КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

СПбГУ, МКН, СП, 1 курс
ЛЕКТОР: ЖУКОВ ИГОРЬ БОРИСОВИЧ

СОСТАВИТЕЛИ:

АНДРЕЙ K-dizzled КОЗЫРЕВ, НИКИТА muldrik МИТЦЕВ
МАКСИМ maxmartynov08 МАРТЫНОВ, СЕМЕН SmnTin ПАНЕНКОВ

ОСЕНЬ 2020

Оглавление

Глава 1

Первый семестр. Первая четверть

1 Построение поля комплексных чисел.

- $\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \quad i^2 = -1$
- Определим операцию сложения: $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- Определеим операцию умножения: $(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Предложение. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ - *поле*

Доказательство.

- коммутативность и ассоциативность сложения очевидны
- $0 + 0i$ - нейтральный по сложению
- $(-a) + (-b)i$ - противоположный к $a + bi$
- коммутативность умножения очевидна
- дистрибутивность умножения:

$$(a + bi)((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = (a + bi)((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) =$$
$$= a(a_1 + b_1) - b(b_1 + b_2) + (a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2))i$$

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) + (a + bi)(a_2 + b_2 i) = (aa_1 - bb_1 + aa_2 - bb_2) + (ab_1 + a_1 b + ab_2 + a_2 b)i =$$
$$= a(a_1 + b_1) - b(b_1 + b_2) + (a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2))i$$

- ассоциативность умножения:

$$(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)(a_3+b_3i)) = (a_1+b_1i)((a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i) =$$
$$= a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+a_3b_2)+(a_1(a_2b_3+a_3b_2)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))i =$$
$$= a_1a_2a_3-a_3b_1b_2-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3+(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-b_1b_2b_3)i$$

$$((a_1+b_1i)(a_2+b_2i))(a_3+b_3i) = ((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i)(a_3+b_3i) =$$
$$= (a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3+((a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a_3)i =$$
$$= a_1a_2a_3-a_3b_1b_2-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3+(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-b_1b_2b_3)i$$

- $(1+0i)$ - нейтральный элемент по умножению
- $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 \quad /(a^2+b^2)$$
$$(a+bi)(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i) = 1$$

$\Rightarrow$ все аксиомы поля выполнены $\Rightarrow \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел ■

- $\mathbb{R}$ это подполе в $\mathbb{C}$
- $z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R}$
  $x = Re\, z$ - вещественная часть
  $y = Im\, z$ - мнимая часть
- z называется чисто мнимым, если $Re\, z = 0$

2 Комплексное сопряжение.

$a-bi$ - число, комплексно сопряженное к $a+bi$

Предложение. *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x+iy \mapsto \overline{z} = x-yi$ - автоморфизм $\mathbb{C}$, то есть это биекция, а также $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ и $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$*

Доказательство.

1. $\overline{\overline{x}} = x \Rightarrow$ комплексное сопряжение - отображение, обратное к самому себе $\Rightarrow$ это биекция
2. $z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2$

   $\overline{z_1+z_2} = (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i = (x_1-y_1i)+(x_2-y_2i) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1z_2} = (x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$

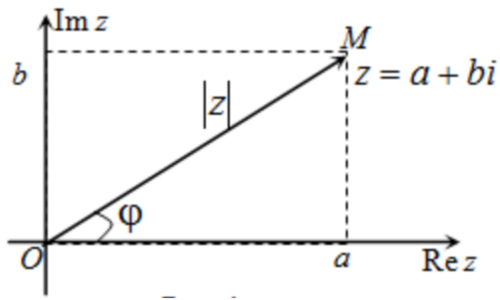
   $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (x_1-y_1i)(x_2-y_2i) = (x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$

■

Замечание

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
2. $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

3 Определение модуля и аргумента. Свойства модуля комплексного числа.



Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$. Число $\varphi \in \mathbb{R}$ называется аргументом z, если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма комплексного числа.

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$ и $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

   Доказательство. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ ■

4. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

   Доказательство. Будем сравнивать квадраты левой и правой части:

   $$|z_1 + z_2|^2 = |(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2$$
   $$(|z_1| + |z_2|)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2|z_1||z_2| + a_2^2 + b_2^2$$
   $$\Longrightarrow |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant |z_1||z_2|$$

   Опять возведем левую и правую часть в квадрат:

   $$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$
   $$2a_1a_2b_1b_2 \leqslant a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$
   $$0 \leqslant (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

■

5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

   Доказательство. Возведем левую и правую часть в квадрат:

$$|z_1 z_2|^2 = |(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$
$$|z_1|^2|z_2|^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$

■

4 Существование и «единственность» аргумента комплексного числа. Свойства аргумента.

1. Если $z = 0$, то любое число является его аргументом.
2. Если $z \neq 0$, то существует $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ такое, что φ_0 - аргумент z, и при этом $\varphi_0 + 2\pi k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ тоже аргумент z.

   Доказательство.

$$x^2 \leqslant x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow -r \leqslant x \leqslant r$$
$$-1 \leqslant \frac{x}{r} \leqslant 1$$
$$\Rightarrow \exists\, \widetilde{\varphi} \in \mathbb{R} : \cos\widetilde{\varphi} = \frac{x}{r}$$
$$(\sin\widetilde{\varphi})^2 = 1 - (cos\widetilde{\varphi})^2 = 1 - \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2}{r^2}$$
$$\sin\widetilde{\varphi} = \pm\frac{y}{r}$$

   Если $\sin\widetilde{\varphi} = \frac{y}{r}$, то $\varphi_0 := \widetilde{\varphi}$, иначе $\varphi_0 := -\widetilde{\varphi}$.

   Итого получаем:

$$\cos\varphi_0 = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi_0 = \frac{y}{r}$$
$$\Rightarrow z = x + iy = r\cos\varphi_0 + r\sin\varphi_0 i = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 - arg\, z$$

   Покажем, что $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ тоже является аргументом:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \Leftrightarrow \cos\varphi = \cos\varphi_0,\, \sin\varphi = \sin\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi - arg\, z$$

   Покажем, что все аргументы имеют вид $\varphi_0 + 2\pi k$. Для этого рассмотрим $\alpha \neq (\varphi_0 + 2\pi k)$. Очевидно, что $\cos\alpha \neq \cos\varphi_0$ или $\sin\alpha \neq \sin\varphi_0$. Тогда $r * \cos\alpha \neq x$ или $r * \sin\alpha \neq y$. Следовательно $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq z$. ■

Свойства аргумента:

$z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$($\mathbb{C}$ без нуля)

1. $arg\, z_1 z_2 = arg\, z_1 + arg\, z_2$

   Доказательство.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

■

2. $arg\, \frac{z_1}{z_2} = arg\, z_1 - arg\, z_2$

   Доказательство.

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \Rightarrow arg\, z_1 = arg\, \frac{z_1}{z_2} + arg\, z_2 \Rightarrow arg\, \frac{z_1}{z_2} = arg\, z_1 - arg\, z_2$$

■

   Замечание $arg\, \frac{1}{z} = arg\, 1 - arg\, z = 0 - \arg\ z = -arg\, z$

3. $arg\, \overline{z} = -arg\, z$

   Доказательство.

$$arg\, z = \varphi$$
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |\overline{z}|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$
$$\Rightarrow arg\, \overline{z} = -arg\, z$$

■

5 Умножение и деление чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

- **Умножение**

  $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

  Доказательсво написано выше.

- **Деление**

  $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{|z_1|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{|z_2|(\cos\varphi_2^2 + \sin\varphi_2^2)} =$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

- **Формула Муавра**

  Пусть $z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

  Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$
  $$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

  Доказательство.

  - $n > 0$

    Индукция по n.

    База $n = 1$: очевидно

    Переход $n = k - 1 \to n = k$

    $$z^k = z^{k-1} \cdot z = |z|^{k-1}(\cos(k-1)\varphi + i\sin(k-1)\varphi) \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ = |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$$

  - $n = 0$

    $$z^0 = |z|^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1$$

  - $n < 0$

    $$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{|z|^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))} = \\ = \frac{1}{|z|^{-n}}(\cos(0 - (-n\varphi)) + i\sin(0 - (-n\varphi))) = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

■