Metody numeryczne

Komentarz 3. zadania laboratoryjnego

Bartosz Smolarczyk

1. Wybór pierwiastka równania kwadratowego x_{n+3}

Przeprowadzone rozumowanie opieramy na wybranym w następnym punkcie wzorze (4).

Chcielibyśmy wybierać kolejne pierwiastki x_{n+3} tak, aby nie doprowadzić do sytuacji, w której dzielimy przez 0. Łatwo zauważyć, że może dojść do tego jedynie podczas wyliczania wartości $\mathcal{M} = C \mp \sqrt{\Delta}$ (pierwiastek z ujemnej liczby nie stanowi problemu przy założeniu, że obsługiwane są liczby zespolone). Mając to na uwadze, przyjmujemy następującą politykę wyboru x_{n+3}:

- Jeżeli $\mathcal{M} \neq 0$ dla obydwu pierwiastków, to wybieramy ten, który wartością jest bliżej $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$,
- Jeżeli $\mathcal{M} = 0$ dla jednego z pierwiastków, to wybieramy ten, dla którego $\mathcal{M} \neq 0$,
- Jeżeli $\mathcal{M} = 0$ dla obydwu pierwiastków, to losujemy z jednakowym prawdopodobieństwem $\mathcal{M} = -2 \vee \mathcal{M} = 2$. Co prawda wpływa to nieco na ostateczny wygląd ciągu, ale pozwala kontynuować iterację. Zauważmy, że wówczas wzór obliczeniowy upraszcza się do $x_{n+3} = x_{n+2} \pm f[x_{n+2}]$.

2. Wybór wzoru obliczeniowego wartości x_{n+3}

Wybieramy wzór obliczeniowy (4):

$$x_{n+3} = x_{n+2} - \frac{2f[x_{n+2}]}{C \mp \sqrt{\Delta}}$$

Co prawda obliczenie kolejnego wyrazu ciągu wymaga tak samo jak we wzorze (3) wyznaczenia C oraz Δ, przez co jesteśmy zmuszeni obliczać wielokrotnie różnice dzielone i wykonywać przy tym wysoce niepożądane ze względu na niedokładności dzielenie. Zauważmy jednak, że w liczniku (4) występuje $f[x_{n+2}] = f(x_{n+2})$, a nie tak jak w mianowniku (3) $f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n]$. Pozwala nam to na ograniczenie liczby dzieleń wykonywanych w ramach jednej iteracji. Jako dodatkowy powód możemy przyjąć przeprowadzone testy - wzór ten cechował się mniejszą liczbą potrzebnych do znalezienia miejsca zerowego iteracji.

3. Obsługa liczb zespolonych

Zaimplementowana przy pomocy pakietu `cmath`.

4. Dowody równoważności

W poniższych przekształceniach pamiętamy z treści zadania, że zachodzi:

$$C = f[x_{n+2}, x_{n+1}] + f[x_{n+2}, x_n] - f[x_{n+1}, x_n]$$

$$\Delta = C^2 - 4f[x_{n+2}]f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n]$$

- (1) $\Leftrightarrow$ (2)

  Za pomocą odpowiednich przekształceń pokażemy, że (1) = (2). Zapiszmy tę równość, od razu redukując składnik $f[x_{n+2}]$:

  $$f[x_{n+2}, x_{n+1}] \cdot (x - x_{n+2}) + f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2})(x - x_{n+1}) =$$

  $$= C(x - x_{n+2}) + f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2})^2$$

  $\Leftrightarrow$

  $$f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2})(x - x_{n+1}) - f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2})^2 =$$

  $$= C(x - x_{n+2}) - f[x_{n+2}, x_{n+1}] \cdot (x - x_{n+2})$$

  $\Leftrightarrow$

  $$f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2}) \cdot (x - x_{n+1} - x + x_{n+2}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot (C - f[x_{n+2}, x_{n+1}])$$

  $\Leftrightarrow$

  $$f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (x - x_{n+2}) \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot (f[x_{n+2}, x_{n+1}] + f[x_{n+2}, x_n] - f[x_{n+1}, x_n] - f[x_{n+2}, x_{n+1}])$$

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_{n+1}, x_n] - f[x_{n+2}, x_{n+1}]}{x_n - x_{n+2}} \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot (f[x_{n+2}, x_n] - f[x_{n+1}, x_n])$$

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{\frac{f[x_n] - f[x_{n+1}]}{x_n - x_{n+1}} - \frac{f[x_{n+1}] - f[x_{n+2}]}{x_{n+1} - x_{n+2}}}{x_n - x_{n+2}} \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot \left(\frac{f[x_n] - f[x_{n+2}]}{x_n - x_{n+2}} - \frac{f[x_n] - f[x_{n+1}]}{x_n - x_{n+1}} \right)$$

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{\frac{(f[x_n] - f[x_{n+1}]) \cdot (x_{n+1} - x_{n+2}) - (f[x_{n+1}] - f[x_{n+2}]) \cdot (x_n - x_{n+1})}{(x_n - x_{n+1}) \cdot (x_{n+1} - x_{n+2})}}{x_n - x_{n+2}} \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot \frac{(f[x_n] - f[x_{n+2}]) \cdot (x_n - x_{n+1}) - (f[x_n] - f[x_{n+1}]) \cdot (x_n - x_{n+2})}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})}$$

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{(f[x_n] - f[x_{n+1}]) \cdot (x_{n+1} - x_{n+2}) - (f[x_{n+1}] - f[x_{n+2}]) \cdot (x_n - x_{n+1})}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1}) \cdot (x_{n+1} - x_{n+2})} \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_n] \cdot x_n - f[x_n] \cdot x_{n+1} - f[x_{n+2}] \cdot x_n + f[x_{n+2}] \cdot x_{n+1} - f[x_n] \cdot x_n + f[x_n] \cdot x_{n+2} + f[x_{n+1}] \cdot x_n - f[x_{n+1}] \cdot x_{n+2}}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})}$$

  redukujemy w pierwszym równaniu $(x_{n+1} - x_{n+2})$ z $(x_{n+2} - x_{n+1})$, pamiętając o pomnożeniu licznika przez (-1) :

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{(f[x_{n+1}] - f[x_{n+2}]) \cdot (x_n - x_{n+1}) - (f[x_n] - f[x_{n+1}]) \cdot (x_{n+1} - x_{n+2})}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})} =$$

  $$= (x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_n] \cdot x_n - f[x_n] \cdot x_n - f[x_n] \cdot x_{n+1} + f[x_n] \cdot x_{n+2} + f[x_{n+1}] \cdot x_n - f[x_{n+1}] \cdot x_{n+2} - f[x_{n+2}] \cdot x_n + f[x_{n+2}] \cdot x_{n+1}}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})}$$

  $\Leftrightarrow$

  $$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_{n+1}] \cdot x_n - f[x_{n+1}] \cdot x_{n+1} - f[x_{n+2}] \cdot x_n + f[x_{n+2}] \cdot x_{n+1} - f[x_n] \cdot x_{n+1} + f[x_n] \cdot x_{n+2} + f[x_{n+1}] \cdot x_{n+1} - f[x_{n+1}] \cdot x_{n+2}}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})} =$$

$$= (x-x_{n+2})\cdot\frac{-f[x_n]\cdot x_{n+1}+f[x_n]\cdot x_{n+2}+f[x_{n+1}]\cdot x_n-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+2}-f[x_{n+2}]\cdot x_n+f[x_{n+2}]\cdot x_{n+1}}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})}$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-x_{n+2})\cdot\frac{-f[x_n]\cdot x_{n+1}+f[x_n]\cdot x_{n+2}+f[x_{n+1}]\cdot x_n-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+1}+f[x_{n+1}]\cdot x_{n+1}-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+2}-f[x_{n+2}]\cdot x_n+f[x_{n+2}]\cdot x_{n+1}}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})} =$$

$$= (x-x_{n+2})\cdot\frac{f[x_n]\cdot x_{n+2}-f[x_n]\cdot x_{n+1}+f[x_{n+1}]\cdot x_n-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+2}+f[x_{n+2}]\cdot x_{n+1}-f[x_{n+2}]\cdot x_n}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})}$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-x_{n+2})\cdot\frac{-f[x_n]\cdot x_{n+1}+f[x_n]\cdot x_{n+2}+f[x_{n+1}]\cdot x_n-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+2}-f[x_{n+2}]\cdot x_n+f[x_{n+2}]\cdot x_{n+1}}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})} =$$

$$= (x-x_{n+2})\cdot\frac{f[x_n]\cdot(x_{n+2}-x_{n+1})+f[x_{n+1}]\cdot(x_n-x_{n+2})+f[x_{n+2}]\cdot(x_{n+1}-x_n)}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})}$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-x_{n+2})\cdot\frac{f[x_n]\cdot x_{n+2}-f[x_n]\cdot x_{n+1}+f[x_{n+1}]\cdot x_n-f[x_{n+1}]\cdot x_{n+2}+f[x_{n+2}]\cdot x_{n+1}-f[x_{n+2}]\cdot x_n}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})} =$$

$$= (x-x_{n+2})\cdot\frac{f[x_n]\cdot(x_{n+2}-x_{n+1})+f[x_{n+1}]\cdot(x_n-x_{n+2})+f[x_{n+2}]\cdot(x_{n+1}-x_n)}{(x_n-x_{n+2})\cdot(x_n-x_{n+1})}$$

$\Leftrightarrow$

$$(x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_n] \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) + f[x_{n+1}] \cdot (x_n - x_{n+2}) + f[x_{n+2}] \cdot (x_{n+1} - x_n)}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})} =$$

$$= (x - x_{n+2}) \cdot \frac{f[x_n] \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) + f[x_{n+1}] \cdot (x_n - x_{n+2}) + f[x_{n+2}] \cdot (x_{n+1} - x_n)}{(x_n - x_{n+2}) \cdot (x_n - x_{n+1})}$$

Tym samym pokazaliśmy, że (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

- (3) $\Leftrightarrow$ (4)

  Wymnażamy licznik i mianownik ułamka w równości (3) przez $(C \mp \sqrt{\Delta})$ (uwaga - zmiana znaków) i korzystamy z wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned}
x_{n+3} &= x_{n+2} - \frac{C \pm \sqrt{\Delta}}{2f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n]} = \\
&= x_{n+2} - \frac{C \pm \sqrt{\Delta}}{2f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n]} \cdot \frac{C \mp \sqrt{\Delta}}{C \mp \sqrt{\Delta}} = \\
&= x_{n+2} - \frac{C^2 - \Delta}{2f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (C \mp \sqrt{\Delta})} = \\
&= x_{n+2} - \frac{C^2 - (C^2 - 4f[x_{n+2}]f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n])}{2f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (C \mp \sqrt{\Delta})} = \\
&= x_{n+2} - \frac{4f[x_{n+2}]f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n]}{2f[x_{n+2}, x_{n+1}, x_n] \cdot (C \mp \sqrt{\Delta})} = \\
&= x_{n+2} - \frac{2f[x_{n+2}]}{C \mp \sqrt{\Delta}} = \\
&= x_{n+3}
\end{aligned}$$

Tym samym pokazaliśmy, że (3) $\Leftrightarrow$ (4). $\square$