2011-2012学年第一学期离散数学期末试卷

一、判断题（15×1'=15'）

√ (1) 含n(n≥1)个命题变项的公式共有2^n个不同的赋值。

× (2) 设R_1和R_2是传递的二元关系，则$R_1\cup R_2$也是传递的。

√ (3) 在有限偏序集中，极小元一定存在，但最小元不一定存在。

× (4) 设G是n(n≥3)阶哈密顿图，则G中任意两个不相邻的顶点的度数之和均不小于n。

√ (5) 设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s=R^t$。

√ (6) 公式$\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists y G(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$是永真式。

× (7) 设R是任意的关系，则srt(R)一定是等价关系。

√ (8) 若个体域为实数集，F(x,y): x=y，G(x,y): x<y，则$\forall x\forall y(\neg F(x,y)\rightarrow G(x,y))$的真值为0。

× (9) 若两个无向图的顶点数、边数以及顶点的度数列分别相等，则它们是同构的。

√ (10) 设G为无向图，如果G中恰有两个奇度顶点，那么这两个奇度顶点之间必有通路。

√ (11) 命题$\varnothing\subseteq\varnothing$，$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$都是真命题。

√ (12) 对于任意正确的推理，其命题逻辑的推理形式结构一定是重言蕴涵式。

× (13) 设G是n个结点的m条边的简单有向连通图，那么$n-1\le m\le\frac{n(n-1)}{2}$。

√ (14) 设R是非空集合A上的关系，R是反对称关系当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

× (15) 设G为无向图，若G中恰有n个结点，n+1条边，则G必为一棵树。

二、在命题逻辑中符号化下列命题

(1) 小王边走边听音乐。p: 小王走　q: 小王听音乐　命题符号化为$p\wedge q$

(2) 派小张、小李中的一人去开会。p: 派小张去开会. q: 派小李去开会. 命题符号化为$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

(3) 小张和小李是同学。p: 小张和小李是同学. 命题符号化为p

(4) 今天是星期一仅当明天是星期二。p: 今天是星期一. q: 明天是星期二. 命题符号化为$p\rightarrow q$

(5) 若2+2≠4，则3+3≠6，反之亦然。p: 2+2=4. q: 3+3=6. 命题符号化为$\neg p\leftrightarrow\neg q$

三、在一阶逻辑中符号化下列命题

(1) 有的有理数能被2整除。M(x): x是有理数. F(x): x能被2整除. $\exists x(M(x)\wedge F(x))$

(2) 没有不犯错的人。M(x): x是人. F(x): x不犯错. $\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

(3) 人都不一样高。M(x): x是人. F(x,y): x和y一样高. $\forall x\forall y(M(x)\wedge M(y)\rightarrow\neg F(x,y))$

(4) 4>2与3≥1互为充要条件。F(x,y): x>y. G(x,y): x≥y. a:4. b:2. c:3. d:1

$F(a,b)\leftrightarrow G(c,d)$

(5) 除非李键是东北人，否则他一定怕冷。

G(x): x是东北人. F(x): x怕冷. a: 李键. $\neg F(a)\rightarrow G(a)$

四、判断公式$\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$和$\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$的类型并加以证明

$p\rightarrow(q\rightarrow p)$

$\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee p)$

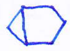
$\Leftrightarrow 1$. 永真式

$p\rightarrow q$.

非重言的可满足式

五. 已知有四个非负整数列 (2, 2, 2, 2, 3, 3)、(2, 3, 3, 5, 5, 6, 6)、(3, 2, 2, 2) 和 (4, 4, 3, 2, 1)

(1) 判断这四个非负整数列中哪些数列是可图化的? ①②④ 哪些数列是可简单图化的? ①

(2) 对于可简单图化的非负整数列，给出两个不同构的简单图。  

六. 已知 F.G.H 为任意的关系.证明 $F\cdot(G\cup H)=F\cdot G\cup F\cdot H$. 其中"·"为关系的复合运算.

证明: 任取 $\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in F\cdot(G\cup H)$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in(G\cup H))$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge(\langle t,y\rangle\in G\vee\langle t,y\rangle\in H))$

$\Leftrightarrow \exists t((\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G)\vee(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in H))$

$\Leftrightarrow (\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G))\vee(\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in H))$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in F\cdot G)\vee(\langle x,y\rangle\in F\cdot H)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in F\cdot G\cup F\cdot H$.

七、设无向树 T 有3个3度分支点，一个2度分支点，其余均为树叶

(1) 求T中有几片树叶;

(2) 画出两棵满足上述要求的不同构的树。

(1) 设有 n 片树叶.

$$\begin{cases} m=n-1 \\ 3\times3+1\times2+1\times(n-4)=2m \end{cases} \quad \text{(握手定理)}. \quad \therefore n=9.$$

(2).

八. 求 a, b, c, d, e, f 六个字母的全排列中不出现 ace 和 df 的排列个数.

全排列: $A_6^6=6!=720$. 出现 ace 的: $A_4^4=4!=24$

出现 df 的: $A_5^5=5!=120$. 同时出现 ace 和 df 的: $A_3^3=3!=6$.

全排列中不出现 ace 和 df 的: $720-24-120+6=582$.

九. 求公式 $(p\vee q)\to(q\wedge r)$ 的主析取范式和主合取范式. 并分别写出公式的成真赋值和成假赋值.

p	q	r	$p\vee q$	$q\wedge r$	$(p\vee q)\to(q\wedge r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

主析取范式: $m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7$.

主合取范式: $M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

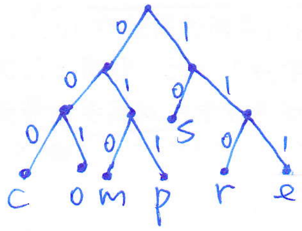
成真赋值: (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1).

成假赋值: (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)

十、给出单词"compress"的Huffman编码（要求给出编码过程）

"c"、"o"、"m"、"p"、"r"、"e"、"s"出现的频率分别为 $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

∴最优树：



编码：c: 000　o: 001　m: 010

p: 011　r: 110　e: 111　s: 10

十一、使用谓词逻辑构造证明法构造下面推理的证明：每个喜欢步行的人都不喜欢自行车。每个人或者喜欢自行车或者喜欢乘汽车。有的人不喜欢乘汽车，所以有的人不喜欢步行。

$M(x)$: x是人. $F(x)$: x喜欢步行. $G(x)$: x喜欢自行车　$H(x)$: x喜欢乘汽车.

前提：$\forall x(M(x) \wedge (F(x) \rightarrow \neg G(x)))$. $\forall x(M(x) \wedge (G(x) \vee H(x)))$.

结论：$\exists x(M(x) \wedge \neg H(x)) \rightarrow \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$.

证明：
① $\exists x(M(x) \wedge \neg H(x))$　附加前提引入
② $M(c) \wedge \neg H(c)$　∃-规则
③ $\neg H(c)$　②化简
④ $\forall x(M(x) \wedge (G(x) \vee H(x)))$　前提引入
⑤ $M(c) \wedge (G(c) \vee H(c))$　∀-规则
⑥ $G(c) \vee H(c)$　⑤化简
⑦ $G(c)$　③⑥析取三段论
⑧ $\forall x(M(x) \wedge (F(x) \rightarrow \neg G(x)))$　前提引入
⑨ $M(c) \wedge (F(c) \rightarrow \neg G(c))$　∀-规则
⑩ $F(c) \rightarrow \neg G(c)$　⑨化简
⑪ $\neg F(c)$　⑦⑩拒取式
⑫ $M(c)$　⑨化简
⑬ $M(c) \wedge \neg F(c)$　⑪⑫合取
⑭ $\exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$　∃+规则

十二、设集合A为正整数集的某个子集，R是A上的整除关系. $R=\{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x$ 整除 $y\}$

(1) 证明R是偏序关系.

(2) 若 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，画出 $<A,R>$ 的哈斯图，并求 $<A,R>$ 的最小元和最大元.

(3) 求 $B=\{2,3,4\}$ 的最小上界和最大下界.

(1) 证明：自反性：当 $x=y$ 时，x 能整除 x. ∴R是自反的.

反对称性：若 $<x,y> \in R$ 且 $<y,x> \in R$，则 $\frac{y}{x}=c$，c为大于等于1的整数.

且 $\frac{x}{y}=c$，c为小于等于1的整数.

∴ $c=1$. 即 $x=y$. ∴R是反对称的.

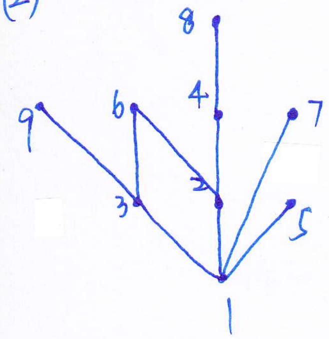
传递性：若 $<x,y> \in R$ 且 $<y,z> \in R$，即 $\frac{y}{x}=c_1\ (c_1 \geq 1, c_1 \in Z)$, $\frac{z}{y}=c_2\ (c_2 \geq 1, c_2 \in Z)$

∴ $\frac{z}{x}=\frac{c_2 y}{x}=c_1 c_2\ (c_1 c_2 \geq 1, c_1 c_2 \in Z)$ ∴ x 整除 z. ∴ $<x,z> \in R$

∴R是传递的.

综上，R是偏序关系.

(2) 哈斯图:



最小元：1

最大元：无

(3) $B=\{2,3,4\}$

最小上界：无

最大下界：1.

十三. 设A是横坐标部分非零的全体坐标组成的集合，A上关系R定义如下:

$\forall (a,b),(c,d)\in A,\ (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ac>0$

(1) 证明R为A上等价关系 (2) 给出R的等价类的几何说明.

(1) 证明: 自反性: $\forall (a,b)\in A$. ∵ 横坐标非零 ∴ $a^2=a\cdot a>0 \Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$. ∴ R是自反的.

对称性: $\forall (a,b),(c,d)\in A$, 若 $(a,b)R(c,d) \Rightarrow ac>0 \Rightarrow ca>0$

又 $(a,b),(c,d)\in A \Rightarrow (c,d)R(a,b)$. ∴ R是对称的.

传递性: $\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in A$. 若 $(a,b)R(c,d)$ 且 $(c,d)R(e,f)$.

则 $ac>0$ 且 $ce>0$. 则 $ae\cdot c^2>0$. 又 $c\neq 0$. ∴ $ae>0$. 又 $(a,b),(e,f)\in A$.

∴ $(a,b)R(e,f)$. ∴ R是传递的.

(2) R的等价类: ① 横坐标大于零的. ② 横坐标小于零的

十四. 已知有向图 $D=\langle V,E\rangle$, 其中 $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$. $E=\{\langle V_1,V_2\rangle,\langle V_1,V_4\rangle,\langle V_2,V_3\rangle,\langle V_2,V_4\rangle,$

$\langle V_3,V_2\rangle,\langle V_4,V_2\rangle,\langle V_4,V_3\rangle\}$

求: (1) 该有向图的邻接矩阵. (2) D中顶点 V_1 到 V_4 长度为1, 2, 3, 4 的通路的条数.

(3) D中顶点 V_4 到自身长度为1, 2, 3, 4 的回路的条数

(4) D中长度小于等于4的通路数与回路数.

解: (1) 邻接矩阵为A. (2)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}0&1&2&1\\0&2&1&0\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&3&2&1\\0&1&2&2\\0&2&1&0\\0&2&2&1\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&3&4&3\\0&4&3&1\\0&1&2&2\\0&3&3&2\end{bmatrix}$$

∴ D中顶点 V_1 到 V_4 长度为1, 2, 3, 4 的通路条数分别为 1, 1, 1, 3

(3) D中顶点 V_4 到自身长度为1, 2, 3, 4 的回路的条数分别为 0, 1, 1, 2

(4) 通路数: $7\times1+8+2+2+6+5+3+5+10+8+5+8=69$.

回路数: $0+2+1+1+1+1+1+1+4+2+2=15$