1. *Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади такой фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).*

~~~ ~~~

Пусть дана некоторая плоская фигура D. Обозначим через $S_* = \sup S(m)$ и $S^* = \inf S(M)$ (S – площади), где m – всевозможные многоугольники, целиком *содержащиеся в* фигуре D, а M – многоугольники, целиком *содержащие в себе* фигуру D. Тогда область D называют квадрируемой, если $S^* = S_* = S$, при этом S – площадь фигуры.

Пусть D – плоская область. D квадрируема тогда и только тогда, когда её граница имеет площадь нуль.

2. *Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.*

~~~ ~~~

• Пусть тело Q ограничено плоскостью Oxy; графиком функции $z = f(x,y)\ (x, y \in D \subseteq Oxy)$; цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Z и пересекают D.

Разобъём D на непересекающиеся участки Di, так чтобы $\cup Di = D,\ int\ Di \cap int\ Dj = \emptyset$. Внутри Di выберем точку Mi. Тогда объём части $\Delta V_i \cong f(M_i) * S(D_i)$, а весь объём $V(Q) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \cong \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$. Чем меньше ΔS_i, тем точнее формула – переходя к пределу, получаем

$$V(Q) = \lim_{\max_i diam\ D_i \to 0} \sum f(M_i)\Delta S_i$$

• Пусть D – квадрируемая замкнутая плоская область. Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint_D f\ dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sum f(M_i)\Delta S_i$, где $M_i \in D_i, \Delta S_i = S(D_i)$, а d(T) – диаметр разбиения T области D.

3. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.*

~~~ ~~~

2° Линейность: $\iint_D (f1 + f2)dxdy = \iint_D f1\ dxdy + \iint_D f2\ dxdy$; $\iint_D (cf)dxdy = c \iint_D f\ dxdy$.

3° Аддитивность: пусть $D = D1 \cup D2,\ int\ D1 \cap int\ D2 = \emptyset; f(x,y)$ интегрируема в каждой из областей D1, D2. Тогда f интегрируема и в D, причем $\iint_D f\ dxdy = \iint_{D1} f\ dxdy + \iint_{D2} f\ dxdy$

4° Пусть $f(x,y) \geq 0$ в D и интегрируема в D. Тогда и $\iint_D f\ dxdy \geq 0$.

4. *Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.*

~~~ ~~~

Теорема об оценке модуля: Пусть f интегрируема в D. Тогда модуль этой функции |f| интегрируема в D, причем $\left|\iint_D f\ dxdy\right| \leq \iint_D |f|\ dxdy$.

Теорема об оценке интеграла: Пусть функции f и g интегрируемы в D, причем $m \leq f(x,y) \leq M$ и $g(x,y) \geq 0\ \forall(x,y) \in D$. Тогда $m \iint_D g\ dxdy \leq \iint_D fg\ dxdy \leq M \iint_D g\ dxdy$.

Следствие теоремы об оценке: если f интегрируема в D и $m \leq f(x,y) \leq M$, то $m * S \leq \iint_D f\ dxdy \leq M * S$.

Теорема о среднем значении: Пусть f непрерывна в D, а D – линейно связная квадрируемая область (т.е. любые 2 точки можно соединить кривой, лежащей в области). Тогда $\exists M_0 \in D\!:\ f(M_0) = \frac{1}{S} * \iint_D f\ dxdy,\ S = S(D)$.

5. *Сформулировать теорему о вычислении двойного интеграла по прямоугольной области.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть существует прямоугольная область Dy такая, что $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$; $\exists I = \iint_{D_y} f(x,y)\ dxdy$, и $\forall x \in [a,b]\ \exists F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Тогда интеграл $I = I_p = \int_a^b F(x)dx$.

6. *Сформулировать определение y-правильной области и теорему о вычислении двойного интеграла по произвольной y-правильной области.*

~~~ ~~~

Область D на Oxy называют y-правильной, если ее можно задать в виде $D\!: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \end{cases}$.

Теорема: Пусть область D – y-правильная, $\exists \iint_D f\ dxdy = I$ и $\forall x \in [a,b]\ \exists F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\ dy$. Тогда существует повторный интеграл $I_п = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\ dy$, и I=Iп.

7. *Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$; Ф –биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема в Duv; якобиан $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда, $\iint_{D_{xy}} f(x,y)\ dxdy = \iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) * J_\Phi(u,v)\ dudv$.

8. *Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.*

~~~ ~~~

Вычисление массы пластины D. Если плотность определяется как f(x,y), то масса пластины $m = \iint_D f\ dxdy$.

Вычисление объёма z-цилиндрического тела Q, ограниченного функцией z=f(x,y), плоскостью Oxy и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz и пересекают границу D: $V(Q) = \iint_D f(x,y)\ dxdy$

Вычисление площади плоской фигуры. Если фигура занимает область D, то её площадь $S(D) = \iint_D 1\ dxdy$.

9. *Сформулировать определение кубируемого тела и его объема. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).*

Рассмотрим область $G \subseteq R^3$. Пусть q – множество многогранников, которые целиком содержатся в G, $V_* = \sup V(q)$, а Q – множество многогранников, целиком содержащих в себе G, $V^* = \inf V(Q)$. Область G называется кубируемой, если $V^* = V_* = V$, при этом V называют объёмом области G.

Теорема: область $G \subseteq R^3$ кубируема тогда и только тогда, когда её граница имеет объём нуль.

10. *Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.*

• Пусть тело занимает область G, а f(x,y,z) – значение плотности материала тела в точке (xyz). Разобъём тело на непересекающиеся области Gi и в каждой выберем точку Mi. Тогда масса части Gi $\Delta m_i = m(G_i) \cong f(M_i) * \Delta V(G_i) = f(M_i) dV$, а масса всего тела $m(G) = \sum \Delta m_i \cong \sum f(M_i) \Delta V_i$. Чем меньше ΔV_i, тем точнее формула: переходя к пределу имеем

$$m(G) = \lim_{\max diam\ G_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta V_i.$$

• Тройным интегралом функции f(x,y,z) по области G называют число $\iiint_G f(x,y,z)\, dxdydz = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$, где d(T) – диаметр разбиения T области G.

11. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.*

<полностью аналогичны свойствам для двойного интеграла, 3.>

12. *Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из нее, обобщенную теорему о среднем значении для тройного интеграла.*

<оценки аналогичны теоремам для двойного интеграла,4.>

Теорема обобщенная о среднем значении: пусть функция f непрерывна в G, а функция g – интегрируема и знакопостояная в G, а сама G является линейно связанной областью. Тогда $\exists M_0 \in G$: $\iiint_G f(xyz) * g(xyz)\, dxdydz = f(M_0) * \iiint_G g\, dxdydz$.

13. *Сформулировать теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.*

Область G называется z-правильной, если её можно задать в виде $G: \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ z1(xy) \le z \le z2(xy) \end{cases}$ **(*)**.

Теорема: пусть $\exists \iiint_G f\, dxdydz = I$; G задана в виде *; для каждой фиксированной точки $(xy) \in D_{xy}$ $\exists F(xy) = \int_{z1(xy)}^{z2(xy)} f\, dz$. Тогда существует повторный интеграл $I_п = \iint_D F(x,y)\, dxdy$, и I=Iп.

14. *Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле.*

Теорема: Пусть $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$, где $\Phi: \begin{cases} x = x(uvw) \\ y = y(uvw) \\ z = z(uvw) \end{cases}$; Φ – биективна, непрерывна и непрерывно диффрецируема в G_{uvw}; якобиан $J_\Phi \neq 0$ в Guvw; f – интегрируема в Gxyz. Тогда $\iiint_{G_{xyz}} f\, dxdydz = \iiint_{G_{uvw}} f\big(x(uvw), y(uvw), z(uvw)\big) * J_\Phi(uvw)\, dudvdw$.

15. *Сформулировать определение ряда. Сформулировать определения сходящегося ряда, суммы сходящегося ряда и расходящегося ряда.*

Рядом называют пару последовательностей: $a_n, n = 1,2, \ldots$ и $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, где Sn – n-я частичная сумма ряда.

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ называют сходящимся, если существует конечнй предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. В противном случае (предел не существует или раве бесконечности) ряд называют расходящимся. S называют суммой ряда.

16. *Сформулировать линейные свойства сходящихся рядов.*

Теорема: пусть ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся. Тогда ряд вида $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ – также сходится.

17. *Сформулировать необходимый признак сходимости ряда. Сформулировать теорему об остатках.*

Теорема (необходимый признак): Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

n-ым остатком ряда $\sum a_n$ называют ряда $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Теорема (об остатках): Если ряд сходится, то сходится и любой из его остатков. Наоборот – если сходится остаток ряда, то и сам ряд сходится.

18. *Как изменится сходимость ряда, если к нему добавить произвольное конечное число слагаемых? Отбросить? Изменить? Как изменится при этом сумма ряда?*

Следствие из теоремы об остатках: пусть числовой ряд $\sum b_n$ составлен из ряда $\sum a_n$ с использованием добавления, отбрасывания или перестановки любого конечного числа членов. Тогда оба ряда ($\sum a_n$ и $\sum b_n$) сходятся или расходятся одновременно.

19. *Сформулировать критерий Коши сходимости ряда.*

Теорема: ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n > N,\ \forall m \in \mathbb{N}$ выполняется $\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$.

20. *Сформулировать мажорантный и предельный признаки сравнения для рядов.*

Мажорантный признак: пусть $0 \le a_n \le b_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда, если $\sum b_n$ – сходится, то сходится и $\sum a_n$; а если расходится $\sum a_n$, то расходится и $\sum b_n$.

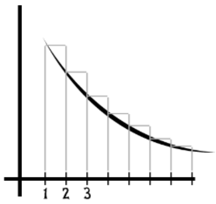
Предельный признак: пусть $a_n \ge 0, b_n > 0$ и $a_n \sim c * b_n, n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, причем c конечна и не равна нулю. Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

21. *Сформулировать признак Даламбера и радикальный признак Коши для* ***знакоположительных*** *рядов.*

Признак Даламбера: пусть $a_n > 0$ и $\exists q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

Радикальный признак Коши: пусть $a_n \ge 0$ и $\exists q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

22. *Сформулировать интегральный признак Коши сходимости ряда. Сделать поясняющий рисунок.*



Интегральный признак Коши: пусть функция f(x) непрерывна и монотонна при $x \ge 1$, и $f(n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum a_n$ и интеграл $\int_1^\infty f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Интеграл равен площади под кривой, которая задаётся функцией f, а сумма ряда равна площади «ступенек»: $a_1 * 1 + a_2 * 1 + \cdots$.

23. *Сформулировать определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося рядов. Как связаны свойства ряда быть сходящимся, условно сходящимся, абсолютно сходящимся?*

Знакопеременным рядом называется ряд $\sum a_n$, члены которого могут быть любого знака.

Теорема: если сходится ряд $\sum |a_n|$, то сходится и ряд $\sum a_n$.

Если сходятся оба ряда, то ряд $\sum a_n$ называют абсолютно сходящимся. Если же ряд модулей расходится, но при этом исходный ряд сходится, то его называют условно сходящимся. По условию теоремы, невозможен случай сходящегося ряда модулей и расходящегося исходного.

24. *Сформулировать признак Даламбера и радикальный признак Коши для* ***произвольного*** *ряда.*

Признак Даламбера: пусть $a_n > 0$ и $\exists q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

Радикальный признак Коши: пусть $a_n \ge 0$ и $\exists q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

25. *Дать определение знакочередующегося ряда. Сформулировать признак Лейбница сходимости ряда и утверждение об оценке остатка знакочередующегося ряда.*

Знакочередующимся называется ряд вида $\sum(-1)^n * b_n$ или $\sum(-1)^{n+1} * b_n$ **(*)**.

Признак Лейбница: пусть $b_n > 0,\ b_n$ – монотонна, и на бесконечности стремится к нулю. Тогда ряд вида (*) сходится, а погрешность $|S - S_n| < b_{n+1}$.