



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Дисциплина: Моделирование

Тема: Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.

Студент: Гасанзаде М.А.

Группа ИУ7-66Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель : Градов В.М.

Москва.
2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	3
Цель работы.....	3
Исходные данные.....	3
Физический смысл задачи.....	3
II. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	4
Листинг.....	4
III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.....	7
IV. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ.....	10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	12
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	13

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

. Цель работы

Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

. Исходные данные

1. Уравнение для функции $T(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + 2 T_0 \alpha(x) = 0$$

2. Краевые условия:
$$\begin{cases} x=0, -k(0) \frac{dT}{dx} = F_0, \\ x=l, -k(l) \frac{dT}{dx} = \alpha_N (T(l) - T_0) \end{cases}$$

3. Функции $\alpha(x)$, $k(x)$ заданы своими константами.

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d} \quad ; \quad k(x) = \frac{a}{x-b} \quad .$$

. Физический смысл задачи.

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l , причем $R \ll l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Ось x направлена вдоль оси цилиндра и начало координат совпадает с левым торцом стержня. Слева при $x=0$ цилиндр нагружается тепловым потоком F_0 . Стержень обдувается воздухом, температура которого равна T_0 . В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и поверхности правого торца при $x=l$. Функции $k(x), \alpha(x)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве.

II. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЯП был выбран Python3 из-за простоты работы с графиками и библиотеки matplotlib. Ниже на листингах будет представлена реализация программы:

. Листинг

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_maker(masx, masy, xlabel, ylabel):
    plt.plot(masx, masy, color='r')
    plt.xlabel(xlabel)
    plt.ylabel(ylabel)
    # plt.legend((name1, name2))
    plt.grid(True)
    plt.show()

def k(x):
    return a/(x - b)

def alpha(x):
    return 3*x/(x - d)

def P(Ax):
    return 2 * Ax / R

def F(Ax):
    return (2 * T0 * Ax)/R

def Xn_formula(x, h, flag):
    if flag == "+":
        res = 2 * k(x) * k(x + h) / (k(x) + k(x + h))
    if flag == "-":
        res = 2 * k(x) * k(x - h) / (k(x) + k(x - h))
    return res

def An(x, h):
    res = 2 * k(x) * k(x - h) / (k(x) + k(x - h))
    return res/h

def Bn(x, h, Ai, Ci):
    return Ai + Ci + P(x) * h

def Cn(x, h):
    res = 2 * k(x) * k(x + h) / (k(x) + k(x + h))
    return res/h

def Dn(x, h):
    return F(x) * h

def get_K0(x0, h):
    pn_1_div_2 = (P(x0) + P(x0 + h)) / 2
    return Xn_formula(x0, h, "+") + h**2 * pn_1_div_2 / 8 + h**2 * P(x0)/4
```

```

def get_M0(x0, h):
    pn_1_div_2 = (P(x0) + P(x0 + h)) / 2
    return -Xn_formula(x0, h, '+') + h**2 * pn_1_div_2 / 8

def get_P0(x0, h):
    fn_1_div_2 = (F(x0) + F(x0 + h)) / 2
    return h * F0 + h**2 * (fn_1_div_2 + F(x0)) / 4

def get_KN(x, h):
    res = 2 * k(x) * k(x - h) / (k(x) + k(x - h))
    return -P(x)*h/4 - (P(x-h) + P(x))*h/16 - alpha(x) - res/h

def get_MN(x, h):
    res = 2 * k(x) * k(x - h) / (k(x) + k(x - h))
    return res/h - (P(x-h) + P(x))*h/16

def get_PN(xn, h):
    return -alpha(xn) * T0 - h * (3*F(xn) + F(xn - h))/8

def progon(A, B, C, D, K0, M0, P0, KN, MN, PN):
    xi = [0]
    eta = [0]
    xi.append(-M0/K0)
    eta.append(P0/K0)
    for i in range(1, len(A)):
        xi.append(C[i]/(B[i] - A[i]*xi[-1]))
        eta.append((D[i] + A[i] * eta[-1])/(B[i] - A[i]*xi[-2]))
    y = [(PN - MN*eta[-1]) / (KN + MN * xi[-1])]
    for i in range(len(A) - 2, -1, -1):
        y.reverse()
    return y

k0 = 0.4
kN = 0.1
alpha0 = 0.05
alphaN = 0.01
l = 30
T0 = 300
R = 0.5
F0 = 50
h = 1e-3
x0 = 0

b = kN * l / (kN - k0)
a = - k0 * b
d = alphaN * l / (alphaN - alpha0)
c = - alpha0 * d

A = []
B = []
C = []
D = []
xmas = []

for x in np.arange(x0, l + h, h):
    Ai, Ci, Di = An(x, h), Cn(x, h), Dn(x, h)
    Bi = Bn(x, h, Ai, Ci)
    A.append(Ai)
    B.append(Bi)
    C.append(Ci)

```

```

D.append(Di)

K0 = get_K0(x0, h)
P0 = get_P0(x0, h)
M0 = get_M0(x0, h)

KN = get_KN(l, h)
PN = get_PN(l, h)
MN = get_MN(l, h)

dots = progon(A, B, C, D, K0, M0, P0, KN, MN, PN)
plot_maker(xmas[1:], dots[1:], 'Длина стержня, см', 'Температура, К')

```

Далее, в экспериментальной части, тестирование будет производиться по этим данным:

$$k_0 = 0.4 \text{ Вт/смК},$$

$$k_n = 0.1 \text{ Вт/смК},$$

$$\alpha_0 = 0.05 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$\alpha_n = 0.01 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$l = 10 \text{ см},$$

$$T_0 = 300 \text{ К},$$

$$R = 0.5 \text{ см},$$

$$F_0 = 50 \text{ Вт/см}^2.$$

III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В данном разделе будет рассмотрен вывод программы и представлены графики зависимостей.

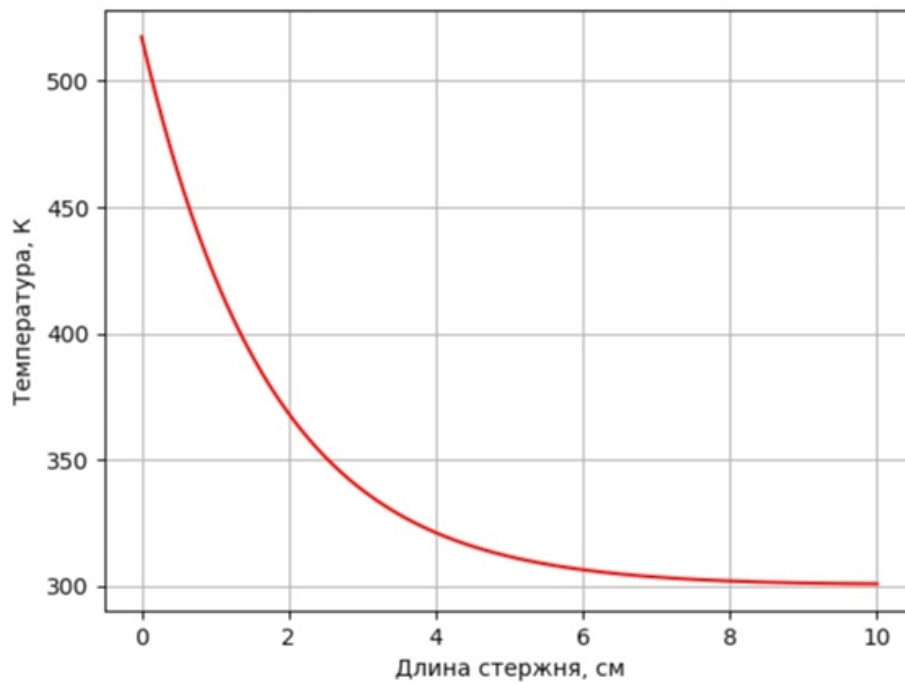


Рисунок 1. График зависимости температуры $T(x)$ от координаты при заданных выше параметрах.

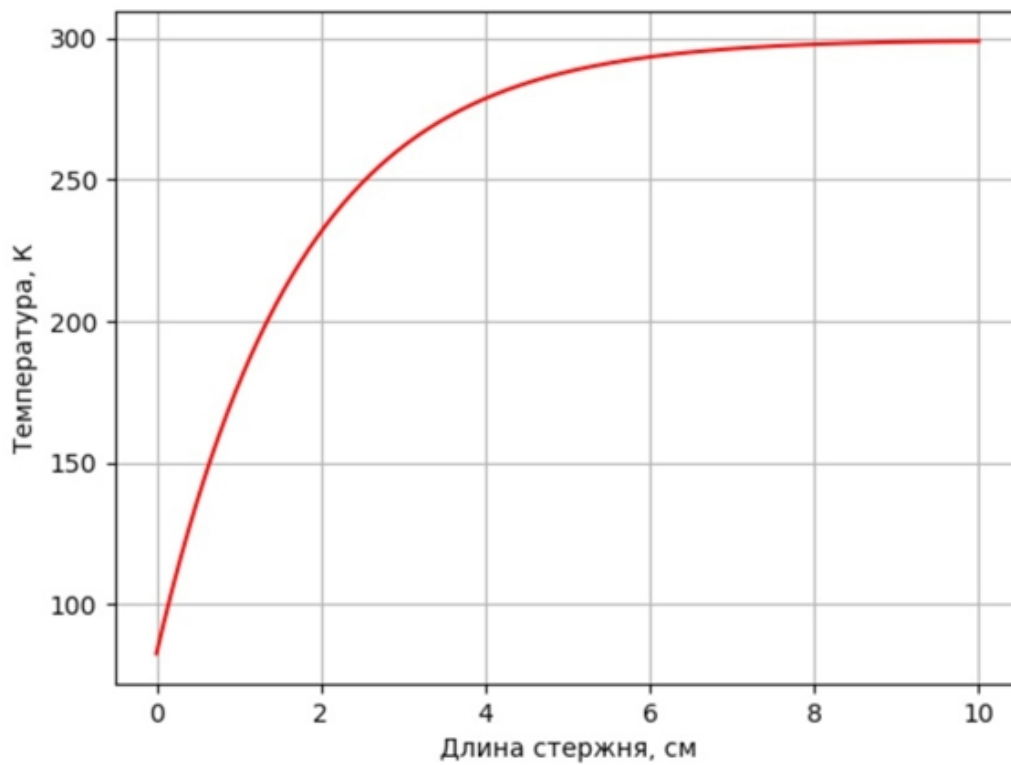


Рисунок 2. при $F_0 = -50$ Вт/см².

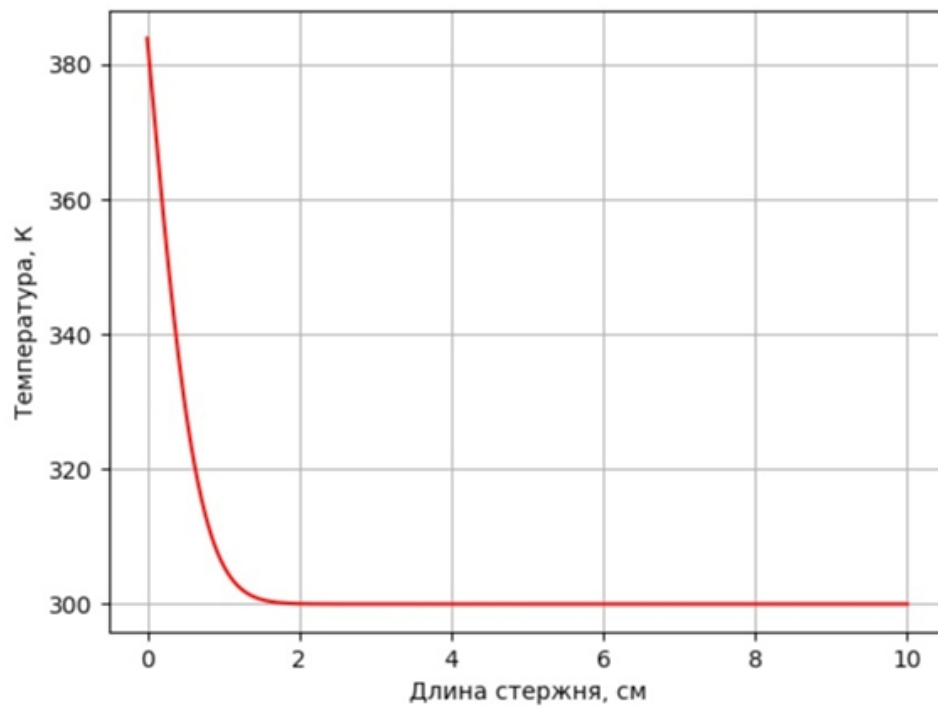


Рисунок 3. График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях $\alpha(x)$ в 3 раза.

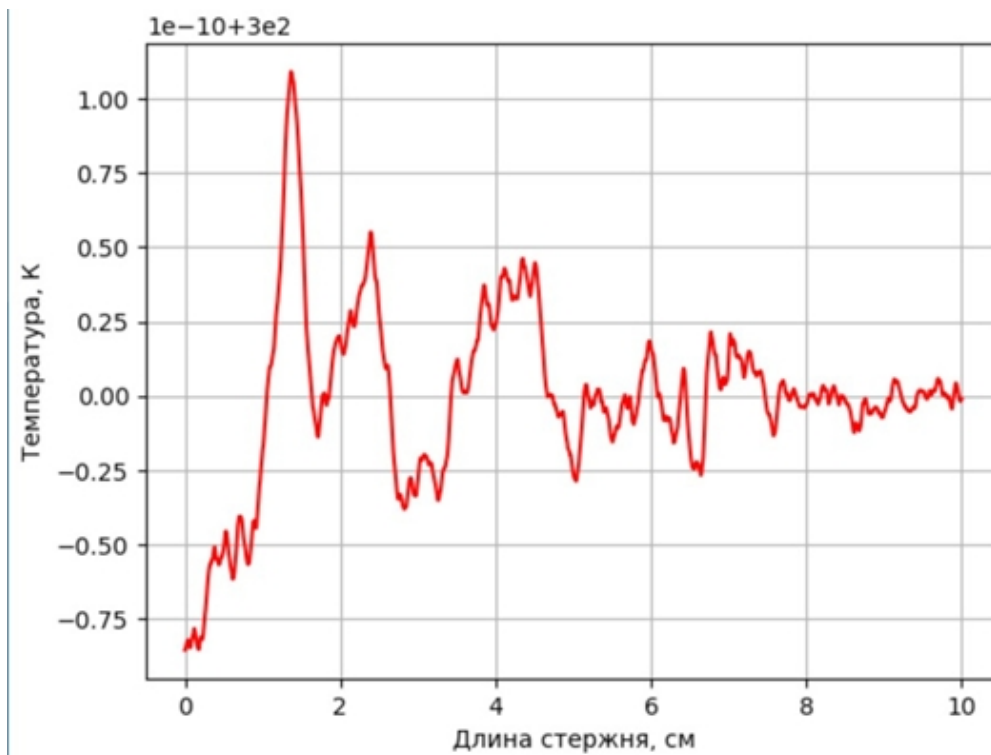


Рисунок 4. График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$ Вт/см².

IV. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?

1) При $F_0 = 0$ $T(x) = T_0 \pm \varepsilon$, где ε – погрешность

2) Должна быть положительная производная функции $T(x)$ при $F_0 < 0$

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x=l$, $-k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \phi(T)$:

Разностная аппроксимация краевого условия

$$\frac{Y_{N-1} - Y_N}{h} k_N = \alpha_N (y_N - T_0) + \phi(y_N)$$

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x=0$ краевое условие линейное (как в настоящей работе), а при $x=l$, как в п.2

Используя простейшую аппроксимацию первых производных односторонними разностями, получим:

$$\xi_1 = , \quad \eta_1 = \frac{F_0 h}{k_0}$$

Далее, найдем прогоночные коэффициенты:

$$\xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}, \quad \eta_{n+1} = \frac{F_n + A_n \eta_n}{B_n - A_n \xi_n}$$

Учитывая, что $y_{n-1} = \xi_n y_n + \eta_n$, найдём:

$$y_N = \frac{k_N \eta_N + h \alpha \beta - h \phi(y_N)}{k_N (1 - \xi_N) + h \alpha}$$

ЛУЧШЕ НЕ ИСПОЛЬЗОВАТЬ 4й ОТВЕТ, ОН ПЛОХОЙ!

4. Опишите алгоритм определения единственного значения сеточной функции y_p в одной заданной точке p . Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок (лекция №8). Краевые условия

$$\eta_1 = \frac{F_0}{B_0}; \quad \eta_N = \frac{A_N}{B_N}$$
$$\xi_1 = \frac{C_0}{B_0}; \quad \xi_N = \frac{F_N}{B_N}$$

Прямой ход ($1 \leq i \leq p-1$):

$$\xi_{i+1} = \frac{C_i}{B_i - A_i \xi_i};$$
$$\eta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \eta_i}{B_i - A_i \eta_i}$$

Обратный ход $(p \leq i \leq N-1)$:

$$\hat{\xi}_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \hat{\xi}_{i+1}}$$

$$\hat{\eta}_i = \frac{F_i + C_i \hat{\eta}_{i+1}}{B_i - C_i \hat{\xi}_{i+1}}$$

$$\left. \begin{aligned} y_{p-1} &= \xi_p y_p + \eta_p \\ y_{p+1} &= \hat{\xi}_p y_p + \hat{\eta} \\ A_p y_{p-1} B_p y_p + C_p y_{p+1} &= -P_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_p = \frac{F_p + A_p \eta_p + C_p \hat{\eta}_{p+1}}{B_p - A_p \xi_p - C_p \hat{\xi}_{p+1}}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При увеличении тепло съема и неизменном потоке F_0 уровень температур $T(x)$ снижается, а градиент увеличивается (при сравнении рис. 1 и 3). Также на рис. 4 можно наблюдать, что, в отсутствии теплового нагружения, температура стержня равна окружающей температуре, погрешность определяется приближенным характером вычислений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градов В.М. Методические указания: «30-03-2020-Задание_на_лаб_раб_№3.doc» (дата обращения 01.05.2020)
2. Matplotlib URL: <https://matplotlib.org> (дата обращения 10.04.2020)
3. Градов В.М. Компьютерные технологии в практике математического моделирования часть 2 URL:<http://ebooks.bmstu.ru/secret/html/bikqxyzugca/files/assets/basic-html/page-1.html> (дата обращения 01.05.2020)
4. Градов В.М. Лекция №8 «30-03-2020-Лекция_№8_Модели_ОДУ_краевая_задача.pdf» (дата обращения 01.05.2020)