Анализ динамики состояний сети в стохастическом случае. Основные предположения об изменениях топологии, задержках и помехах в измерениях

Олег Николаевич Граничин

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет

13 ноября 2012

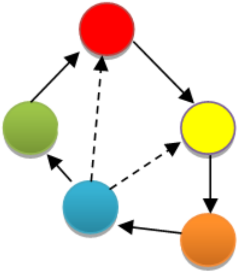
Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

- **Множеством соседей** узла i называется $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$.
- Структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется во времени.



Динамика состояний узлов

Каждому агенту $i \in N$ (узлу графа) в момент времени $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ сопоставляется изменяющееся во времени состояние $x_t^i \in \mathbb{R}$, динамика которого описывается разностным уравнением:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \tag{1}$$

с управлением $u_t^i \in \mathbb{R}$, воздействие которого на изменение состояния x_t^i определяется некоторой функцией $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящей от текущего состояния агента x_t^i и задаваемого управления u_t^i.

Наблюдения

Для формирования управления каждый узел $i \in N$ имеет информацию о своем собственном состоянии:

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \tag{2}$$

и, если $N_t^i \neq \emptyset$, наблюдения о состояниях соседей:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \; j \in N_t^i, \tag{3}$$

где $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$ — помехи (шум), а $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ — целочисленная задержка, $\bar{d}$ — максимально возможная задержка.
Положим $w_t^{i,j} = 0$ и $d_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар (i,j), для которых они не были определены. Так как система начинает работу при $t = 0$, неявное требование к множеству соседей: $j \in N_t^i \Rightarrow t - d_t^{i,j} \geq 0$.

Основные сведения из теории графов

- Сопоставим каждой дуге $(j,i) \in E$ вес $a^{i,j} > 0$ и определим **матрицу смежности (или связности)** $A = [a^{i,j}]$ графа $\mathscr{G}_A = (N,E)$.
- Определим **взвешенную полустепень захода вершины** i как сумму i-й строки матрицы A: $d^i = \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа $\mathscr{G}_A$;
- $D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathscr{L}(A) = D(A) - A$ — **лапласиан** графа.
- **Направленный путь** из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \dots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.
- Граф называется **связным**, если для всех пар различных узлов (i,j) есть направленный путь из i в j.
- Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется **деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется **остовным деревом**.

Задача консенсуса на графах

- Будем называть **протоколом управления** в динамической сети с топологией (N, E_t) обратную связь по наблюдениям состояний $u_t^i = K_t^i(y_t^{i,j_1}, \dots, y_t^{i,j_{m_i}})$, где множество $\{j_1, \dots, j_{m_i}\} \subset \{i\} \bigcup \bar{N}_t^i$, $\bar{N}_t^i \subseteq N_t^i$.
- Узлы i и j называются **согласованными** в сети в момент времени t тогда и только тогда, когда $x_t^i = x_t^j$.
- Задача о достижении консенсуса в момент времени t — это согласование всех узлов между собой в момент времени t.
- n узлов достигают *среднеквадратичного ε-консенсуса* в момент времени t, если $E||x_t^i||^2 < \infty$, $i \in N$ и существует случайная величина $x^\star$ такая, что $E||x_t^i - x^\star||^2 \leq \varepsilon$ для всех $i \in N$.

Консенсусное управление — управление, обеспечивающее достижение консенсуса.

Протокол локального голосования

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i}), \tag{4}$$

где $\alpha_t > 0$ — размеры шагов протокола управления, $b_t^{i,j} > 0$, $\forall j \in \bar{N}_t^i$. Положим $b_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар i, j.

Протокол распределения заданий в децентрализованной вычислительной сети

Рассмотрим протокол управления (4), в котором $\forall\, i \in N$, $\forall\, t$ определим $\bar{N}_t^i = N_t^i$ и $b_t^{i,j} = r_t^j / r_t^i$, $,j \in N_t^i$.

Динамика замкнутой системы протокол (4) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$x_{t+1}^i = x_t^i - 1 + z_t^i / r_t^i + \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} / r_t^j - y_t^{i,i} / r_t^i), \qquad (5)$$

где α_t — последовательность положительных размеров шагов, $y_t^{i,j}$ — наблюдения (с помехами и задержками) о длине очереди j-го узла, z_t^i — размер нового задания, поступившего на узел i в момент времени t.

Основные предположения - I

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ — основное вероятностное пространство. Будем обозначать: E — математическое ожидание и E_x — условное математическое ожидание при условии x.

A1. $\forall i \in N$ функции $f^i(x,u)$ — липшицевы по x и u:
$|f^i(x,u) - f^i(x',u')| \leq L_1(L_x|x-x'| + |u-u'|)$;
скорость роста ограничена: $|f^i(x,u)|^2 \leq L_2(L_c + L_x|x|^2 + |u|^2)$;
при любом фиксированном x функции $f^i(x,\cdot)$ такие, что
$\mathrm{E}_x f^i(x,u) = f^i(x, \mathrm{E}_x u)$.

Основные предположения - II

A2. а) $\forall i \in N, j \in N_t^i \cup \{i\}$ помехи наблюдений $w_t^{i,j}$ — центрированные, независимые, одинаково распределенные случайные величины с ограниченными дисперсиями: $E(w_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$.
б) $\forall i \in N, j \in N^i$ появление переменных дуг (j,i) в графе $\mathscr{G}_{A_t}$ — независимые, случайные события, вероятность которых $p_a^{i,j}$ (т. е. матрицы A_t — независимые, одинаково распределенные случайные матрицы).
в) $\forall i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — ограниченные случайные величины: $\underline{b} \leq b_t^{i,j} \leq \bar{b}$ с вероятностью 1, и существуют пределы $b^{i,j} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E} b_t^{i,j}$.
г) $\forall i,j \in N$ существует конечная величина $\bar{d} \in \mathbb{N}$: $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ с вероятностью 1 и целочисленные задержки $d_t^{i,j}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $k = 0, \ldots, \bar{d}$ с вероятностями $p_k^{i,j}$.
Кроме того, все перечисленные случайные величины и матрицы независимы между собой.

Основные предположения - III

- Обозначим $\bar{n} = n(\bar{d}+1)$ и определим матрицу $A_{\max}$ размерности $\bar{n} \times \bar{n}$ по правилу:
$$a^{i,j}_{\max} = p^{i,((j-1) \bmod n)+1}_{j \div n} p_a^{i,((j-1) \bmod n)+1} b^{i,((j-1) \bmod n)+1}, \ i \in N, \ j = 1, 2, \ldots$$
$$a^{i,j}_{\max} = 0, \ i = n+1, n+2, \ldots, \bar{n}, \ j = 1, 2, \ldots, \bar{n}.$$
(Здесь операция mod — остаток от деления, а $\div$ — деление нацело.)
- Заметим, что при $\bar{d} = 0$ это определение структуры сети (матрицы $A_{\max}$ размерности $n \times n$) имеет вид $a^{i,j}_{\max} = p_a^{i,j} b^{i,j}$, $i \in N$, $j \in N$.
- Обозначим $E_{\max} = \{(j,i) : \sup_{t \geq 0} a_t^{i,j} > 0\}$. Будем обозначать через N_i множество, соответствующее $N^i_{\max}$.

Будем считать, что для матрицы структуры связей сети выполняется следующее условие:

A3. Граф $\{N, E_{\max}\}$ имеет остовное дерево и для любой дуги $(j,i) \in E_{\max}$ среди элементов $a^{i,j}_{\max}, a^{i,j+n}_{\max}, \ldots, a^{i,j+\bar{d}n}_{\max}$ матрицы $A_{\max}$ найдется хотя бы один ненулевой.