Анализ динамики состояний сети в стохастическом случае. Теоретические результаты

Олег Николаевич Граничин

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет

20 ноября 2012

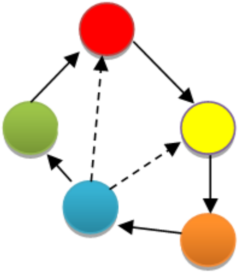
Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

- **Множеством соседей** узла i называется $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$.
- Структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется во времени.



Динамика состояний узлов

Каждому агенту $i \in N$ (узлу графа) в момент времени $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ сопоставляется изменяющееся во времени состояние $x_t^i \in \mathbb{R}$, динамика которого описывается разностным уравнением:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \qquad (1)$$

с управлением $u_t^i \in \mathbb{R}$, воздействие которого на изменение состояния x_t^i определяется некоторой функцией $f^i(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящей от текущего состояния агента x_t^i и задаваемого управления u_t^i.

Наблюдения

Для формирования управления каждый узел $i \in N$ имеет информацию о своем собственном состоянии:

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \tag{2}$$

и, если $N_t^i \neq \emptyset$, наблюдения о состояниях соседей:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \; j \in N_t^i, \tag{3}$$

где $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$ — помехи (шум), а $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ — целочисленная задержка, $\bar{d}$ — максимально возможная задержка.
Положим $w_t^{i,j} = 0$ и $d_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар (i,j), для которых они не были определены. Так как система начинает работу при $t = 0$, неявное требование к множеству соседей: $j \in N_t^i \Rightarrow t - d_t^{i,j} \geq 0$.

Основные сведения из теории графов

- Сопоставим каждой дуге $(j,i) \in E$ вес $a^{i,j} > 0$ и определим **матрицу смежности (или связности)** $A = [a^{i,j}]$ графа $\mathcal{G}_A = (N,E)$.
- Определим **взвешенную полустепень захода вершины** i как сумму i-й строки матрицы A: $d^i = \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа $\mathcal{G}_A$;
- $D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ — **лапласиан** графа.
- **Направленный путь** из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \ldots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1,2,\ldots,s-1\}$.
- Граф называется **связным**, если для всех пар различных узлов (i,j) есть направленный путь из i в j.
- Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется **деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется **остовным деревом**.

Задача консенсуса на графах

- Будем называть **протоколом управления** в динамической сети с топологией (N, E_t) обратную связь по наблюдениям состояний $u_t^i = K_t^i(y_t^{i,j_1}, \ldots, y_t^{i,j_{m_i}})$, где множество $\{j_1, \ldots, j_{m_i}\} \subset \{i\} \bigcup \bar{N}_t^i$, $\bar{N}_t^i \subseteq N_t^i$.
- Узлы i и j называются **согласованными** в сети в момент времени t тогда и только тогда, когда $x_t^i = x_t^j$.
- Задача о достижении консенсуса в момент времени t — это согласование всех узлов между собой в момент времени t.
- n узлов достигают *среднеквадратичного ε-консенсуса* в момент времени t, если $E\|x_t^i\|^2 < \infty$, $i \in N$ и существует случайная величина $x^\star$ такая, что $E\|x_t^i - x^\star\|^2 \leq \varepsilon$ для всех $i \in N$.

Консенсусное управление — управление, обеспечивающее достижение консенсуса.

Протокол локального голосования

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i}), \tag{4}$$

где $\alpha_t > 0$ — размеры шагов протокола управления, $b_t^{i,j} > 0$, $\forall j \in \bar{N}_t^i$. Положим $b_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар i, j.

Протокол распределения заданий в децентрализованной вычислительной сети

Рассмотрим протокол управления (??), в котором $\forall\, i \in N$, $\forall\, t$ определим $\bar{N}_t^i = N_t^i$ и $b_t^{i,j} = r_t^j / r_t^i$, $, j \in N_t^i$.

Динамика замкнутой системы протокол (??) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$x_{t+1}^i = x_t^i - 1 + z_t^i / r_t^i + \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} / r_t^j - y_t^{i,i} / r_t^i), \tag{5}$$

где α_t — последовательность положительных размеров шагов, $y_t^{i,j}$ — наблюдения (с помехами и задержками) о длине очереди j-го узла, z_t^i — размер нового задания, поступившего на узел i в момент времени t.

Основные предположения - I

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ — основное вероятностное пространство. Будем обозначать: E — математическое ожидание и E_x — условное математическое ожидание при условии x.

A1. $\forall i \in N$ функции $f^i(x,u)$ — липшицевы по x и u:
$|f^i(x,u) - f^i(x',u')| \le L_1(L_x|x-x'| + |u-u'|)$;
скорость роста ограничена: $|f^i(x,u)|^2 \le L_2(L_c + L_x|x|^2 + |u|^2)$;
при любом фиксированном x функции $f^i(x,\cdot)$ такие, что
$\mathrm{E}_x f^i(x,u) = f^i(x, \mathrm{E}_x u)$.

Основные предположения - II

A2. **а)** $\forall i \in N, j \in N_t^i \cup \{i\}$ помехи наблюдений $w_t^{i,j}$ — центрированные, независимые, одинаково распределенные случайные величины с ограниченными дисперсиями: $E(w_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$.
б) $\forall i \in N, j \in N^i$ появление переменных дуг (j,i) в графе $\mathscr{G}_{A_t}$ — независимые, случайные события, вероятность которых $p_a^{i,j}$ (т. е. матрицы A_t — независимые, одинаково распределенные случайные матрицы).
в) $\forall i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — ограниченные случайные величины: $\underline{b} \leq b_t^{i,j} \leq \bar{b}$ с вероятностью 1, и существуют пределы $b^{i,j} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E} b_t^{i,j}$.
г) $\forall i,j \in N$ существует конечная величина $\bar{d} \in \mathbb{N}$: $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ с вероятностью 1 и целочисленные задержки $d_t^{i,j}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $k = 0, \ldots, \bar{d}$ с вероятностями $p_k^{i,j}$.
Кроме того, все перечисленные случайные величины и матрицы независимы между собой.

Основные предположения - III

- Обозначим $\bar{n} = n(\bar{d}+1)$ и определим матрицу $A_{\max}$ размерности $\bar{n} \times \bar{n}$ по правилу:
$$a^{i,j}_{\max} = p^{i,((j-1)\,\mathrm{mod}\,n)+1}_{j \div n}\, p_a^{i,((j-1)\,\mathrm{mod}\,n)+1}\, b^{i,((j-1)\,\mathrm{mod}\,n)+1}, \; i \in N, \; j = 1, 2, \ldots$$
$$a^{i,j}_{\max} = 0, \; i = n+1, n+2, \ldots, \bar{n}, \; j = 1, 2, \ldots, \bar{n}.$$
(Здесь операция mod — остаток от деления, а $\div$ — деление нацело.)
- Заметим, что при $\bar{d} = 0$ это определение структуры сети (матрицы $A_{\max}$ размерности $n \times n$) имеет вид $a^{i,j}_{\max} = p_a^{i,j} b^{i,j}$, $i \in N$, $j \in N$.
- Обозначим $E_{\max} = \{(j,i) : \sup_{t \geq 0} a_t^{i,j} > 0\}$. Будем обозначать через N_i множество, соответствующее $N^i_{\max}$.

Будем считать, что для матрицы структуры связей сети выполняется следующее условие:

A3. Граф $\{N, E_{\max}\}$ имеет остовное дерево и для любой дуги $(j,i) \in E_{\max}$ среди элементов $a^{i,j}_{\max}, a^{i,j+n}_{\max}, \ldots, a^{i,j+\bar{d}n}_{\max}$ матрицы $A_{\max}$ найдется хотя бы один ненулевой.

Случай без задержек в измерениях

$\bar{d} = 0$. Обозначим $\bar{x}_t \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{w}_t \in \mathbb{R}^{n^2}$ — векторы составленные из элементов x_t^i и $w_t^{i,j}$, $i, j \in N$ соответственно.
Уравнение динамики состояний сети в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t), \tag{6}$$

где $F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t)$ — вектор размерности n:

$$F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t) = \begin{pmatrix} \cdots \\ f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j}((x_t^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i}))) \\ \cdots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Метод усредненных моделей [Д.П. Деревицкий, А.Л. Фрадков, АиТ 1974; L. Ljung, TAC 1977] состоит в приближенной замене исходного стохастического разностного уравнения (**??**), описывающего динамику сети, обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = R(\alpha, \bar{x}), \tag{8}$$

в котором

$$R(\alpha, \bar{x}) = R\left(\alpha, \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \cdots \\ \frac{1}{\alpha} f^i(x^i, \alpha s^i(\bar{x})) \\ \cdots \end{array}\right), \tag{9}$$

$$s^i(\bar{x}) = \sum_{j \in N^i_{\max}} a^{i,j}_{\max}(x^j - x^i) = -d^i(A_{\max})x^i + \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}_{\max} x^j,\ i \in N.$$

Теорема 1. Близость траекторий в случае без задержек

Теорема 1. Если выполнены условия **A1**, **A2а–в**, $\forall i \in N$ функции $f^i(x,u)$ гладкие по u и при любом x верно $f^i(x,0) = 0$, **тогда** существует $\hat{\alpha}$ такое, что при $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha} < \hat{\alpha}$ справедлива следующая оценка:

$$\mathrm{E} \max_{0 \leq \tau_t \leq \tau_{\max}} ||\bar{x}_t - \bar{x}(\tau_t)||^2 \leq C_1 e^{C_2 \tau_{\max}} \bar{\alpha}, \qquad (10)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — некоторые константы, $\tau_t = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{t-1}$, $\tau_{\max}$ — время работы непрерывной системы.

Теорема 2. Консенсус в случае без задержек

Теорема 2. Пусть выполнены условия **A1**, **A2а–в**; функции $f^i(x,u)$ гладкие по u $\forall i \in N$; при любом x верно $f^i(x,0) = 0$; $0 < \alpha_t \le \bar{\alpha}$; для непрерывной модели (??)-(??) достигается $\frac{\varepsilon}{4}$-консенсус за время $\mathscr{T}(\frac{\varepsilon}{4})$; параметры протокола консенсуса $\{\alpha_t\}$ выбраны таким образом, что $\tau_{\max} = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t > \mathscr{T}(\frac{\varepsilon}{4})$ и для констант C_1, C_2 выполнено неравенство

$$C_1 e^{C_2 \tau_{\max}} \max_{\alpha_t : \tau_t \le \tau_{\max}} \alpha_t \le \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда в стохастической дискретной системе (??)-(??) в моменты времени $t: \ \mathscr{T}(\frac{\varepsilon}{4}) \le t \le \tau_{\max}$ достигается среднеквадратичный ε-консенсус.

Теорема 3. Консенсус в линейном случае без задержек

Рассмотрим важный частный случай $f^i(x,u) = u \, \forall i \in N$.
Ранее для времени достижения $\frac{\varepsilon}{4}$-консенсуса в непрерывной модели (??)-(??) получена оценка сверху

$$\mathscr{T}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{1}{2Re(\lambda_2)} \ln\left(\frac{4(n-1)||\bar{x}_0 - x^\star \underline{1}||^2}{\varepsilon}\right), \qquad (11)$$

где λ_2 — ближайшее к мнимой оси собственное число матрицы $\mathscr{L}$ с ненулевой вещественной частью.

Теореме 3. Если $f^i(x,u) = u$ для любого $i \in N$; выполнены условия **А2а–в**, **А3**; **тогда** для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ для любого $\tau_{\max} > \mathscr{T}(\frac{\varepsilon}{4})$, определяемого по (??), при выборе достаточно малых α_t

$$\max_{\alpha_t : \tau_t \le \tau_{\max}} \alpha_t \le \frac{\varepsilon}{4 C_1 e^{C_2 \tau_{\max}}}$$

в моменты времени $t : \mathscr{T}(\frac{\varepsilon}{4}) \le t \le \tau_{\max}$ в стохастической дискретной системе (??)-(??) n узлов достигают среднеквадратичного ε-консенсуса. Здесь константы $C_1, C_2, \bar{\alpha}$ из Теоремы 2.6.

Общий случай

Пусть $\bar{d} \geq 0$, $\bar{X}_t = [\bar{x}_t, \bar{x}_{t-1}, \ldots, \bar{x}_{t-\bar{d}}]$.
Динамику обобщенных состояний сети в векторно-матричном виде можно записать следующим образом:

$$\bar{X}_{t+1} = U\bar{X}_t + F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t), \tag{12}$$

где U — матрица размерности $\bar{n} \times \bar{n}$, имеющая вид:

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ I & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

в котором I — единичная матрица размерности $n \times n$.
$F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{\bar{n}}$ — вектор-функция соответствующих аргументов, содержащая ненулевые компоненты только на первых n местах.

Усредненная дискретная модель

Рассмотрим соответствующую (??) усредненную дискретную модель

$$\bar{Z}_{t+1} = U\bar{Z}_t + G(\alpha_t, \bar{Z}_t),\ \bar{Z}_0 = \bar{X}_0, \tag{14}$$

где

$$G(\alpha, \bar{Z}) = G\left(\alpha, \begin{array}{c} z^1 \\ \vdots \\ z^{n(\bar{d}+1)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \cdots \\ f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{Z})) \\ \cdots \\ 0_{n\bar{d}} \end{array}\right), \tag{15}$$

$$s^i(\bar{Z}) = \sum_{j \in N^i_{\max}} p_a^{i,j} b^{i,j}((\sum_{k=0}^{\bar{d}} p_k^{i,j} z^{j+kn}) - z^i) = -d^i(A_{\max})z^i + \sum_{j=1}^{n(\bar{d}+1)} a^{i,j}_{\max} z^j,\ i \in N$$

Теорема 4. Близость траекторий

Теорема 4. Если выполнены условия **A1**,**A2**, **тогда** существует $\hat{\alpha}$ такое, что при $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha} < \hat{\alpha}$ справедлива следующая оценка:

$$\mathrm{E} \max_{0 \leq t \leq T} ||\bar{X}_t - \bar{Z}_t||^2 \leq c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2} \bar{\alpha}, \qquad (16)$$

где $\tau_T = 2^{\bar{d}}(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{T-1})$, $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы:

$$c_1 = 8n \left(\hat{c} + \hat{c}(\frac{nL_2 L_c + \bar{\alpha}^2 \hat{c}}{c_3} + ||\bar{X}_0||^2) e^{T \ln(c_3+1)} \right), \ \hat{c} = n^2 L_1^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2,$$

$$c_2 = 2^{1-\bar{d}} L_1^2 (\frac{L_x}{\underline{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^2 ||\mathscr{L}(A_{\max})||_2^2), \ c_3 = \hat{d} + L_x(2^{1+\hat{d}/2} L_1 + L_2) + \bar{\alpha} c',$$

$$\hat{c} = 2L_1^2 n(n-1)\bar{b}^2, \ c' = 2^{1+\hat{d}/2} L_1 ||\mathscr{L}(A_{\max})||_2 + \bar{\alpha}(L_2 ||\mathscr{L}(A_{\max})||_2^2 + \hat{c}),$$

$\underline{\alpha} = \min_{1 \leq t \leq T} \alpha_t$, $\hat{d} = 0$, если $\bar{d} = 0$, или $\hat{d} = 1$, если $\bar{d} > 0$.

Теорема 5. Если выполнены условия **A1**,**A2**; $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha}$; в усредненной дискретной системе (??) в момент времени T достигается $\frac{\varepsilon}{4}$-консенсус и для констант c_1, c_2 из формулировки Теоремы 2.6 справедлива оценка

$$c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2} \bar{\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда в стохастической дискретной системе (??) достигается среднеквадратичный ε-консенсус в момент времени T.

Теорема 6. Условия ε-оптимальной загрузки

Теорема 6. При достаточно малом α, если данные о производительности узлов с течением времени стабилизируются: $\mathrm{E} r_t^i = \bar{r}^i$, $\forall\, i \in N$, а также выполнены условия **A2**, **A3**, $\alpha < \frac{1}{d_{\max}(A_{\max})}$ и в усредненной дискретной системе за время $\bar{T}$ достигается $\frac{\varepsilon}{4}$-консенсус и существует $T > \bar{T}$, для которого параметр α обеспечивает выполнение условия

$$\bar{C}_1 e^{\bar{C}_2} \alpha \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad (17)$$

с постоянными $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ из формулировки Теоремы 2.8,
тогда в стохастической дискретной системе n узлов достигают среднеквадратичного ε-консенсуса в моменты времени $t:\ \bar{T} \leq t \leq T$.