Рубежный контроль №1

по математической статистике

Гасанзаде Мухаммедали Алиназим оглы

Группа ИУ7-66Б

14.05.2020

Общее количество листов в работе: 5

Билет 129.

1. Непрерывная случайная величина Y имеет плотность распределения

$$f_Y(y) = \frac{7\lambda^7}{y^8}, \qquad y \geqslant \lambda,$$

где значение $\lambda > 0$ неизвестно. Для оценки параметра λ используется статистика

$$\hat{\lambda}\left(\overrightarrow{Y}\right) = \frac{7n-1}{7n} \min_{k=\overline{1,n}} \{Y_k\},$$

где $\overrightarrow{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — случайная выборка из генеральной совокупности Y. Является ли оценка $\hat{\lambda}\left(\overrightarrow{Y}\right)$ а) несмещенной; б) эффективной по Рао-Крамеру?

2. Пусть $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, где значение λ неизвестно. Построить для λ доверительный интервал уровня $\gamma = 0.95$, если после $n = 26$ испытаний получены значения $\overline{x} = 15.32$, $S^2\left(\overrightarrow{x}\right) = 6.25$.

Гасанзаде Мухаммедали Алиназим оглы
Группа УУЗ-66б; Лист №3

Комментарии

№1

Найдём функцию распределения Y:

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt=\int_{\lambda}^{y}\frac{7\lambda^7}{y_1^8}\,dy_1=-\frac{\lambda^7}{y_1^7}\Big|_{\lambda}^{y} \ominus$$

$$\ominus\ 1-\left(\frac{\lambda}{y}\right)^7$$

Найдём функцию распределения $Y_{(1)}$:

$$f_{Y(1)}(y)=\frac{n!}{(1-1)!\,(n-1)!}\cdot F_Y^{1-1}(y)\cdot(1-F_Y(y))^{n-1}\cdot$$

$$\cdot f_Y(y)=(n-1)\cdot(1-F_Y(y))^{n-1}\cdot f_Y(y)=n\cdot\left(1-\left(1-\left(\frac{\lambda}{y}\right)^7\right)\right)^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{7\lambda^7}{y^8}=n\cdot\left(\frac{\lambda}{y}\right)^{7n-7}\cdot\frac{7\lambda^7}{y^8}=n\cdot\frac{7\lambda^{7n}}{y^{7n+1}}$$

$$f_{Y(1)}(y)=\begin{cases}0, & y<\lambda\\ \dfrac{7n\cdot\lambda^{7n}}{y^{7n+1}}, & y\ge\lambda\end{cases}$$

$$M(Y_{(1)})=\int_{\lambda}^{+\infty} y\cdot f_{Y(1)}(y)\,dy=\int_{\lambda}^{+\infty} y\cdot\frac{7n\cdot\lambda^{7n}}{y^{7n+1}}\,dy=$$

$$=7n\cdot\lambda^{7n}\cdot\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{dy}{y^{7n}}=7n\cdot\lambda^{7n}\cdot\frac{1}{1-7n}\cdot\frac{1}{y^{7n-1}}\Big|_{\lambda}^{+\infty}=$$

$$=\frac{7n\cdot\lambda^{7n}}{1-7n}\cdot\left(0-\frac{1}{\lambda^{7n-1}}\right)=\frac{7n}{7n-1}\cdot\lambda$$

$$M\left(\frac{7n-1}{7n}\cdot Y_{(1)}\right)=\frac{7n-1}{7n}\cdot M(Y_{(1)})\ominus$$

$$\ominus\ \frac{7n-1}{7n}\cdot\frac{7n}{7n-1}\ \Big|\ \lambda=\lambda$$ – оценка не смещённая

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\ln f_Y(y)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln 7+7\ln\lambda-8\ln y\right)=\frac{7}{\lambda}$$

$$I(\lambda)=M\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(\ln f_Y(y))\right)^2=M\left(\frac{7}{\lambda}\right)^2=M\left(\frac{49}{\lambda^2}\right)=\frac{49}{\lambda^2}$$

$$D(\lambda(\vec{Y}))=D\left(\frac{7n-1}{7n}Y_{(1)}\right)=\left(\frac{7n-1}{7n}\right)^2\cdot D(Y_{(1)})$$

$$D(Y_{(1)})=M(Y_{(1)}^2)-M^2(Y_{(1)})=\int_{\lambda}^{+\infty}y^2\cdot\frac{7n\,\lambda^{7n}}{y^{7n+1}}\,dy-$$

$$-\left(\frac{7n}{7n-1}\lambda\right)^2=7n\,\lambda^{7n}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{y^{7n-1}}\,dy-\left(\frac{7n}{7n-1}\right)^2\cdot\lambda^2=\frac{7n}{7n-2}\lambda^2-\frac{49n^2}{(7n-1)^2}\lambda^2\ominus$$

Гасанзаде Мухаммедали Алиназим оглы

Группа ИУ7-66б; Лист №4

Комментарии

$$= \frac{7n}{(7n-1)^2 \cdot (7n-2)} \lambda^2$$

$$D(\lambda(\vec{Y})) = \left(\frac{7n-1}{7n}\right)^2 \cdot \frac{7n}{(7n-1)^2 \cdot (7n-2)} \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{7n(7n-2)}$$

а) Параметрическая модель не является регулярной, так как выборки определены на отрезках которые зависят от параметра лямбда. Следовательно, неравенство Рао-Крамера не применимо.

б) Вычислим кол-во информации по Фишеру.

$$\ln f_Y = \ln\left(\frac{7\lambda^7}{y^8}\right) = \ln 7 + 7\ln\lambda - 8 \cdot \ln y$$

Гасанзаде Мухаммедрам Алиназим оглы

УИ7-66Б ; Лист N5

Комментарии

Задание N 2

$$\varepsilon = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,95}{2} = 0,025$$

$$\chi^2_{\varepsilon}(2n) = \chi^2_{0,025}(2\cdot 26) = \chi^2_{0,025}(52) = 33,97$$

$$\chi^2_{1-\varepsilon}(2n) = \chi^2_{1-0,025}(2\cdot 26) = 73,81$$ — квантили хи-квадрат (таблица)

$$\frac{\chi^2_{\varepsilon}(2n)}{2n\,\overline{X}} < \lambda < \frac{\chi^2_{1-\varepsilon}(2n)}{2n\cdot\overline{X}}$$

$$\frac{33,97}{2\cdot 26\cdot 15,32} < \lambda < \frac{73,81}{2\cdot 26\cdot 15,32}$$

$$0,04 < \lambda < 0,09$$