**Задача по математической логике**

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$\neg((X \,\&\, Y) \,\&\, \neg Z) \vdash (\neg(\neg X \to \neg Y) \vee (Y \to Z))$

<u>Решение</u>.

Преобразуем левую формулу, используя определение конъюнкции $\varphi \,\&\, \psi \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi)$:

$\neg((X \,\&\, Y) \,\&\, \neg Z) = \neg(\neg(X \to \neg Y) \,\&\, \neg Z) = \neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$.

Преобразуем правую формулу, используя определение дизъюнкции $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \to \psi$:

$(\neg(\neg X \to \neg Y) \vee (Y \to Z)) = \neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to Z)$

Следовательно, необходимо доказать:

$\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \vdash \neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to Z)$.

Согласно теореме дедукции, если Г, $A \vdash B$, то Г $\vdash A \to B$. Поэтому достаточно доказать, что $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z),\ \neg\neg(\neg X \to \neg Y),\ Y \vdash Z$, а затем дважды применить теорему дедукции.

Следовательно, будем доказывать, что из гипотез $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$, $\neg\neg(\neg X \to \neg Y)$ и $Y$ выводимо $Z$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ | гипотеза 1 |
| 2 | $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \to (\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ | секвенция 3 |
| 3 | $\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z$ | modus ponens для 1,2 |
| 4 | $\neg\neg(\neg X \to \neg Y)$ | гипотеза 2 |
| 5 | $\neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (\neg X \to \neg Y)$ | секвенция 3 |
| 6 | $\neg X \to \neg Y$ | modus ponens для 4,5 |
| 7 | $Y$ | гипотеза 3 |
| 8 | $(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to X)$ | секвенция 6 |
| 9 | $Y \to X$ | modus ponens для 6,8 |
| 10 | $X$ | modus ponens для 7,9 |
| 11 | $X \to (\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y))$ | секвенция 8 |
| 12 | $\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y)$ | modus ponens для 10,11 |
| 13 | $Y \to \neg\neg Y$ | секвенция 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | $Y \to \neg(X \to \neg Y)$ | секвенция 1 для 13, 12 |
| 15 | $\neg(X \to \neg Y)$ | modus ponens для 7,14 |
| 16 | $\neg\neg Z$ | modus ponens для 15,3 |
| 17 | $\neg\neg Z \to Z$ | секвенция 3 |
| 18 | $Z$ | modus ponens для 16,17 |