Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2

По предмету: «Математическая статистика»

Тема: Интервальные оценки
Вариант №2

Преподаватель: Саркисян П.С.
Студент: Гасанзаде М.А.,
Группа: ИУ7-66Б

Москва, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..3
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ...4
1.1 Формула и определение γ-доверительного интервала..................................4
1.2 Формулы вычисления границ γ-доверительного интервала..........................4
1.3 Оценка для дисперсии..5
2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ..6
2.1Листинг программы..6
2.2 Результат работы программы...7
2.3 Графики...8

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-довери тельного интервала для математического ожидания MX;

в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-довери тельного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y=\hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y=\hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y=\underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z=S^2(\vec{x}_n)$, также графики функций $z=S^2(\vec{x}_N)$, $z=\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функ ций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Формула и определение γ-доверительного интервала

Пусть $\overrightarrow{X_n}$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x;\ \theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно.

Интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \overline{\theta}(\vec{x}_n))$ называют доверительным интервалом для параметра в с коэффициентом доверия γ или γ-доверительным интервалом, где $\vec{x}_n$ – любая реализация случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$.

Пусть для параметра θ в построенном интервале $(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \overline{\theta}(\vec{x}_n))$, где $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ являются функциями случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, такими, что выполняется равенство $P\{\underline{\theta}(\vec{x}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{x}_n)\} = \gamma$. В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X_n}))$ называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом γ (γ-доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ – нижняя и верхняя границы интервальной оценки соответственно.

1.2 Формулы вычисления границ γ-доверительного интервала

Нормальное распределение Пусть $\overrightarrow{X_n}$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \qquad \textbf{(2)}$$

где:

1) $\overline{X}$ — оценка мат. ожидания,

2) n — число опытов,

3) $S(\overrightarrow{X_n})$ точечная оценка дисперсии случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$,

$t_{1-\alpha}(n-1)$ квантильуровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с

$n-1$ степенями свободы, α величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

1.3 Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})=\frac{S(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \quad \textbf{(3)}$$

$$\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})=\frac{S(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \quad \textbf{(4)}$$

где:

1) n – объем выборки,

2) $\chi^2_{\alpha}(n-1)$ – квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы,

3) α – величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В данной части представлен листинг и результат работы программы.

2.1Листинг программы

```
function lab2()
    X=[0.70,-0.35,-0.23,-1.18,-0.75,0.41,-0.71,0.97,-2.54,-1.50,1.73,-0.83,-
1.13,-0.00,-0.40,1.23,-0.14,-1.38,0.01,-1.65,0.02,-1.61,0.46,1.19,-
1.30,0.32,1.19,-0.03,-0.31,-1.64,-0.24,0.30,-0.66,-1.31,-0.65,0.63,-
0.27,1.04,0.20,0.31,0.24,1.27,-0.17,-0.62,0.03,-1.75,-2.26,-0.03,-0.27,-
0.17,0.10,-0.14,0.09,0.53,-0.78,-0.86,0.35,-0.72,-0.41,0.38,-0.91,-0.41,-1.10,-
1.00,0.39,-0.06,0.32,-1.58,-0.14,-0.90,-1.84,0.00,-0.10,-1.14,-0.14,0.82,-2.55,-
2.79,-0.02,-0.66,-0.05,-0.15,-1.68,1.62,0.21,-0.01,-0.33,0.68,1.80,-0.29,-0.74,-
0.38,-2.67,-1.53,-0.48,0.66,-0.56,0.28,0.70,1.01,0.53,0.93,-1.27,-1.37,-0.29,-
2.18,-1.02,0.21,0.19,1.75,-0.01,0.30,-0.73,0.34,-0.23,1.13,-1.13,-
0.96,0.37,0.14];

    N = 1:length(X);

    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;

    mu = expectation(X);
    sSqr = variance(X);

    fprintf('mu = %.4f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.4f\n\n', sSqr);

    muArray = expectationArray(X, N);
    varArray = varianceArray(X, N);

    figure
    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
    hold on;
    plot(N, muArray, 'g');

    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    fprintf('mu_low = %.4f\n', Ml(end));

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r'), legend('y=mu', 'y=mu_n', 'y=mu-low_n', 'y=mu-high_n');
    grid on;
    hold off;

    fprintf('mu_high = %.4f\n', Mh(end));

    figure
    plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');

    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r'), legend('z=S^2', 'z=S^2_n', 'z=S^2-low_n', 'z=S^2-high_n');
    grid on;
    hold off;
```

```
    fprintf('sigma^2_low = %.4f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.4f\n', Sh(end));
end

function mu = expectation(X)
   mu = mean(X);
end

function sSqr = variance(X)
    sSqr = var(X);
end

function muArray = expectationArray(X, N)
    muArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        muArray(i) = expectation(X(1:N(i)));
    end
end

function varArray = varianceArray(X, N)
    varArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        varArray(i) = variance(X(1:N(i)));
    end
end
```

2.2 Результат работы программы

$\hat{\mu} = -0.2859$

$S^2 = 0.917$

$\underline{\mu} = -0.4308$

$\overline{\mu} = -0.1410$

$\underline{\sigma^2} = 0.7502$

$\overline{\sigma^2} = 1.1510$

2.3 Графики

Построение на координатной плоскости *Oyn* прямую $y=\hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графиков функции $y=\hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y=\underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема *n* выборки, где *n* изменяется от 1 до *N*;

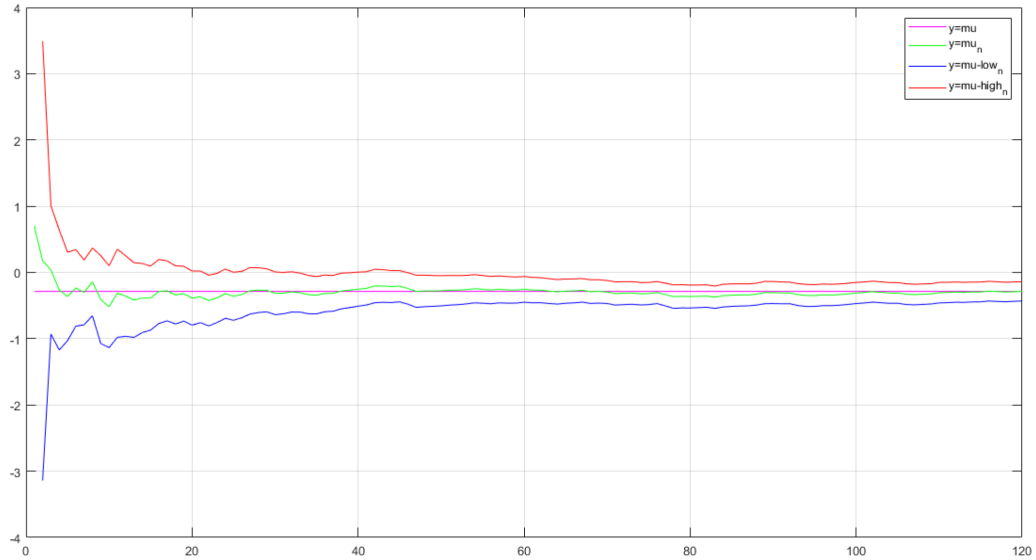

Рисунок 1. График для μ.

Построение на другой координатной плоскости *Ozn* прямой $z=S^2(\vec{x}_n)$, также графиков функций $z=S^2(\vec{x}_N)$, $z=\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема *n* выборки, где *n* изменяется от 1 до *N*.

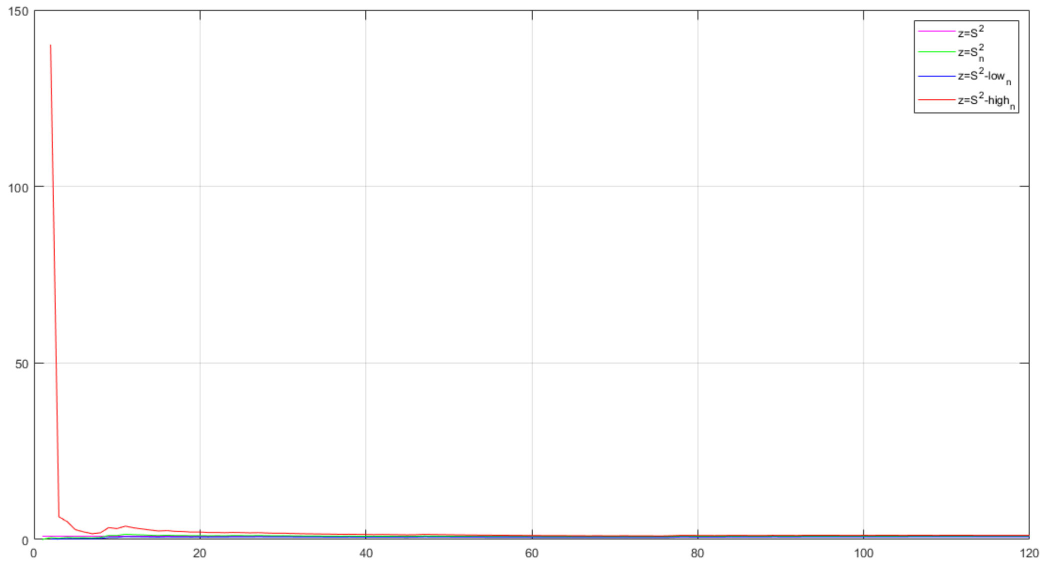

Рисунок 2. График для σ.