Теория вероятностей. Вопросы к РК1

Этот файл — вырезка из лекций, которая составляется для удобства подготовки к РК. Можно сказать, что составляется она один раз: всякие ошибки, будь они типографическими или смысловыми, будут, скорее всего, исправлены только в конспекте лекций.

1. **Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади такой фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).**

   Пусть D — некоторая область на плоскости. Если D является прямоугольником, треугольником, многоугольником (и т. д.), то понятие площади области D ввести легко (см. классические формулы).

   Как ввести понятие площади для произвольной области D?

   Рассмотрим множество всех многоугольников M, которые целиком содержит область D, и множество всех многоугольников m, которые целиком содержатся в D.

   (Тут нужно сделать рисунок)

   Обозначим
   $$S^* = \inf_M S(M)$$
   где $S(M)$ — площадь многоугольника M. Обозначим
   $$S_* = \sup_m S(m)$$

   Определение. *Область D на плоскости называется квадрируемой, если для неё существуют конечные значения S^*, S_* и эти значения совпадают. При этом величина $S = S^* = S_*$ называется площадью квадрируемой области D.*

   По определению, множество D точек плоскости имеет площадь нуль, если D можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади (т. е. $\forall \varepsilon > 0$ существует M — многоугольник такой, что $D \subseteq M$, $S(M) \leqslant \varepsilon$).

   Утверждение. *Пусть D — замкнутая область на плоскости. Тогда эта область квадрируемая тогда и только тогда, когда её граница имеет площадь нуль.*

   Утверждение приводится без доказательства.

   (Дополнительные материалы):

Следствие. *Пусть D — область на плоскости, ограниченная набором спрямляемых кривых. Тогда область D — квадрируема.*

Утверждение приводится без доказательства.

2. **Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.**

   (a) *Задача об объёме цилиндрического тела*

   Пусть

   i. D — область на плоскости Oxy (замкнутая и ограниченная);
   ii. f — функция на плоскости, принимающая неотрицательные значения: $f: D \to \Re$;
   iii. $f(x,\, y) \geqslant 0,\ (x,\, y) \in D$;
   iv. Тело G ограничено
      A. снизу — областью D;
      B. сверху — графиком функции $z = f(x,\, y)$;
      C. соответствующими вертикальным прямыми, проходящими через границу области D.

   Другими словами

$$G = \{\, (x,\, y,\, z) : (x,\, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,\, y)\, \}$$

(Здесь нужно сделать рисунок тела)

Задача. *Найти объём $V(G)$ тела G.*

Разобъём область D на части $D_i,\ i = \overline{1, n}$, так, чтобы

i. $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$;
ii. int[1] $D_i \cap int\, D_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Где $int\, M$ - множество внутренних точек множества M.

В пределах каждой подобласти D_i выберем точку $M_i,\ i = \overline{1, n}$.
Объём той части тела G, которая располагается над подобластью D_i, равен $\vartriangle V_i \approx f(M_i) \vartriangle S_i$, где $\vartriangle S_i$ — площадь области D_i. Тогда объём всего тела G

$$V(G) = \sum_{i=1}^{n} \vartriangle V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i$$

[1] Interior по версии Власова. Не internal. — Прим. ред.

.

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры подобалстей D_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$V(G) = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} diam D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i$$

Замечание. *Диаметром множества M называется число*

$$diam\, M = \sup_{P,\, Q \in M} |\overrightarrow{PQ}|$$

(Здесь можно сделать рисунок, иллюстрирующий концепцию диаметра)

(b) *Определение двойного интеграла*

Пусть D — квадрируемая замкнутая область на плоскости Oxy.

Определение. *Разбиением области D называется набор $T = \{D_1,\, \ldots,\, D_n\}$, где*

i. $D_i \subseteq D,\ i = \overline{1, n}$;

ii. $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$;

iii. $int\, D_i \cap int\, D_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$.

Определение. *Диаметром разбиения T называется число*

$$d(T) = \max_{i=\overline{1,n}} diam\, D_i$$

.

Определение. *Пусть $f : D \to \Re$ — функция двух переменных.*
Двойным интегралом функции f по области D называется число

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)\, dx\, dy = \lim_{d(T) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i$$

,

где $M_i \in D_i,\ i = \overline{1, n}$; $\vartriangle S_i = S(D_i),\ i = \overline{1, n}$; $T = \{D_1,\, \ldots,\, D_n\}$.

Замечание. *В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от выбора разбиения T области D и способа выбора точек M_i.*

3. **Задача о вычислении массы пластины. Сформулировать определение двойного интеграла.**

   Пусть

   (a) пластина занимает плоскую область D на плоскости Oxy;

   (b) $f(x,\, y)$ – значение поверхностной плоскости материала пластины в точке $(x,\, y)$.

   Задача. *Найти массу этой пластины.*

   Разобъём область D на подобласти $D_i,\ i = \overline{1, n}$, так, чтобы выполнялись условия

   (a) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$;

   (b) $int\, D_i \cap int\, D_j = \emptyset$ при $i \neq j$

   Тогда, считая, что размеры подобласти D_i достаточно малы, можно считать, что, в пределах этой подобласти, плотность $f(x,\, y)$ изменяется незначительно. Поэтому масса той части пластины как раз занимает подобласть D_i:

   $$\vartriangle m_i \approx f(M_i) \vartriangle S_i$$

   где $M_i \in D_i$ — произвольная точка, $\vartriangle S_i = S(D_i)$.

   С учётом этого масса всей пластины

   $$m = \sum_{i=1}^{n} \vartriangle m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i$$

   Эта функция тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому

   $$m = \lim_{\max diam D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i,\ i = \overline{1, n}$$

   (Для определения двойного интеграла см. вопрос 2)

4. **Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.**

   Линейность.

(a) Если f и g интегрируемы в D, то $f \pm g$ также интегрируема в D, причём

$$\iint\limits_D (f \pm g)\,dx\,dy = \iint\limits_D f\,dx\,dy \pm \iint\limits_D g\,dx\,dy$$

(b) Функция $c \cdot f$, где $c = const$, интегрируема в D, и

$$\iint\limits_D c \cdot f\,dx\,dy = c \iint\limits_D f\,dx\,dy$$

Аддитивность.

Пусть

(a) $D = D_1 \cup D_2$,

(b) $int\,D_i \cap int\,D_2 = \emptyset$,

(c) f интегрируема в D_1,

(d) f интегрируема в D_2.

Тогда f интегрируема в D, причём

$$\iint\limits_D f\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f\,dx\,dy$$

Свойство сохранения двойным интегралом знака функции.

Пусть

(a) $f(x,\,y) \geqslant 0$ (в D),

(b) f интегрируема (в D).

Тогда $\iint\limits_D f\,dx\,dy \geqslant 0$.

(аналогично для $\leqslant$))

5. **Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.**

Теорема об оценке модуля двойного интеграла.

Пусть f интегрируема в D. Тогда $|f|$ также интегрируема в D, причём

$$\left|\iint\limits_D f\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_D |f|\,dx\,dy$$

.

Теорема об оценке двойного интеграла.

Пусть

(a) f, g интегрируемы (в D);

(b) $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ (в D);

(c) $g(x, y) \geqslant 0$ (в D).

Тогда

$$m \iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy \leqslant M \iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy$$

Следствие. *Если $g(x, y) \equiv 1$ в D, то свойство 7 принимает вид*

$$m \cdot S \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M \cdot S$$

где S — площадь области D.

Теорема о среднем значении для двойного интеграла.

Пусть

(a) f — непрерывна в D;

(b) D — квадрируемая линейно связная замкнутая область.

Тогда $\exists M_0 \in D$ такая, что

$$f(M_0) = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \tag{1}$$

где S — площадь области D.

Замечание. *Величину в правой части формулы 1 называют средним значением функции f в области D.*

(Дополнительные материалы): Обобщённая теорема о среднем значении. Обратите внимание, что в аналогичном вопросе с тройным интегралом требуется обобщённая версия.

Пусть

(a) f непрерывна (в D);

(b) g интегрируема (в D);

(c) g знакопостоянна (опять в D);

(d) D — линейно связная замкнутая область.

Тогда $\exists M_0 \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,\, y)\, g(x,\, y)\, dx\, dy = f(M_0) \iint\limits_D g(x,\, y)\, dx\, dy$$

Замечание. *«Обычная» теорема о среднем значении является следствием обобщённой, для* $g(x,\, y) = 1$*.*

6. **Сформулировать определение y-правильной области и теорему о вычислении двойного интеграла по произвольной y-правильной области.**

Определение. *Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если её можно задать в следующем виде:*

$$D = \{(x,\, y) \colon a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

(Здесь можно сделать поясняющий рисунок.)

Теорема. *Пусть*

(a) $\exists \iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = I$

(b) Область D является y-правильной и задаётся в виде

$$D = \{(x,\, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

(c) $\forall x \in [a, b]\ \exists \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\, y)\, dy \overset{\text{обозначим}}{=} F(x)$

Тогда

(a) Существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\, y)\, dy = \int\limits_a^b F(x) dx \overset{\text{обозначим}}{=} I_{\text{повт.}}$

(b) $I_{\text{повт.}} = I$

(Дополнительные материалы):

Определение. *Повторным интегралом называется выражение*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\,y)\,dy$$

Значением повторного интеграла называется число

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx$$

где

$$F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(2)} f(x,\,y)\,dy,\; x \in [a,b]$$

7. **Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Записать формулы перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным и обобщенным полярным координатам. Дать геометрическую интерпретацию полярных координат.**

   Пусть

   (a) $I = \iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy$

   (b) Есть область D_{xy} очень сложной формы *(см. рисунок 7)*.

   Предположим, что мы подобрали

   (a) Область D_{uv} более простой формы *(см. рисунок 8)*;

   (b) Отображение Ф: $D_{uv} \to D_{xy}$

   $$\Phi = \begin{cases} x = x(u,\,v) \\ y = y(u,\,v) \end{cases}$$

   Тогда вычисление двойного интеграла I можно упростить.

   Теорема. ***О замене переменных в двойном интеграле.***

   (a) $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$*;*

(b) Φ *непрерывно*[2] *и непрерывно дифференцируемо*[3]*;*

(c) Φ *биективно;*

(d) *Якобиан отображения* Φ *не равен нулю в* D_{uv}*:*

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(e) f *интегрируема в* D_{xy}.

Тогда

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,\, v),\, y(u,\, v))\, |J_\Phi(u,\, v)|\, du\, dv$$

Формулы перехода от декартовых координат к полярным.

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi$$

Формулы перехода от декартовых координат к обобщённым полярным (отсутствовали в лекциях, были на семинаре (как минимум, для тройного интеграла)).

$$x = a\, \rho \cos\varphi$$
$$y = b\, \rho \sin\varphi$$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\, ab\rho\, d\rho\, d\varphi$$

Под геометрической интерпретацией подразумевается описание соответствующих систем координат (в общем и применительно к декартовой системе).

---

[2] Т. е. $x(u, v)$, $y(u, v)$ непрерывны. — Прим. лект.

[3] x'_u, x'_v, y'_u, y'_v существуют и непрерывны. — Прим. лект.

8. **Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.**

Вычисление площади плоской фигуры

Пусть фигура занимает область D на плоскости Oxy. Тогда площадь этой фигуры равна двойному интегралу

$$S(D) = \iint\limits_{D} 1 \cdot \, dx\, dy$$

(см. свойство 1 двойного интегала: если область D имеет площадь S, то $\iint\limits_{D} 1 \cdot dx\, dy = S$)

Вычисление объёма цилиндрического тела

Пусть

(a) G — тело в пространстве $Oxyz$;

(b) $G = \{(x,\, y,\, z)\colon (x,\, y) \in D_{xy},\ z_1(x,\, y) \leqslant z \leqslant z_2(x,\, y)\}$.

(Здесь можно сделать рисунок данного тела)

Тогда объём тела G можно найти по следующей формуле:

$$V(G) = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,\, y) - z_1(x,\, y)]\, dx\, dy \tag{2}$$

Замечание. *В ранее рассмотренной задаче о вычислении объёма цилиндрического тела тело ограничивалось $f(x,\, y) \geqslant 0$ и плоскостью Oxy. Объём такого тела равен*

$$V(G) = \lim_{\max diam D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle S_i$$

Формула 2 является обобщением этого старого результата.

Вычисление массы пластины

Пусть

(a) Пластина занимает область D на плоскости Oxy;

(b) $\mu(x, y)$ — значение поверхностной плоскости материала пластины в точке (x, y).

Тогда масса этой пластины

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dx\, dy$$

(см. задачу о вычислении массы пластины)

9. **Сформулировать определение кубируемого тела и объема кубируемого тела. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).**

Если тело G является кубом или многогранником, то понятие объёма можно ввести элементарным образом. Давайте рассмотрим множество всех многогранников m, целиком содержащихся в G. Пусть

$$V_* = \sup_m V(m)$$

Теперь рассмотрим множество всех многранником M, целиком содержащихся в G. Обозначим

$$V^* = \inf_M V(M)$$

Определение. *Тело G называется кубируемым, если существуют конечные значения V_*, V^*, причём V_*, V^*. При этом $V = V_* = V^*$ называется объёмом кубируемого тела G.*

Определение. *Говорят, что множество G точек пространства имеет объём нуль, если G можно заключить в многогранник сколь угодно малого объёма, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q$ — многогранник такой, что $G \leqslant Q$.*

Теорема. *Пусть G — тело. Тогда G кубируемо тогда и только тогда, когда границы G имеют объём нуль.*

Доказательство. *Без доказательства.*

10. **Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.**

(a) **Задача о вычислении массы тела.**

Задача. *Пусть тело занимает область G в пространстве $Oxyz$. $\mu(x, y, z)$ — значение плотности материала этого тела в точке с координатами (x, y, z). Требуется найти массу тела G.*

Здесь мог бы быть ваш рисунок для задачи о вычислении массы тела, но его украла лень редактора.

Разобъём тело G на непересекающиеся части G_i, а точнее

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i,\ int\, G_i \cap int\, G_j = \emptyset,\ \ i \neq j$$

В пределах каждой области G_i выберем точку $M_i \in G_i$, $i = \overline{1,\, n}$. Считая, что размеры части G_i достаточно малы, можно полагать, что функция плотности μ не очень сильно изменяется в пределах области G_i, поэтому $\mu(x,\, y,\, z) \approx f(M_i)$, $(x,\, y,\, z) \in G_i$.
Тогда масса части G_i

$$m(G_i) \approx \mu(M_i) \vartriangle V_i$$

где $\vartriangle V_i$ — объём части G_i.
Тогда масса тела G

$$m(G) = \sum_{i=1}^{n} m(G_i) \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i) \vartriangle V_i$$

Эта функция тем точнее, чем меньше размеры G_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$m(G) = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,\, n}} diam\, G_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i) \vartriangle V_i$$

(b) **Определение тройного интеграла**

Пусть G — тело в пространстве $Oxyz$, определена

$$f : G \to \Re$$

— числовая функция.
Разобъём тело G на части G_i, $i = \overline{1,\, n}$ так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела.
Обозначим $T = \{G_1,\, \ldots,\, G_n\}$ — разбиение тела G.

Определение. *Тройным интегралом функции f по области G называется число*

$$\iiint\limits_G f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{d(T) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle V_i$$

11. **Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.**

Эти свойства формулируются абсолютно аналогично свойствам двойного интеграла, см. вопрос 4.

Линейность.

(a) Если f и g интегрируемы в G, то $f \pm g$ также интегрируема в G, причём

$$\iiint\limits_G (f \pm g)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_G f\, dx\, dy\, dz \pm \iiint\limits_G g\, dx\, dy\, dz$$

(b) Если f интегрируема в G, то $c \cdot f$, где $c = const$, интегрируема в G, и

$$\iiint\limits_G c \cdot f\, dx\, dy\, dz = c \iiint\limits_G f\, dx\, dy\, dz$$

Аддитивность.

Пусть

(a) $G = G_1 \cup G_2$,

(b) $int\, G_i \cap int\, G_2 = \emptyset$,

(c) f интегрируема в G_1,

(d) f интегрируема в G_2.

Тогда f интегрируема в G, причём

$$\iiint\limits_G f\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{G_1} f\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{G_2} f\, dx\, dy\, dz$$

Свойство сохранения тройным интегралом знака функции.

Пусть

(a) $f(x,\, y) \geqslant 0$ (в G),

(b) f интегрируема (в G).

Тогда $\iiint\limits_G f\, dx\, dy\, dz \geqslant 0$.

(аналогично для $\leqslant$)

12. **Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из нее, обобщённую теорему о среднем значении для тройного интеграла.**

Эти свойства формулируются абсолютно аналогично свойствам двойного интеграла, см. вопрос 5. Обратите внимание, что в этом вопросе требуется обобщённая теорема о среднем значении.

13. **Сформулировать определение тройного интеграла и теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.**

Определение тройного интеграла

Пусть G — тело в пространстве $Oxyz$, определена

$$f : G \to \Re$$

— числовая функция.

Разобъём тело G на части G_i, $i = \overline{1, n}$ так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела.

Обозначим $T = \{G_1, \ldots, G_n\}$ — разбиение тела G.

Определение. *Тройным интегралом функции f по области G называется число*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \vartriangle V_i$$

Теорема о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.

Пусть G — тело в пространстве $Oxyz$.

Определение. *Тело G называется z-правильным, если его можно задать в следующем виде:*

$$G = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in D_{xy},\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\} \qquad (3)$$

где D_{xy} — область на плоскости Oxy.

(Здесь можно сделать поясняющий рисунок)

Теорема. *Пусть*

(a) $\exists \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = I$;

(b) *Область G является z-правильной и задаётся формулой 3;*

(c) *Для каждой фиксированной точки $(x,\, y) \in D_{xy}$ существует интеграл*

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\, y,\, z)\, dz \overset{\text{обозначим}}{=} F(x,\, y)$$

Тогда

(a) *Существует повторный интеграл*

$$\iint\limits_{D_{xy}} F(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{xy}} dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\, y,\, z)\, dz \overset{\text{обозначим}}{=} I_{\text{повт.}}$$

(b) $I = I_{\text{повт.}}$

(Дополнительные материалы):

Замечание. *Если при этом область D_{xy} является y-правильной и задаётся в следующем виде*[4]

$$D = \{(x,\, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

то

$$\iiint\limits_{G} f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\, y,\, z)\, dz$$

14. **Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Записать формулы перехода в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам. Дать геометрическую интерпретацию цилиндрических и сферических координат.**

Теорема. *Пусть*

(a) $G_{xyz} = \Phi(G_{uv\omega})$, *где* $\Phi = \begin{cases} x = x(u,\, v,\, \omega) \\ y = y(u,\, v,\, \omega) \\ z = z(u,\, v,\, \omega) \end{cases}$

(b) Φ *биективно;*

(c) Φ *непрерывно и непрерывно дифференцируемо в $G_{uv\omega}$;*

[4] Стандартное определение y-правильной области. — Прим. ред.

(d) *Якобиан*

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (в } G_{uv\omega})$$

.

Тогда

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{G_{uv\omega}} f(x(u,\, v,\, \omega), y(u,\, v,\, \omega), z(u,\, v,\, \omega))|J_\Phi|\, du\, dv\, d\omega$$

Формулы перехода от декартовых к цилиндрическим.

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{G_{\rho\varphi z}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

Формулы перехода от декартовых к сферическим.

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = z\sin\theta$$

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{G_{\rho\varphi\theta}} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, z\sin\theta)\, \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Под геометрической интерпретацией подразумевается описание соответствующих систем координат (в общем и применительно к декартовой системе).