Сжатие с потерями

Александра Игоревна Кононова

НИУ МИЭТ

2 января 2017 г.

Сигналы

Сигнал — скалярная функция от одного или нескольких аргументов.

$s(t)$ — звук

$s(x, y)$ — изображение

$s(x, y, t)$ — видео без звука

Аналогово-цифровое преобразование

Аналогово-цифровое преобразование (оцифровка):

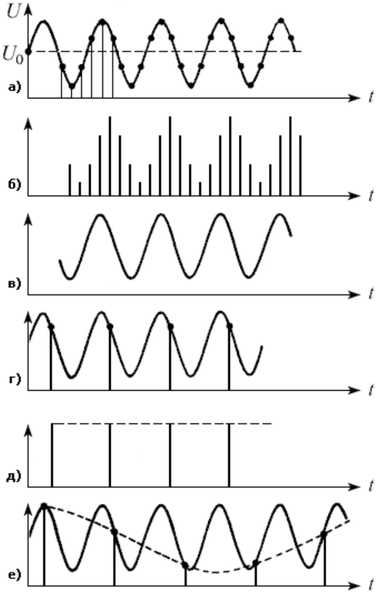
1. замеры величины амплитуды аналогового сигнала с некоторым временны́м шагом — **дискретизация**;
2. запись полученных значений амплитуды в численном виде — **квантование**.

Дискретизация

Процесс получения мгновенных значений преобразуемого аналогового сигнала с определённым временны́м шагом (шагом дискретизации).

Частота дискретизации $\nu = 1/T$, где T — шаг

Теорема Котельникова



Теорема Котельникова (Найквиста, Шеннона, отсчётов, о выборках)

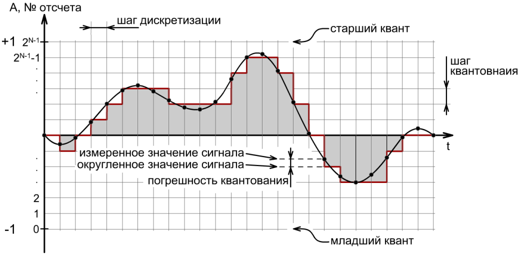
если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет конечный спектр,
то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим отсчётам,
взятым с частотой, **строго большей** удвоенной верхней частоте f_c:

$$f > 2f_c$$

Линейное (однородное) квантование

Квантование по амплитуде — процесс замены реальных (измеренных) значений амплитуды сигнала значениями, приближенными с некоторой точностью.

Линейное (однородное) квантование — линейное разбиение амплитудной шкалы на уровни.



Дискретизация сигнала + метод однородного квантования — импульсно-кодовая модуляция, ИКМ (англ. Pulse Code Modulation — PCM).

Сжатие с потерями

После распаковки мы получим документ, отличающийся от первоначального.

Этапы:

1. удалить несущественную информацию,
2. к оставшимся данным применить наиболее подходящий алгоритм сжатия без потерь.

Простейшие приёмы сжатия с потерями

1. прореживание
   - отбрасывание
   - усреднение
2. уменьшение разрядности
   - отбрасывание младших разрядов
   - палитризация

Разделение информации по важности

1. смена модели (для изображения)
2. временно́й анализ
3. спектральные преобразования

Непрерывное преобразование Фурье

Прямое

$$S(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i\nu t} dt$$

Обратное (восстановление)

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu$$

Циклическая частота

Иногда вместо частоты ν используют циклическую частоту $\omega = 2\pi\nu$.

Тогда прямое преобразование принимает вид:

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Спектр

Амплитудный спектр (АЧХ) $f(t)$:

$$|S(\nu)|$$

Фазовый спектр (ФЧХ) $f(t)$:

$$-\arg(S(\nu))$$

Преобразование дискретного сигнала

$$\tilde{S}(\nu) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-2\pi i \cdot \nu \cdot j \Delta t} \Delta t$$

$\tilde{S}(\nu)$ непрерывна,

периодична с периодом $T = \frac{1}{\Delta t}$: $\tilde{S}(\nu + \frac{1}{\Delta t}) = \tilde{S}(\nu)$,

отсчётов в точках $\nu_k = \frac{1}{N\Delta t} \cdot k, \quad k = 0, \dots, N-1$ достаточно для восстановления дискретного сигнала $f(j\Delta t)$

Отсчёты

Обозначим $f_j = f(j\Delta t)$, $\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta t}$, $\tilde{S}_k = \tilde{S}(\nu_k) = \tilde{S}(\Delta\nu \cdot k) = $
$= \tilde{S}(\frac{1}{N\Delta t} \cdot k)$:

$$\tilde{S}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{N\Delta t} k \cdot j \Delta t} \Delta t = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2\pi i}{N} kj}$$

Восстановление дискретного сигнала

$$f(j\Delta t) = f_j = \Delta\nu \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kj} = \Delta\nu \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kj} \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i}{N} mj} =$$

$$= \frac{1}{N\Delta t} \cdot \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{\frac{2\pi i}{N} kj} e^{-\frac{2\pi i}{N} mj} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_m \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(j-m)k}}_{\substack{N \text{ при } j-m=0 \\ 0 \text{ при } j-m\neq 0}}$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Прямое (ДПФ, DFT) — комплексный спектр

$$y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} kj} \quad \left(\tilde{y}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} kj} \right)$$

Обратное (ОДПФ)

$$x(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} kj}$$

(для симметрии полагаем $\Delta t = \Delta \nu = \frac{1}{\sqrt{N}}$)

Вектор-спектр

Амплитудный спектр: $\left\{|y(k)|\right\}_{k=0}^{N-1}$

Фазовый спектр: $\left\{-\arg y(k)\right\}_{k=0}^{N-1}$

$\overline{y(0)} = y(0)$, для $k = 1, \ldots, N-1$ $\overline{y(k)} = y(N-k)$

Быстрое ДПФ (БПФ)

Пусть $N = 2^n$; обозначим $\omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{2^n}}$:

$$\tilde{y}(k) = \sum_{j=0}^{2^n-1} x(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{2^n}kj} = \sum_{j=0}^{2^n-1} x(j) \cdot \omega_n^{kj}$$

$$\omega_n^2 = e^{-\frac{2\pi i}{2^n}\cdot 2} = e^{-\frac{2\pi i}{2^{n-1}}} = \omega_{n-1}$$

Прореживание — разбиение вектора $X = \left\{x(0), \dots x(2^n-1)\right\}$ на
$X_0 = \left\{x(0), x(2) \dots x(2^n-2)\right\} = \left\{x(2j)\right\}_{j=0}^{2^{n-1}-1}$
$X_1 = \left\{x(1), x(3), \dots x(2^n-1)\right\} = \left\{x(2j+1)\right\}_{j=0}^{2^{n-1}+1}$

Прореживание по времени

$$X_0 = \{x(0), x(2) \dots x(2^n - 2)\} = \{x(2j)\}_{j=0}^{2^{n-1}-1}$$

$$X_1 = \{x(1), x(3), \dots x(2^n - 1)\} = \{x(2j+1)\}_{j=0}^{2^{n-1}-1}$$

$$\tilde{y}(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left(x(2j) \cdot \omega_n^{k \cdot 2j} + x(2j+1) \cdot \omega_n^{k \cdot (2j+1)} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j} + \omega_n^k \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j}$$

где $k = 0,1, \dots 2^n - 1$

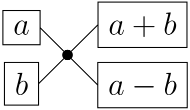
Прореживание по времени — разделение спектра

$$\omega_n^{2^{n-1}+k} = e^{-\frac{2\pi i}{2^n}\cdot(2^{n-1}+k)} = \underbrace{e^{-\pi i}}_{-1} \cdot \underbrace{e^{-\frac{2\pi i}{2^n}\cdot k}}_{\omega_n^k} = -\omega_n^k$$

$$\tilde{y}_0(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j)\cdot e^{-\frac{2\pi i}{2^{n-1}}kj}, \quad \tilde{y}_1(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j)\cdot e^{-\frac{2\pi i}{2^{n-1}}kj}$$

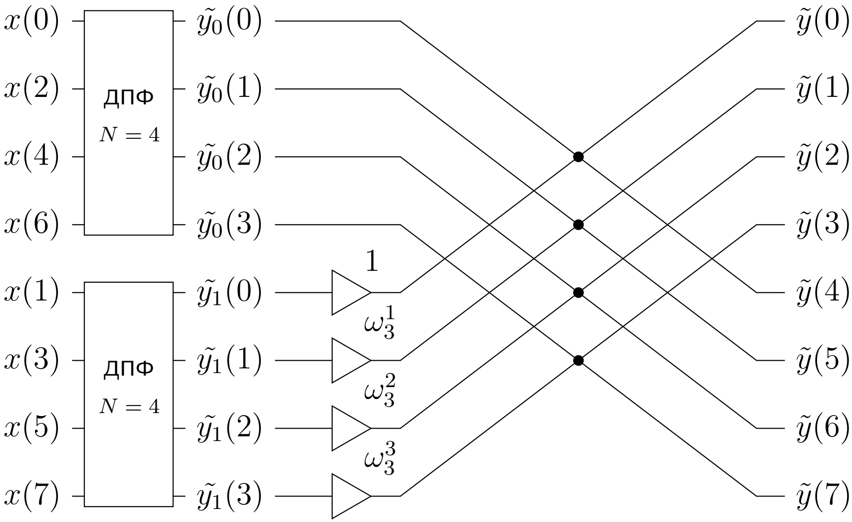
$k = 0,1,\ldots 2^{n-1}-1$:

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}_0(k) + \omega_n^k \cdot \tilde{y}_1(k)$$

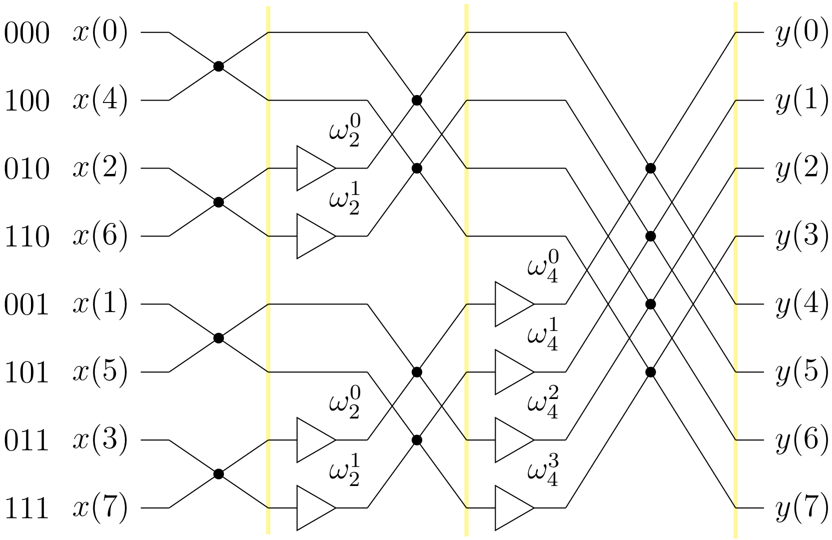


$$\tilde{y}(k+2^{n-1}) = \tilde{y}_0(k+2^{n-1}) + \omega_n^{k+2^{n-1}} \cdot \tilde{y}_1(k+2^{n-1}) =$$
$$= \tilde{y}_0(k) - \omega_n^k \cdot \tilde{y}_1(k)$$

Прореживание по времени — $N = 8$



Прореживание по времени — БПФ $N = 8$



Прореживание по частоте I

$$X_0 = \left\{x(0), x(1)\ldots x(2^{n-1}-1)\right\} = \left\{x(j)\right\}_{j=0}^{2^{n-1}-1}$$
$$X_1 = \left\{x(2^{n-1}), x(2^{n-1}+1), \ldots x(2^n-1)\right\} = \left\{x(2^{n-1}+j)\right\}_{j=0}^{2^{n-1}-1}$$

$$\tilde{y}(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left(x(j)\cdot\omega_n^{k\cdot j} + x(2^{n-1}+j)\cdot\omega_n^{k\cdot(2^{n-1}+j)}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j)\cdot\omega_n^{k\cdot j} + \omega_n^{k\cdot 2^{n-1}} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j)\cdot\omega_n^{k\cdot j}$$

где $k = 0{,}1,\ldots 2^n - 1, \quad \omega_n^{2^{n-1}} = e^{-\frac{2\pi i}{2^n}\cdot 2^{n-1}} = e^{-\pi i} = -1$

Прореживание по частоте II

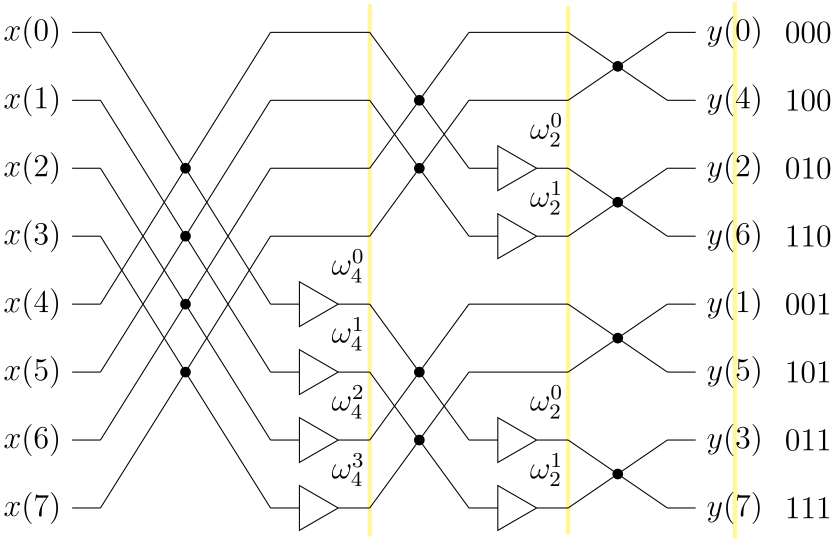
$$\tilde{y}(2k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \cdot \omega_n^{2k \cdot j} + (-1)^{2k} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \cdot \omega_n^{2k \cdot j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j} + \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j}$$

$$\tilde{y}(2k+1) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \cdot \omega_n^{(2k+1) \cdot j} + (-1)^{2k+1} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \cdot \omega_n^{(2k+1) \cdot j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j} \omega_n^{j} - \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \cdot \omega_{n-1}^{k \cdot j} \omega_n^{j}$$

Прореживание по частоте — БПФ $N = 8$



Спасибо за внимание!

НИУ МИЭТ
http://miet.ru/

Александра Игоревна Кононова
illinc@mail.ru