



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

### **Лабораторная работа № 3**

**Дисциплина: Моделирование**

**Тема: «Марковские процессы. Уравнения Колмогорова»**

**Студент: Гасанзаде М.А.**

**Группа ИУ7-76Б**

**Оценка (баллы) \_\_\_\_\_**

**Преподаватель : Рудаков И.В.**

Москва.  
2020 г.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	3
Цель работы.....	3
Входные данные.....	3
Результат.....	3
Уравнения Колмогорова в общем виде.....	3
II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.....	5
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	6

# **I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.**

## **Цель работы**

Формализовать систему, количество состояний которой вводится пользователем. Нужно найти среднее, относительное время нахождения системы в каждом из её состояний. Система формализуется матрицей, в заголовках строк и столбцов которой находятся номера состояний:  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . На пересечениях стоят интенсивности перехода из состояния в состояние. Необходимо найти среднее относительное время нахождения системы в каждом из её состояний.

## **Входные данные**

На вход программы подаются:

1. Количество возможных состояний (размер матрицы)
2. Граф состояний (цифровые значения, расставленные в указанном выше порядке)

## **Результат**

Среднее относительное время пребывания в каждом из состояний.

## **Уравнения Колмогорова в общем виде**

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji} - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad i=1, \dots, n$$

Выше, учитывается, что для состояний не имеющих непосредственных переходов, можно считать  $\lambda_{i0} - \lambda_{ji} = 0$ .

Имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний  $p_i(t)$  как функции времени. Для этого составляются и решаются так называемые уравнения Колмогорова особого вида дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Общее правило составления уравнений Колмогорова: в левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (i-го) состояния. В правой части сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.

При  $t \rightarrow \infty$  вероятности состояний будут стремиться к пределам, т.к. в теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое, то финальные вероятности существуют, которые, если существуют и не зависят от начального состояния системы, называются финальными вероятностями состояний.

При  $t \rightarrow \infty$  в системе  $S$  устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состояния  $S_i$  можно истолковать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.

## II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В данном разделе будет рассмотрен вывод программы и представлены изображения.

The screenshot shows a software window with two main sections: "Входные данные" (Input data) and "Вывод" (Output). In the "Входные данные" section, there is a label "Матрица(Кол-тво состояний):" followed by a text box containing the number "4" and a small up/down arrow icon. Below this is a 4x4 matrix table. The first row contains headers "1", "2", "3", "4". The subsequent rows contain numerical values. The cell at row 4, column 4 is highlighted in blue. In the "Вывод" section, there is a button labeled "Вычислить" (Calculate). Below the button, four numerical results are listed: "0.400", "0.200", "0.267", and "0.133".

	1	2	3	4
1	0	1	2	0
2	2	0	0	2
3	3	0	0	1
4	0	3	2	0

Вывод:

0.400  
0.200  
0.267  
0.133

*Рис1. Ответ при тестовых данных*

The screenshot shows a software window with two main sections: "Входные данные" (Input data) and "Вывод" (Output). In the "Входные данные" section, there is a label "Матрица(Кол-тво состояний):" followed by a text box containing the number "3" and a small up/down arrow icon. Below this is a 3x3 matrix table. The first row contains headers "1", "2", "3". The subsequent rows contain numerical values. The cell at row 3, column 3 is highlighted in blue. In the "Вывод" section, there is a button labeled "Вычислить" (Calculate). Below the button, three numerical results are listed: "0.333", "0.333", and "0.333".

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

Вывод:

0.333  
0.333  
0.333

*Рис2. 3x3*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Chapman – Kolmogorov Denklemi Chapman» URL: <https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/vsaglam/108862/Chapman-Kolmogorov%20e%C5%9Fitli%C4%9Finin%20bulunmas%C4%B1%20ve%20uygulanmas%C4%B1.pdf>  
(дата обращения 28.10.2020)
2. «MARKOV ZİNCİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI» URL:  
<http://earsiv.odu.edu.tr:8080/jspui/bitstream/11489/943/1/134-363716%20%C4%B0DR%C4%B0S%20%C3%87EL%C4%B0K.pdf> (дата обращения 28.10.2020)
3. Вентцель, Е. С. Марковские случайные процессы / Е. С. Вентцель // Исследование операций: задачи, принципы, методология -- 2-е издание, стереотипное -- Москва: Наука, 1988.