Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.

«Методы классического и интеллектуального управления динамическими системами»

Лекция №3

Критерий Сильвестра

Для того чтобы квадратичная форма $V(x)=x^{\mathrm{T}}Qx$, $x \in R^n$ была ***положительно определенной*** функцией, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры Δ_i, т.е.

$$\Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \det Q$$

были положительны.

Для того чтобы квадратичная форма $V(x)=x^{\mathrm{T}}Qx$, $x \in R^n$ была ***отрицательной определенной*** функцией, необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры нечетного порядка были отрицательны, а четного – положительны.

Метод функций Ляпунова для <u>автономных</u> систем

Определение 1. Функция $V(x)$ называется ***положительно определенной*** (***полуопределенной***) в области D, если $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ ($V(x) \geq 0$) всюду на D, кроме точки $x = 0$, и называется ***отрицательно определенной*** (***полуопределенной***) в области D, если $V(0) = 0$ и $V(x) < 0$ ($V(x) \leq 0$) всюду на D, кроме точки $x = 0$.

Теорема 1 (теорема Ляпунова о локальной устойчивости). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^n, t \in [0, \infty). \quad (1)$$

устойчиво по Ляпунову в D, если существует, *положительно определенная функция* $V(x)$ такая, что ее производная по времени в силу уравнений (1) является *отрицательно полуопределенной функцией*.

Теорема 2 (теорема Ляпунова о локальной асимптотической устойчивости). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (1) ***асимптотически устойчиво***, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, что ее производная по времени в силу уравнений (1) является *отрицательно определенной функцией*.

Теорема 3 (обобщенная теорема об асимптотической устойчивости). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (1) ***асимптотически устойчиво***, если существует такая *положительно определенная функция* $V(x)$, что ее производная по времени в силу (1) является *отрицательно полуопределенной* функцией, и она обращается в ноль вне начала координат на множестве $M \subset D$, не *содержащим целых траекторий*.

Определение 2. Целой траекторией системы называется фазовая траектория в пространстве R^n, соответствующая решению уравнения этой системы $x(x^0, t)$ ($x^0 = 0$) на всем интервале времени при $0 \leq t < \infty$.

Отметим, что x=0 соответствует целой траектории, т.к. $f(0,t)$=0.

Пусть множество M задается уравнением $M = \{x\text{: } \varphi(x)=0\}$, где $\varphi(x)$ – гладкая функция. Тогда условие отсутствия в M целых траекторий можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x) = grad\ \varphi(x) f(x) \neq 0.$$

Множество M составляет поверхность в n-мерном пространстве. Последнее условие означает, что вектор скорости изображающей точки *не лежит* на ее касательной плоскости. И, следовательно, если изображающая точка попадает на M, где $\dot{V}(x) = 0$, то она сразу же ее покидает и оказывается в области, где $\dot{V}(x) < 0$.

Теорема 4 (теорема об асимптотической устойчивости в целом). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (1) ***асимптотически устойчиво в целом*** (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, допускающая *бесконечно большой нижний предел*, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.

Теорема 5 (теорема Барабашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом). Положение равновесия $x=0$ *автономной* системы ***асимптотически устойчиво в целом*** (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая *положительно определенная функция* $V(x)$, допускающая *бесконечно большой нижний предел*, что ее производная по времени в силу системы является *отрицательно полуопределенной* функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве M, не содержащем *целых траекторий*.

Определение 3. Функция $V(x.t)$ называется функцией, допускающей ***бесконечно большой нижний предел***, если как бы велико ни было положительное число E, найдется такое положительное число Δ, что $|V(x,t)| > E$ при всех $t \geq t_0$, если $|x| > \Delta$. Иначе говоря, если при $t \geq t_0$

$$|V(\mathbf{x}, \infty)| \to \infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \to \infty.$$

Например, в пространстве R^3 функция

$$V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\sin^2 t + 1)$$

допускает *бесконечно большой нижний предел*, а функции

$$V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2)(\sin^2 t + 1),$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} + \frac{x_3^2}{1 + x_3^2}\right](\sin^2 t + 1)$$

нет.

Методы построения функций Ляпунова

Не существует универсального метода построения функции Ляпунова. Однако, существует различные методы.

1. *Энергетический подход*. При таком подходе в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимают полную энергию, представляющую сумму потенциальной и кинетической энергий.

Пример. На тело с массой m действует сила F, такая что

$$F = -f(y), \quad f(0) = 0, \quad f(y)y > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0.$$

Движение тела: $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{m} f(x_1).$

$$V(\mathbf{x}) = W + U = \frac{m x_2^2}{2} + \int_{x_1^0}^{x_1} f(x_1)\, dx_1 .$$

$\dot{V}(\mathbf{x}) = m x_2 \dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 = -m x_2 \frac{1}{m} f(x_1) + f(x_1) x_2 = 0$, x=0 – локально устойчиво (см. Теорему 1).

2. *Метод разделения переменных* (Е.А. Барбашин). Кандидата на функцию Ляпунова ищут среди функций, которые, как и их производные по времени, представляют сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad \frac{d}{dt}V = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i).$$

Пример. $\dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^3.$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова принимаем функцию $V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2)$. Тогда

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dF_1}{dx_1}\dot{x}_1 + \frac{dF_2}{dx_2}\dot{x}_2 = -\frac{dF_1}{dx_1}x_1^3 + \frac{dF_1}{dx_1}2\,x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 - \frac{dF_2}{dx_2}3\,x_2^3.$$

Разность средних членов нужно занулить. Пусть

$\frac{dF_1}{dx_1}2x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 = 0$, откуда $\left.\frac{dF_1}{dx_1}\right/x_1 = \left.\frac{dF_2}{dx_2}\right/2x_2.$

Т.к. левая часть равенства зависит от x_1, а правая часть от x_2, то это равенство возможно, если обе части являются константами и равны, например, единице. Тогда имеем $\frac{dF_1}{dx_1} = x_1, \quad \frac{dF_2}{dx_2} = 2x_2.$

Проинтегрировав, получаем

$$F_1 = \frac{1}{2}\,x_1^2, \quad F_2 = x_2^2, \quad V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2) = \frac{1}{2}\,x_1^2 + x_2^2.$$

Следовательно, производная функции Ляпунова имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{dF_1}{dx_1}\,x_1^3 - \frac{dF_2}{dx_2}\,3x_2^3 = -(x_1^4 + 6x_2^4).$$

Итак, построенная методом разделения переменных функция $V(x)$ является *положительно определенной* и допускающей допускающая *бесконечно большой нижний предел*, а ее производная в силу уравнений системы - *отрицательно определенной*. Следовательно, по теореме Барабашина-Красовского положение равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивым в целом.

3. *Метод Красовского*. В качестве кандидата на функцию Ляпунова для изучения (1) рассматривают квадратичную форму

$$V(x) = f(x)^T P f(x).$$

Симметричную матрица P выбирается так, чтобы сама квадратичная форма была положительно определенной, а ее производная – отрицательно определенной.

Пример. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_1 - \varphi(x_2), \quad b > 0, \quad \varphi(0) = 0.$

Пусть $P = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, тогда $V(\mathbf{x}) = b_{11}x_2^2 + b_{22}[-bx_1 - \varphi(x_2)]^2.$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2b_{11}x_2\dot{x}_2 + 2b_{22}[-bx_1 - \varphi(x_2)]\left(-b\dot{x}_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\dot{x}_2\right) =$$

$$= 2[bx_1 + \varphi(x_2)](b_{22}b - b_{11})x_2 - 2b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}[bx_1 + \varphi(x_2)]^2.$$

Взяв $b_{11} = b$ и $b_{22} = 1$ имеем

$$V(\mathbf{x}) = bx_2^2 + [bx_1 + \varphi(x_2)]^2, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}[bx_1 + \varphi(x_2)]^2.$$

$$V(\mathbf{x}) = bx_2^2 + [bx_1 + \varphi(x_2)]^2, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,[bx_1 + \varphi(x_2)]^2.$$

Очевидно, что $V(x)$ является положительно определенной функцией, бесконечно большой нижний предел ($V(x) \to \infty$ при $|\mathrm{x}| \to \infty$). Теперь, если $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} > 0$ при $x_2 \neq 0$, то $\dot{V}(x)$ будет отрицательно полуопределенной и обращается в нуль на многообразии $\sigma(\mathbf{x}) = bx_1 + \varphi(x_2) = 0$. Можно убедиться, что это множество не содержит целых траекторий вне начала координат на указанном многообразии, поскольку

$$\operatorname{grad}\sigma(x)\, f(x)\Big|_{\sigma(x)=0} = bx_2 \neq 0,$$

Поэтому по теореме Барбашина-Красовского положение равновесия рассматриваемой системы будет асимптотически устойчиво в целом.

4. *Метод Лурье-Постникова*. Применяется для нелинейной системы, особого вида.

$$\dot{x} = ax + bu, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -c^T x, \quad u, \xi \in R, \quad (1)$$

$$f(0) = 0, \quad k_m \le \left.\frac{f(\xi)}{\xi}\right|_{\xi \ne 0} \le k_M. \quad (2)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова сумму из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции:

$$V(x) = x^T P x + q \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi, \quad P > 0, q = const > 0. \quad (3)$$

Определение 6. Система (1) или положение равновесия x=0 системы (1) называется ***абсолютно устойчивым*** в угле (секторе) [k_m, k_M], если нулевое решение x=0 системы (1) *асимптотически устойчиво в целом* (для любого $x^0 \in R$) при любой нелинейной функции *f*, удовлетворяющей условию (2).

Нелинейности из класса, удовлетворяющая условиями (2), также удовлетворяют условию $f(\xi)\xi \geq 0$. Следовательно, интеграл в (3) является неотрицательной функцией, а V функция положительно определенной. Т.о. нужно определить такую $P > 0$, и такой положительной константы $q > 0$, при которых $\dot{V}(x) < 0$.

Пример. $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 - kf(x_1).$

где k, a_1, a_2 – положительные постоянные, а нелинейная функция f удовлетворяет условию $f(0) = 0, \quad \alpha \leqslant \dfrac{f(\xi)}{\xi} \leqslant \beta, \quad 0 < a < \beta < \infty.$

Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + q\int\limits_0^{x_1} f(x_1)\,dx_1,$$

где b, c – произвольные постоянные, q – произвольная положительная постоянная. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, нужно $c - b^2 > 0$.

Итак, для функции Ляпунова

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + q\int\limits_0^{x_1} f(x_1)\,dx_1,$$

имеем $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2(x_1 + bx_2)\dot{x}_1 + 2(bx_1 + cx_2)\dot{x}_2 + qf(x_1)\dot{x}_1 =$

$$= 2(1 - ba_1 - ca_2)x_1x_2 - 2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 -$$
$$- 2bx_1kf(x_1) - 2ckx_2f(x_1) + qf(x_1)x_2.$$

Пусть $1 - ba_1 - ca_2 = 0$, или $c = (1 - ba_1)/a_2$ и $q = 2ck$, тогда

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - 2bkx_1f(x_1),$$

и для отрицательности производной нужно, чтобы $b > 0$, $ca_1 - b > 0$ Откуда следует $0 < b < ca_1$ Подставив выражение для *c*, получим $0 < b < a_1/(a_1^2 + a_2)$. Т.о. при достаточно малом *b*, имеем *V*>0, d*V*/d*t* <0. При этом *V* будет неограниченно возрастать при стремлении |*x*| к бесконечности. Следовательно, положение равновесия системы *абсолютно устойчиво*.

4. *Метод Вокера-Кларка* (*Woker-Klark*). Пусть имеем систему

$$\frac{d^n y}{dt^n} + f\left(y,\ \frac{dy}{dt}, \ldots,\ \frac{d^{n-1} y}{dt^n}\right) = 0,$$

или в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= -f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассматривается

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где подлежащая определению функция $F(x)$ строится так, чтобы $\dot{V}(x)$ в силу заданных уравнений системы была отрицательно полуопределенной.

Пример. Исследуем систему $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2).$

Определим $V(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{x_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \frac{x_2^2}{2} + F(x_1, x_2).$

Тогда имеем

$$\dot V(\mathbf{x}) = f(x_1,x_2)\dot x_1 + \left(\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1\right)\dot x_2 + x_2\dot x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\,\dot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\,\dot x_2 =$$

$$= -f(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\,x_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}\,f(x_1,x_2).$$

Если положить $F(x_1, x_2) = 0$, то имеем

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{x_1} f(x_1,x_2)\,dx_1 + \frac{x_2^2}{2}, \quad \dot V(\mathbf{x}) = -f(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1.$$

Откуда заключаем, что положение равновесия x=0 асимптотически устойчиво в целом, если выполняются условия

$$\int\limits_0^{x_1} f(x_1,x_2)dx_1 \to \infty, \quad |\mathbf{x}| \to \infty,$$

$$x_1 f(x_1,x_2) > 0, \quad f(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1 > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Экспоненциальная устойчивость

Пусть имеем систему неавтономную систему

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) = 0, \quad x \in R^n, t \in [0,\infty). \quad (2)$$

где правая часть является гладкой функцией: она непрерывно дифференцируема в области

$$|\mathbf{x}| < \rho, \quad 0 < t < \infty \quad (\rho = \mathrm{const} \text{ или } \rho = \infty),$$

выполняются условия $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < L, \quad L = \mathrm{const} > 0;\ i, j = 1,2, \dots n.$

Определение 4. Положение равновесия (или невозмущенное движение) $x(t) = 0$ системы (2) называется ***экспоненциально устойчивым***, если существуют положительные постоянные α и M такие, что при $|x^0| < \rho/M$ возмущенное движение $x(x^0,t)$ удовлетворяет условию

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leqslant M|\mathbf{x}^0|\, e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall\, t \geqslant t_0.$$

Если последнее условие выполняется при любых начальных условиях, то положение равновесия системы (2) называется *глобально экспоненциально устойчивым* или *экспоненциально устойчивым в целом*. Отметим, что если линейная стационарная система устойчива, то она экспоненциально устойчива в целом.

Теорема 6 (теорема Красовского). Положение равновесия системы (2) экспоненциально устойчиво в области D, если существуют функция Ляпунова $V(x,t)$ и положительные постоянные c_i (i = 1,2,3,4) такие, что выполняются неравенства

$$c_1|\mathbf{x}|^2 \leqslant V(\mathbf{x},t) \leqslant c_2|\mathbf{x}|^2,$$

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x},t) \leqslant -c_3|\mathbf{x}|^2,$$

$$\left|\frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}}\right| \leqslant c_4|\mathbf{x}|.$$

Если система экспоненциально устойчива, то имеется экспоненциальная скорость затухания переходных процессов, что чрезвычайно важно для систем автоматического управления.

В случае экспоненциально устойчивой ***линейной*** стационарной или нестационарной системы существует квадратичная форма $V(x)=x^{\mathrm{T}}Qx$ или $V(x,t)=x^{\mathrm{T}}Q(t)x$, удовлетворяющая условию теоремы Красовского.

В случае экспоненциально устойчивой нелинейной системы соответствующая функция Ляпунова может быть неквадратичной формой.

Теоремы о неустойчивости

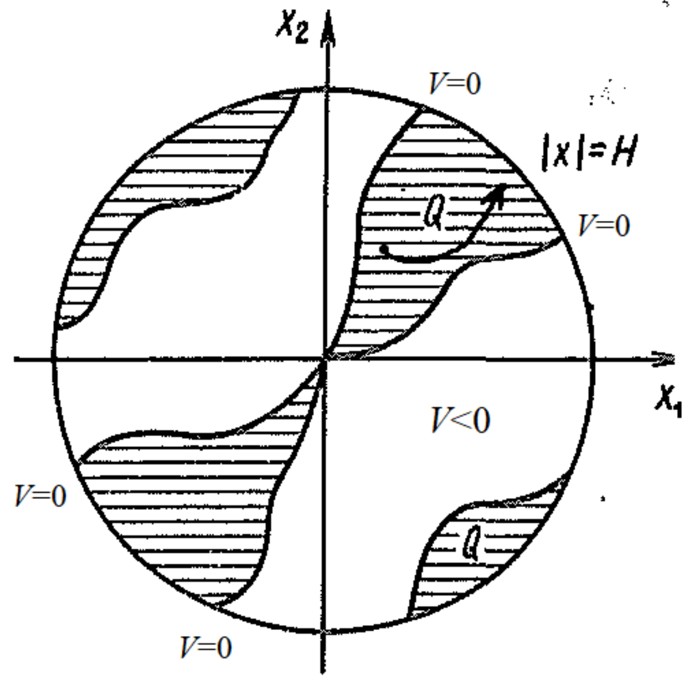
Напомним, что метод функции Ляпунова является определяет *достаточные условия* устойчивости. Если не удалось построить такие функции, то нельзя заключить об устойчивости положения равновесия. Поэтому важную роль играют условия ***неусточивости***.

Теорема 7 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). Положение равновесия x=0 ***неавтономной*** системы (2) ***неустойчиво***, если существует функция $V(x,t)$, допускающая *бесконечно малый верхний предел*, такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и при всех $t \geq t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x^0$, в которой функция $V(x,t)$ принимает положительное значение.

Здесь функция $V(x,t)$ не предполагается знакоопределенной, однако предполагается, что $V(x,t)$ непрерывна, обладает непрерывными частными производными по всем своим аргументам и в начале координат обращается в ноль.

Определение 5. Функция $V(x,t)$ называется функцией, допускающей ***бесконечно малый верхний предел***, если как бы мало ни было положительное число ε', найдется такое положительное число δ', что $|V(x,t)| < \varepsilon'$ при всех $t \geq t_0$, если $|x| < \delta'$.

Теорема 7 (теорема Четаева о неустойчивости). Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $V(x,t)$, $V(0,t)=0$, такая, что область $Q = \{|x| < H,\ V(x,t) > 0\}$ удовлетворяет условиям:



1) Q состоит из нескольких связных открытых компонент;

2) в Q имеются точки x с произвольно малой нормой $|x|$.

Тогда если в области Q функция $V(x,t)$ ограничена, а ее производная в силу системы (2) определенно-положительна (т. е. $\dot{V}(x) \geq \gamma_4(\|x\|)$, $x \in Q$, $\gamma_4 \in \Gamma$), то тривиальное решение системы (2) (положение равновесия $x=0$) неустойчиво.

Здесь Г класс строго возрастающих непрерывных функций γ: $R+ \to R+$ таких что $\gamma(0) = 0$.