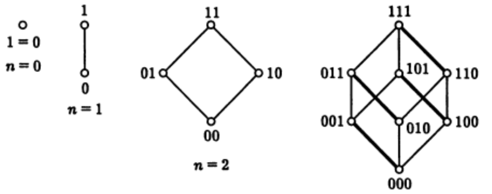
Определения:

• <u>Булева функция</u> от n переменных – произвольное отображение вида $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определенное на множестве всех n-элементных последовательностей нулей и единиц, и принимающее два возможных значения.
<u>Таблица булевой функции</u> от n переменных – таблица, состоящая из двух столбцов и 2^n строк. В первом столбце перечисляются все наборы из $\mathbb{B}^n = \{0,1\}^n$, во втором – значения функции на этих наборах.
<u>Булева переменная</u> x – переменная с областью значений $\{0,1\}$, булеву функцию можно задать как $y = f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i, i = \overline{1,n}$ и f принимают два возможных значения. Переменную xi называют фиктивной переменной б.ф. $f(x_1, \dots, x_n)$, если значение функции не зависит от значения этой переменной. Переменная *x*, не являющаяся фиктивной, называется существенной – функция f существенно зависит от переменной *x*.

• <u>Булев куб</u> размерности n – множество $\{0,1\}^n$, являющееся носителем булевой алгебры $\mathbb{B}^n$ (так же можно обозначать и сам куб). Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе.



• ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ
Литерал – формула, являющаяся либо переменной, либо отрицанием переменной, $\tilde{x}_i$.
Элементарная конъюнкция – конъюнкция литералов. ***<u>Дизъюнктивной</u>* <u>нормальной формой</u>** от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется формула вида $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m,\ m \geq 1$, где $\forall i = \overline{1,m}$ элементарная конъюнкция Ki содержит некоторые из литералов $\tilde{x}_j, j = \overline{1,n}$. Двойственно определяется ***<u>конъюнктивная</u>* <u>нормальная форма</u>**.
<u>Совершенной</u> называется ДНФ (КНФ), в которой $\forall i = \overline{1,m}\ \ K_i = \widetilde{x_1} \dots \widetilde{x_m}\ (D_i = \widetilde{x_1} \vee \dots \vee \widetilde{x_m})$

• <u>Стандартным базисом</u> называется множество $F = \{\vee, \bullet, \ \overline{\ }\ \}$, состоящее из функций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Формулами над СБ будет любое переменное, из которых (с использованием функций базиса) можно построить любую новую формулу.

• <u>Базисом Жегалкина</u> называют множество $F = \{\oplus, \bullet, 1\}$, в котором дизъюнкция представима с помощью базисных функций.
<u>Полином Жегалкина</u> – любая формула над базисом Жегалкина вида $P(x_1, \dots, x_n) = \sum (mod\ 2)\left(a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}\right)$, где $\{i_1, \dots i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, a_i – коэффициенты 1 или 0.
<u>Линейная функция</u> – функция, у которой полином Жегалкина не содержит конъюнкций переменных – т.е. сводится к линейной части. $f_л = (\sum_{i=1}^{n} (mod\ 2)(a_i x_i)) \oplus a_0$.

• <u>Задача минимизации</u>: требуется для булевой функции n переменных построить ДНФ с минимально возможным числом дизъюнкций и минимально возможным числом вхождений литералов.
<u>Кратчайшая</u> – ДНФ с наименьшей длиной, т.е. числом дизъюнкций. **<u>Минимальная</u>** – ДНФ с наименьшим числом литералов.
<u>Импликанта</u> – элементарная конъюнкция в составе ДНФ; простая – если из неё нельзя удалить ни один литерал (путем склейки с другой импликантой). **<u>Сокращенная</u>** – ДНФ, состоящая только из простых импликант.
<u>Ядро булевой функции</u> – совокупность ядровых простых импликант; ЯПИ – покрывает некоторую элементарную конъюнкцию совершенной ДНФ, которая никакой другой простой импликантой не покрывается. Тупиковая – ДНФ, не содержащая избыточных относительно себя импликант (которые можно было бы удалить без потери равенства с исходной функцией).

• Пусть дано множество булевых функций F. **<u>Формулой</u>** над этим множеством считается любая константа из F (если она там есть) и любая булева переменная. Если $\Phi_1, \dots \Phi_n (n \geq 1)$ – формулы над множеством F, а f – функция из F от n переменных, то $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ есть формула над F; никаких других формул над F не существует.
Замыкание [F] множества F – множество всех булевых функций, которые можно представить формулами над F. F называется **<u>замкнутым</u>**, если [F] = F. F называется **<u>полным</u>**, если [F] = P2, где $P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_2^{(n)}$ – множество функций от всех переменных.

• <u>Классы Поста:</u>
T0 – функции, сохраняющие константу 0. $\{f: f(\tilde{0}) = 0\}$
T1 – функции, сохраняющие константу 1. $\{f: f(\tilde{1}) = 1\}$
S – самодвойственные функции. $\{f: \forall \tilde{\alpha}\ \ f(\tilde{\bar{\alpha}}) = \overline{f(\tilde{\alpha})}\}$
M – монотонные функции. $\left\{f: (\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\left((\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}) \ \Rightarrow\ \ f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})\right)\right\}$
L – линейные функции. $\{f: f = (\sum_{i=1}^{n} (mod\ 2)(a_i x_i)) \oplus a_0\}$

1. *Теорема о представлении булевой функции в виде ДНФ и КНФ.*

• **Теорема**: Любая булева функция, отличная от константы 0, может быть представлена в виде ДНФ. Любая булева функция, отличная от констант 1, может быть представлена в виде КНФ.

Доказательство: 1) Для функции $f \not\equiv 0$ введем множество конституэнт единицы функции f: $C_f^1 = \{\tilde{\alpha}: f(\tilde{\alpha}) = 1\}$. $C_f^1 \neq \emptyset$, т.к. функция отлична от 0. Введём теперь конъюнкцию $K_{\tilde{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$. $K_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = 1$, тогда и только тогда, когда $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$. Тогда можно определить $f = \bigvee_{\tilde{\alpha} \in C_f^1} K_{\tilde{\alpha}}$ – дизъюнкция всех конъюнкций. Эта функция является совершенной ДНФ.

Пусть теперь $f(\tilde{\gamma}) = 1$, тогда $\tilde{\gamma} \in C_f^1$. Значит, соответствующая $K_{\tilde{\gamma}} = 1$, и $\bigvee_{\tilde{\alpha} \in C_f^1} K_{\tilde{\alpha}} = 1$. Наоборот, если $\bigvee_{\tilde{\alpha} \in C_f^1} K_{\tilde{\alpha}} = 1$, то существует такой набор $\tilde{\gamma} \in C_f^1$ такой, что $(\bigvee K_{\tilde{\alpha}})(\tilde{\gamma}) = 1 \;\Rightarrow\; K_{\tilde{\gamma}} = 1 \Rightarrow f(\tilde{\gamma}) = 1$.

2) Введем множество конституэнт нуля: $C_f^0 = \{\tilde{\alpha}: f(\tilde{\alpha}) = 0\}$. Определим дизъюнкцию $D_{\tilde{\alpha}} = x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что $f = \bigwedge_{\tilde{\alpha} \in C_f^0} D_{\tilde{\alpha}}$.

2. *Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях.*

• **Лемма 1 (несамодвойственность)**: если f_s не самодвойственная, то обе константы могут быть представлены формулами над $\{f_s, \bar{\ }\}$.

Доказательство: $x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma = 1 \\ \bar{x}, \sigma = 0 \end{cases}$. Отсюда $0^\sigma = \begin{cases} 0, \sigma = 1 \\ 1, \sigma = 0 \end{cases} = \bar{\sigma}$, $1^\sigma = \sigma$. $f_s \notin S \Rightarrow (\exists \tilde{\alpha})\big(f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}})\big)$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Определим $h(x) = f_s(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$ и докажем что это константа. $h(0) = f_s(0^{\alpha_1}, \dots 0^{\alpha_n}) = f_s(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) = f_s(\bar{\tilde{\alpha}})$. $h(1) = f_s(1^{\alpha_1}, \dots 1^{\alpha_n}) = f_s(\tilde{\alpha})$. Следовательно, $h(0) = h(1) = const$. Противоположную константу можно представить с помощью отрицания.

• **Лемма 2 (I-я лемма о немонотонности)**: Если f_M не монотонная, то $(\exists \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})(\tilde{\alpha} \lhd \tilde{\beta})\!: \big(f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0\big)$.

Доказательство: так как функция немонотонна, то существует пара наборов $(\exists \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})(\tilde{\gamma} < \tilde{\delta})\!: \big(f(\tilde{\gamma}) = 1,\ f(\tilde{\delta}) = 0\big)$. $\tilde{\gamma} < \tilde{\delta} \;\Leftrightarrow\; (\exists i_1, \dots i_k)\!: (\gamma_{i_1} = \dots = \gamma_{i_k} = 0), (\delta_{i_1} = \dots = \delta_{i_k} = 1), \forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}\ \gamma_j = \delta_j$. Теперь строим последовательность наборов $\tilde{\gamma} = \gamma_0 \lhd \gamma_1 \dots \lhd \gamma_k = \tilde{\delta}$.

$\widetilde{\gamma_1}\!:\ \gamma_{1,i_1} = 1, \dots, \widetilde{\gamma_k}\!:\ \gamma_{k,i_k} = 1$. Таким образом, каждый следующий набор отличается от предыдущего ровно в одной позиции, $f_M(\widetilde{\gamma_0}) = 1$, $f_M(\widetilde{\gamma_k}) = 0$, $\Rightarrow\ \exists s\!:\ f_M(\widetilde{\gamma_s}) = 1, f_M(\gamma_{s+1}) = 0,\ s \in \overline{0, k-1}$. Тогда можно полагать, что $\tilde{\alpha} = \widetilde{\gamma_s}$, $\tilde{\beta} = \widetilde{\gamma_{s+1}}$.

• **Лемма 3 (II-я лемма о немонотонности)**: Если $f_M \notin M$, то отрицание можно представить формулой над $\{f_M, 0{,}1\}$.

Доказательство: Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ таковы, что $\tilde{\alpha} \lhd \tilde{\beta}$, т.е. $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots 0 \dots \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha, \dots 1 \dots\ \alpha_n)$ отличаются только в i-й позиции. $f_M(\tilde{\alpha}) = 1$, поэтому $\bar{x} = f_M(\alpha_1, \dots x \dots \alpha_n)$.

• **Лемма 4 (о нелинейной функции)**: если $f_L \notin L$, то конъюнкция может быть представлена формулой над базисом $\{f_L, 0, \bar{\ }\}$.

Доказательство: Пусть $f_L \notin L \;\Rightarrow\;$ В её полиноме Жегалкина есть нелинейное слагаемое, содержащее конъюнукцию нескольких литералов. Выбираем в ПЖ этой функции самое короткое нелинейное слагаемое $x_{i_1} \dots x_{i_k}, k \geq 2$.

Определим новую функцию $F_L' = f_L|_{\forall j \notin \{i1 \dots ik\}\, x_j = 0}$. Таким образом, $f_L' = f_L(0 \dots 0, x_{i1}, 0 \dots 0, x_{i2}, 0 \dots) = x_{i1}x_{i2} \dots x_{ik} \oplus a_{i1}x_{i1} \oplus \dots a_{ik}x_{ik} \oplus a_0$.

Обозначим $\chi(x, y) = f_L'|_{x_{i1} = \dots = x_{is} = x,\ x_{s+1} = \dots = x_{ik} = y}$. Тогда,

(1) $\chi(x, y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c$, где $a = \sum_{j=1}^{s} (mod\ 2)\, a_{ij}$, $b = \sum_{j=s+1}^{k} (mod\ 2)\, a_{ij}$, $c = a_0$

Значит, конъюнкцию можно представить в виде $xy = \chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c$. Действительно, в (1) подставим: $\chi(x \oplus b, y \oplus a) = (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c = xy \oplus ax \oplus by \oplus ax \oplus ab \oplus by \oplus ab \oplus c = xy \oplus ab \oplus c$. Таким образом, $\chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c = xy$.

3. *Теорема о замкнутости классов Поста.*

• **Теорема**: каждый класс Поста есть замкнутое множество булевых функций.

4. *Теорема Поста (леммы сформулировать без доказательства).*

• **Теорема**: Множество F булевых функций полно тогда и только тогда, когда F не содержится ни в одном из классов Поста.

Доказательство:

1) Необходимость. Пусть F полно, но существует $\exists C \in \{T0, T1, S, M, L\}\!: F \subseteq C$. Тогда, в силу замкнутости каждого класса Поста, замыкание $[F] \subseteq C$. Тогда, формулой над F нельзя представить ни одну из функций, не принадлежащих никакому классу Поста (например штрих Шеффера), что противоречит условию полноты.

2) Достаточность. Возьмём множество (базис) $F_0' = \{\bullet, \bar{\ }\}$.

1 случай: $(\exists f_0 \in F/T0,\ f_0 \in T1)$ или $(\exists f_1 \in F/T1,\ f_1 \in T0)$. В первом варианте можно представить $1 = f_0(x, \dots, x)$, при этом $0 = g_1(1, \dots, 1)$, где $g_1 \in F/T1$. Обе константы представленны, а по Лемме 2 (1я о немонотонности), $\bar{x} = f_M(\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$, где $f_M \in F/M$. Здесь $f_M(\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = 1$; $f_M(\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = 0$. Второй вариант рассматривается аналогично.

2 случай: $(\forall f_0 \in F/T0\ \ f_0 \notin T1)$ и $(\forall f_1 \in F/T1\ \ f_1 \notin T0)$. В данном случае, $\bar{x} = f_0(x, \dots, x)$, а $const = f_S(x^{a1}, \dots, x^{an})$, где $f_S(\alpha 1 \dots \alpha n) = f_S(\overline{\alpha 1} \dots \overline{\alpha n})$.

5. *Алгоритм Куайна-Макклоски построения минимальной ДНФ.*

• Алгоритм Куайна-Макклоски предполагает получение из совершеной ДНФ множества кратчайших ДНФ (с наименьшей длиной), из которых затем выбирается минимальная (с наименьшим число литералов). Алгоритм работает в четыре этапа.

На первом происходит **построение сокращенной** ДНФ путем склейки всех пар элементов $x_i K \vee \bar{x}_i K = K$; сокращенная ДНФ состоит из простых импликант.

На втором этапе происходит **определение ядра** сокращённой ДНФ – совокупности ядровых простых импликант – покрывающих некоторую элементарную конъюнкцию СДНФ, которая не покрывается никакой другой ЯПИ. Если ЯПИ в совокупности закрывают все единичные клетки на карте Карно, то процедура заканчивается, и ДНФ из ЯПИ – единственная минимальная.

На третьем этапе происходит **перечисление тупиковых** ДНФ – которые не содержат избыточных импликант. Это делается с помощью вспомогательной формулы Патрика, переменные которой обозначают *не*ядровые простые импликанты. Элементарные конъюнкции, остающиеся в формуле Патрица, добавляются к ядру, после чего получают тупиковые ДНФ.

Наконец на четвертом этапе из тупиковых ДНФ выбирают **кратчайшие**, а из них – **минимальные** по числу литералов.