

Анализ алгоритмов

21 января 2021 г.

Содержание

1	Скорость роста длины записи коэффициентов при реализации метода Гаусса (10)	4
2	Представление "длинного" числа в файле (массиве, списке) как числа в системе счисления по модулю p ($p = 1000$, если <code>integer</code> 2^{16} , если $p = 100000000$ <code>longinteger</code> 2^{32}). Запись из файла. Оценка числа шагов. Вывод в файл. Оценка числа шагов (14)	4
2.1	Представление длинного числа	4
2.2	Запись из файла	4
2.3	Вывод в файл	4
3	Сложение двух "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (17)	5
4	Предикаты равенства и неравенств "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (18)	5
5	Вычитание двух "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (18)	5
6	Умножение "длинного" числа на короткое. Оценка числа шагов (19)	6
7	Умножение "длинных" чисел. Оценка числа шагов (20)	6
8	Деление "длинных" чисел. Оценка числа шагов (21)	6
9	Оценки числа шагов метода Гауса при действиях с "длинными" числами	6
10	Сортировки и оценки числа их шагов: Пузырёк. Сортировка вставками. Сортировка слияниями фон Неймана	8
11	Алгоритмы на графах, различные способы представления графа в компьютере	8
12	Алгоритм поиска в глубину. Оценки числа шагов в зависимости от способа представления графа	8

13 Алгоритм поиска в ширину. Оценки числа шагов в зависимости от способа представления графа	8
14 Задачи, решаемые с помощью этих алгоритмов:— выделение компонент связности,— проверка на двудольность и выделение долей,— выделение остова графа	8
15 Нахождение остова минимального веса. Метод Р. Прима. Оценки числа шагов	8
16 Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути. Оценки числа шагов	8
17 Нахождение циклов и мостов в графе. Оценки числа шагов	8
18 Эйлеров цикл. Оценки числа шагов	8
19 Гамильтонов цикл. Оценки числа шагов	8
20 Алгоритм генерации всех независимых множеств. Оценки числа шагов	8
21 Теорема о НМ, ВП, КЛИКА. Оценки числа шагов	8
22 Отличия между интуитивным и математическим понятиями	8
23 Машины Тьюринга и их модификации. Тезис Тьюринга-Чёрча	8
24 Теорема о числе шагов МТ, моделирующей работу k-ленточной МТ	8
25 Недетерминированные МТ. Теорема о числе шагов МТ, моделирующей работу недетерминированной МТ	8
26 Понятия сложности алгоритма от данных, сложность алгоритма, сложность задачи. Верхняя и нижняя оценки сложности	8
27 Соотношение между временем работы алгоритма требуемой памятью	8
28 Классы алгоритмов и задач. Схема обозначений	8
29 Классы P , NP и $P - SPACE$. Соотношения между этими классами	8
30 Полиномиальная сводимость и полиномиальная эквивалентность	8
31 Полиномиальная сводимость задачи ГЦ к задаче КОМИВОЯЖЁР	8
32 Классы эквивалентности по отношению полиномиальной эквивалентности. Класс P – пример такого класса	8
33 NP -полные задачи. Класс NP -полных задач — класс эквивалентности по отношению полиномиальной эквивалентности	8
34 Задача ВЫПОЛНИМОСТЬ (ВЫП).Теорема Кука	8

35	Задача 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (3-ВЫП). Её NP-полнота	8
36	Задачи ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ (ВП), НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО (НМ), КЛИКА. NP-полнота задачи ВП. Полиномиальная эквивалентность этих трёх задач	8
37	NP-полнота задач ГЦ и ГП (без доказательства)	8
38	NP-полнота задач 3-С и РАЗБИЕНИЕ (без доказательства)	8
39	Метод сужения доказательства NP-полноты	8
40	"Похожие" задачи и их сложность	8
41	Анализ подзадач	8
42	Алгоритм решения задачи РАЗБИЕНИЕ	8
43	Задачи с числовыми параметрами. Псевдополиномиальные задачи	8

1 Скорость роста длины записи коэффициентов при реализации метода Гаусса (10)

$$\|b_{ij}^r\| \leq (r+1)M + r^2$$

- $\|a\|$ – длина записи числа a
- M – максимальная длина записи элементов матрицы
- r – ранг матрицы
- $\|b_{ij}^r\|$ – длина записи коэффициента после r -й итерации

2 Представление ”длинного” числа в файле (массиве, списке) как числа в системе счисления по модулю p ($p = 1000$, если integer 2^{16} , если $p = 100000000$ longinteger 2^{32}). Запись из файла. Оценка числа шагов. Вывод в файл. Оценка числа шагов (14)

2.1 Представление длинного числа

Всякое целое неотрицательное число x может быть представлено в m -ичной системе счисления (при $m \geq 2$) в виде $x = m^{k-1}x_0 + m^{k-2}x_1 + \dots + mx_{k-2} + x_{k-1}$. При этом k – длина записи m -ичного представления числа x , $0 \leq x_i \leq m-1$ при $i = 0, \dots, k-1$

2.2 Запись из файла

Оценка числа шагов: квадратичное от длины записи исходного числа в файле количество ”шагов”.

Пусть в файле записано десятичное число, заданное словом $a_1 \dots a_n$ ($0 \leq a_i \leq 9$). Требуется представить его динамическим массивом (или списком).

Под ”шагом” понимается одна из следующих операций: считывание цифры из файла, запись цифры в целочисленный массив, выделение первой цифры многозначного числа и её удаление из него, приписывание цифры в конец числа. Заметим, что эти ”шаги” не равнозначны, т.к. последние два требуют нахождения остатка от деления на 10, а также умножения на 10 и сложения.

2.3 Вывод в файл

Оценка числа шагов: линейное от длины записи исходного числа количество ”шагов”.

При выводе числа необходимо помнить, что в каждом элементе массива, в котором хранится многоразрядное число, записана не последовательность цифр, а число, записанное этими цифрами. Поэтому число, десятичная запись которого меньше, чем длина записи выбранного нами основания m , необходимо дополнить ведущими нулями.

Под "шагом" будем понимать одну из следующих операций: запись "макроцифры" в символьную переменную, сравнение длины записи "макроцифры" с $\|m - 1\|$, дополнение строки ведущим нулём.

3 Сложение двух "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (17)

Оценка числа шагов: общее число "шагов" при сложении двух неотрицательных чисел не превосходит $3 \max\{A[0], B[0]\} + 1$, то есть составляет $O(\max\{A[0], B[0]\})$

Чтобы сложить два неотрицательных многоразрядных числа, записанных в массивы A и B , достаточно последовательно складывать по модулю m числа, записанные в $A[i]$, $B[i]$ и $d[i]$ для $i = 1, \dots, \max\{A[0], B[0]\}$, где $d[1] = 0$, при $i > 1$, $d[i]$ — это 1 (если $A[i-1] + B[i-1] + d[i-1] > m$) или 0 в противном случае.

При подсчёте числа шагов в этом разделе под "шагом" понимается одна из следующих операций: вычисление $A[i-1] + B[i-1] + d[i-1] \bmod m$, проверка условия $A[i-1] + B[i-1] + d[i-1] > m$ и вычисление $d[i]$

4 Предикаты равенства и неравенств "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (18)

Оценка числа шагов: если под "шагом" понимать количество сравнений "макроцифр", то общее число "шагов" такой процедуры не превосходит $A[0]$. В общем случае число "шагов" вычисления каждого из четырёх предикатов не превосходит $\min\{A[0], B[0]\}$.

Оценим число шагов вычисления значений предикатов $x = y$ и $x < y$ для случая, когда $A[0] = B[0]$.

Начиная со старшего разряда (то есть с $A[A[0]]$ и $B[B[0]]$) сравниваем значения чисел в $A[i]$ и $B[i]$ до тех пор, пока они совпадают. Если для некоторого i_0 $A[i_0] \neq B[i_0]$, то $x \neq y$. Если при этом $A[i_0] < B[i_0]$, то $x < y$, если $A[i_0] > B[i_0]$, то $x > y$.

5 Вычитание двух "длинных" положительных чисел. Оценка числа шагов (18)

Оценка числа шагов: общее число "шагов" при вычитании двух положительных чисел не превосходит $4 \max\{A[0], B[0]\} + 1$, то есть составляет $O(\max\{A[0], B[0]\})$.

При подсчёте числа шагов в этом разделе под "шагом" понимается одна из следующих операций: вычисление $A[i-1] - B[i-1] - d[i-1] \pmod{m}$, проверка условия $A[i-1] + B[i-1] + d[i-1] > 0$ и вычисление $d[i]$. Кроме того, предварительно проверяется условие $x \geq y$.

6 Умножение "длинного" числа на короткое. Оценка числа шагов (19)

Оценка числа шагов: общее число операций не превосходит $\max\{1, 2 + 6A[0] + \max\{1, 3\}\} = 5 + 6A[0]$, то есть составляет $O(A[0])$.

Здесь под шагом будем понимать одну из следующих операций: умножение макроцифр, сложение макроцифр, вычисление неполного частного и остатка от деления результата предыдущих операций на m . В условном операторе после `else` выполняется одно присваивание и оператор цикла, в котором (помимо двух операций, необходимых для организации цикла) производится: умножение, сложение, остатка от деления на m , вычисление неполного частного. Всего в операторе цикла 6 "шагов".

7 Умножение "длинных" чисел. Оценка числа шагов (20)

Оценка числа шагов: В предположении, что $B[0] \leq A[0]$ (это условие проверяется за 1 «шаг» и в противном случае можно умножать B на A), получаем оценку $O(A[0]B[0])$.

8 Деление "длинных" чисел. Оценка числа шагов (21)

Оценка числа шагов: $O(A[0]B[0] \cdot (A[0] - B[0]))$

Будем подбирать неполное частное от деления чисел x и y , записанных в массивах A и B , делением промежутка, в котором оно может находиться, пополам. Пусть L и U – нижняя и верхняя границы промежутка соответственно, $M = \lfloor \frac{L+U}{2} \rfloor$ – целая часть середины промежутка, $z = y \cdot M$ – число, которое будем сравнивать с делимым.

При этом будем предполагать, что число, записанное в A , больше числа, записанного в B (в противном случае неполное частное равно 0, а остаток совпадает с делимым).

9 Оценки числа шагов метода Гауса при действиях с "длинными" числами

Итоговая асимптотика: $O(\min(n, m) \cdot nm)$

При $n = m$ эта оценка превращается в $O(n^3)$ Для длинных чисел получается $O(M * n^3)$.

- 10 Сортировки и оценки числа их шагов: Пузырёк. Сортировка вставками. Сортировка слияниями фон Неймана
- 11 Алгоритмы на графах, различные способы представления графа в компьютере
- 12 Алгоритм поиска в глубину. Оценки числа шагов в зависимости от способа представления графа
- 13 Алгоритм поиска в ширину. Оценки числа шагов в зависимости от способа представления графа
- 14 Задачи, решаемые с помощью этих алгоритмов:— выделение компонент связности,— проверка на двудольность и выделение долей,— выделение остова графа
- 15 Нахождение остова минимального веса. Метод Р. Прима. Оценки числа шагов
- 16 Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути. Оценки числа шагов
- 17 Нахождение циклов и мостов в графе. Оценки числа шагов
- 18 Эйлеров цикл. Оценки числа шагов
- 19 Гамильтонов цикл. Оценки числа шагов
- 20 Алгоритм генерации всех независимых множеств. Оценки числа шагов
- 21 Теорема о НМ, ВП, КЛИКА. Оценки числа шагов
- 22 Отличия между интуитивным и математическим понятиями
- 23 Машины Тьюринга и их модификации. Тезис Тьюринга-Чёрча
- 24 Теорема о числе шагов M_T , моделирующей работу k -ленточной M_T
- 25 Недетерминированные M_T . Теорема о числе шагов M_T , моделирующей работу недетерминированной M_T
- 26 Понятия сложности алгоритма от данных, сложность алгоритма, сложность задачи. Верхняя и нижняя оценки