Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.

«Методы классического и интеллектуального управления динамическими системами»

Лекция №4

Уравнения замкнутой системы с регулятором на основе наблюдений

С учетом построенного наблюдателя полного порядка

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0$$

для системы $\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x^0$, $y = Cx$ для ошибки наблюдения (невязки) $e = x - \hat{x}$ имеем $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e$. Тогда уравнения замкнутой системы вдоль $u = -K\hat{x} = -K(x - e)$ имеют вид

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe, \quad \dot{e} = (A - LC)e, \; e(0) = x^0 - \hat{x}^0.$$

При $\mathrm{Re}\lambda(A - LC) < 0$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty} e = 0$ независимо от вектора x и при любом $e(0)$. Т.о. переходные процессы в системе с регулятором на основе наблюдений отличаются от процессов с регулятором по состоянию с точностью до затухающих невязок.

Очевидно, что чем быстрее затухает ошибка наблюдения, тем лучше можно управлять системой. С помощью выбора достаточно большой матрицы коэффициентов усиления наблюдателя L можно сделать затухание e сколь угодно быстрым при условии наблюдаемости пары (A, C).

Пусть теперь имеются шумы в наблюдении, т.е.

$$y = Cx + \mathrm{v}_{\text{н}}(t),$$

где $\mathrm{v}_{\text{н}}$ – случайная величина. Тогда $e = x - \hat{x} =$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - \big(A\hat{x} + Bu + L(Cx + \mathrm{v}_{\text{н}} - C\hat{x})\big)$$
$$= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) - L\mathrm{v}_{\text{н}} = (A - LC)e - L\mathrm{v}_{\text{н}}$$

В реальных задачах всегда присутствуют погрешности измерений, поэтому увеличение L приводит к увеличению влияния шумов на ошибку наблюдения. В общем случае, $\lim\limits_{t\to\infty} e \neq 0$ даже при $\mathrm{Re}\lambda(A - LC) < 0$.

Оптимальная фильтрация. Фильтр Калмана-Бьюси

Рассмотрим задачу оптимальной оценки фазовых координат на основе наблюдения выхода системы, произведенном на конечном интервале времени $[0,T]$. Пусть

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mathrm{v_о}(t), \qquad x(0) = x^0,$$

$$y = C(t)x + \mathrm{v_н}(t)$$

где x^0 – случайная величина, $\mathrm{v_о}(t)$ и $\mathrm{v_н}(t)$ – белые шумы (объекта и наблюдения) с вероятностными характеристиками

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ M[(x^0 - \bar{x}^0)(x^0 - \bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathrm{v_о}] = 0,\ M[\mathrm{v_о}(t)\mathrm{v_о}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v_н}] = 0,\ M[\mathrm{v_н}(t)\mathrm{v_н}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v_о}(t)\mathrm{v_н}^T(t')] = S_0(t)\delta(t - t'),$$

где Q_0, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R_0 – положительно определенная матрица, δ – дельта-функция, случайная величина x^0 не коррелирована с шумами $\mathrm{v}_{\text{о}}$ и $\mathrm{v}_{\text{н}}$.

Требуется на основе наблюдения $y(t)$ на интервале $[0,T]$ определить *несмещенную* оптимальную оценку $\hat{x}(t)$ вектора $x(t)$ (несмещенность: $M[x]=M[\hat{x}]$), обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})] \to \min_{\hat{x}}.$$

Условие $R_0 > 0$ означает, что ни одна компонента выхода $y(t)$ не измеряется точно и гарантирует *невырожденность* задачи оптимального оценивания.

Теорема 1. Если шумы $\mathrm{v}_{\text{о}}$ и $\mathrm{v}_{\text{н}}$ не коррелированы ($S_0(t) \equiv 0$), то оценка $\hat{x}(t)$ является несмещенной и оптимальной, если она находится из $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L^0(y - C\hat{x}),\ \hat{x}(0) = \bar{x}^0,$ (1.а)

где $L^0 = PC^TR_0^{-1}$ (1.б), а матрица P ищется из уравнения

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0,\ P(0) = P_0, \quad (1.в)$$

Матрица P является *дисперсионной матрицей ошибки* $e = x - \hat{x} : P = M[e(t)e(t)^T]$.

Теорема 2. Если шумы $v_о$ и $v_н$ коррелированы ($S_0(t) \neq 0$), то оценка $\hat{x}(t)$ является несмещенной и оптимальной, если она находится из (1.а), где

$$L^0 = (PC^T + S_0)R_0^{-1} \qquad (2.а),$$

а матрица P ищется из уравнения

$$\dot{P} = (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - \\ - S_0R_0^{-1}S_0^T, \;\; P(0) = P_0. \quad (2.б)$$

Системы (1.а), (1.б), (1.в) и (1.а), (2.а), (2.б) называются *фильтрами (наблюдателями)* ***Калмана-Бьюси***.

Фильтры Калмана-Бьюси имеют такую же структуру, как и наблюдатели полного порядка в детерминированном случае. Однако теперь матрица коэффициентов усиления L^0 определяется ***однозначно***.

Пример.

Определить оптимальную оценку постоянной случайной величины x по наблюдениям за вектором выхода $y(0) = x + v_н$, где $v_н$ – белый шум с интенсивностью r_0, математическое ожидание M[x]=m, дисперсия M[$(x\text{-}m)^2$]=p_0.

$$A = 0, B = 0, C = 1, R_0 = r, Q_0 = 0.$$

Тогда Калмана-Бьюси имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L^0(y - C\hat{x}) = L^0(y - \hat{x}), \qquad \hat{x}(0) = m,$$

где $L^0 = PC^T R_0^{-1} = p/r_0$, а p ищется из уравнения

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0 = -\frac{p^2}{r_0},\ P(0) = p_0.$$

Последнее имеет решение $p = p_0 r_0/(r_0 + p_0 t)$.

Т.о. коэффициент усиления имеет вид $L^0 = \frac{p_0}{(r_0+p_0 t)}$.

Фильтр Калмана-Бьюси при цветном шуме объекта

Рассмотрим задачу оптимального оценивания с цветным шумом объекта и белым шумом измерения. Пусть

$$\dot{x}^{(1)} = A_1(t)x^{(1)} + B_1(t)u + x^{(2)}, \qquad x^{(1)}(0) = x_0^{(1)},$$

$$\dot{x}^{(2)} = A_2(t)x^{(2)} + \tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}(t), \qquad x^{(2)}(0) = x_0^{(2)},$$

$$y = C_1(t)x + \mathrm{v}_{\mathrm{н}}(t),$$

где $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$– случайные величины, $\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}(t)$ и $\mathrm{v}_{\mathrm{н}}(t)$ – белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M\left[x_0^{(1)}\right] = \bar{x}_0^{(1)}, \;\; M[(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})^T] = P_{01},$$

$$M\left[x_0^{(2)}\right] = \bar{x}_0^{(2)}, \;\; M[(x_0^{(2)} - \bar{x}_0^{(2)})(x_0^{(2)} - \bar{x}_0^{(2)})^T] = P_{02},$$

$$M[\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}] = 0, \;\; M[\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}(t)\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}{}^T(t')] = \tilde{Q}_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\mathrm{н}}] = 0, \;\; M[\mathrm{v}_{\mathrm{н}}(t)\mathrm{v}_{\mathrm{н}}{}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}}(t)\mathrm{v}_{\mathrm{н}}{}^T(t')] = 0,$$

где $\tilde{Q}_{\text{о}}$, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R_0 – положительно определенная матрица, δ – дельта-функция, случайные величины $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ не коррелированы с шумами $\tilde{\mathrm{v}}_{\text{о}}$ и $\mathrm{v}_{\text{н}}$.

Требуется на основе наблюдения $y(t)$ на интервале $[0,T]$ определить *несмещенную оптимальную* оценку $\hat{x}^{(1)}(t)$ вектора $x^{(1)}(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M\left[(x^{(1)} - \hat{x}^{(1)})(x^{(1)} - \hat{x}^{(1)})^T\right] \to \min_{\hat{x}^{(1)}}.$$

В уравнении динамики объекта $x^{(2)}$ – *цветной* шум. Задача сводится к рассмотренной ранее задаче фильтрации с белым шумом, а именно:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mathrm{v}_{\text{о}}(t), \qquad x(0) = x^0,$$

$$y = C(t)x + \mathrm{v}_{\text{н}}(t), \; J = M[(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})] \to \min_{\hat{x}},$$

с помощью представления

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix},\ x^0 = \begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix},\ \bar{x}^0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{(1)} \\ \bar{x}_0^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & I \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix},\ B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) & 0 \end{bmatrix},\ P_0 = \begin{bmatrix} P_{01} & 0 \\ 0 & P_{02} \end{bmatrix},\ Q_0(t) = G\tilde{Q}_0(t)G^T.$$

Вид решения определяется из Теоремы 1. Учитывая блочный вид матриц имеем

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{bmatrix},\ L^0(t) = \begin{bmatrix} P_1 C_1^T R_0^{-1} \\ P_{21} C_1^T R_0^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\hat{x}}^{(1)} = A_1 \hat{x}^{(1)} + B_1 u + \hat{x}^{(2)} + L_1\left(y - C_1 \hat{x}^{(1)}\right),\ \hat{x}^{(1)}(0) = \bar{x}_0^{(1)},$$

$$\dot{\hat{x}}^{(2)} = A_2 \hat{x}^{(2)} + L_2\left(y - C_1 \hat{x}^{(1)}\right), \qquad \hat{x}^{(2)}(0) = \bar{x}_0^{(2)}.$$

Фильтр Калмана-Бьюси при цветном шуме наблюдения

Рассмотрим задачу оптимального оценивания с белым шумом объекта и *цветным* шумом измерения. Пусть

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mathrm{v}_{\mathrm{o}}(t), \qquad x(0) = x^0,$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}(t)x + z,$$

$$\dot{z} = D(t)z + \tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}(t),$$

где x^0 – случайная величина, $\mathrm{v}_{\mathrm{o}}(t)$ и $\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}(t)$ – белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ M[(x^0 - \bar{x}^0)(x^0 - \bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathrm{v}_{\mathrm{o}}] = 0,\ M[\mathrm{v}_{\mathrm{o}}(t){\mathrm{v}_{\mathrm{o}}}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}] = 0,\ M[\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}(t){\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}}^T(t')] = \tilde{R}_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\mathrm{o}}(t){\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}}}^T(t')] = \tilde{S}(t)\delta(t - t'),$$

где Q_0, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, $\tilde{R}_0$ – положительно определенная матрица, δ – дельта-функция, случайная величина x^0 не коррелирована с шумами $\mathrm{v}_{\text{о}}$ и $\tilde{\mathrm{v}}_{\text{н}}$.

Требуется на основе наблюдения $y(t)$ на интервале $[0,T]$ определить *несмещенную* оптимальную оценку $\hat{x}(t)$ вектора $x(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})] \to \min_{\hat{x}}.$$

В уравнении наблюдения z – *цветной* шум. Задача сводится к рассмотренной ранее задаче фильтрации с белым шумом. Для этого введем новый вектор выхода

$$y = \dot{\tilde{y}} - \tilde{C}Bu - D\tilde{y} = \dot{\tilde{C}}x + \tilde{C}\dot{x} + \dot{z} - \tilde{C}Bu - D(\tilde{C}x + z) =$$
$$\dot{\tilde{C}}x + \tilde{C}(Ax + Bu + \mathrm{v}_{\text{о}}) + Dz + \tilde{\mathrm{v}}_{\text{н}} - \tilde{C}Bu - D\tilde{C}x - Dz =$$
$$\left(\dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A - D\tilde{C}\right)x + \tilde{C}\mathrm{v}_{\text{о}} + \tilde{\mathrm{v}}_{\text{н}} = Cx + \mathrm{v}_{\text{н}}, \qquad (1)$$

где $C = \dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A - D\tilde{C}$, $\mathrm{v}_{\text{н}} = \tilde{C}\mathrm{v}_{\text{о}} + \tilde{\mathrm{v}}_{\text{н}}$. Шум $\mathrm{v}_{\text{н}}$ – *белый,* его интенсивность R_0 и его интенсивность взаимной корреляционной функции с шумом объекта S_0 определяются как $R_0 = \tilde{C} Q_0 \tilde{C}^T + \tilde{S}^T \tilde{C}^T + \tilde{C} \tilde{S} + \tilde{R}_0,\ S_0 = Q_0 \tilde{C} + \tilde{S}$.

Отметим, что из последнего равенства следует корреляция шума объекта $\text{v}_\text{о}$ и шума наблюдения $\text{v}_\text{н}$ в преобразованном уравнении, даже если шумы в исходной задаче не были коррелированы ($\tilde{S} \equiv 0$). Возможно, что $R_0 \not> 0$ при $\tilde{R}_0 > 0$.

Преобразованная задача оптимальной фильтрации соответствует рассмотренной ранее, и ее решение определяется по Теореме 2.

Однако в (1) входит производная $\dot{\tilde{y}}$. Это означает необходимость дифференцирования зашумленной переменной y, что нежелательно. Приведем другой способ.

Введем новый вектор $\tilde{x}$ через соотношение

$$\hat{x} = \tilde{x} + L^0 \tilde{y}. \qquad (2)$$

Продифференцируем его по времени t.

$$\dot{\hat{x}} = \dot{\tilde{x}} + \dot{L}^0\tilde{y} + L^0\dot{\tilde{y}} \leftrightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{L}^0\tilde{y} - L^0\dot{\tilde{y}}.$$

С учетом уравнения для наблюдателя (1.a), соотношений (1) и (2) имеем

$$\dot{\tilde{x}} = A\hat{x} + Bu + L^0(y - C\hat{x}) - \dot{L}^0\tilde{y} - L^0\left(y + \tilde{C}Bu + D\tilde{y}\right)$$
$$= (A - L^0C)\hat{x} + \left(B - L^0\tilde{C}B\right)u - \left(\dot{L}^0 + L^0D\right)\tilde{y}.$$

Опять применяя (2) имеем

$$\dot{\tilde{x}}$$
$$= (A - L^0C)\tilde{x} + \left(B - L^0\tilde{C}B\right)u + \left((A - L^0C)L^0 - \dot{L}^0 - L^0D\right)\tilde{y},$$
$$\tilde{x}(0) = \bar{x}^0 - L^0(0)\tilde{y}(0),$$

Куда $\dot{\tilde{y}}$ не входит. Решая полученную задачу Коши, найдем $\tilde{x}$, и из (2) определим искомую оптимальную оценку $\hat{x}$.

Вырожденная задача оптимальной фильтрации

Задача оптимальной фильтрации (или оценивания) называется ***вырожденной*** (или ***сингулярной***), если матрица интенсивности шума наблюдения R_0 является вырожденной (не является положительно определенной).

Вырожденные задачи возникают, когда часть компонент выходного вектора измеряются ***точно*** или когда шум наблюдения является цветным и матрица интенсивности преобразованного шума наблюдения является вырожденной. В сингулярных задачах изложенные методы не применимы. Рассмотрим только первый случай. Пусть имеем задачу

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mathrm{v}_{\text{о}}(t),\ x(0) = x^0, \qquad (1.\text{а})$$

$$y^{(1)} = C_1(t)x + \mathrm{v}_{\text{н}}(t), \qquad (1.\text{б})$$

$$y^{(2)} = C_2(t)x, \qquad y^{(2)} \in \mathbb{R}^{\rho_1}, \qquad (1.\text{в})$$

$$J = M[(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})] \to \min_{\hat{x}}, \qquad (1.\text{г})$$

где x^0– случайная величина, $\mathrm{v}_{\text{о}}(t)$ и $\mathrm{v}_{\text{н}}(t)$ – белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ M[(x^0 - \bar{x}^0)(x^0 - \bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{о}}] = 0,\ M[\mathrm{v}_{\text{о}}(t)\mathrm{v}_{\text{о}}{}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{н}}] = 0,\ M[\mathrm{v}_{\text{н}}(t)\mathrm{v}_{\text{н}}{}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{о}}(t)\mathrm{v}_{\text{н}}{}^T(t')] = S_0(t)\delta(t - t'),$$

где, как обычно, Q_0, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R_0 – положительно определенная матрица, δ – дельта-функция. Здесь $y^{(1)}$ – зашумленный выход, а $y^{(2)}$ – точно измеряемые переменные.

Решение задачи определяется следующим образом

$$\hat{x} = L_1 y^{(2)} + L_2 \hat{q},\ \ \hat{q} \in \mathbb{R}^{n-\rho_1}, \tag{2.а}$$

$$\dot{\hat{q}} = \tilde{A}\hat{q} + \tilde{u} + L^0\left(\tilde{y} - \tilde{C}\hat{q}\right), \qquad \hat{q}(0) = C_2'\bar{x}^0, \tag{2.б}$$

$$L^0 = \left(\tilde{P}\tilde{C}^T + \tilde{S}_0\right)\tilde{R}_0^{-1}, \tag{2.в}$$

$$\dot{\tilde{P}} = \left(\tilde{A} - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}\right)\tilde{P} + \tilde{P}\left(\tilde{A} - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}\right)^T - \tilde{P}\tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}\tilde{P} + \tilde{Q}_0 - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{S}_0^T, \qquad \tilde{P}(0) = C_2' P_0 C_2'^T. \tag{2.г}$$

Отметим, что оценка $\hat{q}$ находится с помощью фильтра Калмана-Бьюси из Теоремы 2, матрицы которого имеют вид

$$\tilde{A} = \left(\dot{C}_2' + C_2' A\right) L_2,$$

$$\tilde{u} = \left(\dot{C}_2' + C_2' A\right) L_1 y^{(2)} + C_2' B u,\ \tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^{(1)} \\ \tilde{y}^{(2)} \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\tilde{y}^{(1)} = y^{(1)} - C_1 L_1 y^{(2)}$, $\tilde{y}^{(2)} = \dot{y}^{(2)} - \left(\dot{C}_2 + C_2 A\right) L_1 y^{(2)} - C_2 B u$, $\tilde{C}_1 = C_1 L_2$, $\tilde{C}_2 = \left(\dot{C}_2 + C_2 A\right) L_2$; матрицы L_1 и L_2 выбираются из условия

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2' \end{pmatrix}^{-1}, \tag{4}$$

где C_2 известна, C_2' подбирается так, чтобы $(n \times n)$-матрица в правой части последнего выражения невырожденной.

Вероятностные характеристики в фильтре имеют вид $\tilde{Q}_0 = C_2' Q_0 C_2'^T, \tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} R_0 & S_0{}^T C_2{}^T \\ C_2 S_0 & C_2 Q_0 C_2{}^T \end{bmatrix}, \tilde{S}_0 = \begin{bmatrix} C_2' S_0 & C_2' Q_0 C_2'^T \end{bmatrix}$. (5)

Получим приведенные формулы. Пусть rank(C_2)=ρ_1. Тогда (1.в) содержит ρ_1 линейных независимых уравнений для определения неизвестного x. Для получения недостающих $(n - \rho_1)$ уравнений введем вектор $q = C_2' x, q \in \mathbb{R}^{n-\rho_1}$. Из последнего, а также из (1.в) и (4) получим

$$x = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y^{(2)} \\ q \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y^{(2)} \\ q \end{bmatrix} = L_1 y^{(2)} + L_2 q. \quad (6)$$

Очевидно, найдя оптимальную оценку $\hat{q}$, из (6) получим оптимальную оценку $\hat{x}$.

Продифференцировав $q = C_2'x$ и используя (1.a),(6),(3), имеем

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \dot{C}_2'x + C_2'\dot{x} = \left(\dot{C}_2' + C_2'A\right)x + C_2'Bu + C_2'\mathrm{v}_\mathrm{o} \\ &= \left(\dot{C}_2' + C_2'A\right)\left(L_1 y^{(2)} + L_2 q\right) + C_2'Bu + C_2'\mathrm{v}_\mathrm{o} \\ &= \left(\dot{C}_2' + C_2'A\right)L_2 q + \left(\dot{C}_2' + C_2'A\right)L_1 y^{(2)} + C_2'Bu + C_2'\mathrm{v}_\mathrm{o} \\ &= \tilde{A}q + \tilde{u} + \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{o},\end{aligned} \tag{7}$$

где $\tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{o} = C_2'\mathrm{v}_\mathrm{o}$. Теперь получим новых выход. Подставим x из (6) в (1.б), с учетом (3) имеем $y^{(1)} = C_1 L_1 y^{(2)} + C_1 L_2 q + \mathrm{v}_\mathrm{н} \rightarrow \tilde{y}^{(1)} = \tilde{C}_1 q + \mathrm{v}_\mathrm{н}$. Продифференцировав (1.в) и используя (1.a),(6),(3), имеем

$$\dot{y}^{(2)} = (\dot{C}_2 + C_2 A)L_2 q + (\dot{C}_2 + C_2 A)L_1 y^{(2)} + C_2 Bu + C_2\mathrm{v}_\mathrm{o} \rightarrow$$

$$\dot{y}^{(2)} - (\dot{C}_2 + C_2 A)L_1 y^{(2)} - C_2 Bu = (\dot{C}_2 + C_2 A)L_2 q + C_2\mathrm{v}_\mathrm{o} \rightarrow$$

$$\tilde{y}^{(2)} = \tilde{C}_2 q + C_2\mathrm{v}_\mathrm{o}.$$

Введем $\tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{н} = \begin{pmatrix}\mathrm{v}_\mathrm{н} \\ C_2\mathrm{v}_\mathrm{o}\end{pmatrix}$. С учетом (3) имеем $\tilde{y} = \tilde{C}q + \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{н}$. (8)

Таким образом, приходим к задаче фильтрации для динамической системы (7) с выходом (8), решение которой совпадаем с приведенными выше формулами, если учесть выражения для корреляционной функции преобразованного шума объекта $\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{o}} = C_2' \mathrm{v}_{\mathrm{o}}$ и преобразованного шума наблюдения $\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{н}} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_{\mathrm{н}} \\ C_2 \mathrm{v}_{\mathrm{o}} \end{pmatrix}$, а также функцию их корреляции.

Начальные условия $\hat{q}(0)$ и $\tilde{P}(0) = C_2' P_0 {C_2'}^T$ определяется из выражения $q = C_2' x$.

Расширенный фильтр Калмана-Бьюси

Рассмотрим нелинейную задачу оптимальной фильтрации

$$\dot{x} = f(x,u,t) + \mathrm{v}_{\text{о}}(t),\ \ x(0) = x^0,$$

$$y = g(x,t) + \mathrm{v}_{\text{н}}(t),$$

$$J = M[(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})] \to \min_{\hat{x}},$$

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ \ M[(x^0-\bar{x}^0)(x^0-\bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{о}}] = 0,\ \ M[\mathrm{v}_{\text{о}}(t)\mathrm{v}_{\text{о}}{}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t-t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{н}}] = 0,\ \ M[\mathrm{v}_{\text{н}}(t)\mathrm{v}_{\text{н}}{}^T(t')] = R_0(t)\delta(t-t'),$$

$$M[\mathrm{v}_{\text{о}}(t)\mathrm{v}_{\text{н}}{}^T(t')] = S_0(t)\delta(t-t'),$$

где, как обычно, x^0– случайная величина, $\mathrm{v}_{\text{о}}(t)$ и $\mathrm{v}_{\text{н}}(t)$ – белые шумы, Q_0 и P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R_0 – положительно определенная матрица, δ – дельта-функция.

Линеаризуем уравнения динамики системы и выхода относительно некоторой *номинальной* траектории x^*

$$\dot{x} = f(x^*, u, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* (x - x^*) + \mathrm{v}_{\text{о}}(t),$$

$$y = g(x^*, t) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^* (x - x^*) + \mathrm{v}_{\text{н}}(t),$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*}, \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^* = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x^*}.$

Тогда фильтр имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + L^0(y - g(\hat{x}, t)), \qquad \hat{x}(0) = \bar{x}^0,$$

$$L^0 = P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{*T} R_0^{-1}, \quad \dot{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* P + P\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{*T} -$$

$$P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{*T} R_0^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^* P + Q_0, \;\; P(0) = P_0,$$

Номинальную траекторию x^* определяют заранее, что позволяет так же заранее определить матрицу коэффициентов фильтра L^0. Однако, если номинальная траектория сильно отклоняется от реальной, которая не известна, то это может привести к большим ошибкам, чего можно избежать получая дополнительную информацию в процессе управления. На этом основан ***расширенный*** *фильтр Калмана-Бьюси:*

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + L^0(y - g(\hat{x}, t)), \qquad \hat{x}(0) = \bar{x}^0,$$

$$L^0 = P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\wedge T} R_0^{-1}, \qquad \dot{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\wedge} P + P\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\wedge T} -$$

$$P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\wedge T} R_0^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\wedge} P + Q_0, \;\; P(0) = P_0,$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\wedge} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}, \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\wedge} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}.$

Его недостатком является необходимость расчёта матрицы L^0 в процессе управления.

Более точной модификацией является ***итерационный*** *фильтр Калмана-Бьюси*. Его алгоритм работы такой: после линеаризации системы в номинальной траектории и вычисления оценки $\hat{x}$, происходит повторная линеаризация в полученной точке $\hat{x}$ и расчет уточненной оценки $\hat{x}^{(1)}$. Процесс повторяется пока новые оценки $\hat{x}^{(i)}$ не станут допустимыми (например, не будут сильно отличаться друг от друга).

Недостатком такого подхода является увеличение объема необходимых вычислений.

Стохастическое оптимальное управление по состоянию

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mathrm{v_o}(t), \qquad x(0) = x^0 \quad (3)$$

и критерий качества

$$J = M\left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^T [x^T Q(t)x + u^T R(t)u]dt\right] \to \min_u \ (4)$$

где $\mathrm{v_o}(t)$ – белый шум объекта с вероятностными характеристиками

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ M[(x^0 - \bar{x}^0)(x^0 - \bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathrm{v_o}] = 0,\ M[\mathrm{v_o}(t)\mathrm{v_o}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t')$$

и Q, Q_0, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R – положительно определенная матрица, δ – функция Дирака.

Объект управляем. Требуется найти u, оптимальное по (4).

Теорема 3. Стохастическое оптимальное управление для системы (3) и критерия (4) задается как

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)x(t)$$

где матрица P определяется из уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^{T}(t)P(t) + P(t)S(t)P(t) - Q(t), \quad P(T) = F.$$

Т.о. оптимальный закон в стохастической задаче *совпадает* с оптимальным законом в *детерминированной*.

Стохастическое оптимальное управление с наблюдением

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \text{v}_\text{о}(t), \qquad x(0) = x^0,$$

$$y = C(t)x + \text{v}_\text{н}(t) \qquad (5)$$

и критерий качества

$$J = M\left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^T [x^T Q(t)x + u^T R(t)u]dt\right] \to \min_u \ (6)$$

где $\text{v}_\text{о}(t)$ и $\text{v}_\text{н}(t)$ – белые шумы объекта и наблюдения с вероятностными характеристиками

$$M[x^0] = \bar{x}^0,\ M[(x^0 - \bar{x}^0)(x^0 - \bar{x}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\text{v}_\text{о}] = 0,\ M[\text{v}_\text{о}(t){\text{v}_\text{о}}^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\text{v}_\text{н}] = 0,\ M[\text{v}_\text{н}(t){\text{v}_\text{н}}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\text{v}_\text{о}(t){\text{v}_\text{н}}^T(t')] = S_0(t)\delta(t - t'),$$

и Q, Q_0, P_0 – положительно полуопределенные матрицы, R, R_0 – положительно определенные матрицы, δ – функция Дирака.

Объект управляем. Требуется найти оптимальное по (6) управление $u = u(t,y(t))$, $0 \le t \le T$.

Теорема 4. Стохастическое оптимальное управление для системы (5) и критерия (6) задается как

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\hat{x}(t),$$

где матрица P определяется из уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t), P(T) = F,$$

а $\hat{x}$ – оптимальная оценка, полученная с помощью фильтра Калмана-Бьюси

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L^0(y - C\hat{x}),\ \hat{x}(0) = \bar{x}^0,\ L^0 = P_f C^T R_0^{-1},$$
$$\dot{P}_f = AP_f + P_f A^T - P_f C^T R_0^{-1} C P_f + Q_0, \qquad P_f(0) = P_0.$$

Таким образом, как и в задаче детерминированного управления с наблюдателем полного порядка, имеет ***место принцип разделения***.

Исходная задача стохастического управления при неполной информации о состоянии сводится к двум *независимым* подзадачам:

- синтеза детерминированного оптимального управления по состоянию;
- синтеза фильтра Калмана-Бьюси.

Задача слежения

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (7)$$

и критерий качества

$$I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)Fe(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^T Q(t)e + u^T R(t)u\right)dt \to \min_u, \quad (8)$$

$$R > 0, Q \geq 0, F \geq 0, \qquad e = x - x_r,$$

где x_r – заданная (эталонная) траектория системы (7), которая описывается решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}_r = A_r(t)x_r,\ x_r(t_0) = x_r^{\ 0},\ t \in [t_0, t_1]. \quad (9)$$

Тогда исходная задача (7)-(9) может быть представлена в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u, \qquad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0,$$

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t_1)\tilde{F}\tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\tilde{x}^T\tilde{Q}(t)\tilde{x} + u^T R(t)u\right)dt \to \min_u, \qquad (10)$$

где расширенный вектор состояния и блочные матрицы системы определяются как

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & A_r(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r},$$

$$\tilde{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & Q(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} F & -F \\ -F & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0.$$

Нулевые блоки в матрицах есть матрицы соответствующих размерностей.

Решение задачи вида (10) уже рассматривалось нами раннее. Оно определяется с помощью дифференциального уравнения Риккати и имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^{T}(t)\left[P_{11}(t)x + P_{12}(t)\,x_{r}(t)\right],$$

где матрицы P_{11} и P_{12} определяются из уравнений

$$\dot{P}_{11}(t) = -P_{11}(t)A(t) - A^{T}(t)P_{11}(t) + P_{11}(t)S(t)P_{11}(t) - Q(t), \quad P_{11}(t_1) = F,$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{12}(t)A_{r}(t) - \left(A^{T}(t) - P_{11}(t)S(t)\right)P_{12}(t) + Q(t), \quad P_{12}(t_1) = -F,$$

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t).$$

Решение задачи вида (10) уже рассматривалось нами раннее. Оно определяется с помощью дифференциального уравнения Риккати и имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^{T}(t)\left[P_{11}(t)x + P_{12}(t)\,x_{r}(t)\right],$$

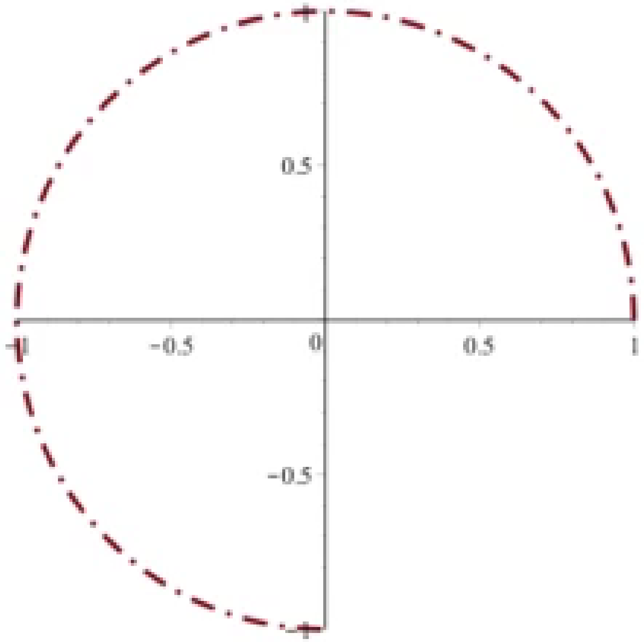
где матрицы P_{11} и P_{12} определяются из уравнений

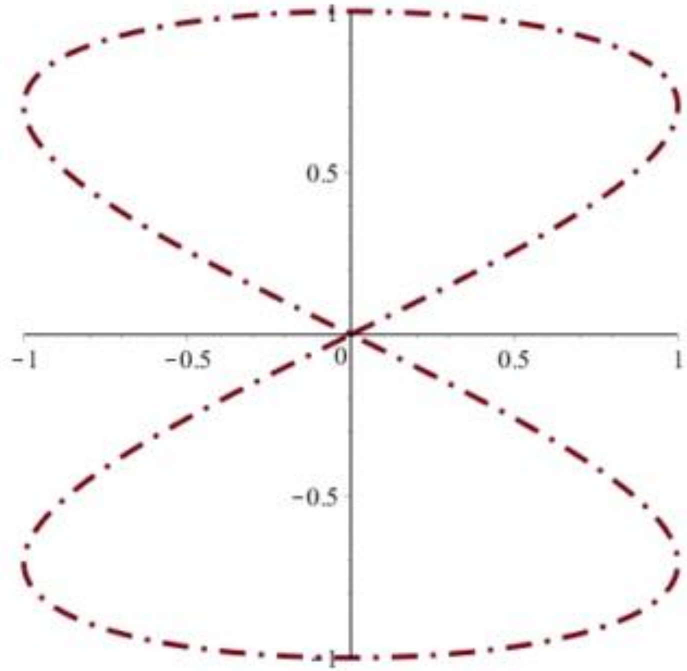
$$\dot{P}_{11}(t) = -P_{11}(t)A(t) - A^{T}(t)P_{11}(t) + P_{11}(t)S(t)P_{11}(t) - Q(t), \quad P_{11}(t_1) = F,$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{12}(t)A_{r}(t) - \left(A^{T}(t) - P_{11}(t)S(t)\right)P_{12}(t) + Q(t), \quad P_{12}(t_1) = -F,$$

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t).$$

Примеры





Решение задачи вида (10) уже рассматривалось нами раннее. Оно определяется с помощью дифференциального уравнения Риккати и имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\left[P_{11}(t)x + P_{12}(t)\,x_r(t)\right],$$

где матрицы P_{11} и P_{12} определяются из уравнений

$$\dot{P}_{11}(t) = -P_{11}(t)A(t) - A^T(t)P_{11}(t) + P_{11}(t)S(t)P_{11}(t) - Q(t), \quad P_{11}(t_1) = F,$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{12}(t)A_r(t) - \left(A^T(t) - P_{11}(t)S(t)\right)P_{12}(t) + Q(t), \quad P_{12}(t_1) = -F,$$

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t).$$