Arbeid en energie

$$vw = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\cos\theta}$$

Arbeid bij constante kracht

$$\underbrace{W}_{} = Fd\cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$\hookrightarrow$ scalair, in Nm of J

check of van woord in arbeid

Arbeid bij veranderlijke kracht

$$W \approx \sum_i F_i \cos\theta_i \Delta l_i$$

$$\rightsquigarrow \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\theta \, dl = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

In een veer: $\quad F_p = kx$

$F_S = -kx$

$$W_p = \int_0^{x_b} \vec{F_p} \cdot d\vec{x} = \int_0^{x_b} F_p \, dx$$

$\theta = 0°$

$$= \int_0^{x_b} -kx \, dx = \frac{1}{2} k x_b^2$$

1. Puntmassa onderhevig aan uitwendige kracht

2de WN:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$$
$$= \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Scalaire vorm met $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$
$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2}_{\text{kin energie} = T = \frac{m\cdot v^2}{2}}\Big)dt = \int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v\cdot v\cdot\cos\theta$$
$$= v^2$$

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$$

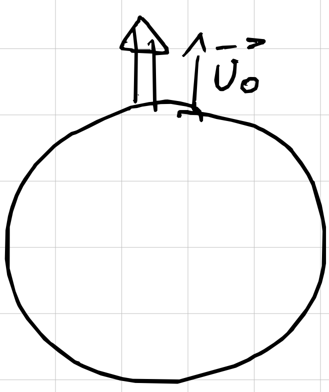
$$= \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= W$$

Arbeid energie principe

arbeid = ΔE_{kin}
-> verandering kinetische energie

Voorbeeld:



Minimale snelheid om de raket weg te laten geraken

2de WN:

$$m_R \vec{a} = \vec{F}$$

$$m_R \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_G$$

← 1 richting dus → mag weg

$$m_R \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G \cdot m_R \cdot M_\oplus}{(R_\oplus + x)^2}$$

$$m_R \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} \cdot \text{''} \qquad \text{''}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_R \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = \text{''} \qquad \text{''} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{G m_R M_\oplus}{R + x}\right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \text{''} \qquad \text{''}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \text{''} \qquad \text{''}\, dt$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0}^{v_1} = \frac{G m_R M_\oplus}{R + x} \Big|_{x=0}^{x_E}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_R} v_1^2 - \frac{1}{2} \cancel{m_R} v_0^2 = \frac{G \cancel{m_R} M_\oplus}{R + x} - \frac{G M_\oplus \cancel{m_R}}{R}$$

$$v_1^2 = \underbrace{v_0^2 + 2\left(\frac{G M_\oplus}{R+x} - \frac{G M_\oplus}{R}\right)}_{\geq 0}$$

$v_1 \geq 0$

$\Rightarrow$

$$v_0^2 \geq \frac{G M_\oplus}{R} - \frac{G M_\oplus}{R+x}$$

$\hookrightarrow x \to \infty$

$$v_0^2 \geq 2 \frac{G M_\oplus}{R}$$

$$v_0^2 = 2 \frac{G M_\oplus}{R}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 G M_\oplus}{R}}$$

$$v_0 = \sqrt{2 g R_\oplus} \simeq 11 \text{ km/s}$$

Zelfde voorbeeld met Arbeidsenergie principe

$$T_1 - T_0 = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$\left(= \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt \right)$$

$$\frac{1}{2} m_R v_1^2 - \frac{1}{2} m_R v_0^2 = \int_{x=0}^{x_1} \frac{-G M_\oplus m_R}{(R+x)^2}\, dx$$

$$= \frac{G M_\oplus m_R}{R + x_1} - \frac{G M_\oplus m_R}{R}$$

eeee> $v_0 = \sqrt{2 g R_\oplus}$

2. Behoud van energie:

Intermezzo afgeleiden

$$f(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{df}{dx} = kx$$

$$f(x,y,z) = 2x^2 y^3 z$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$= 4xy^3 z + 6x^2 y^2 z + 2x^2 y^3$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$= 4xy^3 \hat{i} + 6x^2 y^2 z \hat{j} + 2x^2 y^3 \hat{k}$$

$\nabla U \cdot d\vec{r}$ met $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

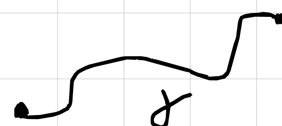
$$\Leftrightarrow \; = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$= dU$$

$\vec{F}(\vec{r}, t) \equiv$ conservatieve kracht (potentiële energieën)

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Conservatieve kracht maakt keuze van γ niet uit.

Bij conservatieve kracht $\vec{F}(r, t)$

$\Leftrightarrow \; \exists!\, U : \vec{F} = -\nabla U$

↳ potentiële energie

↳ uniek op constante na

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -\nabla U \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{U_1}^{U_2} dU$$

$$= U_1 - U_2 = W = T_2 - T_1$$

$$\Rightarrow \quad T_2 + U_2 = T_1 + U_2$$

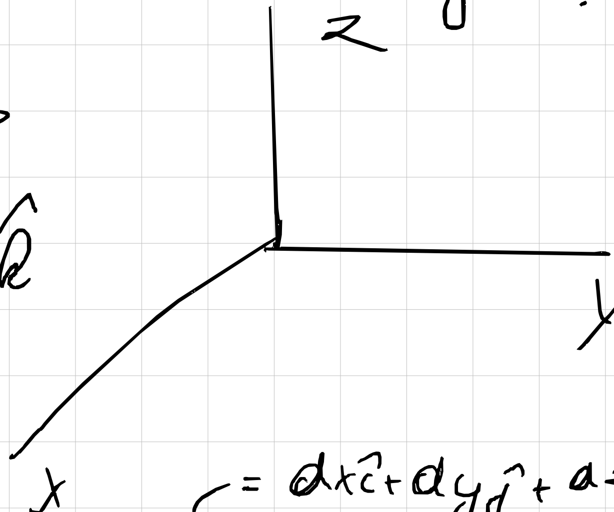
↳ behoud mechanische energie

word niet behouden als een wrijving in bevoorbeeld

$$E^{tot} = E^{mech} + \underbrace{E^{inw}}_{\text{"warmte"}}$$

Als krachten loodrecht zijn op de loopbaan, dan maakt het niet uit de kracht conservatief is of niet. E^{mech} zal behouden worden

Zelfde voorbeeld. Nu met wet van behoud van mechanische energie.



(1) $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$U = -\int mg\hat{k} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int -mg\,dz$$

$$= mgz + C$$

Harmonische kracht

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -kr\hat{r}$$

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int kr\hat{r} \cdot dr\hat{r}$$

$$= \int kr\,dr$$

$$= \frac{1}{2}kr^2 + C$$

Algemen gravitatiekracht

$$\vec{F}_G = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{GmM}{r^2}\hat{r} \cdot dr\hat{r}$$

$$= \int \frac{GmM}{r^2}dr = -\frac{GmM}{r} + C$$