34. Энергия и плотность энергии упругой волны. Вектор Умова.

Пусть плоская продольная волна распространяется вдоль оси Ox в упругой среде с модулем Юнга E и плотностью ρ.

Выберем в среде малый цилиндр с основанием S и длиной dx в недеформированном состоянии. Масса вещества внутри цилиндра:
$$dm = \rho \cdot dV = \rho S \cdot dx.$$

Полная энергия dW цилиндра:
$$dW = dW^k + dW^p, \tag{7.29}$$
где кинетическая энергия всех частиц цилиндра:
$$dW^k = \frac{dm}{2}\cdot u^2 = \left| \; u = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \; \right| = \frac{dm}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho \cdot dV}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2,$$
потенциальная энергия всех частиц цилиндра (7.26):
$$dW^p = \frac{E\varepsilon^2}{2}\cdot dV = \left| \; \varepsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \; \right| = \frac{E \cdot dV}{2}\cdot\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 =$$
$$= \left| \begin{array}{c} \text{из (7.27)} \\ E = \rho \upsilon^2 \end{array} \right| = \frac{\rho \upsilon^2 \cdot dV}{2}\cdot\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2.$$

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра физики

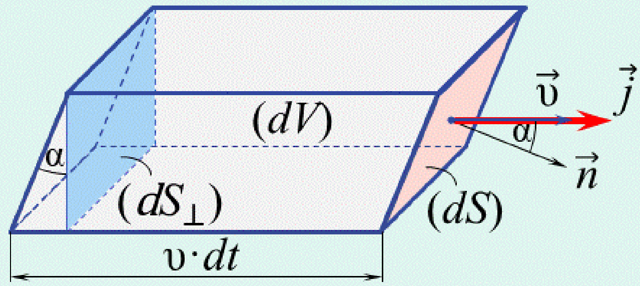
Тогда (7.29):
$$dW = \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2\right)\cdot dV. \tag{7.30}$$

Плотность энергии w волны – величина, равная:
$$w = \frac{dW}{dV}, \tag{7.31}$$
где dW – энергия частиц среды, содержащихся внутри малого объема dV.

В СИ $[w]$ = Дж/м^3.

(7.30) $\rightarrow$ в (7.31) и получим ***плотность энергии плоской упругой волны***, распространяющейся вдоль оси Ox, в точке с координатой x в момент времени t:
$$w(x,t) = \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2\right). \tag{7.32}$$

Вычислим энергию dW упругой волны, проходящую за время dt через малую поверхность площадью dS, единичный вектор нормали $\vec{n}$ к которой составляет угол α с направлением распространения волны ($\vec{\upsilon}$).



dW равна энергии всех частиц среды, находящихся в косоугольном параллелепипеде с основанием (dS) и длиной $\upsilon \cdot dt$:

$$dW = w \cdot dV = w \cdot dS_{\perp} \cdot \upsilon \cdot dt, \tag{7.33}$$

где w – плотность энергии упругой волны,

$dV = dS_{\perp} \cdot \upsilon \cdot dt$ – объем параллелепипеда,

$dS_{\perp}$ – площадь ортогонального сечения косоугольного параллелепипеда.

Введем в рассмотрение ***вектор Умова*** $\vec{j}$, равный:

$$\boxed{\vec{j} = w \cdot \vec{\upsilon},} \tag{7.34}$$

тогда (7.33):

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра физики

$$dW = j \cdot dS_{\perp} \cdot dt,$$

$$j = \frac{dW}{dS_{\perp} \cdot dt}. \tag{7.35}$$

В СИ $[j]$ = Вт/м^2.

Из (7.35) следует ***содержательный смысл модуля вектора Умова***:

j численно равен энергии упругой волны, проходящей через перпендикулярную направлению распространения волны поверхность единичной площади в единицу времени.

Вывод:

В области распространения бегущей упругой волны наблюдается перенос энергии без переноса вещества.