2017 杭电 ACM 集训队单人排位赛 - 6 解题报告

Claris

2017 年 7 月 16 日

1 合理的电梯

若 $z=1$，那么答案为 $x+y$，否则答案为 $\min(4n-x-y+(z-1)b, x+y+(z-1)a)$。

2 bx 和妹子的游戏

设 $d[x]$ 表示 x 到根路径上的点权和，那么：

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(d[i],d[j]) - d[father[lca(i,j)]] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(d[i],d[j]) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d[father[lca(i,j)]] \end{aligned}$$

前者可以通过将 d 排序后枚举较大值来统计，后者直接树形 DP 统计即可。

时间复杂度 $O(n\log n)$。

3 xb 子序列

首先求出最长 bx 子序列的长度。设 $f[i]$ 表示以 i 为结尾的最长 bx 子序列长度，那么 $f[i]=\max(f[j])+1$，其中 $1\le j<i, a[j]|a[i]$。设 $k=\max(f[i])$，考虑网络流建图：

- 若 $f[i]=1$，那么 S 向 i 连边，容量无穷，表示不能破坏这个约束。
- 若 $f[i]=k$，那么 i 向 T 连边，容量无穷，表示不能破坏这个约束。
- 若 $f[i]+1=f[j]$ 且 $i<j$，同时满足 $a[i]|a[j]$，那么 i 向 j 连边，容量无穷，表示不能破坏这个约束。

问题转化为去掉最少的点使得 S 到 T 不连通，拆点最小割即可。

4 bx 回文

设 $f[i]$ 表示前 i 个字符的最大愉悦值，暴力找出所有回文子串 $[l,r]$，那么有 $f[r]=\max(f[r-1], f[l-1]+a[r-l+1])$。

时间复杂度 $O(n^2)$。

5 电影票

将前后两部分分别排序然后配对即可。

6 count string

首先对 S 建立后缀数组 sa，然后再预处理出每个节点往上 2^k 步的祖先以及这中间字符串的 Hash 值，那么查询 S 的某个后缀和树上某个点到根的字符串的最长公共前缀时，只需要倍增枚举 LCP 长度即可，每次询问复杂度为 $O(\log n)$。

有了以上这些辅助结构，我们现在来考虑一个询问 $cnt(str(u,p)+str(v,p))$：

设 $w = str(u,p)+str(v,p)$，那么查询 w 与某个字符串 T 的 LCP 是很容易的，只要先求出 u 与 T 的 LCP，然后再求出 v 与 T 的某个后缀的 LCP 即可，利用之前的预处理很容易做到 $O(\log n)$。

我们先在 sa 中二分查找出 w 的位置 t，然后从 t 开始往前二分，找到字典序最小的串 x，满足 x 与 w 的 LCP 至少是 $dis(u,v)$，同理再从 t 开始往后二分找到上界 y，那么 $cnt(str(u,p)+str(v,p))$ 就等于 $y-x+1$，时间复杂度 $O(\log n \log |S|)$。

总时间复杂度 $O(n\log n + |S|\log|S| + q\log n\log|S|)$。

7 小 P 玩游戏 1

按要求建出图，并 Floyd 求出任意两点间的最短路 $f[i][j]$。

假设第 i 个攻占的城市是 $p[i]$，那么一个奇袭部队的行走路线一定是 p 的一个子序列，且相邻两点之间的最短路不超过 c。

考虑网络流建图：

- S 向 i 连边，容量 1。
- i 向 T 连边，容量 1。
- 若 $f[p[i]][p[j]] \le c$ 且 $i<j$，那么 i 向 j 连边，容量 1。

因为每个点都要经过，因此拆点，每个点内部连一条容量 1 且下界为 1 的边。建好图之后，求出最小可行流即可。

8 bx 值

假设每个位置都有贡献，那么长度为 i 的子串的贡献为 $i-1$，一共有 $n-i+1$ 个长度为 i 的子串，因此 $ans = \sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-i+1)$。

设 $p[i]$ 表示 i 出现的位置，那么若一个子串同时包含了 $p[i]$ 和 $p[i+1]$，答案将会减少 1，而这种子串数为 $\min(p[i],p[i+1]) \times (n-\max(p[i],p[i+1])+1)$。

时间复杂度 $O(n)$。

9 对抗女巫的魔法碎片

不难发现 a 越大的士兵越容易占领村庄，并且收益越大，因此最优解中一定是选 a 最大的若干个士兵，为了方便起见，我们设 $v[i]=c[i]-b[i]$，即每个村庄的收益。

将士兵和村庄混在一起，按 a 和 b 从小到大排序，对于相同的情况，将士兵优先放在前面，那么每个士兵能占领的村庄就是它前面的所有村庄。如果我们将方案中选取的士兵看成右括号，村庄看成左括号，那么方案必定是一个合法的括号序列，即设 $s[i]$ 表示前 i 个位置中选取的村庄减去士兵的个数，那么必有 $\min(s[i])\geq 0$ 且 $s[n+m]=0$。

因为 a 越大越好，因此我们从大到小考虑每个士兵，对于当前这个士兵，我们先将其位置填上右括号，对应 s 中一段后缀减去 1。我们希望找到一个没用过的收益最大的村庄，满足加入那个村庄后仍然是一个合法的括号序列，假设村庄位于位置 j，那么加入 j 会导致 $s[j..n+m]$ 加上 1，因此只要 $\min(s[1..j-1])\geq 0$ 且 $\min(s[j..n+m])\geq -1$ 即是合法的村庄，而区间加减、区间最小值查询则是线段树的经典操作。

从大到小考虑每个未使用的村庄，如果它合法，那么将其纳入答案，同时加入该左括号，然后考虑下一个士兵。如果它非法，那么因为我们按照 a 从大到小考虑每个士兵，今后的条件只会越来越苛刻，因此它永远都不可能合法，直接抛弃即可。因为每个村庄只会被考虑一次，因此复杂度为 $O(m\log(n+m))$。

注意到上述问题本质是在用线段树模拟费用流的增广，因此当增广路长度 <0 时，即可终止算法，而数据有问题，必须要到不存在增广路时终止算法才可通过，这也导致许多简单的贪心算法直接 AC。

时间复杂度 $O((n+m)\log(n+m))$。

10 小 P 玩游戏 2

方便起见，我们设 $\delta[i]=a[i]+b[i]-c[i]$，那么 $ans=\sum_{i=1}^{n}c_i$ 减去某些 δ，并加上某些 b。

我们把角色分成 3 类：没有怪物的，只有一个怪物的，至少一个怪物的。

考虑贪心调整策略，我们可以发现最优情况下第三类角色有且仅有一个，那么剩下的两类中，我们枚举第二类的角色个数 m，显然要取 δ 最大的 m 个角色。

将角色按 δ 从大到小排序，设 $s[i]$ 为前 i 个角色 δ 之和，那么有两种情况：

- 第三类角色混于第二类角色中：从前往后枚举前 i 个角色作为第二类角色，然后将剩下的怪物全部分配给里面 b 最大的角色。

- 第三类角色没有混于第二类角色中：从后往前枚举前 i 个角色作为第二类角色，那么第三类角色在 $i+1..n$ 中，假设为 j，则 $ans=s[i]+(k-i-1)b[j]+\delta[j]$，我们需要查询 $(k-i-1)b[j]+\delta[j]$ 的最大值，这是斜率优化的模型。不难发现，因为 $\delta[j]\geq\delta[k](j<k)$，因此如果 $b[j]\geq b[k]$，我们永远不会选择 k。因此维护一个栈 q，如果栈顶元素的 b 不超过当前要加入的元素的 b，那么直接弹栈。经过这样的处理之后，栈中从底到顶的斜率是递减的，这说明栈底到顶相邻两条直线的交点的横坐标也是递减的，如此维护出下凸壳即可。当查询 $(k-i-1)b[j]+\delta[j]$ 的最大值时，因为 i 从大到小枚举，因此查询点 $k-i-1$

单调递增，所以一旦栈顶不优，它将永远不优，反复弹栈直到栈顶最优即可，时间复杂度 $O(n)$。

总时间复杂度 $O(n \log n)$。

11 bx 的序列

回忆 $O(n \log n)$ 求 LIS 的过程，维护一个上升序列，每次新加一个数的时候，用它去替换里面最小的大于等于它的数，最后序列长度就是答案。对于本题，因为数位只可能是 1 到 7，所以可以考虑用一个 7 位二进制数来唯一确定这个需要维护的序列，总状态数为 2^7。

考虑 DP，设 $f[i][S]$ 表示考虑了前 i 个位置，目前 LIS 状态为 S 的方案数，对于相邻两个位置 x 与 y 之间的转移，只需要左乘转移矩阵 G 的 $y-x-1$ 次方，对于确定的数位，直接暴力转移即可。

矩阵部分即使使用快速幂，也只能做到 $O(2^{21} q \log n)$ 的复杂度，不能接受。显然我们可以用 $O(2^{21} \log n)$ 的时间预处理出 G 的 2^k 次方，那么对于每次转移，因为 $f[i]$ 是一个向量，因此我们只需要用对应幂次的矩阵去乘以该向量即可，而矩阵乘向量的复杂度仅为 $O(2^{14})$。

总时间复杂度 $O(2^{21} \log n + 2^{14} T q \log n)$。