

Код Хэмминга

Александра Игоревна Кононова

НИУ МИЭТ

24 ноября 2019 г.

Код Хэмминга

- 1 Информация передаётся блоками.
- 2 В блоке (n битов) никогда не встретится более чем одна ошибка.
- 3 Ошибка — инверсия бита.

Биты блока разделяются на

- **информационные** (независимые)
- и **проверочные** (значение рассчитывается по информационным).

Общий размер блока после кодирования

$$n = (m \text{ информационных}) + (k \text{ проверочных})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{— ошибки нет;} \\ \text{— ошибка в } i\text{-й позиции.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n+1 \text{ указаний} \\ 2^k \geq n+1 \end{array}$$

Длины кодов (оптимальные)

Проверочных битов (k)	Всего битов ($n = 2^k - 1$)	Информационных битов ($m = n - k$)	Информационных байтов ($m/8$)
1	1	0	0.00
2	3	1	0.12
3	7	4	0.50
4	15	11	1.38
5	31	26	3.25
6	63	57	7.12
7	127	120	15.00
8	255	247	30.88
9	511	502	62.75
10	1023	1013	126.62
11	2047	2036	254.50
12	4095	4083	510.38
13	8191	8178	1022.25
14	16383	16369	2046.12
15	32767	32752	4094.00
16	65535	65519	8189.88

Бит чётности и группы

- 1 Бит чётности позволяет обнаружить одиночную ошибку в группе:

$$c = \bigoplus_{b_i \in G} b_i, \text{ соответственно, } \bigoplus_{b_i \in \{c\} \cup G} b_i = c \oplus \bigoplus_{b_i \in G} b_i = 0$$

при одиночной ошибке в $\{c\} \cup G$ получим $\bigoplus_{b_i \in \{c\} \cup G} b_i = 1$.

- 2 Несколько пересекающихся контрольных групп позволяют уточнить положение ошибки.

- 3 Набор групп должен быть различным для каждого бита (для локализации ошибки до конкретного бита).

- 4 Контрольный бит не должен входить более чем в одну группу (для упрощения расчёта).

- 5 Каждый информационный бит должен входить как минимум в две группы (из 3 и 4).

Несистематический код Хэмминга

- Набор контрольных групп — единицы натурального двоичного кода номера бита (с 1, чтобы каждый входил хотя бы в одну группу).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
×		×		×		×		×		×		×		×
	×	×			×	×			×	×			×	×
			×	×	×	×					×	×	×	×
							×	×	×	×	×	×	×	×

Для 15 бит
(11 инф-х
+ 4 кон-х)

$$\begin{aligned} \text{КС1: } & b_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \oplus b_7 \oplus b_9 \oplus b_{11} \oplus b_{13} \oplus b_{15} = 0 \\ \text{КС2: } & b_2 \oplus b_3 \oplus b_6 \oplus b_7 \oplus b_{10} \oplus b_{11} \oplus b_{14} \oplus b_{15} = 0 \\ \text{КС3: } & b_4 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7 \oplus b_{12} \oplus b_{13} \oplus b_{14} \oplus b_{15} = 0 \\ \text{КС4: } & b_8 \oplus b_9 \oplus b_{10} \oplus b_{11} \oplus b_{12} \oplus b_{13} \oplus b_{14} \oplus b_{15} = 0 \end{aligned}$$

- Биты 1, 2, 4, ... 2^s — контрольные (входят только в одну группу):

$$b_1 = b_3 \oplus b_5 \oplus b_7 \oplus b_9 \oplus b_{11} \oplus b_{13} \oplus b_{15} \dots$$

$$b_2 = b_3 \oplus b_6 \oplus b_7 \oplus b_{10} \oplus b_{11} \oplus b_{14} \oplus b_{15} \dots$$

...

- При наличии ошибки несошедшиеся контрольные суммы образуют натуральный двоичный код инвертированного бита → исправление.

Систематический код Хэмминга

Перестановка столбцов кода Хэмминга образует другой код Хэмминга

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
×		×		×		×		×		×		×		×
	×	×			×	×			×	×			×	×
			×	×	×	×					×	×	×	×
							×	×	×	×	×	×	×	×

Систематический код Хэмминга (простейший):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	3	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15
×				×	×		×	×		×		×		×
	×			×		×	×		×	×			×	×
		×			×	×	×				×	×	×	×
			×					×	×	×	×	×	×	×

Систематический код Хэмминга

Перестановка столбцов кода Хэмминга образует другой код Хэмминга

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
×		×		×		×		×		×		×		×
	×	×			×	×			×	×			×	×
			×	×	×	×					×	×	×	×
							×	×	×	×	×	×	×	×

Систематический код Хэмминга (Л. Бриллюэн):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	7	11	13	14	3	5	9	6	10	12	1	2	4	8
×	×	×	×		×	×	×				×			
×	×	×		×	×			×	×			×		
×	×		×	×		×		×		×			×	
×		×	×	×			×		×	×				×

Коды, исправляющие одиночную ошибку и обнаруживающие двойную $n = 2^k$

Длина блока Хэмминга $n = 2^k - 1$ бит \rightarrow один бит не используется.

$$b_0 = \bigoplus_{i=1}^{n-1} b_i \text{ — дополнительный бит чётности } \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} b_i = 0 \right)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	×		×		×		×		×		×		×		×
		×	×			×	×			×	×			×	×
				×	×	×	×					×	×	×	×
								×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Количество единиц в контрольных группах	Общее количество единиц	Вывод
Чётное во всех	Чётное	Данные верны
Чётное во всех	Нечётное	Ошибка в дополнительном контрольном разряде b_0
Нечётное в некоторых	Нечётное	Однократная ошибка в коде Хэмминга $b_1 \dots b_n$
Нечётное в некоторых	Чётное	Двойная ошибка

Спасибо за внимание!

НИУ МИЭТ

<http://miet.ru/>

Александра Игоревна Кононова

illinc@mail.ru