Загрузка узлов вычислительной сети

Олег Николаевич Граничин

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет

17 октября 2012

Постановка задачи

- Рассмотрим модель децентрализованной системы распределения заданий между n агентами (узлами), выполняющими параллельно однотипные задания, в которой допускается перераспределение заданий между агентами.
- Каждый агент $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняет поступающие задания по принципу очереди.
- Задания поступают в систему в различные дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ на разные узлы. Связь между узлами определяется, как и ранее, структурой связей динамической сети.

Постановка задачи. Математическая модель

В момент времени t поведение каждого агента $i \in N$ описывается двумя характеристиками:

- $q_t^i \geq 0$ — длина очереди из атомарных элементарных заданий узла i в момент времени t;
- $r_t^i > 0$ — производительность узла i в момент времени t.

Динамика изменений длины очереди агентов описывается следующими уравнениями:

$$q_{t+1}^i = q_t^i - r_t^i + z_t^i + u_t^i; \;\; i \in N, \; t = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

где $u_t^i \in \mathbb{R}$ — управляющие воздействия, которые в момент времени t воздействуют на узел i, z_t^i — размер нового задания, поступившего на узел i в момент времени t.

Постановка задачи. Цель управления

Стационарный случай. Все задания поступают в систему на разные узлы в начальный момент времени и производительности узлов не меняются с течением времени.
Нестационарный случай. Новые задания могут поступать в систему на любой из n узлов в различные моменты времени t и производительности узлов могут меняются с течением времени.

- Для момента времени t определим T_t – время до окончания выполнения всех заданий на всех узлах.

Если в стационарном случае, начиная с момента времени t задания не перераспределяются между узлами, то время реализации всех заданий определяется как:

$$T_t = \max_{i \in N} \frac{q_t^i}{r_t^i}. \tag{2}$$

Цель управления:

$$T_t \to \min_{u_t^i}. \tag{3}$$

Лемма (об оптимальной стратегии управления)
В стационарном случае из всех возможных вариантов распределения общего количества заданий, необработанных к моменту времени t, наименьшее время работы системы соответствует тому варианту, при котором

$$q^i_s/r^i_s = q^j_s/r^j_s,\ \forall i,j \in N,\ \forall s \le t. \tag{4}$$

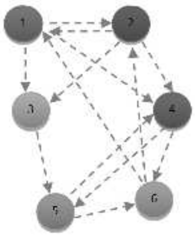
Следствие: если взять $x^i_t = q^i_t/r^i_t$ в качестве состояния узла i, то цель управления — достижение консенсуса — будет соответствовать оптимальному распределению заданий между узлами в стационарном случае.

Задача: поддерживать равномерную загрузку всех узлов сети.

Общая постановка задачи

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

- **Множеством соседей** узла i называется $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$.
- Структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется во времени.



Динамика состояний узлов

Каждому агенту $i \in N$ (узлу графа) в момент времени $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ сопоставляется изменяющееся во времени состояние $x_t^i \in \mathbb{R}$, динамика которого описывается разностным уравнением:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \qquad (5)$$

с управлением $u_t^i \in \mathbb{R}$, воздействие которого на изменение состояния x_t^i определяется некоторой функцией $f^i(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящей от текущего состояния агента x_t^i и задаваемого управления u_t^i.

Наблюдения

Для формирования управления каждый узел $i \in N$ имеет информацию о своем собственном состоянии:

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \tag{6}$$

и, если $N_t^i \neq \emptyset$, наблюдения о состояниях соседей:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j},\ j \in N_t^i, \tag{7}$$

где $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$ — помехи (шум), а $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ — целочисленная задержка, $\bar{d}$ — максимально возможная задержка.
Положим $w_t^{i,j} = 0$ и $d_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар (i,j), для которых они не были определены. Так как система начинает работу при $t = 0$, неявное требование к множеству соседей: $j \in N_t^i \Rightarrow t - d_t^{i,j} \geq 0$.

Мультиагентное управление

Совместное управление или управление распределенными динамическими системами на графах относится к ситуации, в которой каждый узел может получать информацию для проектирования управления только от самого себя и от своих соседей. Граф может задавать топологию сети связей, которая ограничивает связи между узлами. Это также называют мультиагентным управлением. Несмотря на большое количество публикаций по этой тематике, пока удовлетворительные решения получены лишь для ограниченного класса практически важных задач, так как решение таких проблем существенно усложняется, с одной стороны, из-за обмена неполной информацией, которая, кроме того, обычно измеряется с помехами, а, с другой, из-за эффектов квантования (дискретизации), свойственных всем цифровым системам.

Цели управления

Синхронизация — совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких систем, либо согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем.

Достижения консенсуса или **согласования характеристик**, в которых каждый агент стремится уменьшить отклонение своей целевой переменной от соответствующих переменных своих соседей.

Перевод группы агентов в некоторое общее состояние — задачей о **рандеву** (rendezvous). В ней требуется, чтобы все агенты оказались в заданном месте в заданное время.

Управление формациями (англ. formation control) — управление локально взаимодействующими агентами, образующими некоторые геометрические конфигурации.

При большом числе агентов — **сбивание в стаи, роение** (swarming, flocking).

Распределение ресурсов между разными возможными заданиями, задачи **диспетчеризации** (scheduling).

Основные сведения из теории графов

- Сопоставим каждой дуге $(j,i) \in E$ вес $a^{i,j} > 0$ и определим **матрицу смежности (или связности)** $A = [a^{i,j}]$ графа $\mathscr{G}_A = (N, E)$.
- Определим **взвешенную полустепень захода вершины** i как сумму i-й строки матрицы A: $d^i = \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа $\mathscr{G}_A$;
- $D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathscr{L}(A) = D(A) - A$ — **лапласиан** графа.
- **Направленный путь** из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \ldots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$.
- Граф называется **связным**, если для всех пар различных узлов (i,j) есть направленный путь из i в j.
- Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется **деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется **остовным деревом**.

Задача консенсуса на графах

- Будем называть **протоколом управления** в динамической сети с топологией (N, E_t) обратную связь по наблюдениям состояний $u_t^i = K_t^i(y_t^{i,j_1}, \ldots, y_t^{i,j_{m_i}})$, где множество $\{j_1, \ldots, j_{m_i}\} \subset \{i\} \bigcup \bar{N}_t^i$, $\bar{N}_t^i \subseteq N_t^i$.
- Узлы i и j называются **согласованными** в сети в момент времени t тогда и только тогда, когда $x_t^i = x_t^j$.
- Задача о достижении консенсуса в момент времени t — это согласование всех узлов между собой в момент времени t.
- n узлов достигают *среднеквадратичного ε-консенсуса* в момент времени t, если $E||x_t^i||^2 < \infty$, $i \in N$ и существует случайная величина $x^\star$ такая, что $E||x_t^i - x^\star||^2 \leq \varepsilon$ для всех $i \in N$.

Консенсусное управление — управление, обеспечивающее достижение консенсуса.