1. *Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади такой фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).*

~~~ ~~~

Пусть дана некоторая плоская фигура D. Обозначим через $S = \sup S(m)$ и $S^* = \inf S(M)$, (S – площади), где m – всевозможные многоугольники, целиком *содержащиеся в* фигуре D, а M – многоугольники, целиком *содержащие в себе* фигуру D. Тогда область D называют квадрируемой, если $S^* = S_* = S$, при этом S – площадь фигуры.

Пусть D – плоская область. D квадрируема тогда и только тогда, когда еѐ граница имеет площадь нуль.

2. *Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.* ~~~ ~~~ ~~~

~~~ ~~~

- Пусть тело Q ограничено плоскостью Oxy; графиком функции $z = f(x,y)\ (x, y \in D \subseteq Oxy)$; цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Z и пересекают D.

Разобъѐм D на непересекающиеся участки Di, так чтобы $\cup Di = D,\ int\ Di \cap int\ Dj = \emptyset$. Внутри Di выберем точку Mi. Тогда объѐм части $\Delta V_i \cong f(M_i) * S(D_i)$, а весь объѐм $V(Q) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \cong \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$. Чем меньше ΔS_i, тем точнее формула – переходя к пределу, получаем

$$V(Q) = \lim_{\max diam\ D_i \to 0} \sum_i f(M_i) \Delta S_i$$

- Пусть D – квадрируемая замкнутая плоская область. Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint_D f\,dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sum f(M_i)\Delta S_i$, где $M_i \in D_i, \Delta S_i = S(D_i)$, а d(T) – диаметр разбиения T области D.

3. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.* ~~~

~~~ ~~~

2° Линейность: $\iint_D (f1 + f2)dxdy = \iint_D f1\,dxdy + \iint_D f2\,dxdy$; $\iint_D (cf)dxdy = c \iint_D f\,dxdy$.

3° Аддитивность: пусть $D = D1 \cup D2,\ int\ D1 \cap int\ D2 = \emptyset; f(x,y)$ интегрируема в каждой из областей D1, D2. Тогда f интегрируема и в D, причем $\iint_D f\,dxdy = \iint_{D1} f\,dxdy + \iint_{D2} f\,dxdy$

4° Пусть $f(x,y) \geq 0$ в D и интегрируема в D. Тогда и $\iint_D f\,dxdy \geq 0$.

4. *Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.*

~~~ ~~~

Теорема об оценке модуля: Пусть f интегрируема в D. Тогда модуль этой функции |f| интегрируема в D, причем $\left|\iint_D f\,dxdy\right| \leq \iint_D |f|\,dxdy$.

Теорема об оценке интеграла: Пусть функции f и g интегрируемы в D, причем $m \leq f(x,y) \leq M$ и $g(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in D$. Тогда $m \iint_D g\,dxdy \leq \iint_D fg\,dxdy \leq M \iint_D g\,dxdy$.

Следствие теоремы об оценке: если f интегрируема в D и $m \leq f(x,y) \leq M$, то $m * S \leq \iint_D f\,dxdy \leq M * S$.

Теорема о среднем значении: Пусть f непрерывна в D, а D – линейно связная квадрируемая область (т.е. любые 2 точки можно соединить кривой, лежащей в области). Тогда $\exists M_0 \in D\colon\ f(M_0) = \frac{1}{S} * \iint_D f\,dxdy,\ S = S(D)$.

5. *Сформулировать теорему о вычислении двойного интеграла по прямоугольной области.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть существует прямоугольная область Dy такая, что $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$; $\exists I = \iint_{D_y} f(x,y)\,dxdy$, и $\forall x \in [a,b]\ \exists F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Тогда интеграл $I = I_p = \int_a^b F(x)dx$.

6. *Сформулировать определение y-правильной области и теорему о вычислении двойного интеграла по произвольной y-правильной области.*

~~~ Область D на Oxy называют y-правильной, если ее можно задать в виде $D\colon \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \end{cases}$.

Теорема: Пусть область D – y-правильная, $\exists \iint_D f\,dxdy = I$ и $\forall x \in [a,b]\ \exists F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\,dy$. Тогда существует повторный интеграл $I_п = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\,dy$, и I=Iп.

7. *Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$; Φ –биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема в Duv; якобиан $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда, $\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) * J_\Phi(u,v)\,dudv$.

8. *Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.*

~~~ ~~~

Вычисление массы пластины D. Если плотность определяется как f(x,y), то масса пластины $m = \iint_D f\,dxdy$.

Вычисление объѐма z-цилиндрического тела Q, ограниченного функцией z=f(x,y), плоскостью Oxy и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz и пересекают границу D: $V(Q) = \iint_D f(x,y)\,dxdy$

Вычисление площади плоской фигуры. Если фигура занимает область D, то еѐ площадь $S(D) = \iint_D 1\,dxdy$.

9. *Сформулировать определение кубируемого тела и его объема. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).* ~~~

Рассмотрим область $G \subseteq R^3$. Пусть q – множество многогранников, которые целиком содержатся в G, $V_* = \sup V(q)$, а Q – множество многогранников, целиком содержащих в себе G, $V^* = \inf V(Q)$. Область G называется кубируемой, если $V^* = V_* = V$, при этом V называют объѐмом области G. **Теорема**: область $G \subseteq R^3$ кубируема тогда и только тогда, когда еѐ граница имеет объѐм нуль.

10. *Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.*
~~~ ~~~

- Пусть тело занимает область G, а f(x,y,z) – значение плотности материала тела в точке (xyz). Разобьѐм тело на непересекающиеся области

Gi и в каждой выберем точку Mi. Тогда масса части Gi$\Delta m_i = m(G_i) \cong f(M_i) * \Delta V(G_i) = f(M_i)dV$, а масса всего тела $m(G) = \sum \Delta m_i \cong \sum f(M_i)\Delta V_i$. Чем меньше ΔV_i, тем точнее формула: переходя к пределу имеем

$$m(G) = \lim_{\max diam\ G_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

- Тройным интегралом функции f(x,y,z) по области G называют число $\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$, где d(T) – диаметр разбиения T области G.

11. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.*
~~~ ~~~

<полностью аналогичны свойствам для двойного интеграла, 3.>

12. *Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из нее, обобщенную теорему о среднем значении для тройного интеграла.*
~~~ ~~~

<оценки аналогичны теоремам для двойного интеграла,4.>

Теорема обобщенная о среднем значении: пусть функция f непрерывна в G, а функция g – интегрируема и знакопостояна в G, а сама G является линейно связанной областью. Тогда $\exists M_0 \in G:\ \iiint_G f(xyz) * g(xyz)\,dxdydz = f(M_0) * \iiint_G g\,dxdydz$.

13. *Сформулировать теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.* ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~
~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Область G называется z-правильной, если еѐ можно задать в виде $G: \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ z1(xy) \le z \le z2(xy) \end{cases}$ **(*)**.

Теорема: пусть $\exists \iiint_G f\,dxdydz = I$; G задана в виде *; для каждой фиксированной точки $(xy) \in D_{xy}\ \exists F(xy) = \int_{z1(xy)}^{z2(xy)} f\,dz$. Тогда существует повторный интеграл $I_п = \iint_D F(x,y)\,dxdy$, и I=Iп.

14. *Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле.*
~~~ ~~~

Теорема: Пусть $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$, где $\Phi: \begin{cases} x = x(uvw) \\ y = y(uvw) \\ z = z\ (uvw) \end{cases}$; Ф – биективна, непрерывна и непрерывно диффрецируема в G_{uvw}; якобиан $J_\Phi \neq 0$ в Guvw; f – интегрируема в Gxyz. Тогда $\iiint_{G_{xyz}} f\,dxdydz = \iiint_{G_{uvw}} f\big(x(uvw), y(uvw), z(uvw)\big) * J_\Phi(uvw)\,dudvdw$.
~~~