

Метод сеток для решения уравнения параболического типа

Александр Смирнов, 341 группа

8 июня 2020 г.

1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}$$

и граничным условиям

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, & c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Нам нужно найти в $\bar{D} = [0, 1] \times [0, T]$ решение $u(x, t)$.

2 Построение сетки

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на N равных частей и отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Построим сетку узлов $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

Приближённое решение будем искать в виде таблицы значений в точках сетки.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k \end{cases}$$

3 Явная разностная схема

Будем аппроксимировать уравнение в узле (x_i, t_{k-1})

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}$$

Каждое уравнение будет содержать решения только в четырёх точках $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_i^k$.

Из начального условия получим

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}$$

Аппроксимируем граничные условия

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_k) u_0^k - \alpha_2(t_k) \frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} &= \alpha(t_k) \\ \beta_1(t_k) u_N^k + \beta_2(t_k) \frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} &= \beta(t_k) \\ k &= \overline{1, M} \end{aligned}$$

Решение исходной задачи свелось к решению последних 4-х уравнений.

4 Схема с весами

Пусть σ – вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое свойство разностных схем

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h (\sigma u_i^k + (1 - \sigma) u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}$$

Из начального условия будем иметь

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}$$

Производные в краевых условиях аппроксимируем с первым порядком

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_k) u_0^k - \alpha_2(t_k) \frac{u_1^k - u_0^k}{h} &= \alpha(t_k) \\ \beta_1(t_k) u_N^k + \beta_2(t_k) \frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} &= \beta(t_k) \end{aligned}$$

Так как к моменту определения решения на k -ом слое решение на предыдущем слое уже известно, перепишем систему:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1 - \sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \bar{t}_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}$$

Граничные условия приведём к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом k -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k \\ A_i u_{i-1}^k - B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k &= G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1} \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k, \\ k &= \overline{1, M} \end{aligned}$$

Для решения системы будем использовать метод прогонки.