Отчет по лабораторной работе 4

Модель гармонических колебаний

Смирнова Мария Александровна

Цель работы

Рассмотреть модель гармонических колебаний. Освоить построение фазового портрета гармонических колебаний.

Краткая теоретическая справка

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial x}{\partial t} + w_0^2 x = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.) , γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), w_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида:

$$\{x(t_0) = x_0 x'(t_0) = y_0$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\{x'(t) = y y'(t) = -2\gamma y - w_0^2 x$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\{x(t_0) = x_0 y(t_0) = y_0$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы.

Задание

Вариант 27

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

```
1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней
силы x''(t) + 9x = 0,
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней
силы x''(t) + 5.5x'(t) + 4.4x = 0,
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней
силы x''(t) + x'(t) + 6x = 2*cos(0.5t),
```

На интервале $t \in [0; 37]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -0.7$, $y_0 = 0.7$.

Выполнение лабораторной работы

1. Построим фазовый портрет гармонического осциллятора для колебаний без затуханий и без действия внешней силы. Код julia:

```
using Plots

using DifferentialEquations

pyplot();

w = 9.00;

t = (0.0,37.0);

step = 0.05;

x0 = [-0.7; 0.7];

p = [w];

function syst(dx,x,p,t)

w = p[1];

dx[1]  = x[2];
```

```
dx[2] =  - w * x[1];
end
prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);
n = length(sol.u);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);
for i in 1:n
y1[i] = sol.u[i][1];
y2[i] = sol.u[i][2];
end
plot(y1, y2, xlabel = “X”, ylabel = “X’”, label = “График зависимости x(x’)”)
title!(“Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы”)
```

Получим следующий график (рис.1)

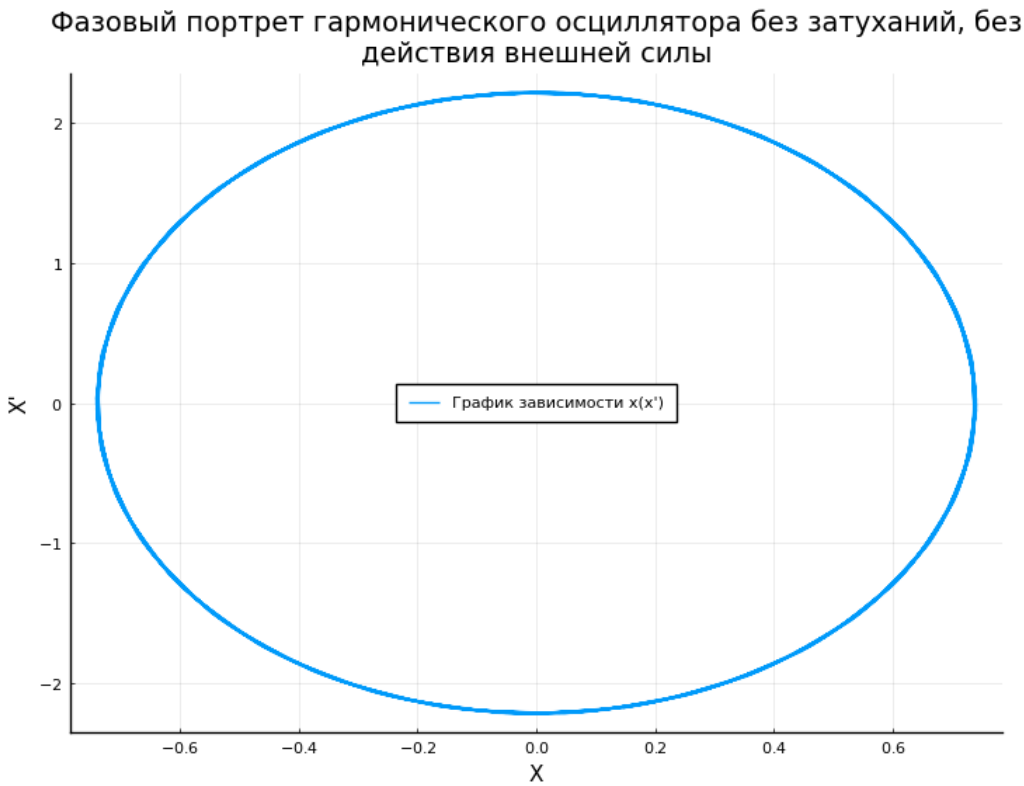

Рис.1 Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы

2. Построим фазовый портрет гармонического осциллятора для колебаний с затуханиями и без действия внешней силы. Код julia:

```
using Plots

using DifferentialEquations

pyplot();

w = 4.4;

g = 5.5;

t = (0.0,37.0);

step = 0.05;

x0 = [-0.7; 0.7];

p = [w,g];

function syst(dx,x,p,t)
```

```
w,g = p

dx[1]  = x[2];

dx[2] =  - w * x[1] - g * x[2];

end

prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);

sol = solve(prob, saveat = step);

n = length(sol.u);

y1 = zeros(n);

y2 = zeros(n);

for i in 1:n

y1[i] = sol.u[i][1];

y2[i] = sol.u[i][2];

end

plot(y1, y2, xlabel = “X”, ylabel = “X’”, label = “График зависимости x(x’)”)

title!(“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы”)
```

Получим следующий график (рис.2)

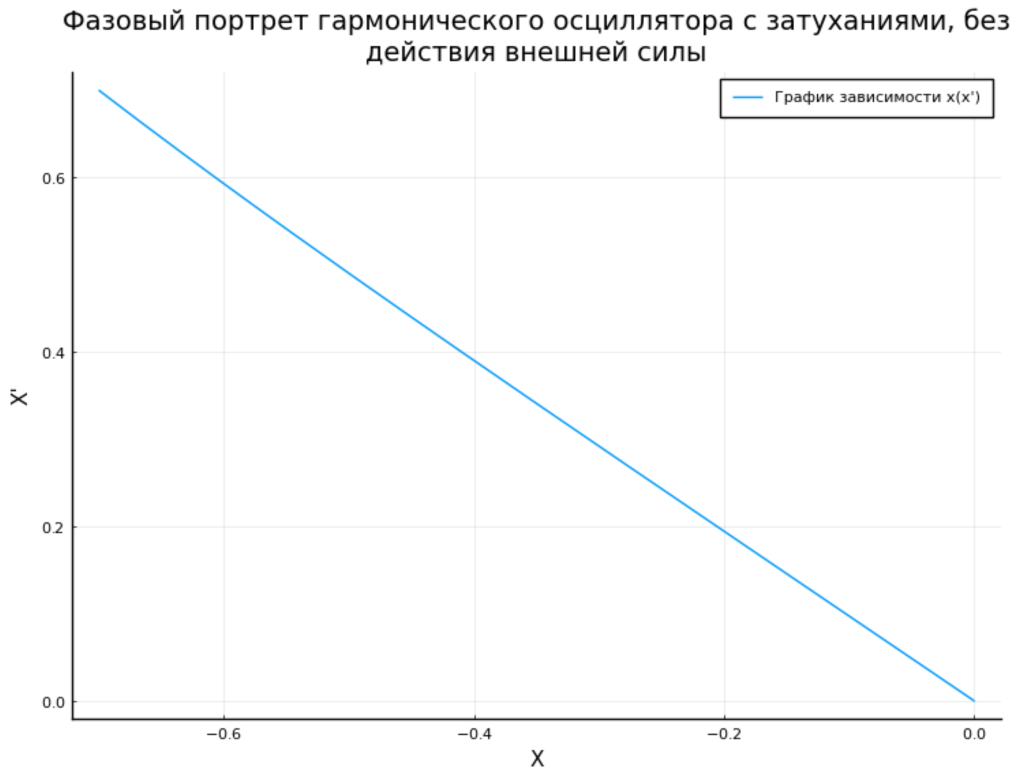

Рис.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы

3. Построим фазовый портрет гармонического осциллятора для колебаний без затуханий и под действием внешней силы. Код julia:

```
using Plots

using DifferentialEquations

pyplot();

w = 6.00;

g = 1.00;

t = (0.0,37.0);

step = 0.05;

x0 = [-0.7; 0.7];

p = [w,g];

f(t) = 2 * cos(0.5*t);

function syst(dx,x,p,t)
```

```
w,g = p
dx[1]  = x[2];
dx[2] =  - w * x[1] - g * x[2] + f(t);
end
prob = ODEProblem(syst, x0, t, p);
sol = solve(prob, saveat = step);
n = length(sol.u);
y1 = zeros(n);
y2 = zeros(n);
for i in 1:n
y1[i] = sol.u[i][1];
y2[i] = sol.u[i][2];
end
plot(y1, y2, xlabel = “X”, ylabel = “X’”, label = “График зависимости x(x’)”)
title!(“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, под действием внешней силы”)
```

Получим следующий график (рис.3)

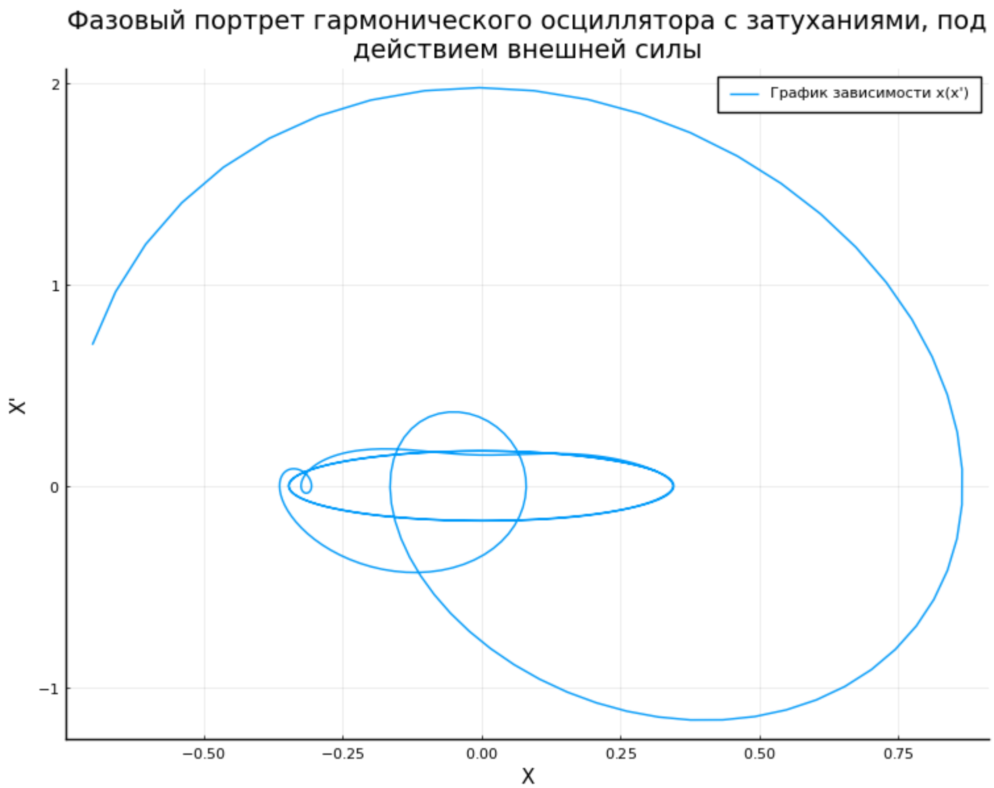

Рис.3 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, под действием внешней силы

Выводы

В процессе выполнения лабораторной работы мы построили фазовый портрет гармонического осциллятора и решили уравнения гармонического осциллятора для нескольких случаев.