-алгебра» вообще не сокращать и писать полностью, не используя греческие буквы. — Прим. ред.

[2] Обратите внимание, что $A \subseteq \Omega$, но $A \in \beta$, т. к. элементы множества β — подмножества из Ω. — Прим. лект.

2. $\emptyset \in \beta$;

3. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$;

4. Если A, $B \in \beta$; то $A \setminus B \in \beta$.

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2. β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение. *Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция*

$$P\colon \beta \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

1. $\forall A \in \beta \implies P(A) \geqslant 0$ *(аксиома неотрицательности);*

2. $P(\Omega) = 1$ *(аксиома нормированности);*

3. *Если* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *— попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:* $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ *(расширенная аксиома сложения).*

Замечание 1. *Аксиомы 1-3 называются аксиомами вероятности.*

Основные свойства (из аксиоматического определения):

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2. $P(\emptyset) = 0$;

3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;

4. $\forall A \in \beta\colon 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где A, $B \in \beta$;

6. Для любого *конечного* набора событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

$$\begin{aligned} &P(A_1 + \ldots + A_n) = \\ &+ \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} P(A_{i_1}) \\ &- \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - ... + ... \end{aligned}$$

Свойства вероятности в соответствии с классическим определением фактически отражаются в аксиомах аксиоматического определения вероятности.

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

Замечание. *Иногда вместо расширенной аксиомы сложения (акс. вер. №3) рассматривают следующие две аксиомы:*

$3'$*: Для любого конечного набора попарно несовместных событий* $A_1, \ldots, A_n$ *вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности.*

(аксиома сложения («обычная»);
в расширенной набор является счётным, а не конечным)

$3''$*: Для любой неубывающей последовательности событий*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$$

и события $A = \bigcup\limits_i A_i$ *верно*

$$P(A) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

(аксиома непрерывности)

Можно доказать, что аксиома 3 эквивалентна совокупности $3'$ и $3''$.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Определение. *Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B, называется число*

$$P(A \mid B)^3 = \frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

Если зафиксировать событие B и рассматривать $P(A \mid B)$ как функцию события A, то оказывается, что условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной.

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. ***Формула умножения вероятностей для двух событий***
Пусть

1. *A, B — события;*
2. *$P(A) > 0$.*

Тогда

$$P(AB) = P(A)\, P(B \mid A)$$

Теорема. ***Формула умножения вероятностей для n событий***
Пусть

1. *$A_1, \ldots, A_n$ — события;*
2. *$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$.*

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение. *События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)\,P(B)$.*

[3] В разговорной речи читается как P от A при B. — Прим. лект.

Теорема. ...

1. *Пусть* $P(B) > 0$.

   Утверждение «A и B — независимы» равносильно $P(A \mid B) = P(A)$;

2. *Пусть* $P(A) > 0$.

   Утверждение «A и B — независимы» равносильно $P(B \mid A) = P(B)$.

Замечание. *Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия*

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ или } P(B \mid A) = P(B) \tag{1}$$

Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда $P(A)$ *или* $P(B)$ *отлично от нуля. Условие же* $P(AB) = P(A)P(B)$ *«работает» всегда без ограничений и, как мы показали выше, при выполнении соответствующих требований эквивалентно 3.*

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение. *События* $A_1, \ldots, A_n$ *называется попарно независимыми, если* [4]

$$\forall\forall\, i \neq j;\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\ P\{A_i A_j\} = P\{A_i\}P\{A_j\}$$

Определение. *События* $A_1, \ldots, A_n$ *называются независимыми в совокупности, если*

$$\forall\, k \in \{2, \ldots, n\}\, \forall\forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k\ P\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot \ldots \cdot P\{A_{i_k}\}$$

Замечание 1. *Условие из последнего определения означает, что должны выполняться следующие равенства*

$$\begin{aligned}
&k = 2\colon P\{A_{i_1}, A_{i_2}\} = P\{A_{i_1}\}\, P\{A_{i_2}\} \\
&k = 3\colon P\{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\} = P\{A_{i_1}\}\, P\{A_{i_2}\}\, P\{A_{i_3}\} \\
&\ldots \\
&k = n\colon \ldots
\end{aligned}$$

Замечание 2. *Очевидно, что если события* $A_1, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности, то они и попарно независимы. Обратное неверно.*

[4] Обозначение $\forall\forall$ является математическим сленгом и технически некорректно. Тем не менее, это удобный способ обозначения того, что в выражении должно стоять несколько $\forall$ подряд. — Прим. лект.

Пример. ***(Бернштейна)***

Рассмотрим правильный тетраэдр[5]*, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3.*

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Событие A_1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём A_2 для 2, A_3 для 3. Давайте покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. *Докажем, что они независимы попарно. Т. к. $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, то*

$$P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{1}{4}$$

   Событие A_1A_2 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2.

   Всё аналогично для $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$.

2. *Проверим равенство $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$, которое, казалось бы, должно равняться $\frac{1}{8}$. Но произведение событий A_1, A_2, A_3 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна $\frac{1}{4}$.*

   И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

   Следовательно, события A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности.

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а $(\Omega,\, \beta,\, P)$ — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение. *Говорят. что события $H_1, \ldots, H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если*

1. $P(H_i) > 0,\ i = \overline{1, n}$;

2. $H_iH_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$;

3. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$.

Замечание. *События $H_1, \ldots, H_n$, образующие полную группу, часто называют гипотезами.*

[5] Трёхмерная фигура, состоящая из четырёх треугольников. — Прим. ред.

Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми? Нет. События не пустые и несовместные, следовательно, они зависимые: наступление одного полностью исключает наступление другого. Формально, $P(AB) \neq P(A)P(B)$. См. вопрос 1.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема. ***Формула полной вероятности.***

Пусть

1. $H_1, \ldots, H_n$ *— полная группа событий;*
2. $A \in \beta$ *— событие.*

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A \,|\, H_1)P(H_1) + \ldots + P(A \,|\, H_n)P(H_n)$$

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема. *Пусть*

1. $H_1, \ldots, H_n$ *— полная группа событий;*
2. $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(H_i \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, H_i)P(H_i)}{P(A \,|\, H_1)P(H_1) + \ldots + P(A \,|\, H_n)P(H_n)}, \ i = \overline{1, n}$$

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Давайте рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов, т. е. пространство элементарных исходов у нас будет состоять из двух элементов ($|\Omega| = 2$).

Один из элементарных исходов условно будем называть успехом, второй — неудачей. Пусть p — вероятность осуществления успеха в случайном эксперименте, а q ($q = 1 - p$) — вероятность неудачи.

Определение. *Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, т. е. вероятность реализации успеха в i-ом испытании не зависит от исходов первого, второго, ..., $i-1$-ого испытаний.*

Теорема. *Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k 1 до k 2 успехов.

Теорема. *Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Следствие. *Вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (и неудачи $q = 1 - p$) произойдёт хотя бы один успех: $P_n(k \geqslant 1) = 1 - q^n$.*

Следствие. *Вероятность того, что кол-во успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено между k_1 и k_2:*

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 5 баллов

2.1 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение. *Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.*

Элементарный исход — ?

Замечание. *Всюду в дальнейшем будем предполагать, что*

1. *Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;*

2. *В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.*

Определение. *Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов.*

Пусть

1. Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$)[6];
2. По условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
3. Существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| \overset{\text{(обозначим)}}{=} N_A$

Тогда

Определение. *Вероятностью осуществления события A называют число*

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

Задача-пример. *Два раза бросают игральную кость. Задано событие*

$$A = \{ \text{ сумма выпавших очков больше или равна одиннадцати } \}$$

Найти $P(A)$.

Решение. *Определим исход: (x_1, x_2) — упорядоченная пара, где x_i — кол-во очков, выпавших при i-ом броске, $i = \overline{1,2}$ ($N = |\Omega| = 36$).*

В событии A можно выделить следующие исходы:

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

Тогда $N_A = |A| = 3$, и, в соответствии с определением, получается

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

2.2 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.

Пусть

1. Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$)[7];

[6] Запись $x < \infty$ означает, что x конечно. Напротив, запись $x \leqslant \infty$ означает, что x либо конечно, либо бесконечно. — Прим. ред.

[7] Запись $x < \infty$ означает, что x конечно. Напротив, запись $x \leqslant \infty$ означает, что x либо конечно, либо бесконечно. — Прим. ред.

2. По условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);

3. Существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| \overset{\text{(обозначим)}}{=} N_A$

   Тогда

Определение. *Вероятностью осуществления события A называют число*

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

Свойства:

1. Вероятность $P(A) \geqslant 0$ (неотрицательна).

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Если A, B — несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательства этих свойств:

1. Т. к. $N_A \geqslant 0$, $N > 0$, то следует $P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$.

2. Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получается

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

3. Т. к. Ω — конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то получается, что A, B конечны. Существует формула[8]

$$|A + B| = |A| + |B| - |AB|$$

   Т. к. A и B — несовместные, то $AB = \emptyset$, из чего следует, что $N_{a+b} = N_a + B_b$. Таким образом,

$$P(A + B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B)$$

[8] Её называют формулой включений и исключений. — Прим. лект.

2.3 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

Пусть

1. Некоторый случайный эксперимент произведён n раз;
2. При этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Определение. *Вероятностью осуществления события A называют эмпирический (т. е. найденный экспериментальным путём) предел:*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Замечание. *Можно показать, что для статистического определения останутся в силе доказанные выше свойства вероятностей.*

Замечание. *У статистического определения полным-полно недостатков:*

1. *Никакой эксперимент не может быть произведён бесконечное много раз;*
2. *С точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.*

2.4 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
2. $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω.

Определение. *β называется сигма-алгеброй*[9] *событий, если выполнены условия:*

1. *Если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;* [10]
2. *Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \beta$.*

Основные следствия (свойства?):

[9]При ведении лекций слово «сигма» иногда заменялось на букву δ (дельта — `\delta` в LaTeX). Буква «сигма» выглядит как σ. Лектор говорит, что корректнее всего словосочетание «сигма-алгебра» вообще не сокращать и писать полностью, не используя греческие буквы. — Прим. ред.

[10]Обратите внимание, что $A \subseteq \Omega$, но $A \in \beta$, т. к. элементы множества β — подмножества из Ω. — Прим. лект.

1. $\Omega \in \beta$;
2. $\emptyset \in \beta$;
3. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$;
4. Если A, $B \in \beta$; то $A \setminus B \in \beta$.

Доказательства этих следствий:

1. По определению $\beta \neq \emptyset \implies \exists\, A \subseteq Q\colon A \in \beta$; из определения сигма-алгебры (аксиома 1) $\exists\, A \in \beta \implies \overline{A} \in \beta$; тогда из второй аксиомы следует, что $\exists\, (A + \overline{A}) \in \beta$; т. к. $A + \overline{A} = \Omega$, то $\Omega \in \beta$.
2. Т. к. $\Omega \in \beta$ (по следствию 1), то, по аксиоме 1, $\overline{\Omega} \in \beta$, а $\overline{\Omega} = \emptyset$. Следовательно, $\emptyset \in \beta$.
3. Из существования событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$ по аксиоме 1 следует, что существуют дополнения этих событий $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}, \ldots \in \beta$. По аксиоме 2 следует существование объединения $\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots \in \beta$, и из аксиомы 1 — существование дополнения этого объединения: $\overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots} \in \beta$. Из этого, по законам де Моргана, получается $\overline{\overline{A_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot \ldots \in \beta$, что тривиально преобразуется в $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$.
4. Из свойств операций над множествами можно заключить, что $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$. По аксиоме 1, из $B \in \beta \implies \overline{B} \in \beta$. По следствию 3, A, $\overline{B} \in \beta \implies A \cdot \overline{B} \in \beta$, что, собственно, является утверждением $A \setminus B \in \beta$.

2.5 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;
2. β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение. *Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция*

$$P\colon \beta \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

1. *$\forall A \in \beta \implies P(A) \geqslant 0$ (аксиома неотрицательности);*

2. *$P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);*
3. *Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).*

Замечание 1. *Аксиомы 1-3 называются аксиомами вероятности.*

Свойства вопроса:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;

Доказательства этих свойств:

1. По акс. 2? сигма-алгебры $\exists A + \overline{A} = \Omega$; по аксиоме вероятности №2 $P(\Omega) = 1 = P(A + \overline{A})$; по аксиоме вероятности №3 (A и $\overline{A}$ несовместны), $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega})$; по свойству №1 $P(\emptyset) = 1 - \overset{=1 \text{ (по аксиоме 2)}}{P(\Omega)} = 0$
3. $A \subseteq B \overset{\text{(по рисунку)}}{\Longrightarrow} B = A + (B \setminus A)$

(см. рисунок 15)

Тогда

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) =$$
$$\overset{A, B \setminus A \text{ несовместны, используем аксиому 3}}{=}$$
$$= P(A) + \overset{\geqslant 0 \text{ по аксиоме 1}}{P(B \setminus A)} \geqslant P(A)$$
$$\implies P(B) \geqslant P(A)$$

2.6 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2. β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение. *Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция*

$$P\colon \beta \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

1. $\forall A \in \beta \implies P(A) \geqslant 0$ *(аксиома неотрицательности);*

2. $P(\Omega) = 1$ *(аксиома нормированности);*

3. *Если* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *— попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:* $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ *(расширенная аксиома сложения).*

Замечание 1. *Аксиомы 1-3 называются аксиомами вероятности.*

Свойства вопроса:

1. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \beta$;

2. Для любого *конечного* набора событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

$$\begin{aligned}
&P(A_1 + \ldots + A_n) = \\
&+ \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} P(A_{i_1}) \\
&- \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) \\
&+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - ... + ...
\end{aligned}$$

Доказательство первого свойства:
Для любых A, B:

1. $A + B = A + (B \setminus A)$,

   (см. рисунок 16)

   при этом $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$.

   В соответствии с аксиомой 3,

   $$P(A+B) = P(A) + P(B \setminus A) \tag{2}$$

2. $B = AB + (B \setminus A)$,

   (см. рисунок 17)

   причём $(AB)(B \setminus A) = \emptyset$.

   По аксиоме 3, имеем $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$. Подставим результат в 2 и получим

   $$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

2.7 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трём основным свойствам безусловной вероятности.

Определение. *Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B, называется число*

$$P(A \mid B)^{11} = \frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

Замечание. *Иногда, чтобы подчеркнуть разницу, «обычную» вероятность $P(A)$ называют «безусловной».*

Если зафиксировать событие B и рассматривать $P(A \mid B)$ как функцию события A, то оказывается, что условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной.

Теорема. *Пусть*

[11] В разговорной речи читается как P от A при B. — Прим. лект.

1. *Зафиксировано событие* B, $P(B) \neq 0$;

2. $P(A \,|\, B)$ *рассматривается как функция события* A.

   Тогда $P(A \,|\, B)$ *обладает всеми свойствами безусловной вероятности.*

Доказательство. *Докажем, что условная вероятность* $P(A \,|\, B)$ *удовлетворяет трём аксиомам вероятности:*

1. $P(A \,|\, B) = \dfrac{\overbrace{P(AB)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \implies P(A|B) \geqslant 0.$

2. $P(\Omega \,|\, B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

3.

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots \,|\, B) = \frac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots)B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1 B + A_2 B + \ldots + A_n B + \ldots) \underset{A_i, A_j \text{ несовместны, } i \neq j;\ A_i B \subseteq A_i,\, A_j B \subseteq A_j \implies (A_i B) \cap (A_j B) = \emptyset, \text{ и тогда по аксиоме вероятности №3}}{=}$$

$$= \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1 B) + \ldots + P(A_n B) + \ldots] =$$

$$= (\text{ряд})\, \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \ldots + \frac{P(A_n B)}{P(B)} + \ldots =$$

$$= P(A_1 \,|\, B) + \ldots + P(A_n \,|\, B) + \ldots$$

2.8 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. ***Формула умножения вероятностей для двух событий***
Пусть

1. A, B *— события;*

2. $P(A) > 0$.

   Тогда

$$P(AB) = P(A)\, P(B \,|\, A)$$

2.8 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Доказательство. *Т. к.* $P(A) > 0$*, то определена условная вероятность*

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

из чего напрямую следует

$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A)$$

Теорема. ***Формула умножения вероятностей для*** n ***событий***

Пусть

1. $A_1,\ \ldots,\ A_n$ *— события;*
2. $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

Доказательство. ...

1. *Обозначив* $k = \overline{1, n-1}$*, имеем* $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$.

   По свойству 3 вероятности $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geqslant P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$.

   Следовательно, все условные вероятности, входящие в правую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1})$*, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.*

2. *Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий*[12] $(P(A_{mf}B_{mf}) = P(A_{mf})P(B_{mf} \mid A_{mf}))$*:*

$$P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf1}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf1}}) =$$

$$= P(\overbrace{\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}}_{A_{mf2}} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf2}}}^{A_{mf1}}) \cdot P(\overbrace{A_n}^{B_{mf1}} \mid \overbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}^{A_{mf1}}) =$$

$$= P(\overbrace{\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-3}}_{A_{mf3}} \cdot \underbrace{A_{n-2}}_{B_{mf3}}}^{A_{mf2}}) \cdot P(\overbrace{A_{n-1}}^{B_{mf2}} \mid \overbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}}^{A_{mf2}}) \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$$

$$= \ldots =$$

$$= P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})$$

---

[12] Т. к. обозначения A, B накладываются на уже используемые, то при иллюстрации применения этой формулы будем использовать индекс $_{mf}$ (multiplication formula). — Прим. ред.

2.9 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение. *События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)\,P(B)$.*

Теорема. ...

1. *Пусть $P(B) > 0$.*

   Утверждение «A и B — независимы» равносильно $P(A\,|\,B) = P(A)$;

2. *Пусть $P(A) > 0$.*

   Утверждение «A и B — независимы» равносильно $P(B\,|\,A) = P(B)$.

Доказательство. ...

1. *Сначала докажем, что если A и B — независимые, то $P(A\,|\,B) = P(A)$. По определению независимых событий, $P(AB) = P(A)P(B)$. По определению условной вероятности,*

   $$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

   Теперь докажем обратное.

   Пусть $P(A\,|\,B) = P(A)$. Докажем, что $P(AB) = P(A)P(B)$.

   $$P(AB) \overset{\text{по ф-ле умножения вероятностей}}{=} P(B)\cdot \overset{=P(A)}{P(A\,|\,B)} = P(B)P(A)$$

2. *Доказательство второго пункта теоремы аналогично.*

Замечание. *Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия*

$$P(A\,|\,B) = P(A) \text{ или } P(B\,|\,A) = P(B) \tag{3}$$

Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда $P(A)$ или $P(B)$ отлично от нуля. Условие же $P(AB) = P(A)P(B)$ «работает» всегда без ограничений и, как мы показали выше, при выполнении соответствующих требований эквивалентно 3.

2.10 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

Определение. *События $A_1, \ldots, A_n$ называется попарно независимыми, если* [13]

$$\forall\forall\, i \neq j;\ i,\, j \in \{1,\, \ldots,\, n\}\ P\{A_i A_j\} = P\{A_i\} P\{A_j\}$$

Определение. *События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если*

$$\forall\, k \in \{2,\, \ldots,\, n\}\, \forall\forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k\ P\{A_{i_1},\, \ldots,\, A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot \ldots \cdot P\{A_{i_k}\}$$

Замечание 1. *Условие из последнего определения означает, что должны выполняться следующие равенства*

$$\begin{aligned}
&k = 2\colon P\{A_{i_1},\, A_{i_2}\} = P\{A_{i_1}\}\, P\{A_{i_2}\}\\
&k = 3\colon P\{A_{i_1},\, A_{i_2},\, A_{i_3}\} = P\{A_{i_1}\}\, P\{A_{i_2}\}\, P\{A_{i_3}\}\\
&\ldots\\
&k = n\colon\ \ldots
\end{aligned}$$

Замечание 2. *Очевидно, что если события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то они и попарно независимы. Обратное неверно.*

Пример. ***(Бернштейна)***

Рассмотрим правильный тетраэдр[14]*, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3.*

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Событие A_1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём A_2 для 2, A_3 для 3. Давайте покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. *Докажем, что они независимы попарно. Т. к. $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, то*

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)\, P(A_2) = \frac{1}{4}$$

Событие $A_1 A_2$ означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2.

Всё аналогично для $P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$.

---

[13] Обозначение $\forall\forall$ является математическим сленгом и технически некорректно. Тем не менее, это удобный способ обозначения того, что в выражении должно стоять несколько $\forall$ подряд. — Прим. лект.

[14] Трёхмерная фигура, состоящая из четырёх треугольников. — Прим. ред.

2. *Проверим равенство* $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$, *которое, казалось бы, должно равняться* $\frac{1}{8}$. *Но произведение событий* A_1, A_2, A_3 *означает, что на нижней грани присутствуют и* 1, *и* 2, *и* 3, *вероятность чего равна* $\frac{1}{4}$.

   И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

   Следовательно, события A_1, A_2, A_3 *не являются независимыми в совокупности.*

2.11 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а $(\Omega,\, \beta,\, P)$ — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение. *Говорят. что события* $H_1,\, \ldots,\, H_n \in \beta$ *образуют полную группу событий, если*

1. $P(H_i) > 0,\ i = \overline{1, n}$;

2. $H_iH_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$;

3. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$.

Теорема. ***Формула полной вероятности.***
Пусть

1. $H_1,\, \ldots,\, H_n$ — *полная группа событий;*

2. $A \in \beta$ — *событие.*

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A \,|\, H_1)P(H_1) + \ldots + P(A \,|\, H_n)P(H_n)$$

Доказательство. ...

(см. рисунок 19)

1. $A = A\Omega \overset{\Omega = H_1 + \ldots + H_n}{=} A \cdot (H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n$.

   Принимая $i \neq j$: $H_i \neq \emptyset$, $H_j \neq \emptyset$, *но* $(AH_i) \subseteq H_i$, $(AH_j) \subseteq H_j \implies (AH_i)(AH_j) = \emptyset$, *т. е.* AH_i *попарно не пересекаются.*

2. *Тогда*

$$P(A) = P(AH_1 + ... + AH_n) =$$
$$\overset{AH_i\ \text{попарно не пересекаются}}{=}$$
$$= P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) =$$
$$\overset{\text{т. к. } P(H_i)>0,\ \text{то } P(AH_i)=P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{=}$$
$$= P(A\,|\,H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|\,H_n)P(H_n)$$

2.12 Доказать теорему о формуле Байеса.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а $(\Omega,\ \beta,\ P)$ — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение. *Говорят. что события $H_1,\ \ldots,\ H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если*

1. $P(H_i) > 0,\ i = \overline{1, n}$*;*
2. $H_iH_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$*;*
3. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$*.*

Теорема. *Пусть*

1. $H_1,\ \ldots,\ H_n$ — *полная группа событий;*
2. $P(A) > 0$*.*

Тогда

$$P(H_i\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,H_i)P(H_i)}{P(A\,|\,H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|\,H_n)P(H_n)},\ i = \overline{1, n}$$

Доказательство.

$$P(H_i\,|\,A) \overset{\text{по опр. условной вероятности}}{=}$$
$$= \frac{P(AH_i)}{P(A)} \overset{\text{по ф-ле умножения в числителе, полной вероятности в знаменателе}}{=}$$
$$= P(H_i\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,H_i)P(H_i)}{P(A\,|\,H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|\,H_n)P(H_n)},\ i = \overline{1, n}$$

2.13 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Давайте рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов, т. е. пространство элементарных исходов у нас будет состоять из двух элементов ($|\Omega| = 2$).

Один из элементарных исходов условно будем называть успехом, второй — неудачей. Пусть p — вероятность осуществления успеха в случайном эксперименте, а q ($q = 1 - p$) — вероятность неудачи.

Определение. *Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, т. е. вероятность реализации успеха в i-ом испытании не зависит от исходов первого, второго, ..., $i - 1$-ого испытаний.*

Теорема. *Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство. ...

1. *Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа $(x_1, \ldots, x_n)$, где*

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в испытании имел место успех;} \\ 0, & \text{если в испытании имела место неудача.} \end{cases}$$

2. *Пусть*

$$A = \{ \text{ в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов } \}$$

Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц и $n - k$ нулей.

В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Каждая такая расстановка однозначно определяется номерами позиций, в которых будут записаны единички. В остальные позиции будут записаны нули.

Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i, и тогда общая вероятность исхода будет равна $p^k q^{n-k}$.

Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_n^k штук, что означает

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

A Комбинаторика

Пусть X — некое множество. Для примеров определим $X = \{\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\,\}$.

A.1 Сочетания без повторений

Определение. *Сочетанием без повторений из n ($n = |X|$) элементов по m называется любое неупорядоченное подмножество множества X, содержащее m различных элементов.*

Кол-во таких подмножеств обозначается как C_n^m и равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

A.2 Размещения без повторений

Определение. *Размещением без повторений из n элементов (исходного множества, $n = |X|$) по m (длина кортежа) называется кортеж, состоящий из m различных элементов множества X.*

Примеры. $(1,\,2,\,4)$, *но не* $(5,\,5,\,4)$.

Кол-во возможных размещений без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

A.3 Перестановки без повторений

Перестановки без повторений — крайний случай размещений без повторений.

Определение. *Перестановкой без повторений называют называют кортеж, состоящий из $n = |X|$ различных элементов множества X.*

Кол-во возможных перестановок без повторений:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Замечание. *Три предыдущих понятия связаны как*

$$A_n^m = P_m C_n^m$$

A.4 Размещения с повторениями

Определение. *Размещением с повторениями из* n *(*$n = |X|$*) по* m *элементов называется любой элемент из* $X^m = X \times X \times \ldots \times X$.

Примеры. $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(1, 4, 4, 4, 2)$.

Кол-во возможных размещений с повторениями:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m$$

A.5 Перестановки с повторениями

Определение. *Перестановкой с повторениями называют кортеж длины* n *из элементов множества* X*, в котором каждый элемент* $x_i \in X$ *повторяется* n_i, $i = \overline{1, k}$ *раз (*$\sum_i^k n_i = n$*).*

Кол-во возможных перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \; n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$