雷一帆

2012-2013 学年第二学期离散数学期末试卷（部分）

（计算机科学与技术专业 2011 级）

学号________________姓名________________成绩________________ 非标答

一、（本题共 8 小题，每小题 1 分，满分 8 分）符号化下列命题。要求(1)-(4)在命题逻辑中符号化，(5)-(8)在一阶逻辑中符号化。

（1）小张和小李是同学。　（2）除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除。 $q \to p$

（3）小张和小王仅有一人参加比赛。　（4）4>2 仅当 3≥1。

（5）一切连续函数都是可微的。　（6）说火车比汽车跑的快是不对的。

（7）除非李键是东北人，否则他一定怕冷。　（8）2+2≠4 与 3+3≠6 互为充要条件。

$\neg(a \to b)$

永真　　可满足式

二、（本题满分 5 分）判断公式 $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$ 和 $\forall x\exists yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$ 的类型并加以证明。

$\forall xF(x) \to (\exists x\exists y G(x,y) \to \forall xF(x))$

为永真式

原式 $\Leftrightarrow \forall xF(x) \to (\neg(\exists x\exists yG(x,y)) \vee \forall xF(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall xF(x)) \vee \neg(\exists x\exists yG(x,y)) \vee \forall xF(x)$

$\Leftrightarrow 1$

$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y)$ 是可满足式

解 I：x、y 均为自然数，

$F(x,y)$ 表示 $x \geq y$

则前件为真，后件为假

解 II：x、y 均为自然数

$F(x,y)$ 表示 $x \leq y$

三、（本题满分 5 分）求 1~250 之间能被 2、3、5 和 7 任何一数整除的整数个数。

2: 250/2

3: 250/3

5: 250/5

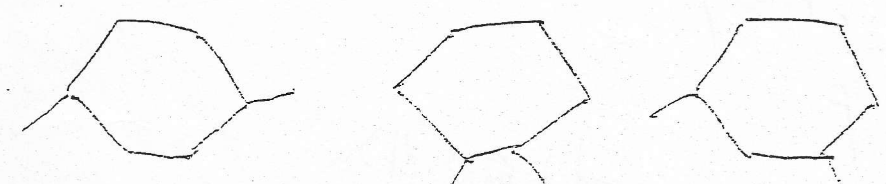
7: 250/7.

四、（本题满分 5 分）已知有四个非负整数列 (2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)、(3, 3, 3, 1)、(2, 2, 2, 2, 3, 3)、和 (4, 4, 3, 2, 2)。(1) 判断这四个非负整数列中哪些数列是可图化的？哪些数列是可简单图化的？(2) 对于可简单图化的非负整数列，给出三个不同构的简单图。

(1) (2,3,4,4,5,6,6)，(3,3,3,1)，(2,2,2,2,3,3)

是可图化的

(2) (2,2,2,2,3,3) 可简单图化



五、（本题满分 5 分）对于任意的公式 $F(x)$ 和 $G(x)$，问 $\forall x(F(x)\to G(x))\Leftrightarrow\forall xF(x)\to\forall xG(x)$ 是否成立？请加以证明。 不成立

举例证明

假

证明：

右边：$\forall xF(x) \to \forall xG(x)$

前件为真，后件为真

左边 $\Leftrightarrow$ 右边

反例 x 为自然数域

$F(x)$：$x>2$

$G(x)$：$x>3$

六、（本题满分 6 分）设 A 是集合，R 和 S 是 A 上的传递关系，证明或举反例否定下列断言：(1) $R\cup S$ 是 A 上的传递关系；(2) $R\cap S$ 是 A 上的传递关系。

(1) 不成立：

反例：$R:\{<1,3>\}$

$S:\{<3,1>\}$

$R\cup S:\{<1,3>,<3,1>\}$

R、S为传递关系，$R\cup S$ 不是A上的传递关系

(2) 成立：

证明：

$\forall x\forall y\forall z$

$<x,y>\in(R\cap S)\wedge<y,z>\in(R\cap S)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in S\wedge<y,z>\in R\wedge<y,z>\in S$

∵ R、S均为传递关系

则有 $\Leftrightarrow <x,z>\in R\wedge<x,z>\in S$

$\Leftrightarrow <x,z>\in R\cap S$

∴ $R\cap S$ 是A上的传递关系

七、（本题满分 6 分）符号化下列推理并判断该推理是否正确：若 a 是奇数，则 a 不能被 2 整除。若 a 是偶数，则 a 能被 2 整除。因此，如果 a 是偶数，则 a 不是奇数。

p： a是奇数

q： a能被2整除

r： a是偶数

符号化 前提：$p\rightarrow\neg q$，$r\rightarrow q$

结论： $r\rightarrow\neg p$

证明：① r 。 ~~结论的前提引入~~ 附加前提引入

② $r\rightarrow q$ 前提引入

③ q ①② 假言推理

④ $p\rightarrow\neg q$ 前提引入

⑤ $\neg p$ ~~③④ 假言推理~~ 拒取式

r

$r\rightarrow q$

q

$p\rightarrow\neg q$

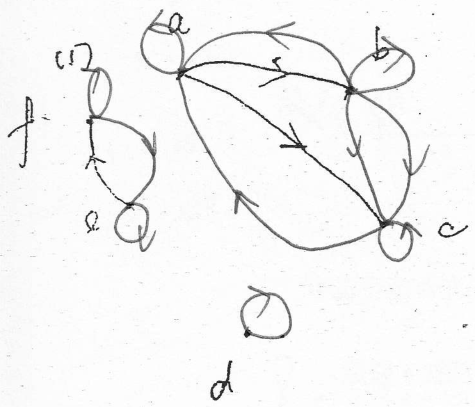
$\neg p$

八、（本题满分 6 分）设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的关系且 $R=\{<a,b>,<a,c>,<e,f>\}$。(1) 问 R 是否为集合 A 上的等价关系？若不是，请在关系 R 中添加最少的有序对使之成为集合 A 上的等价关系。(2) 写出商集 A/R^*，其中 R^* 为(1)中所获得的等价关系。

等价关系 自反、对称 传递 自反性

自反 对称 传递

(1)



$<a,a>$ $<b,b>$ $<c,c>$ $<d,d>$

$<e,e>$

$<f,f>$

$<b,a>$ $<c,a>$ $<f,e>$

$<b,c>$ $<c,b>$

(2) 商集关系：

$[a]=[b]=[c]=\{a,b,c\}$

$[d]=\{d\}$

$[e]=[f]=\{e,f\}$

添加 $<a,a>$，$<b,b>$，$<c,c>$ $<d,d>$

$<e,e>$ $<f,f>$，$<b,a>$，$<c,a>$

$<f,e>$ $<b,c>$，~~$<c,d>$~~ $<c,b>$

$\{c,b\}$?

九、（本题满分 6 分）设 F 为任意的关系，A、B 为集合，定义 $F\upharpoonright A=\{<x,y>|xFy\wedge x\in A\}$ 和 $F\upharpoonright B=\{<x,y>|xFy\wedge x\in B\}$。证明 $F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$。

任取 $<x,y>$

$<x,y>\in F\upharpoonright(A\cup B)$

$<x,y>\in F\wedge x\in A\cup B$

$<x,y>\in F\wedge(x\in A\vee x\in B)$

$(<x,y>\in F\wedge x\in A)\vee(<x,y>\in F\wedge x\in B)$

$<x,y>\in F\upharpoonright A\vee<x,y>\in F\upharpoonright B$

$F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

证明：

$\forall<x,y>\in F\upharpoonright(A\cup B)$

$\Leftrightarrow xFy\wedge x\in(A\cup B)$

$\Leftrightarrow xFy\wedge(x\in A\vee x\in B)$

$\Leftrightarrow (xFy\wedge x\in A)\vee(xFy\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\upharpoonright A\vee<x,y>\in F\upharpoonright B$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\upharpoonright A\vee F\upharpoonright B$