Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Математическое моделирование

Лабораторные

Студент	Инфлянскас Р. В.
Группа	ИУ7-61
Преподаватель	Градов В. М.

28 мая 2014 г.

Оглавление

1. Лабораторная работа №1

Условие Методом Пикара и методом Рунге-Кутта 2-ого порядка точности найти решение дифференциального уравнения: $y'(x) = x^2 + y^2; y(0) = 0$

1.1. Ввод:

h, n

1.2. Вывод:

	y_n		
x_n	Метод Пикара	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта второго порядка
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

1.3. II часть (необязательная)

$y' = \frac{y-x}{y+x}$

1.4. Метод Пикара

Результат:

$$y^{(3)} = \frac{x^3}{3}(1 + \frac{1}{21}x^4 + \frac{2}{693}x^8 + \frac{1}{19845}x^{12}) \tag{1}$$

1.5. Метод Рунге-Кутта

$$y_n = y(x_n)$$

1.6. Метод Эйлера (Метод Рунге-Кутта первого порядка)

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h$$

1.7. Метод Рунге-Кутта второго порядка

а) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)$
б) $y'_{n+\frac{1}{2}} = f(x_n + \frac{1}{2}, y_n + \frac{1}{2})$
в) $y_{n+1} = y_n + y'_{n+\frac{1}{2}}h$

2. Лабораторная работа №2

Условие Имеется источник накачки. Лампа — разрядный промежуток, наполнена ксеноном, под высоким давлением. Надо рассчитать контур.

Рассчитать временные характеристики разрядного контура с нелинейным активным сопротивлением, а именно: $I(t), U_C(t), R_p(t)$, до того момента когда $I = e^{-1}I_{max}$

Уравнение контура:

$$\begin{cases} L_k\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + (R_K + R_0(I))I - U_C = 0 \\ C_K\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = -I \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия: $t = 0,\ I = I_0,\ U_C = U_0$.

$$R_p = \frac{l_e}{2\pi\int_0^R \sigma(T(r))rdr}$$

σ — теплопроводность.

Пусть $z = r/R$:

$$R_p = \frac{l_e}{2\pi r^2\int_0^1 \sigma(T(z))zdz} \tag{3}$$

Интегрировать Симпсоном.

Температурный профиль $(T(r,p))$ ищется из уравнения энергии:

$$\rho(\frac{\partial\varepsilon + \frac{v^2}{2}}{\partial t} + \vec{v}\nabla(\varepsilon + \frac{v^2}{2})) = -divp\vec{v} + Q + \vec{F}\vec{v} - div\vec{F}_T \tag{4}$$

Скорость ищется из уравнения неразрывности:

$$q = C\int_\nu k_\nu(u_{\nu p} - u_\nu)d\nu \tag{5}$$

$$F_\nu = -\frac{C}{3k_\nu}\frac{du_\nu}{dr} \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}rF_\nu}{\mathrm{d}r} = Ck_\nu(u_{\nu p} - u_\nu) \tag{7}$$

$$\frac{\pi R^2 p_0}{kT^0} = 2\pi\int n_T(r,p)rdr \tag{8}$$

2.1. Метод трапеций

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{U_C - (R_K + R_p(I))I}{L_K} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{I}{C_K} \tag{10}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dU_c = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -\frac{I}{C_k}dt$$

$$U_{C_{n+1}} = U_{C_n} - \frac{0.5\tau(I_{n+1} + I_n)}{C_k}$$

Построим неявную разностную схему, применяя метод трапеций, получим:

$$I_{n+1}^{(s+1)} = \frac{\frac{\tau}{L_k}U_{Cn} + [1 - \frac{0.25\tau^2}{L_K C_K} - \frac{0.5\tau}{L_K}(R_K + R_p(I_n))]I_n}{\frac{0.25\tau^2}{L_K C_K} + \frac{0.5\tau}{L_K}(R_K + R_p(I_{n+1}^{(s)})) + 1} \tag{11}$$

$$\tau \sim 10^{-6}\text{с} \tag{12}$$

Помимо метода трапеций реализовать метод Рунге-Кутты IV порядка.
Определять сходимость:

$$\left|\frac{R_p^{(s)} - R_p^{(s-1)}}{R_p^{(s)}}\right| < \varepsilon = 10^{-3} \tag{13}$$

Задаётся таблица: $T(z) = T_0 + (T_w - T_0)z^m$

I, А	T_0, К	m
0.5	6400	0.4
1	6790	0.55
5	7150	1.7
10	7270	3
50	8010	11
200	9185	32
400	10010	40
800	11140	41
1200	12010	39

Кроме того имеется таблица $\sigma(T)$:

T, K	$\sigma, \frac{1}{\Omega \mathrm{cm}}$
2000	$3.09E-04$
3000	$3.09E-03$
4000	$3.09E-02$
5000	$2.70E-01$
6000	$2.05E00$
7000	$6.06E00$
8000	$1.20E01$
9000	$1.99E01$
10000	$2.96E01$
11000	$4.11E01$
12000	$5.41E01$
13000	$6.77E01$
14000	$8.15E01$
15000	$9.38E01$
16000	$1.05E02$
17000	$1.15E02$
18000	$1.24E02$
19000	$1.35E02$
20000	$1.50E02$

Параметры задачи:

$$l_e = 12\,\text{см}$$
$$R = 0.35\ \text{см}$$
$$p^0 = 0.36\,\text{ат}$$
$$T_w = 300\,\text{K}$$
$$L_K = 19 \times 10^{-6}\,\text{Гн}$$
$$C_K = 60 \times 10^{-6}\ \Phi$$
$$R_K = 0.025\,\text{Ом}$$
$$U_{C_0} = 1500\,\text{В}$$
$$I_0 = 0..1\ \text{A}$$
$$\tau \sim 10^{-6}\ \text{с}$$
$$\varepsilon = 10^{-2}$$

Попробовать решить нахождение тока дихотомией.

3 Лабораторная работа №3

3.1 Вариант №1

Математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} -\vec{\nabla}\cdot\vec{F}T + Q = 0 \\ F = -\lambda\frac{dT}{dx} \end{cases} \tag{14}$$

$$x = 0, -\lambda\frac{dr}{dx} = F_0 \tag{15}$$

$$x = l, -\lambda\frac{dr}{dx} = \alpha(T(l) - T_{OC}) \tag{16}$$

Энергия в единицу объёма вычисляется как:

$$Q = -\frac{\alpha(T(x) - T_{OC}) \cdot 2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R}(T(x) - T_{OC}) \tag{17}$$

Где $\alpha \sim 10^{-4}\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \div 10\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, T_{OC} — температура окружающей среды.

$$\frac{-d(T(x)\frac{dr}{dx})}{dx} - \frac{2\alpha}{R}(T(x) + \frac{2\alpha}{R}T_{OC} = 0 \tag{18}$$

$$p(x) = -\frac{2\alpha(x)}{R} \tag{19}$$

$$f(x) = -\frac{2\alpha(x)}{R}T_{OC} \tag{20}$$

Вывести граничные условия к необходимому виду:

$$K_n y_{n-1} + M_n y_n = p_n \tag{21}$$

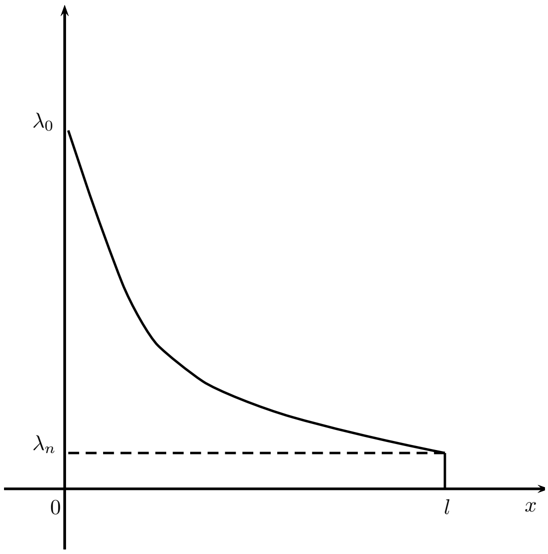
3.1.1 Ввод

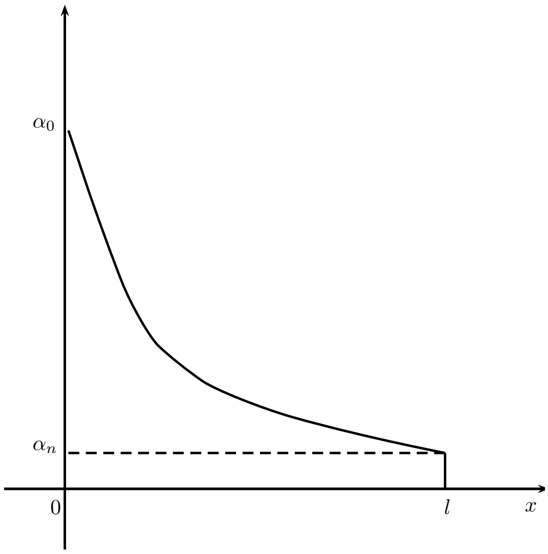
$$\lambda(x) = \frac{a}{x - b} \tag{22}$$

$$\lambda_0 = \frac{a}{-b} \tag{23}$$

$$\lambda_n = \frac{a}{c - b} \tag{24}$$

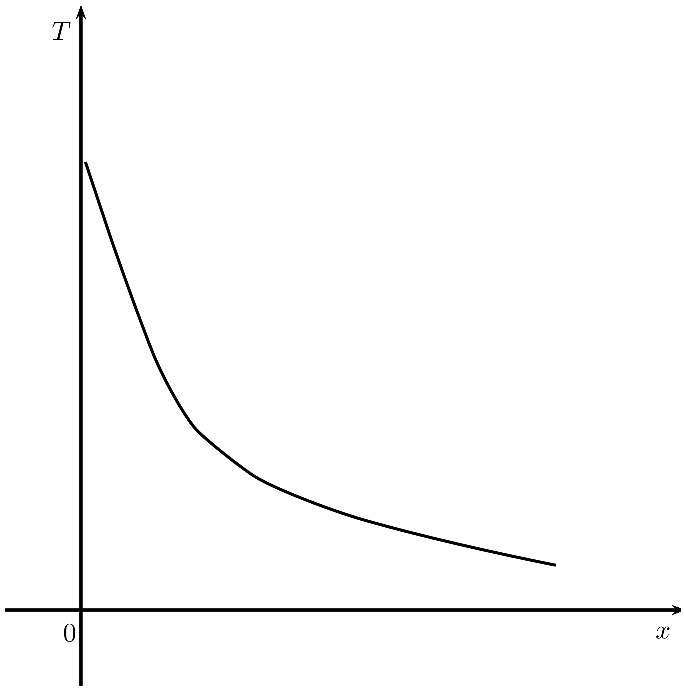
$$\lambda_0 = 0.1\,\frac{\text{Вт}\cdot\text{К}}{\text{см}^2}$$
$$\lambda_n = 0.2\,\frac{\text{Вт}\cdot\text{К}}{\text{см}^2}$$
$$l = 10\,\text{см}$$
$$R = 0.1\,\text{см}$$
$$T_{OC} = 300\,\text{К}$$
$$\alpha_0 = 2e-2\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}}$$
$$\alpha_n = 1.5e-2\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}}$$
$$F_o = 100\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$$





3.1.2 Вывод

Требуется получить график $T(x)$:



3.2 Вариант №2

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + D_n y_{n+1} = -F_n$$

$$A_n = \frac{z_{n-\frac{1}{2}}}{k_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}(z_n - z_{n-1})}$$

$$D_n = \frac{z_{n+\frac{1}{2}}}{k_{\nu_{n+\frac{1}{2}}}(z_{n+1} - z_n)}$$

$$B_n = A_n + D_n + 3R^2 k_{\nu_n} V_n$$

$$F_n = 3R^2 k_{\nu_n} V_n U_{p_{\nu_n}}$$

$$V_n = \frac{z_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$U_{p_{\nu_n}} = \frac{8\pi h\nu^3}{(e^{\frac{h\nu}{kT_n}-1} - 1)}$$

$$U^*_{p_\nu} = U_{p_{\nu_n}} \times 10^{15} = \frac{6.1679 \times 10^{-4}\nu^{*3}}{\frac{e^{47990\nu^*}}{T-1}}$$

3.3 Усложнение: дополнительное условие

$$
\begin{aligned}
-\lambda \frac{dT}{dx} &= \epsilon \delta T^4 \\
-\lambda_n \frac{y_n - y_{n-1}}{n} &= \epsilon \delta y^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y_{n-1} = \xi_n y_n + \eta_n \\
&y_n + \xi_n \eta_n + \eta_n + \frac{h\epsilon\delta}{\lambda_n} y_n^4 = 0
\end{aligned}
$$

3.4 Усложнение: разрывные коэффициенты

При $x = x_2$,

$$
\begin{cases}
u(x_k - 0) = u(x_k + 0) \\
-\lambda \frac{du}{dx}|_{x_k - 0} = -\lambda \frac{du}{dx}|_{x_k + 0}
\end{cases}
$$

$$
\frac{d}{dx} \underbrace{(\lambda(x) \frac{du}{dx})}_{F_T} - p(x)u - f(x) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
F_{k-1/2} - F_{k+1/2} - \int_{x_k - 1/2}^{x_k} p(x)u(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k+1/2}} p(x)u(x)dx - \\
- \int_{x_k - 1/2}^{x_k} f(x)dx - \int_{x_k}^{x_k + 1/2} f(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

4. Лабораторная работа №4

4.1. Теория

$$c(u)\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\lambda(u)\frac{\delta u}{\delta r}) + f(u) \tag{25}$$

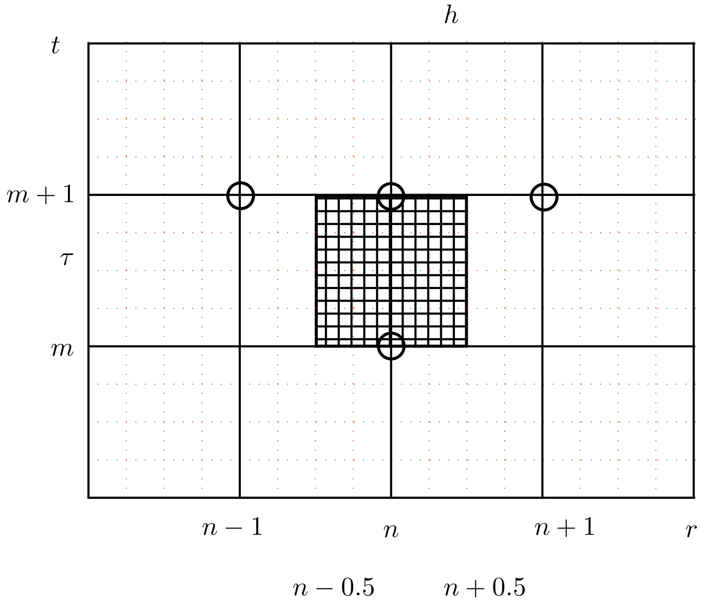


Рис. 1 — Сетка

$$\int_{r_{n-0.5}}^{r_{n+0.5}} rdr \int_{t_m}^{t_{m+1}} c\frac{\delta u}{\delta t}dt = \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-0.5}}^{r_{n+0.5}} \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta \rho}(r\,\underbrace{\lambda\frac{\delta u}{dr}}_{-F})rdr + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{r_{n-0.5}}^{r_{n+0.5}} f(u)rdr$$

$$\int_{r_{n-0.5}}^{r_{n+0.5}} rdr\hat{c}(\hat{y} - y) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt(r_{n-0.5}F_{n-0.5} - r_{n+0.5}F_{n+0.5}) + \hat{\varphi}_n$$

$$\hat{c}_n(\hat{y}_n - y_n)v_n = (r_{n-0.5}\hat{F}_{n-0.5} - r_{n+0.5}\hat{F}_{n+0.5})\tau + \hat{\varphi}_n$$

$$F_{n+0.5} = \kappa_{n+0.5}\frac{y_n - y_{n+1}}{h}$$

где $v_n = \frac{r_{n+0.5} - r_{n-0.5}}{2}$, $\kappa_{n+0.5} = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$

$$\hat{c}_n(\hat{y}_n - y_n)v_n = (r_{n-0.5}\kappa_{n-0.5}\frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - r_{n+0.5}\kappa_{n+0.5}\frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h})\tau + \hat{\varphi}_n$$

Приходим к выражению для прогонки:

$$\widehat{A}_n\widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n\widehat{y}_n + \widehat{D}_n\widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n$$

где $\widehat{A}_n = \frac{r_{n-0.5}\kappa_{n-0.5}\tau}{h}$, $\widehat{D}_n = \frac{r_{n+0.5}\kappa_{n+0.5}\tau}{h}$

$$\widehat{B}_n = \widehat{A}_n + \widehat{D}_n + \widehat{c}_n v_n$$
$$\widehat{F}_n = \widehat{\varphi}_n + \widehat{c}_n y_n v_n$$

Граничные условия получаются интегроинтерполяционным методом:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_0^{r_{0.5}} rdr4.1$$

На оси:

$$\frac{\delta u}{\delta r}|_{n=0} = 0 \implies F_0 = 0$$

На поверхности:

$$-\lambda\frac{\delta u}{\delta r}|_{n=R} = \alpha(u - u_{OC}) \implies F_N = \alpha(y_n - u_{OC})$$

Граничные условия:

$$K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_1$$
$$K_N y_N + M_N y_{N-1} = P_N$$

Решать можно 3 способами:

а) $A_n\widehat{y}_{n-1} - B_n\widehat{y}_n + D_n\widehat{y}_{n+1} = -F_n$

б) Простые итерации (лучше, с точки зрения объёма вычислительной работы): $A_n^{(s-1)}\widehat{y}_{n-1}^{(s)} - B_n^{(s-1)}\widehat{y}_n^{(s)} + D_n^{(s-1)}\widehat{y}_{n+1}^{(s)} = -F_n^{(s-1)}$

в) Линеаризация по Ньютону.

4.1.1. Многомерные уравнения

Применительно к нашей лабораторной работе:

$$c(u)\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\lambda(u)\frac{\delta u}{\delta r}) + \frac{\delta}{\delta z}(\lambda\frac{\delta u}{\delta r}) + f(r, z)$$

Дополнительные условия:

$$\begin{aligned} \text{Н.у.} \quad & t = 0, u(r,z,0) = \mu(r,z) \\ \text{Г.у.} \quad & r = 0, \frac{\delta u}{\delta r} = 0 \\ & r = R, -\lambda \frac{\delta u}{\delta r} = \alpha(u - u_{OC}) \\ & z = 0, -\lambda \frac{\delta u}{\delta z} = F_0 \\ & z = l, -\lambda \frac{\delta u}{\delta z} = \alpha(u - u_{OC}) \end{aligned}$$

Разностная схема получается интегроинтерполяционным методом:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} d\tau \int_{r_{n-0.5}}^{r_{n+0.5}} r dr \int_{z_{k-0.5}}^{z_{k+0.5}} 4.1.1 dz$$

Чтобы понять идеи решения многомерных уравнений рассмотрим упрощённый вариант уравнения:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \alpha\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right) + f(x,z)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y_{nk} &= \frac{\alpha}{h_x^2}(y_{n-1,k} - 2y_{n,k} + y_{n+1,k}) \\ \Lambda_2 &= \frac{\alpha}{h_z^2}(y_{n,k-1} - 2y_{n,k} + y_{n,k+1}) \end{aligned}$$

$$\frac{\hat{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} = \Lambda_1 \hat{y}_{nk} + \Lambda_2 \hat{y}_{nk} + f_{nk}$$

Применим экономичную схему (продольно-поперечная схема).

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0.5\tau} & = \Lambda_1 \bar{y}_{nk} + \Lambda_2 y_{nk} + f_{nk} \\ \frac{\hat{y} - \bar{y}_{nk}}{0.5\tau} & = \Lambda_1 \bar{y}_{nk} + \Lambda_2 \hat{y}_{nk} + f_{nk} \end{cases}$$

4.1.2. Наш случай

$$
\begin{aligned}
u &= T \\
f(r,z) &= jE = \sigma E^2 \\
\sigma &= \frac{1}{\rho} \\
\rho &= \rho_0(1+\gamma T) \\
E &= \frac{I}{2\pi \int_0^R \sigma r dr} \\
\lambda(T) &= \lambda_0(\frac{T}{\theta})^n \qquad (26) \\
C(T) &= C_0(\frac{T}{\theta})^m \qquad (27) \\
\theta &= 293K
\end{aligned}
$$

Формулы 26 и 27 нужно интерполировать логарифмически.

Начальные условия

$$
\begin{aligned}
z = 0, -\lambda\frac{\delta T}{\delta z} &= F_0 \\
z = l, T(l) &= T_l \\
r = 0, \frac{\delta T}{\delta r} &= 0 \\
r = R, -\lambda\frac{\delta T}{\delta z} &= \alpha(T - T_{OC})
\end{aligned}
$$

Можно решать локально одномерным методом.