Сведения из теории графов. Алгоритм локального голосования. Консенсус в динамических сетях

Олег Николаевич Граничин

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет

31 октября 2012

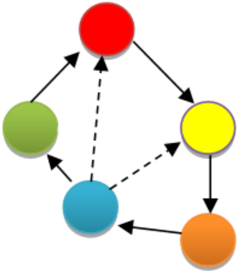
Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

- **Множеством соседей** узла i называется $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$.
- Структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется во времени.



Основные сведения из теории графов

- Сопоставим каждой дуге $(j,i) \in E$ вес $a^{i,j} > 0$ и определим **матрицу смежности (или связности)** $A = [a^{i,j}]$ графа $\mathcal{G}_A = (N,E)$.
- Определим **взвешенную полустепень захода вершины** i как сумму i-й строки матрицы A: $d^i = \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа $\mathcal{G}_A$;
- $D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ — **лапласиан** графа.
- **Направленный путь** из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \dots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1,2,\dots,s-1\}$.
- Граф называется **связным**, если для всех пар различных узлов (i,j) есть направленный путь из i в j.
- Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется **деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется **остовным деревом**.

Лемма об остовном дереве

- Лапласиан $\mathscr{L}(A)$ графа $\mathscr{G}_A$ имеет ранг равный $n-1$ тогда и только тогда, когда граф $\mathscr{G}_A$ имеет остовное дерево.

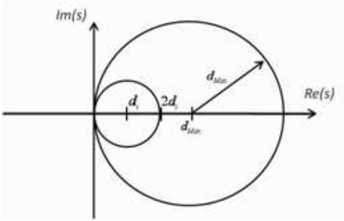
Отметим важное следствие:

- Если граф $\mathscr{G}_A$ сильно связный, то его лапласиан $\mathscr{L}(A)$ имеет ранг равный $n-1$.

Критерий Гершгорина

Обозначим $d_{\max}(A)$ максимальную полустепень захода графа $\mathscr{G}_A$.

- все собственные числа матрицы $\mathscr{L}(A)$ имеют неотрицательную вещественную часть и лежат в круге с центром на вещественной оси в точке $d_{\max}(A)$ и радиусом $d_{\max}(A)$.



Число Фидлера

Обозначим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $\mathscr{L}(A)$, упорядочив их по возрастанию модулей вещественных частей: $0 \le |Re(\lambda_1)| \le |Re(\lambda_2)| \le \dots \le |Re(\lambda_n)|$.

Если у графа есть остовное дерево, тогда $\lambda_1 = 0$ — простое собственное число, а все остальные собственные значения $\mathscr{L}$ находятся в открытой правой половине комплексной плоскости.

Второе собственное число λ_2 матрицы $\mathscr{L}$ играет важную роль во многих приложениях. Его часто называют "числом Фидлера (Fiedler)".

Для неориентированного графа:

$$Re(\lambda_2) \le \frac{n}{n-1} \min_{i \in N} d^i(A),$$

а для связного неориентированного графа G_A

$$Re(\lambda_2) \ge \frac{1}{\mathrm{diam}\, G_A \cdot \mathrm{vol}\, G_A},$$

где $\mathrm{diam}\, G_A$ — наибольшее расстояние между двумя узлами, и $\mathrm{vol}\, G_A = \sum_{i \in N} d^i(A)$.

Задача консенсуса на графах

- Узлы i и j называются **согласованными** в сети в момент времени t тогда и только тогда, когда $x_t^i = x_t^j$.
- Задача о достижении консенсуса в момент времени t — это согласование всех узлов между собой в момент времени t.
- n узлов достигают *асимптотического консенсуса*, если существует величина $x^\star$: $x^\star = \lim_{t\to\infty} x_t^i$ для всех $i \in N$.

Консенсусное управление — управление, обеспечивающее достижение консенсуса.

Линейные ОУ первого порядка

Рассмотрим частный случай: $f^i(x_t^i, u_t^i) = u_t^i$, и все наблюдения производятся без помех и задержек: $y_t^{i,j} = x_t^j$, $j \in N_t^i$.
Обозначив $\bar{x}_t = [x_t^1; \ldots; x_t^n]$ и $\bar{u}_t = [u_t^1; \ldots; u_t^n]$ — соответствующие вектор-столбцы, полученные вертикальным соединением n чисел, протокол локального голосования можно переписать в матричном виде:

$$\bar{u}_t = (\alpha_t B_t - D(\alpha_t B_t))\bar{x}_t = -\mathscr{L}(\alpha_t B_t)\bar{x}_t \tag{1}$$

и уравнение динамики в дискретном времени:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + \bar{u}_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots, T, \tag{2}$$

а также и в непрерывном

$$\dot{\bar{x}}_t = \bar{u}_t, \ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Динамика замкнутой системы в матричной форме

В дискретном времени:

$$\bar{x}_{t+1} = (I - \mathscr{L}(\alpha_t B_t))\bar{x}_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots, T, \tag{4}$$

где I — матрица размерности $n \times n$ из нулей и единиц на диагонали.
В непрерывном времени:

$$\dot{\bar{x}}_t = -\mathscr{L}(\alpha_t B_t)\bar{x}_t, \ t \in [0, T]. \tag{5}$$

Достижение консенсуса

Покажем, что протокол локального голосования с $\alpha_t = \alpha$ и $B_t = A$ асимптотически обеспечивает консенсус как для дискретной, так и для непрерывной модели.

- Если граф $\mathscr{G}_A$ имеет остовное дерево и в протоколе управления (**??**) выбраны $B_t = A$ и $\alpha_t = \alpha$ так, что выполнено условие (7), то протокол управления (**??**) обеспечивает асимптотический консенсус для дискретной системы (2) и его значение $x^\star$ определяется формулой (9).

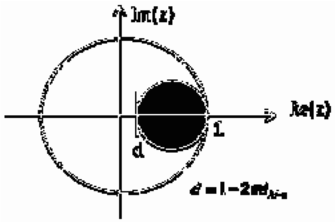
Доказательство 1

Действительно, в дискретном случае уравнение (4) превращается в

$$\bar{x}_{t+1} = (I - \mathscr{L}(\alpha A))\bar{x}_t \equiv P\bar{x}_t, \tag{6}$$

где матрица Перрона $P = I - \mathscr{L}(\alpha A)$ имеет одно простое собственное значение равное единице, а все остальные — внутри единичного круга, если

$$\alpha < \frac{1}{d_{\max}}. \tag{7}$$



Доказательство 2

Так как сумма элементов строк матрицы лапласиана $\mathscr{L}$ равна нулю, то сумма элементов строк матрицы P равна единице, т. е. вектор $\underline{1}$, составленный из единиц, является правым собственным вектором матрицы P, соответствующим единичному собственному значению, которое является простым, если у графа есть остовное дерево. Все остальные собственные значения лежат внутри единичного круга. Следовательно, если у графа есть остовное дерево, то, обозначив $\bar{z}_1 = [z^1, \ldots, z^n]$ левый собственный вектор матрицы P, ортогональный $\underline{1}$, в пределе при $t \to \infty$ получаем

$$\bar{x}_t \to \underline{1}(\bar{z}_1^{\mathrm{T}} \bar{x}_0), \tag{8}$$

т. е. достигается асимптотический консенсус. Значение консенсуса $x^\star$ равно

$$x^\star = \frac{\bar{z}_1^{\mathrm{T}} \bar{x}_0}{\bar{z}_1^{\mathrm{T}} \underline{1}} = \frac{\sum_{i=1}^n z^i x_0^i}{\sum_{i=1}^n z^i}. \tag{9}$$

Это значение зависит от топологии графа и, следовательно, от того, как узлы связаны между собой.

Сбалансированный граф

Если граф сбалансированный, тогда суммы по строкам лапласиана $\mathscr{L}$ равны суммам по соответствующим столбцам, и это свойство передается матрице P. Тогда $\bar{z}_1 = c\underline{1}$ и значение консенсуса равно среднему значению начальных значений

$$x^\star = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_0^i$$

и не зависит от топологии графа.

Непрерывный случай

В непрерывном случае имеем

$$\dot{\bar{x}} = -\mathscr{L}\bar{x}. \tag{10}$$

Пусть $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$ и $\bar{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ соответствующие им левые и правые ортонормированные собственные вектора матрицы $\mathscr{L}$. Если у графа есть остовное дерево, тогда $\lambda_1 = 0$ — простое собственное число, а все остальные собственные значения $\mathscr{L}$ находятся в открытой правой половине комплексной плоскости, т. е. система (10) частично устойчива с одним полюсом в начале координат и остальными в открытой левой полуплоскости.

Для первого левого собственного вектора $\bar{z}_1 = [\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n]$ матрицы $\mathscr{L}$ несложно вывести

$$\frac{d}{dt}(\bar{z}_1^{\mathrm{T}}\bar{x}_t) = \bar{z}_1^{\mathrm{T}}\dot{\bar{x}}_t = -\bar{z}_1^{\mathrm{T}}\mathscr{L}\bar{x}_t = 0,$$

т. е. величина $\tilde{x} \equiv \bar{z}_1^T\bar{x}_t = \sum_{i=1}^n z_1^i x_t^i$ — инвариант — постоянна и не зависит от состояний узлов. Таким образом, $\sum_{i=1}^n \bar{z}_1^i x_0^i = \sum_{i=1}^n \bar{z}_1^i x_t^i, \forall t.$

Лемма

- Если граф $\mathscr{G}_A$ имеет остовное дерево, то протокол локального голосования с $\alpha_t = \alpha$ и $B_t = A$ обеспечивает асимптотический консенсус для непрерывной системы (3) и его значение $x^\star$ определяется формулой

$$x^\star = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_1^i x_0^i \tag{11}$$

по $\bar{x}_0$ и ортонормированному первому левому с. в. матрицы $\mathscr{L}$.

Применяя модальное разложение можно записать вектор состояний через собственные числа и собственные вектора матрицы $\mathscr{L}$. Если все собственные значения матрицы $\mathscr{L}$ простые (фактически важно только то условие, что λ_1 — простое), то

$$\bar{x}_t = e^{-\mathscr{L}t}\bar{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j e^{-\lambda_j t} \bar{z}_j^{\mathrm{T}} \bar{x}_0 = \sum_{j=2}^{n} (\bar{z}_j^{\mathrm{T}} \bar{x}_0) e^{-\lambda_j t} \bar{r}_j + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}} \underline{1}. \tag{12}$$

В пределе при $t \to \infty$ получаем $x_t \to \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}}\underline{1}$ или $x_t^i \to x^\star = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}}$, $\forall i \in N$, т. е. достигается асимптотический консенсус.

Время до консенсуса

- $T(\varepsilon)$ будем называть временем достижения ε-консенсуса, если для всех $t \geq T(\varepsilon)$ все n узлов достигают ε-консенсуса.

Из формулы (12), оценив квадрат нормы первого слагаемого

$$||\bar{x}_t - x^\star \underline{1}||^2 = ||\sum_{j=2}^{n} (\bar{z}_j^{\mathrm{T}} \bar{x}_0) e^{-\lambda_j t} \bar{r}_j||^2 =$$

$$= ||\sum_{j=2}^{n} (\bar{z}_j^{\mathrm{T}} (\bar{x}_0 - x^\star)) e^{-\lambda_j t} \bar{r}_j||^2 \leq (n-1) e^{-2Re(\lambda_2) t} ||\bar{x}_0 - x^\star \underline{1}||^2,$$

можно получить выражение для временем достижения ε-консенсуса в системе (10)

$$T(\varepsilon) = \frac{1}{2Re(\lambda_2)} \ln \left(\frac{(n-1)||x_0 - x^\star \underline{1}||^2}{\varepsilon} \right). \qquad (13)$$