Экзамен

по теории вероятностей

Карнаилова Хадижат Тимуровна

Группа ИУ7-65Б

29.04.2020г.

Общее кол-во листов в работе: 5

Индивидуальный билет по курсу «Теория вероятностей». Студент: **Карнаилова Хадижат Тимуровна**.

Билет №1. **ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ЧАСТЬ**

Задача	1	2	3	4	5	Min/Max
Баллы	-	-	-	-	-	-/-

1. A и B - наблюдаемые события в эксперименте, $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$. Оценить, если это возможно, величину $P(AB)$.

2. Возможно ли, чтобы плотность некой случайной величины X задавалась выражением $f_X(x) = \frac{\alpha}{x^\gamma}$, для $x \geqslant \beta$, и если возможно, то при каких соотношениях α, β, γ.

3. Партия содержит 10 деталей, среди которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу извлеченных деталей а) ровно 2 окажутся бракованными; б) хотя бы 2 окажутся бракованными.

4. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = (X-1)^2$.

5. Проводится бросание двух игральных костей. Случайная величина $X = 1$, если сумма очков, выпавших на двух костях четно, в противном случае $X = 0$. Случайная величина $Y = 1$, если произведение очков, выпавших на двух костях четно, в противном случае $Y = 0$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY}.

- -

ДОЛГ: РК1-3

6. Расставить пределы интегрирования в декартовой системе в том и в другом порядке в двойном интеграле

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

если область D ограничена кривыми $y = x^2$, $x + y = 2$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным. (Сделать поясняющий рисунок, объяснить происхождение пределов интегрирования.)

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $3z = x^2 + y^2$, $z = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. (Сделать поясняющий рисунок, объяснить происхождение пределов интегрирования.)

8. Случайная величина распределена по экспоненциальному закону с параметром λ. Найти: а) функцию распределения величины X; б) математическое ожидание, дисперсию и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = e^{-X}$.

9. Найти вероятность того, что случайная величина ξ, подчиненная нормальному закону распределения, в серии из трех испытаний хотя бы один раз примет значение в интервале $(2; 2,5)$, если ее математическое ожидание $M(\xi) = 2$, а среднеквадратичное отклонение $\sqrt{D(\xi)} = 0,4$.

Карнашова Хадижат Тимуровна
Группа ИУ7-65Б ; Лист №3

Комментарии

• Задание №5.

Учитываем, что выпадение любого числа очков на кости равно $\frac{1}{6}$ и выпадения на 2х костях независимы, т.е каждая комбинация вида (x, y) выпадает с вероятностью $\frac{1}{36}$.

Найдем $D[X]$, $D[Y]$

$M[X] = \sum x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

$D[X] = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M[X])^2 = 0{,}5 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25$

Аналогично:

$M[Y] = \sum y_i \cdot p_i = 0{,}25 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75$

$D[Y] = \sum y_i^2 \cdot p_i - (M[Y])^2 = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}75 - 0{,}75^2 = 0{,}1875$

Найдем $Cov[X, Y]$.

$M[XY] = \sum x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}75$

Тогда $Cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = 0{,}25 - 0{,}5 \cdot 0{,}75 = -0{,}125$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX DY}} = \frac{-0{,}125}{\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}1875}} = -0{,}5774$$

• Задание №9

$$P(\xi \in (2; 2{,}5)) = \Phi_0\left(\frac{2{,}5 - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{2 - m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{0{,}5}{0{,}4}\right) - \Phi_0(0) = 0{,}3944$$

Серия испытаний по схеме Бернулли

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$P_3(1) = C_3^1 \cdot p \cdot (1-p)^2 = \frac{6}{2} \cdot 0{,}3944 \cdot 0{,}6056^2 = 0{,}2895$

$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot (1-p) = \frac{6}{2} \cdot 0{,}3944^2 \cdot 0{,}6056 = 0{,}1884$

$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 = p^3 = 0{,}3944^2 = 0{,}0613$

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}539$

Карнашова Хадижат Тимуровна
Группа ИУ7-65Б; Лист 5

Комментарии

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

(В первом случае область по X затрагивает диапазон [0;1]; по y - от параболы до прямой, поэтому там их функции в границах

Во 2 случае - наоборот. по y - [0;2]
по x - от 0 до графика

При этом, если y [0;1], то x - до параболы,
если y [1;2], то x - от 0 до прямой,

поэтому интеграл разбит на сумму.

• Задание №8

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int f_X(x)\,dx$$

$$x < 0:\ F_X(x) = \int 0\,dx = 0$$

$$x \geq 0;\ F_X(x) = \int \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} a = -\lambda x \\ dx = -\frac{1}{\lambda} da \end{matrix} \right\} = -\int e^a da =$$

$$= -e^a + C = -e^{-\lambda x} + C$$

При $x \to \infty$: $-\underbrace{e^{-\lambda x}}_{\to 0} + C = 1 \Rightarrow C = 1$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Y = e^{-X}$$

$$f_Y(y) = f_X(-\ln y)\left|-\frac{1}{y}\right|;\ y > 0$$

$$\begin{cases} f_Y(y) = \dfrac{\lambda y^\lambda}{y} = \lambda y^{\lambda-1}; & y \in (0;1] \\ f_Y(y) = 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(при $y > 1$ $-\ln(y)$ становится отрицательным, а функция плотности X в отрицательных точках равна 0, поэтому функц. плотн. Y тоже будет равна 0 как произведение 0 с конечным числом.

Карнаилова Хадижат Тимуровна
Группа ИУ7-65Б; Лист 4

Комментарии

• Задание №4

$Y = \varphi(x) = (x-1)^2$

По теории о плотности функции от СВ:

$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$, где $\psi = \varphi^{-1}$

$\psi(y) = \sqrt{y} + 1 \qquad \psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$F_Y(y) = F_X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(1+t)^2}}\right) \cdot \sqrt{\pi(1+t)^2} = f_X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+t)}\right)\sqrt{\pi}\cdot(1+t)$

• Задание №3.

а) $P(A_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}$ – вероятность вытащить две бракованные с попыток номер 1 и 2

Вероятность вытащить ровно 2 бракованные детали не зависит от их порядка в проверяемом наборе, то есть вероятность вытащить их с попыток №1 и №2 равна вероятности вытащить их с попыток №2 и №3 и т.д. =>

$P(A_1) = \frac{1}{21}$

б) Вероятность вытащить 1 бракованную деталь равна $\frac{4}{10}$, вторую – $\frac{3}{9}$. Остальные могут быть как бракованными, так и нет, и не влияют на итоговую вероятность.

$P = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

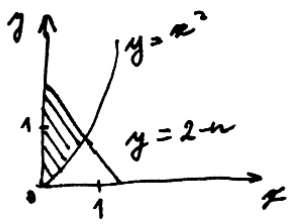
• Задание №1.

Если величины независимы $P(AB) = P(A) * P(B) = 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}3$

Если величины зависимы, то невозможно определить $P(AB)$, так как неизвестна связь между A и B.

• Задание №6

$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$



$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx +$

$+ \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dy.$

$\begin{cases} y = 2 - \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{2}{\sin\varphi + \cos\varphi}$

$y = x^2$

$\begin{cases} y = \rho\sin\varphi \\ x = \rho\cos\varphi \\ |I| = \rho \end{cases} \quad \begin{cases} y = (\rho\cos\varphi)^2 \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}$