ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x,t)$

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{2}{R}\alpha(x)T+\frac{2T_0}{R}\alpha(x) \qquad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t=0, \quad T(x,0)=T_0, \\ x=0, \quad -k(T(0))\dfrac{\partial T}{\partial x}=F_0, \\ x=l, \quad -k(T(l))\dfrac{\partial T}{\partial x}=\alpha_N\,(T(l)-T_0) \end{cases}$$

В обозначениях уравнения (14.1) лекции №14

$$p(x)=\frac{2}{R}\alpha(x), \qquad f(u)\equiv f(x)=\frac{2T_0}{R}\alpha(x).$$

2. Разностная схема с разностным краевым условием при $x=0$ получена в Лекции №14 (14.6),(14.7) и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо получить интегро -интерполяционным методом разностный аналог краевого условия при $x=l$, точно так же, как это сделано при $x=0$ (формула (14.7)). Для этого надо проинтегрировать на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] выписанное выше уравнение (1) и учесть, что поток $\hat{F}_N=\alpha_N\,(\hat{y}_N-T_0)$, а $\hat{F}_{N-1/2}=\hat{\chi}_{N-1/2}\dfrac{\hat{y}_{N-1}-\hat{y}_N}{h}$.

3. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$k(T)=a_1(b_1+c_1T^{m_1})$, Вт/см К,

$c(T) = a_2 + b_2\ T^{m_2} - \dfrac{c_2}{T^2}$,   Дж/см^{3}К.

a_1=0.0134, b_1=1, c_1=4.35 10^{-4}, m_1=1,

a_2=2.049, b_2=0.563 10^{-3}, c_2=0.528 10^5, m_2=1.

$\alpha(x) = \dfrac{c}{x-d}$,

$\alpha_0 = 0.05$ Вт/см^2 К,

$\alpha_N = 0.01$ Вт/см^2 К,

$l =$ 10 см,

$T_0 = 300$К,

$R = 0.5$ см,

$F(t) = 50$ Вт/см^2 (для отладки принять постоянным).

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы)**.**

Постановки задач в данной лабораторной работе и работе №3 во многом совпадают. Отличия заключаются в следующем:

1. Сформулированная в данной работе математическая модель описывает **нестационарное** температурное поле $T(x,t)$, зависящее от координаты x и меняющееся во времени.

2. Свойства материала стержня привязаны к температуре, т.е. теплоемкость и коэффициент теплопроводности $c(T), k(T)$ зависят от T, тогда как в работе №3 $k(x)$ зависит от координаты, а c = 0.

3. При $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком $F(t)$, в общем случае зависящим от времени, а в работе №3 поток был постоянный.

Если в настоящей работе задать поток постоянным, т.е. $F(t)$=const, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(x,t)$. Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет и должно совпасть с температурным распределением $T(x)$, получаемым в лаб. работе №3, если все параметры задач совпадают, в частности, вместо $k(T)$ надо использовать $k(x)$ из лаб. работы №3. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стержня положить поток $F(t)$=0, то будет происходить остывание, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0.

При произвольной зависимости потока $F(t)$ от времени температурное поле будет как-то сложным образом отслеживать поток.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует обращать внимание на то, что решения, в которых температура превышает примерно 2000К, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро -интерполяционным методом.

2. График зависимости температуры $T(x, t_m)$ от координаты x при нескольких фиксированных значениях времени t_m (аналогично рисунку в лекции №14) при заданных выше параметрах. Обязательно представить распределение $T(x,t)$ в момент времени, соответствующий установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с некоторой точностью (например, $\left| \frac{T(t+\tau) - T(t)}{T(t+\tau)} \right| < 10^{-4}$), т.е. имеет место выход на стационарный режим. На этой стадии левая часть дифференциального уравнения близка к нулю, и на самом деле решается уравнение из лабораторной работы №3 (отличие только в том, что там было линейное уравнение).

3. График зависимости $T(x_n, t)$ при нескольких фиксированных значениях координаты x_n. Обязательно представить случай *n*=0, т.е. $x = x_0 = 0$.

Вопросы при защите лабораторной работы.

Ответы на вопросы дать письменно в Отчете о лабораторной работе.

1. Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения, качественный анализ). Учесть опыт выполнения лабораторной работы №3.

2. Выполните линеаризацию уравнения (14.8) по Ньютону, полагая для простоты, что все коэффициенты зависят только от одной переменной $\hat{y}_n$. Приведите линеаризованный вариант уравнения и опишите алгоритм его решения. Воспользуйтесь процедурой вывода, описанной в лекции №8.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы, и эти ответы не являются копией ответов в ранее сданных работах - 15 баллов (максимум).

3. В дополнение к п.1 даны удовлетворительные ответы на отдельные вопросы - 10-14 баллов.