Занятие 8. Доверительная оценка σ^2 распределения $N(a, \sigma^2)$ при известной a.

Для построения центральной статистики возьмем статистику с соответствующими свойствами (несмещенной и эффективной для σ^2)

$$S_0^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a)^2.$$

Заметив, что $\dfrac{X_k - a}{\sigma} \sim N(0,1)$, было бы удобно использовать для нашей цели следующее распределение ($\chi^2(n)$).

8.1. Распределение χ^2

Определение 8.1. *Пусть* $\eta_k \sim N(0,1)$, $k = 1, \ldots, n$ *- независимый в совокупности набор. Тогда* $\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 \sim \chi^2(n)$. *Закон распределения* $\chi^2(n)$, *где* n *- параметр, называемый числом степеней свободы.*

Определение 8.2. *Гамма-функцией называется* $\Gamma(k) \triangleq \int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$

Можно доказать ($n > 1$), что $f_{\chi^2(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Пример 1. Пусть $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$. Найдем плотность распределения $f_Y(y)$.

Р е ш е н и е

Преобразование $y = \varphi(x) = x^2$

...

Известным нам способом (курс ТВ) можно получить

$$f_{\chi^2(1)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}}, & y > 0; \\ \nexists, & y = 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

◄

Доказательство общей формулы можно провести по индукции по числу степеней свободы. Базис индукции уже доказан. Шаг индукции доказывается следующим утверждением

Утверждение 1. *Если* $X_1 \sim \chi^2(k)$, $X_2 \sim \chi^2(l)$ *(независимы), то* $X_1 + X_2 \sim \chi^2(k+l)$.

Нам потребуется еще следующее определение.

Определение 8.3. $B(k,l) \triangleq \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{l-1}dt.$

Доказательство. Пусть k, l - целые числа (в силу определения).

$$\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(x) &= \int_0^x f_{\chi^2(k)}(t) f_{\chi^2(l)}(x-t)dt = \\
&= \int_0^x \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} t^{k/2-1}\, e^{-t/2} \frac{(1/2)^{l/2}}{\Gamma(l/2)} (x-t)^{l/2-1}\, e^{-(x-t)/2} dt = \\
&= \frac{(1/2)^{(k+l)/2}}{\Gamma(k/2)\Gamma(l/2)} e^{-x/2} \int_0^x t^{k/2-1}(x-t)^{l/2-1}dt = \\
&= \left\{ \begin{smallmatrix} t=xs \\ dt=xds \\ t=0 \to s=0 \\ t=x \to s=1 \end{smallmatrix} \right\} = \\
&= \frac{(1/2)^{(k+l)/2}}{\Gamma(k/2)\Gamma(l/2)} e^{-x/2} x^{k/2+l/2-1} \int_0^1 s^{k/2-1}(1-s)^{l/2-1}ds = \\
&= \frac{(1/2)^{(k+l)/2}}{\Gamma(k/2)\Gamma(l/2)} e^{-x/2} x^{k/2+l/2-1} B(k/2, l/2).
\end{aligned}$$

С учетом приведенного ниже результата получим $f_{X_1+X_2}(x) = f_{\chi^2(k+l)(x)}$.

□

Утверждение 2. $B(k,l) = \dfrac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}.$

Доказательство.

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{l-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{k-1}s^{l-1}e^{-(s+t)}dtds.$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования равен 1, откуда следует, что якобиан обратного преобразования тоже 1.

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-z}dz \int_0^z t^{k-1}(z-t)^{l-1}dt = \left\{ \begin{smallmatrix} t=zx \\ dt=zdx \\ t=0\to x=0 \\ t=z\to x=1 \end{smallmatrix} \right\} =$$
$$= \int_0^\infty e^{-z}z^{k+l-1}dz \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l-1}dx = \Gamma(k+l)B(k,l).$$

$\square$

Определение 8.4. *Неполной гамма-функцией называется:*

$$\gamma(k,y) \triangleq \int_0^y t^{k-1}e^{-t}dt.$$

Утверждение 3. *Функция распределения* $\chi^2(n)$

$$F_{\chi^2(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma(n/2, x/2)}{\Gamma(n/2)}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

8.2. Получение центральной статистики для σ^2.

Подходящая статистика $Z(\vec{X}_n) = S_0^2(\vec{X}_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n (X_k - a)^2$.

Тогда $Z(\vec{X}_n) = \dfrac{nS_0^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^n (X_k-a)^2 = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{(X_k-a)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ - центральная статистика для σ^2.

8.3. Доверительный интервал для σ^2.

$$P\{z_{(1-\alpha)/2} < Z(\vec{X}_n) < z_{(1+\alpha)/2}\} = \alpha$$

$$P\{z_{(1-\alpha)/2} < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < z_{(1+\alpha)/2}\} = \alpha$$

$$P\left\{ \frac{nS_0^2}{z_{(1+\alpha)/2}} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{z_{(1-\alpha)/2}} \right\} = \alpha$$

Доверительный интервал получается при подстановке $\vec{X}_n = \vec{x}_n$. В результате этого действия получим

$$\sigma^2 \in \left(\frac{nS_0^2(\vec{x}_n)}{z_{(1+\alpha)/2}}; \frac{nS_0^2(\vec{x}_n)}{z_{(1-\alpha)/2}} \right).$$

Пример 2. На токарном станке вытачивают цилиндры. Наладчик станка может добиться нулевой систематической ошибки, однако с.к.о. ошибки станка со временем увеличивается в результате износа и необходимо контролировать находится ли она в заданных границах. На настроенном станке при изготовлении 10 цилиндров диаметра 5 см получены цилиндры диаметров:

x_i	$5,2$	$5,3$	$5,0$	$4,9$	$4,8$	$5,1$	$5,1$	$5,0$	$5,1$	$5,1$

Считая, что ошибка подчиняется нормальному закону, найти доверительные границы для σ с уровнем доверия $\alpha = 0,9$.

◀