

# 交流小信号模型

## 引言

本章将分析pn结二极管的小信号响应并对其建立模型。一个小正弦电压( $v_a$ )叠加在外加直流(d.c.)偏压上,这导致了一个流过二极管的交流(a.c.)电流( $i$ ),如图7.1所示。指定一个**小信号导纳** $Y = i/v_a$ 来表征一个无源器件(如二极管)的**交流响应**。也可以利用一个小信号等效电路来表示响应情况。pn结二极管结区的响应包括电容( $C$ )和电导( $G$ )分量,通常其导纳形式为

$$Y = G + j\omega C \quad (7.1)$$

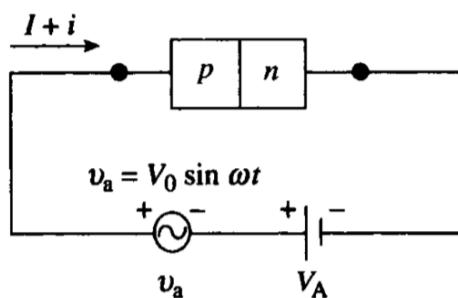


图 7.1 二极管的偏置电路。 $v_a$  是外加小信号电压;  $i$  是产生的交流电流

## 重点:

- (1) 本节我们研究的是**小信号**导纳,  $i$ 以及 $v_a$ 都是小信号的电流与电压
- (2) 本节的研究内容对应**交流响应**

## 二极管的小信号等效电路

串联电阻 $R_s$ 在除了大正向偏置电压情况外相比结的阻抗很小,可忽略

图中箭头表示C和G是**外加直流电压**的函数!

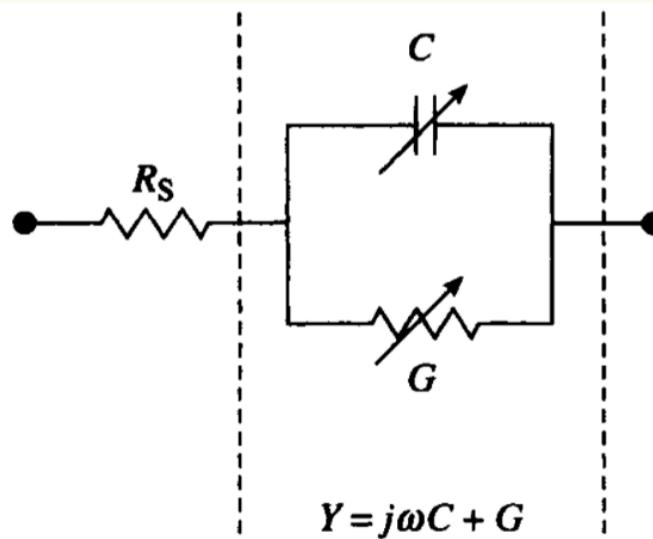


图 7.2 通常情况下,一个pn结二极管的小信号等效电路。 $Y = j\omega C + G$ 是结区的导纳;  $R_s$  代表接触电极和准中性区的串联电阻

以下将建立结区导纳的显式表达式,为了方便,将讨论分为两个部分。

- (1) 第一部分中,假设二极管为反向偏置。在反向偏置下, **二极管电导会很小**,  $Y \approx j\omega C$ 。另外,反向偏置电容只与器件内的多数载流子振荡有关。
- (2) 第二部分讨论正向偏置条件,其中不能忽略掉电导,并且**少数载流子对整个响应有贡献**。

## 反向偏置：耗尽电容

当反向偏置时，pn结实际上等效于一个电容。IC和其他电路中许多“电容”就是用pn结二极管实现的

(1)  $v_a$  的变化，体现为空间电荷区 **宽度的变化**，或者说空间电荷区 **电荷量的变化**

(2) 空间电荷区电阻很大，认为是电介质。 $v_a$  很小，上述变化使得空间电荷区 **边界最大位移很小**

(3) 这种变化与平行板电容器两极板电荷量变化类似，并且宽度  $W$  几乎不变，因此可等效为平板电容

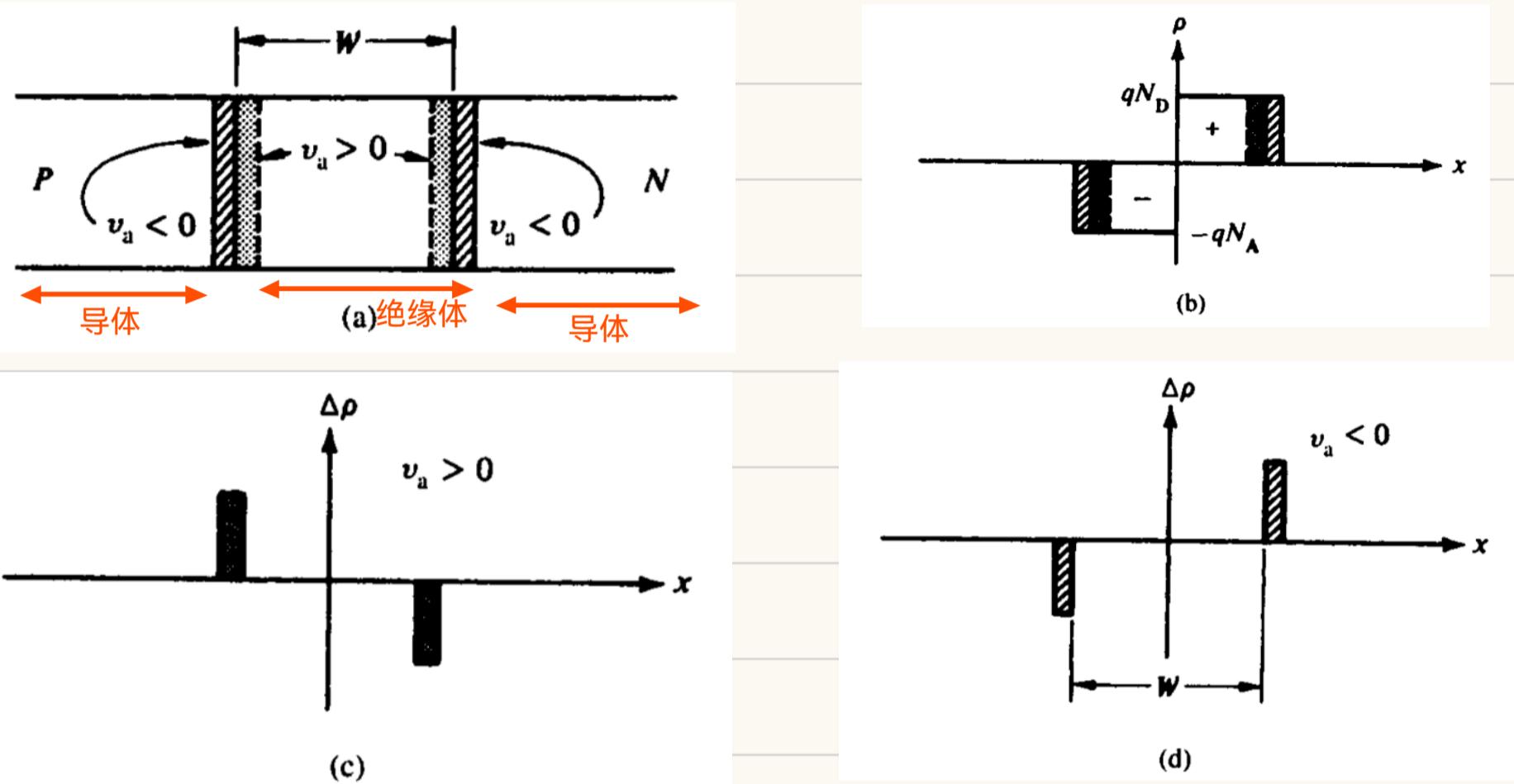


图 7.4 耗尽层电荷的描述。(a) 耗尽层宽度和(b) 随外加交流信号的变化，总电荷密度出现摆动；(c)  $v_a > 0$  和 (d)  $v_a < 0$  时的交流电荷密度

按照电容的定义，可得出pn结的耗尽电容公式：

$$C_J = \frac{k_s \epsilon_0 A}{W}$$

重要：准静态变化

Majority carriers, which can quickly flow into or out of the depletion boundary, show simultaneous response to the small AC signal  $v_a$

多数载流子可以快速流入或流出耗尽边界，对小交流信号  $v_a$  表现出**同步响应**

For Si, the response time of majority carriers is less than 0.1 ns.

## 耗尽电容的计算

NB定义为轻掺杂区的掺杂浓度，考虑一般的pn结，有：

$$N_B = b x^m$$

$m=1$ : 线性缓变结

$m=0$ : 突变结

$m<0$ : 超变结

对于 $m>2$ 的情况，耗尽层宽度都可以表示为：

$$W = \left[ \frac{(m+2)k_s \epsilon_0}{q_b} (V_{bi} - V_A) \right]^{\frac{1}{m+2}}$$

适用于单边指数分布！

一侧重掺杂，一侧轻掺杂，NB(x)表示轻掺杂区掺杂浓度

因此耗尽电容：

$$C_J = \frac{k_s \epsilon_0 A}{\left[ \frac{(m+2)k_s \epsilon_0}{q_b} (V_{bi} - V_A) \right]^{\frac{1}{m+2}}}$$

定义反偏电压为0时的电容：

$$C_{J0} = C_J|_{V_A=0} = \frac{k_s \epsilon_0 A}{\left[ \frac{(m+2)k_s \epsilon_0}{q_b} V_{bi} \right]^{\frac{1}{m+2}}}$$

则耗尽电容可表示为：

$$C_J = \frac{C_{J0}}{1 - \frac{V_A}{V_{bi}})^{\frac{1}{m+2}}}$$

## Application of Reverse-Bias Capacitor: Varactor(变容二极管)

Definition:

Varactor= variable + reactor (reactance of a capacitor is  $1/j\omega C$ )

The capacitance varies with the bias voltage

Tuning ratio (TR) : 调制率

$$TR = \frac{C_J(V_{A1})}{C_J(V_{A2})} \approx \left( \frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{\frac{1}{m+2}}$$

~在 $|V_A| >> V_{bi}$ 时成立

the largest capacitor ratio among a voltage range.

Smaller m-> Larger TR. Using hyperabrupt junction to get largest TR.

应用： parametric amplification, harmonic generation, mixing, detection, voltage-variable tuning...

## Application II: Parameter Extraction/Profiling

### 应用2: 参数提取和杂质分布

考虑 $m=0$ ,  $b=NB$ 的突变结:

$$G_J = \frac{K_S \epsilon_0 A}{\left[ \frac{2 K_S \epsilon_0}{q N_B} (V_{bi} - V_A) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

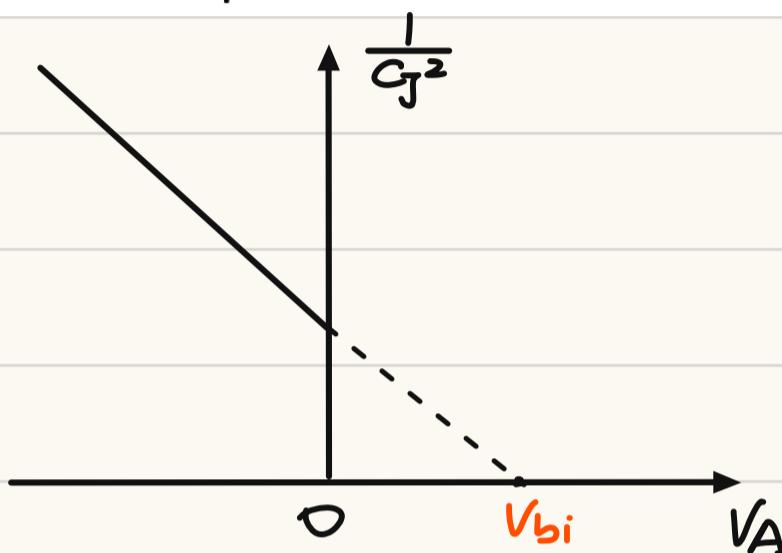
$$\Rightarrow \frac{1}{C_J^2} = \frac{2}{q N_B K_S \epsilon_0 A^2} (V_{bi} - V_A)$$

斜率:  $k = -\frac{2}{q N_B K_S \epsilon_0 A^2}$

$$N_B = -\frac{2}{q k k_S \epsilon_0 A^2}$$

横截矩:  $V_{bi}$

- Reverse-bias C-V to determine some device parameters in the lightly doped side
  - Dopant concentration
  - Dopant profile
  - Built-in potential...



对于一般的pn结, 不同位置的净掺杂浓度不同, 有:

$$N_B(x) = \frac{2}{q K_S \epsilon_0 A^2 |d(1/C_J^2)/dV_A|} \quad (7.12)$$

$$x = \frac{K_S \epsilon_0 A}{C_J} \quad (7.13)$$

其中 $x$ 是结轻掺杂一侧离开冶金结的距离。注意, 可将(7.11)式突变结关系式代入(7.12)式,

**例题:**

- If the slope of the  $(1/C)^2$  vs.  $V_A$  characteristic is  $-2 \times 10^{23} \text{ F}^{-2} \text{ V}^{-1}$ , the intercept is 0.84V, and  $A$  is  $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$ , find the dopant concentration  $N_l$  on the more lightly doped side and the dopant concentration  $N_h$  on the more heavily doped side. (Si, room temperature)

**Solution:**  $N_l = 2 / (\text{slope} \times q K_S \epsilon_0 A^2)$  轻掺杂

$$= 2 / (2 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-12} \times (10^{-4})^2)$$

$$= 6 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_h N_l}{n_i^2} \xrightarrow{\text{重掺杂}} N_h = \frac{n_i^2}{N_l} e^{\frac{qV_{bi}}{kT}} = \frac{10^{20}}{6 \times 10^{15}} e^{\frac{0.84}{0.026}} = 1.8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

## 反向偏置电导

交流电导 $G_0$ =微分直流电导= $dI/dVA$

对于理想二极管:  $I = I_0 e^{\frac{qVA}{kT} - 1}$

$$G_0 = \frac{dI}{dVA} = \frac{q}{kT} I_0 e^{\frac{qVA}{kT}} = \frac{q}{kT} (I + I_0)$$

当一个理想二极管中反向偏压超过几个 $kT/q$ 时,  $I \rightarrow -I_0$ 且从(7.15)式可以看出 $G_0 \rightarrow 0$ 。这与以下事实相一致, 反向偏置I-V特性出现饱和并且理想I-V曲线的斜率变为零。在给定的

当给定二极管的R-G负复合电流占主导时, 考虑VA等于几个 $kT/q$ 时:

$$I = I_{R-G} = -\frac{qA n_i}{2\tau_0} W = -\frac{qA n_i}{2\tau_0} \left[ \frac{(m+2)k_s \epsilon_0}{q_b} (V_{bi} - V_A) \right]^{\frac{1}{m+2}}$$

$$G_0 = \frac{dI}{dVA} = \frac{qA n_i W / 2\tau_0}{(m+2)(V_{bi} - V_A)}$$

其中已经用到了(7.6)式中W的表达式。当复合-产生电流占主导时, (7.16)式表明在所有的反向偏压下存在着一个寄生电导, 该电导对电压的依赖关系随结的杂质分布而变化。

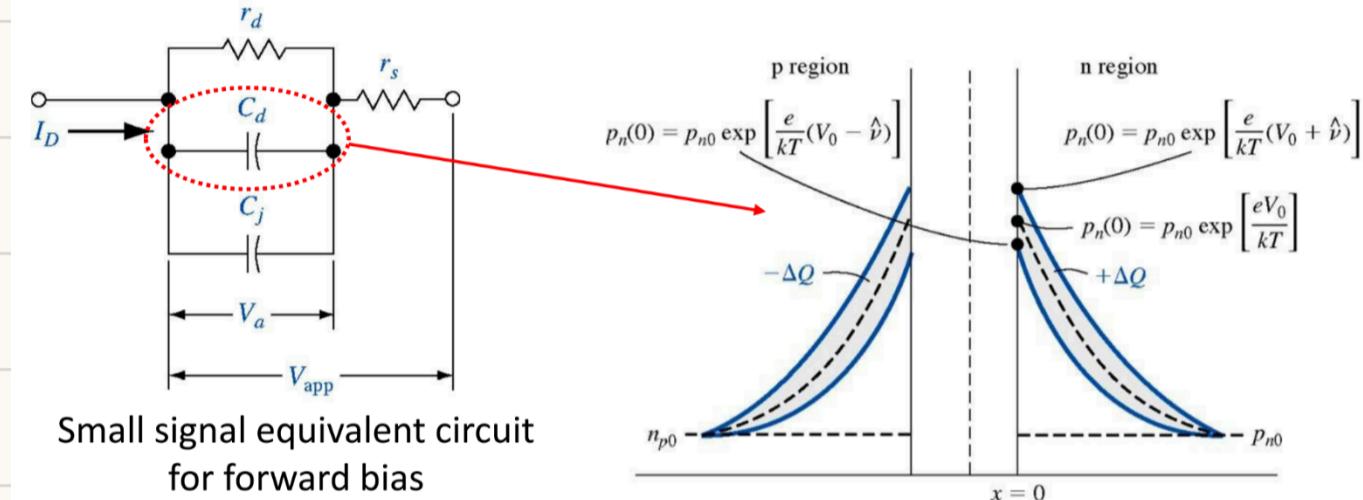
## 正向偏置：扩散导纳

多子的涨落引起了结电容，在反偏时为主导。

正偏时，对于多子和结电容没有什么新机制。但是少子的涨落，引起了扩散电容 $C_d$ (扩散导纳 $\gamma_d$ )少子的补充和抽取并不像多子变化的那样快，在角频率接近少子寿命的倒数时，少子电荷的涨落很难跟上交流信号的变化，结果是空间电荷呈现异步的变化。

Two types of capacitance associated with a forward-biased P-N junction:

- $C_j$ : depletion capacitance due to variation of the depletion charges (similar to the reverse-biased junction)
- $C_d$ : diffusion capacitance due to variation of stored minority charges  $Q_n$  and  $Q_p$  in the quasi-neutral regions, dominating at moderated to high forward biases.

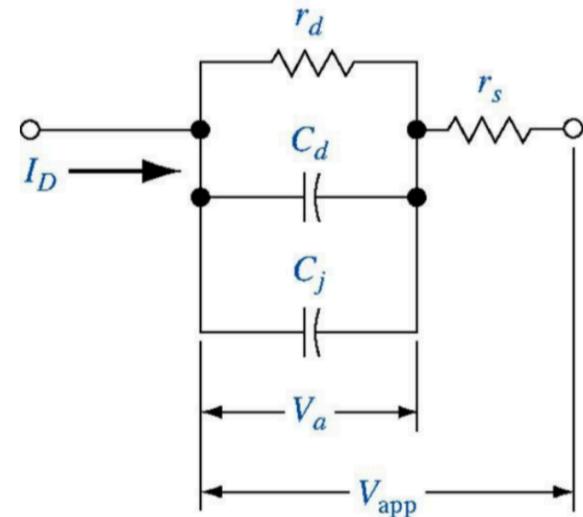


扩散导纳:  $\gamma_d = G_d + j\omega C_d$

结电容:  $C_j \rightarrow j\omega C_j$

正偏时的总导纳:  $\gamma = G_d + j\omega(C_d + C_j)$

$\approx G_d + j\omega C_d = \gamma_d$



为什么可忽略结电容: 正向偏压比较大时, 扩散电容远大于结电容

因此, 正向偏压时, 交流小信号模型只考虑扩散电导和少子的扩散电容

## 扩散导纳的计算

我们依旧从少子扩散方程来处理，我们考虑p+ n型结的N区：

$$\frac{\partial \Delta P_n}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 \Delta P_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta P_n}{\tau_p} \quad (1)$$

叠加了交流信号，不处于稳态，需要改写 $\Delta p(x, t)$ ：

$$\Delta P_n(x, t) = \bar{\Delta P}_n(x) + \hat{P}_n(x, \omega) e^{j\omega t} \quad (2)$$

来自交流小信号  
正弦波

对于原本的直流电压的响应

幅值，与时间无关

将②代入①，分别写出直流项和交流项满足的少子扩散方程：

$$\text{直流: } 0 = D_p \frac{\partial^2 \bar{\Delta P}_n(x)}{\partial x^2} - \frac{\bar{\Delta P}_n(x)}{\tau_p} \quad (3)$$

$$\text{交流: } 0 = D_p \frac{\partial^2 \hat{P}_n(x)}{\partial x^2} - \frac{\hat{P}_n(x)}{\tau_p(1+j\omega\tau_p)} \quad (4)$$

边界条件：

$$x=+\infty \text{ 处: } \bar{\Delta P}_n(+\infty) = 0 \quad \hat{P}_n(+\infty) = 0 \quad (5)$$

$$x=x_n \text{ 处: } \Delta P_n(x_n) = \frac{n_i^2}{N_D} \left[ e^{\frac{q}{kT}(V_A + U_a)} - 1 \right]$$

直流项的边界条件直接取决于直流偏置电压 $V_A$ ：

$$\bar{\Delta P}_n(x_n) = \frac{n_i^2}{N_D} \left( e^{\frac{qV_A}{kT}} - 1 \right) \quad (6)$$

则对于交流项的边界条件：

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(x_n) &= \frac{n_i^2}{N_D} \left[ e^{\frac{q}{kT}(V_A + U_a)} - e^{\frac{q}{kT}V_A} \right] \\ &= \frac{n_i^2}{N_D} e^{\frac{qV_A}{kT}} \left( e^{\frac{qU_a}{kT}} - 1 \right) \\ &\xrightarrow[\text{泰勒展开}]{\text{va极小}} \approx \frac{n_i^2}{N_D} \frac{qU_a}{kT} e^{\frac{qV_A}{kT}} \end{aligned} \quad (7)$$

直接套用长基区二极管p+n型结的IV特性方程得到直流项的电流：

$$I_{DIFF} = qA \frac{D_p}{\tau_p} \frac{n_i^2}{N_D} \left( e^{\frac{qV_A}{kT}} - 1 \right) = qA \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \frac{n_i^2}{N_D} \left( e^{\frac{qV_A}{kT}} - 1 \right) \quad (8)$$

单边突变结，电流只算轻掺杂

对 $\tau_p$ 和电压因子进行修正，得到交流项的电流：

$$I_{diff} = qA \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \sqrt{1+j\omega\tau_p} \frac{n_i^2}{N_D} \cdot \frac{qU_a}{kT} e^{\frac{qV_A}{kT}} = \frac{qU_a}{kT} I_0 e^{\frac{qV_A}{kT}} \sqrt{1+j\omega\tau_p} \quad (9)$$

$$\text{令: } G_0 = \frac{q}{kT} I_0 e^{\frac{qV_A}{kT}}$$

$$\text{则: } i_{\text{diff}} = G_0 V_A \sqrt{1+j\omega\tau_p}$$

故扩散导纳为:

$$Y_D = \frac{di_{\text{diff}}}{dV_A} = G_0 \sqrt{1+j\omega\tau_p} \quad (10)$$

计算扩散电导与扩散电容:

$$\text{令: } a+bj = \sqrt{1+j\omega\tau_p} \rightarrow a^2 - b^2 + 2abj = 1 + j\omega\tau_p$$

$$\text{故: } \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = \omega\tau_p \end{cases}$$

$$\text{故: } \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\omega^2\tau_p^2 + 1}^{\frac{1}{2}} = G_D \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+\omega^2\tau_p^2} - 1)^{\frac{1}{2}} = \omega C_D \end{cases}$$

因此:

$$G_D = \frac{G_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+\omega^2\tau_p^2} + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_D = \frac{G_0}{\sqrt{2}\omega} (\sqrt{1+\omega^2\tau_p^2} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

低频极限下, 有:

$$G_D = G_0$$

$$C_D = G_0 \frac{\tau_p}{2}$$

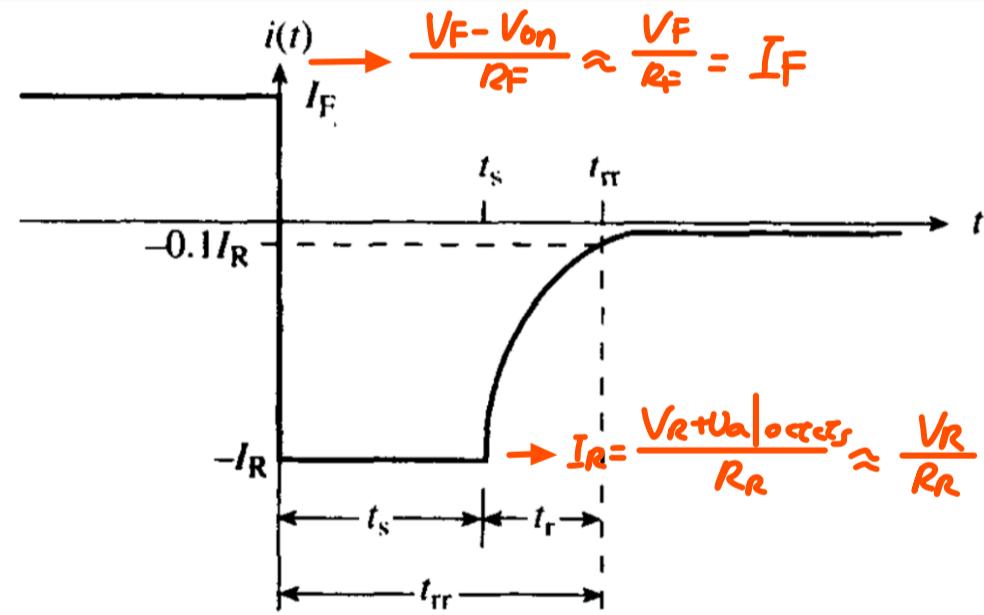
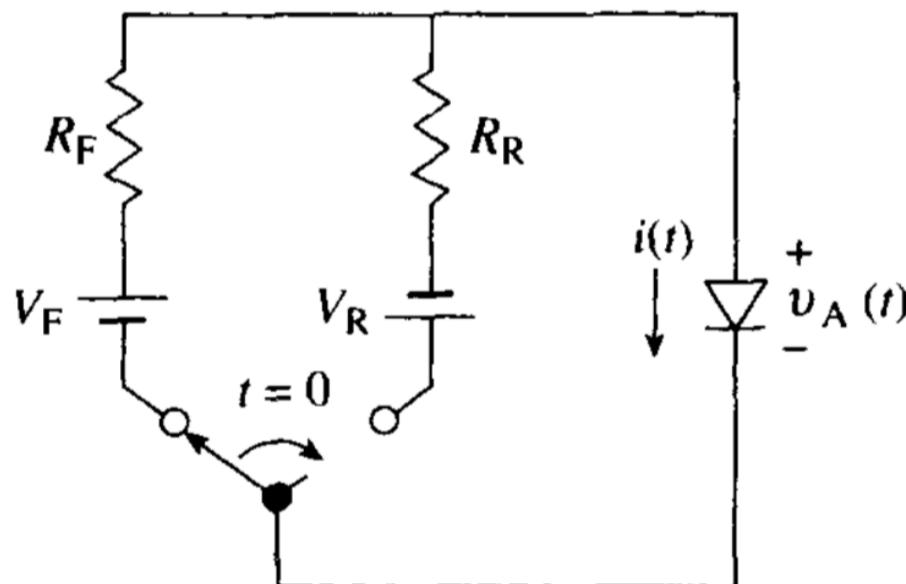
# 瞬态响应

## 引言

对于一个电子元器件，研究路径：

- Modeling of the internal electrostatics 静电特性建模  
pn结的静电特性：载流子浓度分布、内建电场、内建电势
- Steady state response 稳态响应  
偏置电压下的pn结(直流)
- Small-signal response 交流小信号响应  
交流小信号模型
- Transient response 瞬态响应

考虑如下开关电路， $t < 0$ 时正偏， $t = 0$ 拨动开关使得PN结反偏



(a)

(b)

$\tau_s$ (存贮延迟时间): 反向电流保持常数的时间  
 $\tau_{rr}$ (反向恢复时间): 反向电流衰减至其最大值的10%所需的总时间

$\tau_r$ (恢复时间):  $\tau_{rr} - \tau_s$

$\tau_{rr}$ 并非本征特性决定，而是与外电路特性有关，因此研究瞬态响应延迟时主要考虑存贮延迟时间 $\tau_s$

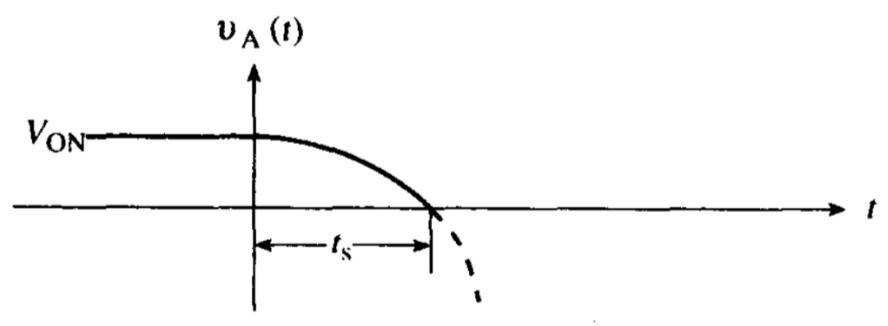


图 8.1 瞬态关断过程。(a) 理想化开关电路；(b) 电流 – 时间瞬态特性的简图及特性说明；(c) 电压 – 时间瞬态特性

瞬态响应有多快主要由 $\tau_s$ 决定

## 关断瞬态

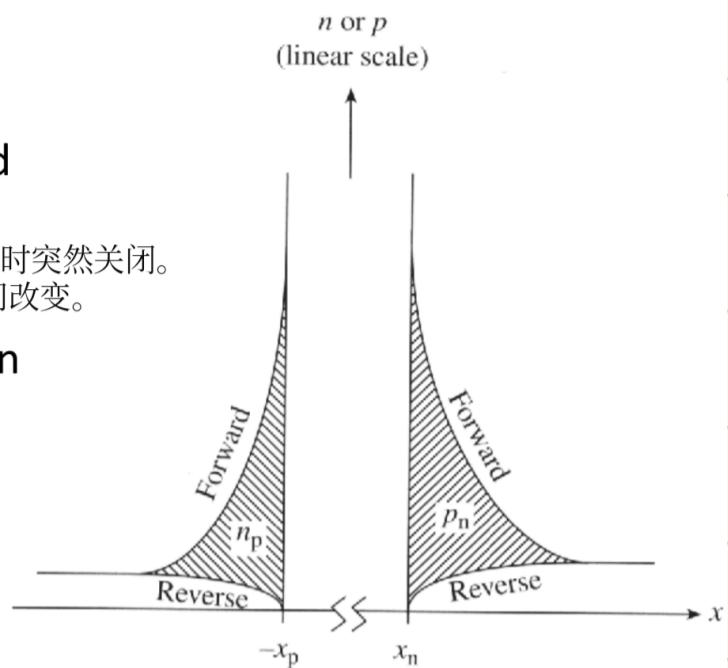
- Suppose a pn-diode is forward biased, then suddenly turned off at time  $t = 0$ . Because of  $C_D$ , the voltage across the pn junction depletion region cannot be changed instantaneously.

假设一个pn二极管正向偏置，然后在时间  $t = 0$  时突然关闭。  
由于扩散电容，pn结耗尽区两端的电压不能瞬间改变。

- The time delay in switching between the FORWARD-bias and REVERSE-bias states is due to the time required to change the amount of excess minority carriers stored in the quasi-neutral regions.

正向偏置和反向偏置状态之间切换的时间延迟是由于改变存储在准中性区域中的过剩少数载流子的数量所需的时间造成的。

$$\Delta P_n(x', V_A) = \frac{n_i^2}{N_D} (e^{\frac{qV_A}{kT}} - 1) e^{-\frac{x'}{4\rho}}$$



## 无法瞬间变化的原因

可采用两种方法把准中性区内过剩少数载流子的电荷移走：

第一种方法是通过复合在原来位置消除载流子。显然，复合过程不可能立刻就完成，如果复合是移走载流子的惟一方式，那么从开态转换到关态所持续的时间与少数载流子寿命相同。

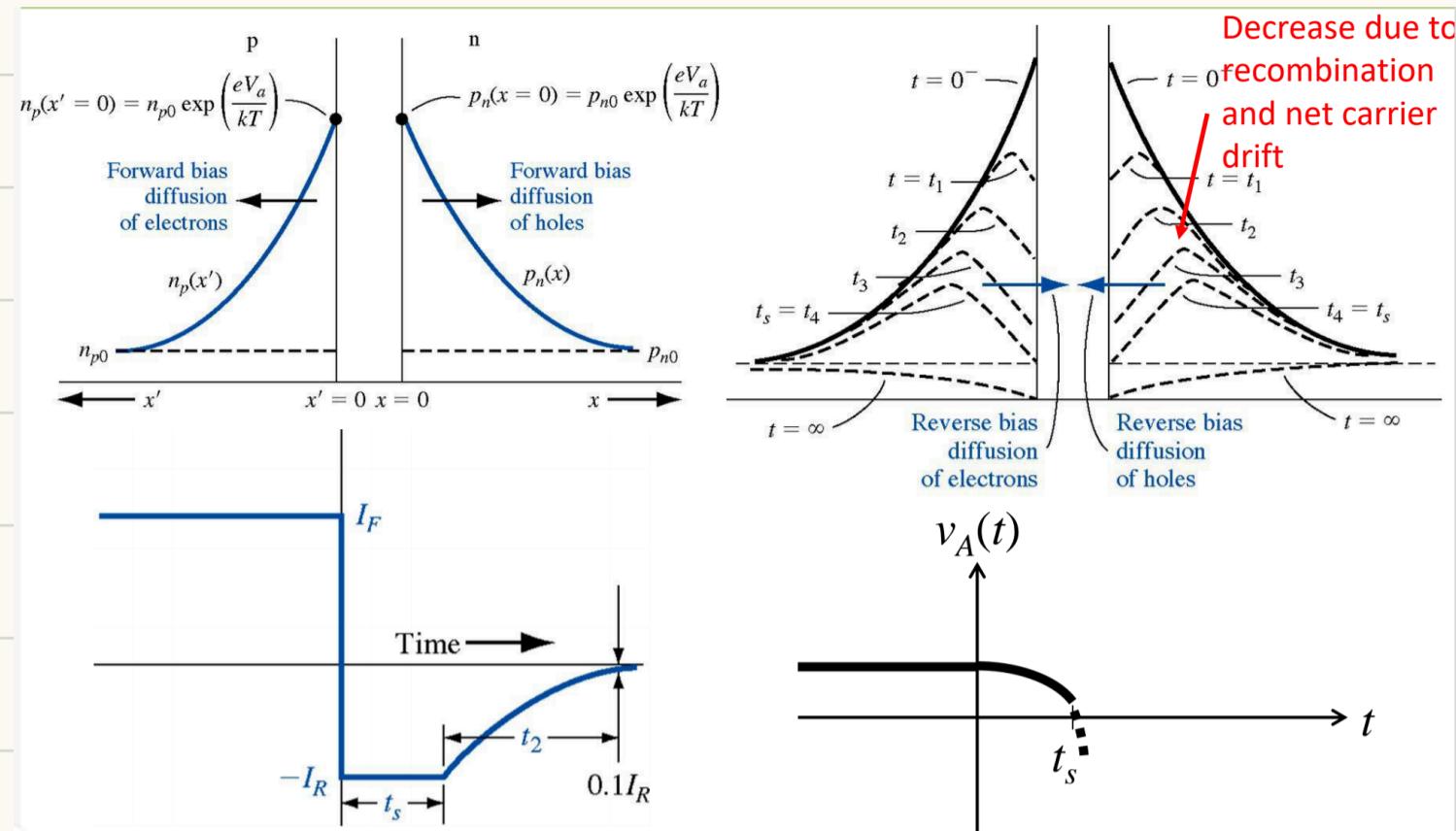
第二种消除过剩载流子的方法是通过净载流子漂移完成。一旦撤除外部的维持偏压，这些少数载流子会流回结的另一边，也就是它们变成多数载流子的地方。可以想象，这种反向注入能以非常快的速度发生。穿过耗尽区漂移回去所需的时间仅为  $W/\bar{v}_d \sim 10^{-10} s$ ，其中  $\bar{v}_d$  是载流子在耗尽区的平均漂移速度。然而，每秒钟能移走的少数载流子数量受到开关电路的限制，能够流过二极管的最大反向电流近似为  $V_R/R_R = I_R$ 。 $I_R$  越小，则载流子的消减速率就越慢。如果把二极管短路，可以实现非常快的瞬态过程，但这一方法很可能导致电流超出器件的容限从而损坏二极管。

总之，有复合和反向电流两种机理来完成对过剩存贮电荷的消除，在不损坏器件的前提下，两种机理中没有一种能以足够快的速度把电荷完全消除，因此在从开态到关态的转换中会观察到延迟时间。

## 0 < t < $\tau_s$ 过程中二极管为何会保持正偏？

正偏则耗尽层附近少子浓度大于平衡值，反偏则耗尽层边界少子浓度小于平衡值，这是由之前推导出的公式决定的。

反过来说也是一样，少子浓度大于平衡值则处于正偏，小于平衡值则处于反偏。少子的移除没有那么快，在  $0 < t < \tau_s$  阶段仍旧大于平衡值，在  $t = \tau_s$  时过剩载流子浓度才接近零，因此这个阶段PN结能维持正偏，只有当  $x = x_n$  处的空穴浓度下降到平衡值以下时，PN结才会变为反偏。



理解：为什么\$t>0\$时刻，\$x=x\_n\$处\$\Delta p(x)-x\$曲线斜率是正的？

先考虑\$t<0\$，即正偏的情况，此时\$\Delta p(x)\$随着\$x\$增大而减小，即过剩少子向准中性区扩散过程中浓度逐渐降低，考虑一个p+ n型结，有：

$$J = -qD_p \frac{d\Delta p_n(x)}{dx}$$

此时的电流密度定义为正的(因为是正偏电流)，恰好与计算结果同号。并且这对应着曲线图中单调下降的曲线。

但是切换到反偏状态的\$0 < t < \tau\_s\$过程中，电流为\$-IR\$，这就要求\$x\_n\$处曲线斜率是正的。

## 定量分析

为了简化分析，考虑p+ n型二极管，并且考虑电荷控制模型的方法。

相比于 p+n 结中 n 型一侧的空穴存贮电荷(\$Q\_p\$)来说，存贮于 p 型一侧的电子电荷完全可以忽略。对于理想二极管，\$i=i(\text{DIFF})\$，这样就有：

$$\frac{dQ_p}{dt} = i - \frac{Q_p}{\tau_p}, \quad 0^+ \leq t \leq \tau_s$$

在\$0^+ \leq t \leq \tau\_s\$范围内，有： \$i = -I\_R\$

故： \$\frac{dQ\_p}{dt} = -CI\_R + \frac{Q\_p}{\tau\_p}\$,

解得： \$Q\_p = -I\_R \tau\_p + A e^{-\frac{t}{\tau\_p}}

考虑边界条件： \$Q\_p(0+) = Q\_p(0^-)\$

因此，我们好需要考虑\$t<0\$时，即正偏稳态下的\$Q\_p\$值，依旧考虑电荷控制模型：

$$\frac{dQ_p}{dt} = i - \frac{Q_p}{\tau_p}$$

正偏稳态下，有 $dQ_p/dt=0$ ,  $i=I_F$ , 因此:  $I_F = \frac{Q_p|_{t<0}}{\tau_p}$

故:  $Q_p(t<0) = I_F \tau_p \rightarrow Q_p(0+) = Q_p(0-) = I_F \tau_p$

因此, 解得 $0+ < t < \tau_s$ 时有:

$$Q_p = -I_R \tau_p + (I_R + I_F) \tau_p e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

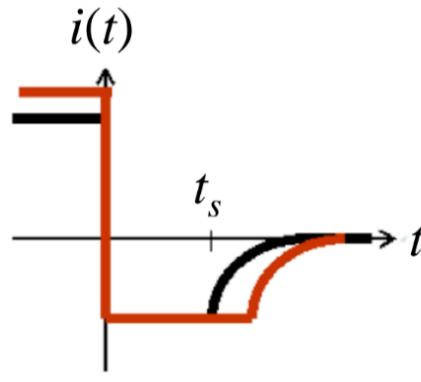
当 $t$ 趋近于 $\tau_s$ 时, 少子浓度趋近于平衡值, 或者说过剩少子浓度趋近于0, 有:

$$0 = -I_R \tau_p + (I_R + I_F) \tau_p e^{-\frac{\tau_s}{\tau_p}}$$

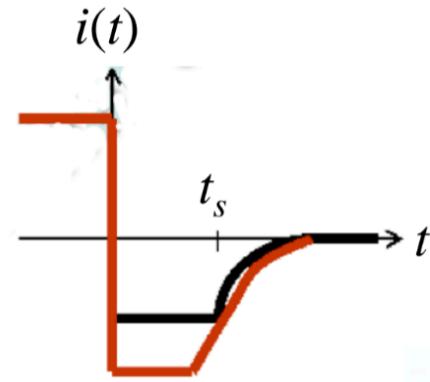
$$\tau_s = \tau_p \ln(1 + \frac{I_F}{I_R})$$

## 影响因素与 $\tau_s$ 调控

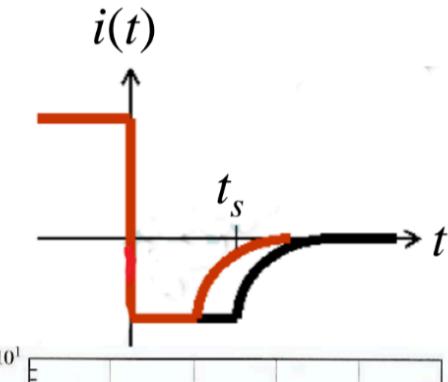
Increase  $I_F$



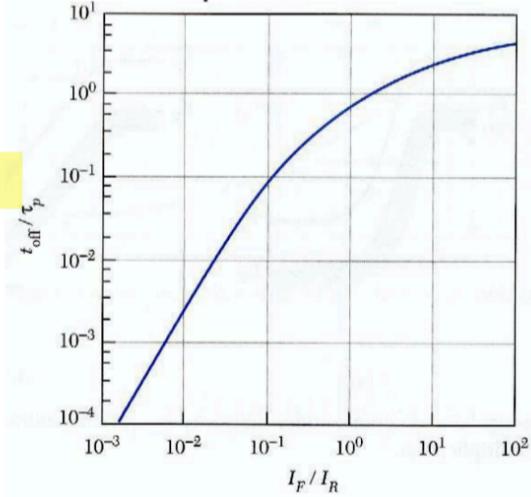
Increase  $I_R$



Decrease  $\tau_p$



- Larger  $N_T$  (trap center concentration) -> Smaller minority lifetime -> smaller  $t_s$
- Smaller  $I_F/I_R$  -> Smaller  $t_s$



## 开启瞬态

当二极管电流从占主导地位的反偏值瞬间改变到一个常数值即正偏电流 $I_F$ 时，二极管两端的电压降 $v_A(t)$ 从 $t=0$ 时的 $V_{OFF}$ 单调上升到 $t=+\infty$ 时的 $V_{ON}$ 。

在响应的第一阶段，即从 $t=0$ 到 $v_A=0$ 的过程极其短暂，用来把结电压提高到0V的少数几个少子迅速注入到耗尽区。多数载流子也迅速再分布以使耗尽区缩小到0偏压下的宽度。从图8.7(a)中也可以看出，瞬态过程的第一部分非常短暂，以至于好像二极管是在 $t=0$ 触发到 $i=I_F$ 的。图8.7(b)显示了相应的电压响应，假设从 $v_A=0$ 开始。

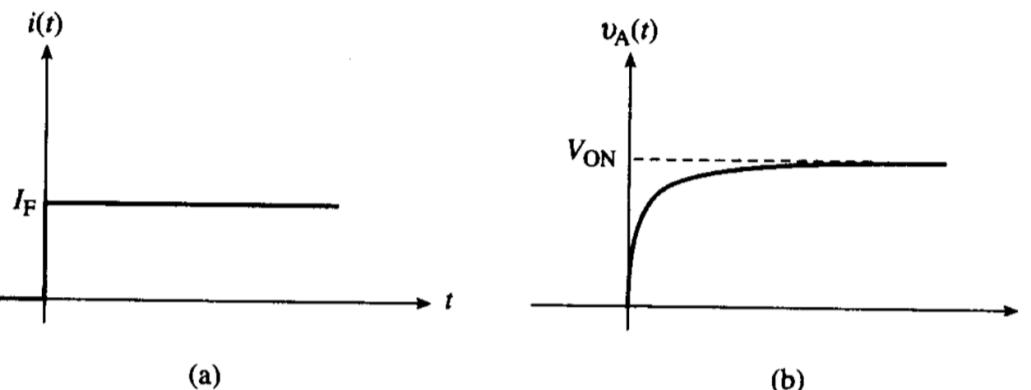


图 8.7 假定从  $i = 0$  开始的瞬态开启：(a) 电流脉冲；(b) 电压 - 时间响应

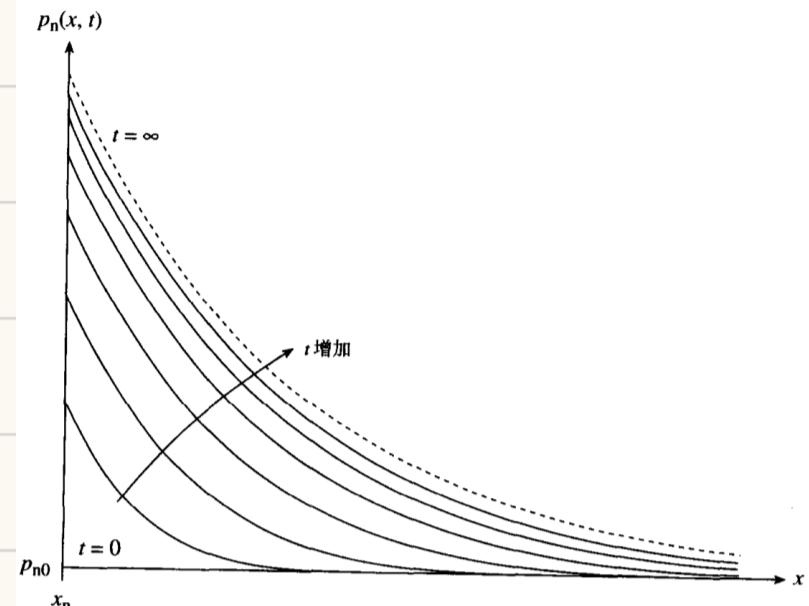


图 8.8 在瞬态开启期间  $p^+$ - $n$  二极管内部空穴存贮电荷的积累

仍旧考虑 $p^+$ - $n$ 型二极管，并且考虑电荷控制模型的方法。

整个开启过程，电流为 $I_F$ ，方程可简化为：

$$\frac{dQ_p}{dt} = I_F - \frac{Q_p}{\tau_p}$$

解得：

$$Q_p = I_F \tau_p + A e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

由于 $t=0$ 时刻认为 $v_A=0$ ，那么过剩少子浓度为0，即 $Q_p=0$ (原因： $\Delta P_n = \frac{n^2}{n_0} (e^{\frac{qU_A}{kT}} - 1) e^{-\frac{x}{\tau_p}}$ )

$$Q_p = I_F \tau_p (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}}), \quad ①$$

在稳态条件下，对于理想二极管有：

$$Q_p = I_{DIF} \tau_p = I_o (e^{\frac{qU_A}{kT}} - 1) \tau_p$$

假设电荷积累是准静态的：

$$Q_p(t) = I_o (e^{\frac{qU_A(t)}{kT}} - 1) \tau_p \quad ②$$

联立①②得：

$$U_A(t) = \frac{kT}{q} \ln \left[ 1 + \frac{I_F}{I_o} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \right]$$