Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.

«Методы классического и интеллектуального управления динамическими системами»

Лекция №1

Непрерывная нелинейная система

Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad x \in R^n, \ x(t_0) = x^0, \ t \in [t_0, \infty). \qquad (1)$$

Здесь t – независимая переменная, которую обычно называют временем. Предположим, что f непрерывная по обоим аргументам и является липшицевой по первому аргументу, т.е.

$$\left| f(x,t) - f(y,t) \right| \le L \left| x - y \right|, \quad L = const > 0, \left| x \right| = \left(x^T x \right)^{1/2}.$$

Тогда справедливы теоремы о локальном существовании, единственности и непрерывной зависимости на конечном интервале решения $x(x^0,t_0,t)$ задачи (1) от начальных условий t_0 и x^0.

Устойчивость непрерывных систем

Дадим определения ***устойчивости*** и ***асимптотической устойчивости*** заданной траектории $z(z^0,t_0,t)$, которая есть решение задачи (1), продолжимое вправо до бесконечности.

Можно показать, что задача анализа устойчивости заданной траектории $z(z^0,t_0,t)$ сводится к задаче анализа устойчивости *тривиальной* траектории $x(t)=0$ некоторой *новой* системы. Действительно, пусть $y(t)=x(t)-z(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}y = f(y+z,t) - f(z,t) = g(y,t), \quad g(0,t) \equiv 0.$$

Далее будем исследовать только тривиальные решения $x(t)=0$, сразу считая, что $f(0,t) \equiv 0.$ Отметим, что тогда $x(t)=0$ - точка покоя системы, т.к. в ней скорости изменения всех координат вектора x равны нулю. Также считаем, что $t_0=0$.

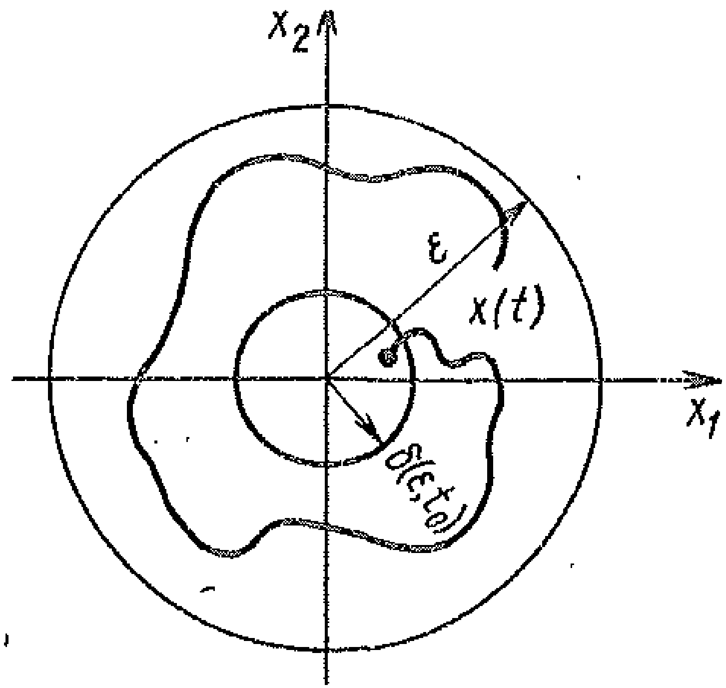
Устойчивость непрерывных систем

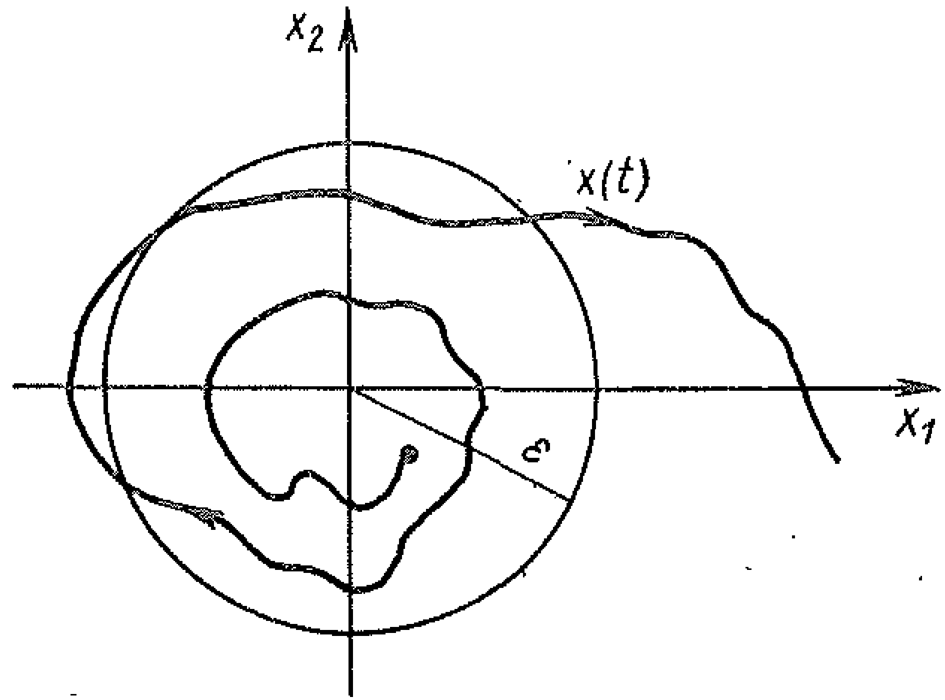
Для тривиальной траектории $x(t)=0$ ($f(0,t)=0$) введем определения

Определение 1. Систему (1) будем называть устойчивой на отрезке времени $[0,\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любой траектории $x(t)$ системы (1) из условия $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.

Определение 2. Систему (1) будем называть асимптотически устойчивой на интервале $[0,\infty)$, если (1) - устойчивая система и при этом существует $h > 0$ такое, что для любой траектории $x(t)$ системы (1), для которой $\|x(0)\| \le h$, имеет место $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Фазовые портреты систем





Анализ устойчивости линейных систем по собственным числам

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (2)$$

Если система (2) асимптотически устойчива, то любая траектория $x(t)$ обладает свойством $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Действительно, решение (2) равно $x(t) = e^{At}x(0)$.

Ясно, что $x(t)$=0, $t \to \infty$ при любом $x(0)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0, e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots$. Последнее зависит только от свойств матриц A, которые не зависят от конкретных траекторий.

Утверждение 1. Для асимптотической устойчивости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы A имели отрицательные действительные части.

Доказательство. Матрицу A запишем в виде PJP^{-1}, где J есть каноническая форма Жордана. Матрица J имеет вид блочно-диагональной матрицы. На диагонали стоят клетки Жордана вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in C^{l\times l}, l - \text{кратность корня } \lambda.$$

где λ – собственные числа матрицы A. Легко проверить, что $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At} = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to\infty} e^{Jt} = 0$.

Матрица e^{Jt} также является блочно-диагональной. На диагонали находятся блоки вида

$$e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь m – размер клетки Жордана. Известно, что $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}$ $= 0$ $(k \geq 0)$ только в случае, если $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, т.к. $e^{\lambda} = e^{Re\lambda}$ $(\cos(Im(\lambda)) + i * sin(Im(\lambda)))$. Тем самым утверждение доказано.

Критерий Рауса-Гурвица

Характеристическое уравнение для матрицы A системы имеет вид полинома n-ой степени

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Корни этого уравнения есть собственные числа матрицы A. ***Критерий***: собственные числа A при $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$ находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости, т.е. Re $\lambda(A) < 0$, тогда и только тогда, когда положительны все диагональные миноры Δ матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Т.е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова).

Определение 3. Непрерывной по времени функцией Ляпунова будем называть дифференцируемую по x и t вещественную функцию $V(x,t)$ такую, что $V(0,t) = 0$.

Введем понятие производной функции Ляпунова в силу системы (1) как полной производной по t, определенной на траекториях системы (1)

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через Г класс строго возрастающих непрерывных функций $\gamma\colon R_+ \to R_+$ таких, что $\gamma(0) = 0$.

Следующие четыре утверждения формулируют достаточные условия *устойчивости* и *асимптотической устойчивости*.

Утверждение 2. Если существует функция Ляпунова $V(x,t)$, обладающая свойствами:

1. $V(x,t) \geq \gamma(\|x\|), \gamma \in \Gamma$;

2. в некоторой окрестности начала координат $\dot{V}(x,t) \leq 0$, то система (1) ***устойчива***.

Утверждение 3. Если существует функция Ляпунова $V(x,t)$, обладающая свойствами:

1. $\gamma_1(\|x\|) \geq V(x,t) \geq \gamma_2(\|x\|), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$;

2. в некоторой окрестности начала координат $\dot{V}(x,t) \leq -\gamma_3(\|x\|), \gamma_3 \in \Gamma$, то система (1) ***асимптотически устойчива***.

Пример 1. Исследуем на устойчивость систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^{\;2}, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2^{\;3}.$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Нетрудно проверить, что

$$\gamma\left(\|x\|\right) = \frac{\|x\|}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) = \frac{1}{2}(2x_1(-x_1 + 3x_2^{\;2}) + 2x_2(-x_1x_2 - x_2^{\;3})) =$$

$$-x_1^{\;2} + 3x_1x_2^{\;2} - x_1x_2^{\;2} - x_2^{\;4} = -(x_1^{\;2} - 2x_1x_2^{\;2} + x_2^{\;4}) = -(x_1 - x_2^{\;2})^2 \le 0.$$

Следовательно, система устойчива по Ляпунову.

Устойчивость линейных стационарных дискретных систем

$$x(k+1) = Ax(k),\ k=0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

Как и в непрерывном случае, из асимптотической устойчивости (3) следует, что любая траектория (3) обладает свойством $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$.

Утверждение 4. Для асимптотической устойчивости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы A были по модулю меньше 1.

Доказательство. Решение уравнения (3) равно $x(k) = A^k x(0)$, $k=0,1,2,\ldots$ Поскольку начальное состояние может быть любым, то для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Матрицу A запишем в виде PJP^{-1}, где J есть каноническая форма Жордана.

Тогда

$$A^k = PJ^kP^{-1},$$

и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{k\to\infty} J^k = 0$ или $\lim_{k\to\infty} \Lambda^k = 0$ для каждой клетки Жордана. Можно показать, что $\Lambda^k = \lambda^k \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{-i} H^i C_k^i$, где

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

а C_k^i - число сочетаний из k по i, т.е. $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$. Известно, что $\lim_{k\to\infty} \lambda^k C_k^i = 0$ тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 1$. Утверждение доказано.

Для анализа устойчивости линейных дискретных систем можно применять ***критерий Гурвица*** так, как это было описано выше.

Определение 5. Дискретной функцией Ляпунова будем называть непрерывную по x вещественную функцию $V(x,k)$ такую, что $V(0,k) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$

Утверждение 5. Если существует дискретная функция Ляпунова $V(x,k)$, обладающая свойствами:

1. $V(x,k) \geq \gamma_1(\|x\|)$, $\gamma_1 \in \Gamma$, $k = 0,1,2,\ldots$;
2. в некоторой окрестности начала координат $V(f(x,k),k+1) - V(x,k) \leq 0$, $k=0,1,2,\ldots$, то система $x(k+1)=f(x(k),k)$ ***устойчива***.

Утверждение 6. Если существует дискретная функция Ляпунова $V(x,k)$, обладающая свойствами:

1 $\gamma_1(\|x\|) \geq V(x,k) \geq \gamma_2(\|x\|)$, $k=0,1,2,\ldots$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$;

2. в некоторой окрестности начала координат $V(f(x,k),k+1) - V(x,k) \leq -\gamma_3(\|x\|)$, $k=0,1,2,\ldots$, $\gamma_3 \in \Gamma$, то система $x(k+1)=f(x(k),k)$ ***асимптотически устойчива***.

Анализ устойчивости линейных систем на основе уравнения Ляпунова

Применим метод функций Ляпунова для анализа устойчивости непрерывных линейных стационарных систем. Будем искать функции Ляпунова в виде квадратичных форм $V(x)=x^T Px$, где P – симметричная положительно определенная матрица.

Известно, что если P симметричная матрица, то все ее собственные числа действительные, если P неотрицательно определенная матрица, то все ее собственные числа неотрицательные. У положительно определенной матрицы все собственные числа строго больше нуля. Для квадратичной формы с симметричной матрицей справедлива следующая оценка

$$\alpha \|x\|^2 \le V(x) \le \beta \|x\|^2,$$

где α и β – минимальное и максимальное из собственных чисел матрицы P.

Утверждение 7. Система (2) асимптотически устойчива, если и только если непрерывное матричное уравнение Ляпунова $PA + A^TP = -Q$ при любой симметричной положительно определенной матрице Q имеет единственное симметричное положительно определенное решение P.

Доказательство. Достаточность. Пусть P есть симметричное положительно определенное решение уравнения Ляпунова. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x)=x^TPx$. Обозначим через α и β минимальное и максимальное из собственных чисел матрицы P (α, $\beta > 0$). Тогда $\alpha\|x\|^2 \le V(x) \le \beta\|x\|^2$. Обозначим через γ *минимальное* из собственных чисел матрицы Q ($\gamma > 0$). На траекториях системы имеем $\dot{V}(x) = x^T(PA + A^TP)x = -x^TQx \le -\gamma\|x\|^2$.

Выполняются все условия утверждения 3, следовательно, система (2) асимптотически устойчива.

Необходимость. Пусть система асимптотически устойчива. Покажем, что уравнение Ляпунова имеет единственное решение. Известно, что матричное уравнение вида $AX + XB = C$ (т.е. уравнение Сильвестрва) имеет единственное решение X, если у матриц A и $(-B)$ нет общих собственных значений. В уравнении Ляпунова матрицы A и $(-A)$ не имеют общих собственных значений, поскольку у всех собственных значений матрицы A отрицательные действительные части. Следовательно, уравнение Ляпунова имеет единственное решение. Решение уравнения Ляпунова является симметричным. Действительно, транспонируя уравнение Ляпунова, получим $A^TP^T + P^TA = -Q$. Следовательно, если P решение уравнения Ляпунова, то P^T также решение уравнения Ляпунова. Из единственности решения следует $P = P^T$.

Покажем, что решение уравнения Ляпунова положительно определенная матрица. Вновь рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = x^T P x$. На траекториях системы имеем, что производная функции Ляпунова имеет вид $\dot{V}(x) = -x^T Q x$. Из последнего равенства получим

$$V(x(t)) = V(x(0)) - \int_0^t x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau.$$

Учитывая, что $\lim x(t)=0$, при $t \to \infty$ получим $x^T(0) P x(0) = \int_0^\infty x^T(0) e^{A^T t} Q e^{At} x(0)$. Вектор $x(0)$ является произвольным, поэтому $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$. Т.к. матрица Q положительно определенная, а матрица e^{At} невырожденная при любом t, следовательно, P является положительно определенной матрицей. Теорема доказана.

Утверждение 8. Система (3) асимптотически устойчива, тогда и только тогда, когда дискретное матричное уравнение Ляпунова

$$A^{\mathrm{T}}PA - P = -Q$$

при любой симметричной положительно определенной матрице Q имеет единственное симметричное положительно определенное решение P.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть P есть положительно определенное решение уравнения Ляпунова. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = x^T P x$. Обозначим через α и β минимальное и максимальное из собственных чисел матрицы P: $\alpha, \beta > 0$. Тогда $\alpha\|x\|^2 \le V(x) \le \beta\|x\|^2$.

Из уравнения Ляпунова следует $V(Ax) - V(x) = x^T A^T P A x - x^T P x = -x^T Q x \le -\gamma\|x\|^2$, где γ минимальное из собственных чисел матрицы $Q(\gamma > 0)$. Выполняются все условия утверждения 6, поэтому система является асимптотически устойчивой.

Необходимость. Матричное уравнение $AXB - X = C$ имеет единственное решение, если для любых собственных чисел λ матрицы A и μ матрицы B произведение $\lambda\mu \neq 1$. В уравнении Ляпунова все собственные числа матриц A^T и A обладают свойством $|\lambda| < 1$. Следовательно, уравнение Ляпунова имеет единственное решение. Легко показать, что решение является симметричным.

Докажем положительную определенность решения. Из уравнения Ляпунова следует

$$P = A^T PA + Q = \left(A^T\right)^2 PA^2 + A^T QA + Q = \left(A^T\right)^k PA^k + \sum_{i=0}^{k-1}\left(A^T\right)^i QA^i$$

для любого $k > 0$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$, учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, получим $P = Q + \sum_{i=1}^{\infty}(A^T)^i QA^i$. Матрица Q положительно определенная, следовательно, положительно определенной является и матрица P. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим непрерывную систему

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Составим уравнение Ляпунова с единичной матрицей в правой части. Решение уравнения Ляпунова сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы P. Решение существует, является единственным и симметричным

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы P подтверждается критерием Сильвестра.

Линеаризация и анализ устойчивости по линейному приближению (4.12)

Рассмотрим более подробно процесс линеаризации, на примере непрерывной стационарной системы

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right) \qquad (4)$$

где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки покоя $x = 0$. Следовательно, вместо (4) в окрестности нулевой точки покоя $x = 0$ можно рассматривать

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g\left(x\right),$$

где

$$A = \left(\frac{\partial f(0)}{\partial x} \right)^T, \ \left\| g(x) \right\| = O\left(\left\| x \right\|^2 \right).$$

Утверждение 9. Положение равновесия $x = 0$ в системе (4) является асимптотически устойчивым по Ляпунову в окрестности начала координат, если спектр матрицы A находится в левой полуплоскости.

Литература.

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. — 368 с.

2. Афанасьев В. Н. , Колмановский В. Б. , Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: «Высшая школа».- 2003. – 614 с.

Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.

«Методы классического и интеллектуального управления динамическими системами»

Лекция №2

Задача линейно-квадратичного оптимального управления. Задача Калмана-Лётова

Оптимальные регуляторы Калмана-Летова. Сначала рассмотрим задачи на конечном промежутке времени. Пусть поведение объекта описывается линейной системой:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x^0, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, T]}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_0^T [(x, Qx) + (u, Ru)]dt \to \min$$

$(x, Qx) = x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t)$ – квадратичная форма по x, определяемая матрицей $Q(t)$.

$(u, Ru) = u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t)$ – квадратичная форма по u, определяемая матрицей $R(t) > 0$

<u>*Замечание*</u>: *Здесь* x^T – *транспонированный вектор*, *а матрицы* $Q \geq 0, \quad R > 0, \quad F \geq 0.$

<u>*Замечание:*</u> (u, Ru) – скалярное произведение векторов. Скалярное произведение векторов a и b, с числом элементов $\boldsymbol{n}$, определяется по формуле:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Применим принцип максимума Понтрягина к решению этой задачи.

$$H = \psi^T(t)(A(t)x + B(t)u) - \frac{1}{2}[(x, Q(t)x) + (u, R(t)u)]$$

Так как оптимальное управление удовлетворяет необходимому принципу максимума[1], т.е. оптимальное управление необходимо является точкой *максимума* функции ***H*** по ***u*** при почти всех ***t*,** то необходимо выполнение условия $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ т.е. получаем

[1] Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. - 742 с.

$$B^T(t)\psi - R(t)u = 0, \text{т.к.}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\psi^T(t)(A(t)x + B(t)u) - \frac{1}{2}[(x, Q(t)x) + (u, R(t)u)]\right] =$$

$$B^T(t)\psi - R(t)u = 0 \Rightarrow$$

$$\text{или} \qquad u = R^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$$

$$Q \geq 0, R > 0, F \geq 0$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = Q(t)x - A^T(t)\psi(t)$$

$$\psi(T) = -Fx(T)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\psi, \\ \dot{\psi} = Q(t)x - A^T(t)\psi, \qquad (*) \\ x(0) = x^0, \psi(T) = -Fx(T) \end{cases}$$

В данной краевой задаче можно применить метод прогонки (часть координат краевой задачи можно записать через другую) или

$$\psi(t) = -P(t)x(t). \qquad (**)$$

Подставим (**) в (*)

$$\dot{\psi} = -\dot{P}x - P\dot{x} = -\dot{P}x - P(Ax + S\psi) = Q(t)x - A^T(t)\psi,$$

$$Qx + A^T Px + \dot{P}x + PAx - PSPx = 0, \quad S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t),$$

или $\quad \forall x \Rightarrow$ *получаем*

$$\dot{P} = -A^T P - PA + PSP - Q.$$

Получаем для матрицы $P(t)$ матричную начальную задачу

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)S(t)P(t) - Q(t) \quad (7)$$

с дополнительным условием в конечный момент T

$$P(T)=F \qquad (8)$$

Задача (7)-(8) является матричной дифференциальной задачей Коши для определения матрицы $P(t)$.

Если эту задачу решить, найти $P(t)$ и подставить в (4), то получим выражение

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \qquad (9)$$

Т.е. управление подозрительное на оптимум определяется в виде явной зависимости от траектории x.

Выражение (9) – формула синтеза управлений. Какое бы ни было состояние $x(t)$ в момент времени t, оптимальное управление в этот момент нам известно, имеет вид (9) и *линейно* зависит от состояния x с коэффициентами пропорциональности, формируемыми матрицей $P(t)$.

Матрица $P(t)$ – решение задачи (7)-(8) играет большую роль в теории управления – матрица коэффициентов усиления в контуре оптимальной обратной связи.

Начальная задача (7)-(8) встречается в разных приложениях, в частности при расчетах оптимального движения в условиях случайных помех в белом шуме. Нетрудно показать, что матрица $P(t)$ является симметричной и положительно определенной при всех $t < T$. Симметричность проверяется непосредственно из уравнения (показать самостоятельно!), а положительная определенность следует при применении соотношений динамического программирования в этой задаче с учетом свойств матриц, фигурирующих в условиях.

Стационарные линейно-квадратичные задачи на полуоси

Мы рассмотрели задачу на конечном времени с точки зрения инженерной устойчивости объекта. Большой интерес имеют *стационарные линейно-квадратичные задачи на полуоси*.

Рассмотрим задачу следующего вида

$$(1) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$(2) \qquad u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [0, \infty)$$

$$(3) \qquad J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [(x, Qx) + (u, Ru)]dt \to \min$$

$$Q \geq 0, R > 0$$

Оптимальное программное управление определяется в той же форме, как и в задаче на конечном интервале

$$u(t) = R^{-1}B^T\psi(t)$$

и оптимальный синтез можно записать в том же виде

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$$

но здесь P – матричное решение уже не дифференциального уравнения, а алгебраического.

$$-PA - A^T P + PSP - Q = 0 \qquad (!)$$

Определение. *Система управляема на конечном отрезке времени* $[0,T]$, если для любых начальных и конечных состояний существует кусочно-непрерывное управление, переводящее систему на этом отрезке из заданного начального состояния в заданное конечное состояние.

Оказывается уравнение (!) разрешимо и его решение $P^*>0$, если *система управляема* и $Q > 0$.

КРИТЕРИЙ КАЛМАНА. Введем матрицу управляемости $G = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$.

Система управляема <=> когда $\mathrm{Rank}(G) = n$, т.е. размерность системы совпадает с максимальной размерностью невырожденного минора (G полного ранга).

$$u^*_{opt}(x) = -R^{-1}B^T Px,$$

$$\frac{dx}{dt} = (A - SP)x, \quad x(0) = x^0, \quad (!!)$$

$$S = BR^{-1}B^T.$$

Уравнение (!!) называется замкнутой системой для оптимальных движений.

Матрица (***A-SP***) замкнутой системы оказывается обладает замечательным свойством:

Собственные числа $Re\lambda(A\text{-}SP)$ (где $P>0$ – положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати) находятся в левой полуплоскости, т.е.

$$Re\lambda(A\text{-}SP) < 0.$$

Таким образом оптимальное синтезирующее управление в задаче на полуоси делает замкнутую систему *асимптотически устойчивой по Ляпунову*, т.е. для всех траекторий замкнутой системы и для любого начального условия выполняется следующее:

$$x(t, x_0) \to 0, t \to \infty$$

Или какое бы ни было начальное отклонение системы оптимальное управление стабилизирует систему и возвращает ее в положение равновесия.

Итак, теория оптимального управления позволяет находить обратную связь, не просто погашающую отклонение, но и выполняющее это демпфирование *оптимальным* образом.

Наблюдаемость и восстанавливаемость

В общем случае фазовые координаты вектора состояния $x(t) \in R^n$ не могут быть измерены непосредственно. Измерению доступны лишь координаты *вектора выхода* $y(t) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T \in R^m$, $n \geq m$, которые называют *выходными переменными* или *выходными величинами*.

Координаты вектора $y(t)$ связаны с координатами $x(t)$, по ним необходимо восстановить этот вектор, чтобы использовать законы управления по обратной связи.

Итак, пусть объект управления описывается как

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ y &= g(x,u,t), \quad y \in \mathbb{R}^m, n \geq m \end{aligned} \qquad (1)$$

Управляемая система (1) называется *наблюдаемой* или *вполне наблюдаемой*, если существует такое t_1 ($t < t_1 < \infty$), что по данным измерения выходного вектора $y(\tau)$ и управления $u(\tau)$ на интервале $t \leq \tau \leq t_1$ можно определить состояние $x(t)$.

Управляемая система (1) называется *восстанавливаемой* или *вполне восстанавливаемой*, если существует такое t_1 ($-\infty < t_1 < t$), что по данным измерения выходного вектора $y(\tau)$ и управления $u(\tau)$ на интервале $t_1 \leq \tau \leq t$ можно определить состояние $x(t)$.

В *стационарных* системах (1) из полной наблюдаемости следует полная восстанавливаемость.

Наблюдаемость линейных стационарных систем

Рассмотрим *линейную* систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r. \end{aligned} \qquad (2)$$

Введем *матрицу наблюдаемости*

$$H = [C^T, A^T C^T, \ldots, (A^T)^{n-1} C^T]^T.$$

Критерий наблюдаемости. Система (2) вполне наблюдаемая (восстанавливаемая) тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости H равен n (матрица H полного ранга).

Принцип двойственности управляемости и наблюдаемости

Рассмотрим помимо системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \qquad (3)$$

двойственную ей систему

$$\dot{\tilde{x}} = A^T \tilde{x} + C^T u, \qquad \tilde{y} = B^T x, \qquad (4)$$

где матрица D = 0, т.к. она не влияет на управляемость и наблюдаемость. Матрица управляемости системы (3) совпадает с матрицей наблюдаемости системы (4). И наоборот, матрица наблюдаемости (3) совпадает с матрицей управляемости (4).

Принцип двойственности. Система (3) вполне *управляема* тогда и только тогда, когда двойственная ей система (4) вполне *наблюдаема*, и система (3) вполне *наблюдаема* тогда и только тогда, когда двойственная ей система (4) вполне *управляема*.

Наблюдатель полного порядка

Теперь рассмотрим задачу построения динамической системы, позволяющей получить оценку вектора состояния.

Динамическая система $\dot{\hat{x}} = N\hat{x} + My + Ju$ называется *наблюдателем полного порядка* для управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x \,, \qquad (5)$$

если при $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ выполняется равенство $\hat{x}(t) = x(t)$ при всех $u(t), \; t \geq t_0$.

<u>Теорема</u>. Наблюдатель полного порядка для управляемой системы (5) имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + L(t)(y - C(t)\hat{x}),$$

где $L(t)$ – произвольная матрица коэффициентов усиления.

Рассмотрим вопрос выбора матрицы $L(t)$. Уравнение для ошибки наблюдения $e = x - \hat{x}$ имеют вид

$$\dot{e} = (A - L(t)C)e.$$

Следовательно, $e(t) \to 0$ при $\mathrm{t} \to \infty$ независимо от начальной ошибки тогда и только тогда, когда наблюдатель является асимптотически устойчивым.

Для *стационарных* объекта управления и наблюдателя устойчивость ошибки определяется собственными значениями *постоянной* матрицы $A - LC$.

Собственные значения матрицы $A - LC$ могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости тогда и только тогда, когда пара матриц (A, C) *вполне наблюдаема*.