Определения:

• Формальная аксиоматическая теория $T = (V, F, A, P)$; V – алфавит, F – множество формул, A – аксиом, P – правил вывода, $A \subseteq F$.
Алфавит V может быть бесконечным, но не более чем счётным. Элементы P: $\frac{\Phi_1,\dots\Phi_n}{\Psi}$, где $\Phi, \Psi \in F, n \geq 1$. Фи – посылки, Пси – заключение.
Вывод в теории T – конечная или бесконечная последовательность формул $\theta_1, \dots \theta_n, \dots$, где
$(\forall i \geq 1)\left[(\theta_i \in A) \text{ или } (\theta_i \in \Gamma) \text{ или } \left(\text{существует правило вывода в P: } \frac{\theta_{j_1},\dots\theta_{j_n}}{\theta_i}, j_k < i\right)\right]$, где Γ – фиксированное множество формул (гипотез).

• Высказывание – повествовательное выражение, которое может быть охарактеризовано как истина или ложь. **Формула** над теорией $L = \{V_L, F_L, A_L, P_l\}$: Любая логическая переменная есть формула; Если ϕ и ψ – формулы, то $\phi \rightarrow \psi$ и $\neg\phi$ – тоже формулы. Других формул нет.

• В теории ИП алфавит состоит из X – предметных переменных; C – предметных констант; F – функциональных символов; P – предикатных символов; логических символов $\rightarrow, \neg, \forall$; вспомогательных символов Aux. **Терм**: всякая переменная или константа, $x \in X, c \in C$; если t1..tn – термы, а $f^{(n)} \in F^{(n)}$, то $f^{(n)}(t1 \dots tn)$ – терм; других термов нет.
Атомарная формула: выражение вида $p^{(n)}(t1 \dots tn)$, $p^{(n)} \in P^{(n)}, t -$ термы. **Формула**: всякая атомарная формула; если ϕ и ψ формулы, то $\phi \rightarrow \psi$ и $\neg\phi$ также формулы; если xi предметная переменная и Φ – формула, то $\forall(x_i)\Phi$ – формула; других нет.

• Интерпретация $I = (\mathcal{A} = (A, \Omega, \Pi), i_F,\ i_P)$. $i_F: F \rightarrow \Omega,\ (\forall n \geq 0) i_F(f^{(n)}) \in \Omega^{(n)};\ i_P:\ P \rightarrow \Pi,\ (\forall n \geq 1) i_P(p^{(n)}) \in \Pi^{(n)}$. Каждый функциональный и предикатный символ привязывается к какой-то операции или предикату.

1. *Определить исчисление высказываний, доказать его непротиворечивость.*

~~~ ~~~

• Исчисление высказывания – теория $L = \{V_L, F_L, A_L, P_L\}$, где $V_L = Var \cup \{\rightarrow, \neg\} \cup \{Л, И\} \cup Aux$.
Теорема: Каждая теорема теории Л есть тавтология.
Доказательство: Можно показать, что любая формула, полученная из схемы аксиом, является тавтологией. Любую формулу можно вывести из аксиом с использования правила МР. Покажем, что из двух тавтологий после примения МР получится тавтология.
Пусть Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологии, и существует набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ такой, что $\Psi(\tilde{\alpha}) = Л$. Тогда, $\Phi(\tilde{\alpha}) = И$; $(\Phi \rightarrow \Psi)(\tilde{\alpha}) = \Phi(\tilde{\alpha}) \rightarrow \Psi(\tilde{\alpha}) = И$. Однако, $\Psi(\tilde{\alpha}) = Л, \Phi(\tilde{\alpha}) = И$. Получаем что $И \rightarrow Л = И$ – противоречие. Следовательно, МР по двум тавтологиям даёт тавтологию.
Следствие из теормы: теория L непротиворечива, т.е. в ней недоказуема $A\&\neg A$. Т.к. эта конъюнкция всегда =Л, то она не может являться теоремой.

2. *Доказать теорему дедукции.*

~~~ ~~~

• **Теорема:** Если из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.
Доказательство: Докажем методом математической индукции по L – длине вывода B из Г,A.
Базис: l=0, т.е. возможны три случая:
1) $B \in \Gamma$. Тогда строим вывод из Г без А:
1. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$: (1)схема при $A \coloneqq B, B \coloneqq A$
2. B: гипотеза
3. $A \rightarrow B$: МР к 1. и 2.
2) B – аксиома. Тогда
1. B: аксиома
2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$: схема (1)
3. $A \rightarrow B$: МР к 1. и 2.
3) B=A. Тогда $A \rightarrow B = A \rightarrow A$, по $\vdash (A \rightarrow A), \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow A)$
Предположение: Пусть $\forall l \leq m - 1$ утверждение теоремы справедливо, те. Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash (A \rightarrow B); m \geq 1$.
Переход: пусть теперь l=m, т.е. B получается в выводе из Г,A применением МП к формулам Φ, Φ->B. Причем, $\Gamma, A \vdash^{l_1} \Phi$ и $\Gamma, A \vdash^{l_2} \Phi \rightarrow B$, где l1,l2<m. В таком случае, по предположению индукции, $\Gamma \vdash (A \rightarrow \Phi)$ и $\Gamma, A \vdash (A \rightarrow (\Phi \rightarrow B))$. Продолжаем вывод из Г:
1. $(A \rightarrow (\Phi \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow \Phi) \rightarrow (A \rightarrow B))$: схема(2)при $B \coloneqq \Phi, C \coloneqq B$
2. $(A \rightarrow \Phi) \rightarrow (A \rightarrow B)$: МР к 1. и $(A \rightarrow (\Phi \rightarrow B))$
3. $A \rightarrow B$: МР к 2. и $(A \rightarrow \Phi)$

Таким образом, $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$, ч.т.д.

3. *Сформулировать теорему Кальмара (в доказательстве теоремы полноты); доказать полноту ИВ.*

~~~ ~~~

• **Теорема**: Если Φ=Φ(x1...xn), то имеет место секвенция $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Phi^{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in B^n$.
• Теорема: Теория L полна, т.е. любая тавтология доказуема в этой теории.
Доказательство: Пусть формула Φ – тавтология, $\forall\tilde{\alpha}\ \Phi(\tilde{\alpha}) = И$. По лемме Кальмара, из литералов $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Phi$, т.е. $(\forall\tilde{\alpha})(\Phi^{\tilde{\alpha}} = \Phi)$. Компоненты $\tilde{\alpha}$ можно изменять: возьмём $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, x_n^{\neg\alpha_n} \vdash \Phi$. По следствию из теоремы о девяти секвенциях, т.к. Φ выводится из Γ, A и из $\Gamma, \neg A$, n-ю гипотезу можно отбросить, $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \Phi$. Из оставшихся литералов аналогичным образом убираем остальные гипотезы,в конце концов получаем что $\vdash \Phi$ т.е. Φ – теорема.

4. *Доказать свойства дизъюнкции (следствие из теоремы о 9 секвенциях).*

~~~ ~~~

• **Теорема**: 1) $A \vdash A \vee B$; 2) $A \vee B \vdash B \vee A$; 3) Если $A \vdash B$, то для любой $\Phi, \Phi \vee A \vdash \Phi \vee B$ и $A \vee \Phi \vdash B \vee \Phi$
Доказательство: Докажем 1) $A \vdash (\neg A \rightarrow B)$
1. A: гипотеза
2. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$: секвенция 5
3. $\neg A \rightarrow B$: МР к 1. и 2.

Докажем 2) $(\neg A \rightarrow B) \vdash (\neg B \rightarrow A)$
1. $\neg A \rightarrow B$: гипотеза

2. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to (\neg\neg A))$: секвенция 7
3. $\neg B \to \neg\neg A$: МР к 1. и 2.
4. $\neg\neg A \to A$: секвенция 3
5. $\neg B \to A$: секвенция 1 к 3. и 4.

Докажем 3). A-B, поэтому A->B – теорема
1. $A \to B$: теорема
2. $\Phi \vee A = \neg\Phi \to A$: гипотеза
3. $\neg\Phi \to B = \Phi \vee B$: секвенция 1 к 2. и 1.

5. *Доказать свойства конъюнкции.*

~~~ ~~~

• **Теорема:** 1) $A, B \vdash (A\&B)$; 2) $A\&B \vdash A, B$; 3) $A\&B \vdash B\&A$

Доказательство: Докажем 1) $A, B \vdash (\neg(A \to \neg B))$
1. A: гипотеза
2. B: гипотеза
3. $A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$: секвенция 8 при $B \coloneqq \neg B$
4. $\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B)$: МР к 1. и 3.
5. $B \to \neg\neg B$: секвенция 4
6. $B \to \neg(A \to \neg B)$: секвенция 1 к 5. и 4.
7. $\neg(A \to \neg B) = A\&B$: МР к 2. и 6.

Докажем 2) $\neg(A \to \neg B) \vdash A$, т.е. $\neg A \vdash \neg\neg(A \to \neg B)$, по правилу контрапозиции
1. $\neg A$: гипотеза
2. $\neg A \to (A \to \neg B)$: секвенция 5а
3. $A \to \neg B$: МР к 1. и 2.
4. $(A \to \neg B) \to \neg\neg(A \to \neg B)$: секвенция 4
5. $\neg\neg(A \to \neg B) = \neg(A\&B)$: МР к 3. и 4.

A&B⊢B доказывается по аналогии.

Докажем 3) $\neg(A \to \neg B) \vdash \neg(B \to \neg A)$, т.е. $(B \to \neg A) \vdash (A \to \neg B)$, по правилу контрапозиции
1. $B \to \neg A$: гипотеза
2. A: гипотеза
3. $(B \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg B)$: секвенция 7
4. $\neg\neg A \to \neg B$: МР к 1. и 3.
5. $A \to \neg\neg A$: секвенция 4
6. $\neg\neg A$: МР к 2. и 5.
7. $\neg B$: МР к 6. и 4.

$(B \to \neg A), A \vdash \neg B$. Применяя теорему дедукции, $(B \to \neg A) \vdash (A \to \neg B)$. Ч.т.д.

6. *Понятия выполнимости, истинности в данной интерпретации и логической общезначимости формулы в исчислении предикатов.*

~~~ ~~~

• Состояние $\sigma: X \to A$, где A – область интерпретации, X – множество переменных.

Ф *выполнима* в интерпретации I, если для *некоторого* состояния σ $\Phi^\sigma = И$.

Ф *истинна* в I, если для *всякого* состояния σ $\Phi^\sigma = И$.

Ф логически *общезначима*, если она истинна в *любой* интерпретации.

7. *Схемы аксиом и правила вывода в ИП. Доказать логическую общезначимость формулы, полученной из схемы аксиом 4 в ИП.*

~~~ ~~~

• Схемы аксиом:

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
4) $(\forall x_i)A < x_i > \to A < t|x_i >$, если t свободен для x_i в A
5) $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_I)B)$, при $x_i \notin FV(A)$

• Докажем логическую общезначимость (4), приведя контрпример: $x_i = x_1, A = \neg(\forall x_2)p^{(n)}(x1, x2)$, где $p^{(2)} \in P^{(2)}, t = x2$. t несвободен для x1 в A: имеем $(\forall x_1)\left(\neg(\forall x_2)p^{(2)}(x1, x2)\right) \to \neg(\forall x_2)p^{(2)}(x2, x2)$. Пусть область интерпретации содержит два неравных элемента, а p2 – равенство, рефлексивное отношение. В таком случае, $(\forall x_1)(\neg(\forall x_2)x2 = x1) = И \to \neg(\forall x_2)(x_2 = x_1) = Л$. Имеем И->Л, следовательно, t должен быть ограничен.

Зафиксируем некоторую интерпретацию B, в котрой должно выполняться $[(\forall x_i)A < x_i >]^\sigma = И \Leftrightarrow$ для любого $\sigma' =_i \sigma$ $(A < x_i >)^{\sigma'} = И$. Следовательно, $(A < t|x_i >)^\sigma = И$ – т.к. структура свободных и связанных вхождений н изменится; может изменяться только значение xi при данном ограничении на терм.

8. *Доказать, что ограничения на термы и переменные в схемах 4 и 5 существенны, приведя соответствующие контрпримеры.*

~~~ ~~~

• $(\forall xi)A < x_i > \to A < t|x_i >$, где t свободен для всех переменных x_iв формуле А. Докажем логическую общезначимость, приведя контрпример: $x_i = x_1, A = \neg(\forall x_2)p^{(n)}(x1, x2)$, где $p^{(2)} \in P^{(2)}, t = x2$. t несвободен для x1 в A: имеем $(\forall x_1)\left(\neg(\forall x_2)p^{(2)}(x1, x2)\right) \to \neg(\forall x_2)p^{(2)}(x2, x2)$. Пусть область интерпретации содержит два неравных элемента, а p2 – равенство, рефлексивное отношение. В таком случае, $(\forall x_1)(\neg(\forall x_2)x2 = x1) = И \to \neg(\forall x_2)(x_2 = x_1) = Л$. Имеем И->Л, следовательно, t должен быть ограничен.

Зафиксируем некоторую интерпретацию B, в котрой должно выполняться $[(\forall x_i)A < x_i >]^\sigma = И \Leftrightarrow$ для любого $\sigma' =_i \sigma$ $(A < x_i >)^{\sigma'} = И$. Следовательно, $(A < t|x_i >)^\sigma = И$ – т.к. структура свободных и связанных вхождений н изменится; может изменяться только значение xi при данном ограничении на терм.

• $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$ при $x_i \notin FV(A)$. Контрпример: Пусть $A = B$ – атомарная формула $= p^{(1)}(x_1), p^{(1)} \in P^{(1)}, x_i = x_1$. Тогда, $(\forall x_1)\left(p^{(1)}(x_1) \to p^{(1)}(x_1)\right) \to \left(p^{(1)}(x_1) \to (\forall x_1)p^{(1)}(x_1)\right)$, т.е. И $\to$ Л – противоречие, следовательно ограничение существенно.

9. *Метод резолюций для ИВ и ИП.*

~~~ ~~~

фыв
~~~