Метод сеток для решения уравнения параболического типа

Александр Смирнов, 341 группа

8 июня 2020 г.

1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}$$

и граничным условиям

$$\alpha_1(t)u(0,t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta(t)$$

$$\beta_1(t)\beta_0(t) \geq 0 \quad |\beta_1(t)| + |\beta_0(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{a) } a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad a(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \quad a(x,t) \geq a_0 > 0, \\ \text{b) } \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad p(x) \in C_{[0,1]}, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ \quad b(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \quad c(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \quad c(x,t) \leq 0. \end{cases}$$

Нам нужно найти в $\bar{D} = [0,1] \times [0,T]$ решение $u(x,t)$.

2 Построение сетки

Разобьём отрезок $[0,1]$ на N равных частей и отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Построим сетку узлов $\overline{\omega_{h\tau}} = \left\{(x_i, t_k), i = \overline{0,N}; k = \overline{0,M}\right\}$.

Приближённое решение будем искать в виде таблицы значений в точках сетки.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{a) } a(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i,t_k)u_i^k \\ \text{b) } p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i,t_k)u_i^k \end{cases}$$

3 Явная разностная схема

Будем аппроксимировать уравнение в узле (x_i, t_{k-1})

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1,M}$$

Каждое уравнение будет содержать решения только в четырёх точках $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_i^k$.

Из начального условия получим

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0,N}$$

Аппроксимируем граничные условия

$$\begin{gathered} \alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k) \\ \beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k) \\ k = \overline{1,M} \end{gathered}$$

Решение исходной задачи свелось к решению последних 4-х уравнений.

4 Схема с весами

Пусть σ – вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое свойство разностных схем

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h\left(\sigma u_i^k + (1-\sigma)u_i^{k-1}\right) + f\left(x_i, \overline{t_k}\right), \quad i = \overline{1,N-1} \quad k = \overline{1,M}$$

Из начального условия будем иметь

$$u_i^0 = \varphi\left(x_i\right), \quad i = \overline{0, N}$$

Производные в краевых условиях аппроксимируем с первым порядком

$$\begin{gathered}
\alpha_1\left(t_k\right) u_0^k - \alpha_2\left(t_k\right) \tfrac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha\left(t_k\right) \\
\beta_1\left(t_k\right) u_N^k + \beta_2\left(t_k\right) \tfrac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta\left(t_k\right)
\end{gathered}$$

Так как к моменту определения решения на k-ом слое решение на предыдущем слое уже известно, перепишем систему:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1-\sigma) L_h u_i^{k-1} - f\left(x_i, \overline{t_k}\right), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}$$

Граничные условия приведём к виду

$$\begin{gathered}
-B_0 u_0^k + C_0 u_1^k = G_0^k \\
A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k = G_N^k
\end{gathered}$$

Таким образом, на каждом k-ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида

$$\begin{gathered}
-B_0 u_0^k + C_0 u_1^k = G_0^k \\
A_i u_{i-1}^k - B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1} \\
A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k = G_N^k, \\
k = \overline{1, M}
\end{gathered}$$

Для решения системы будем использовать метод прогонки.