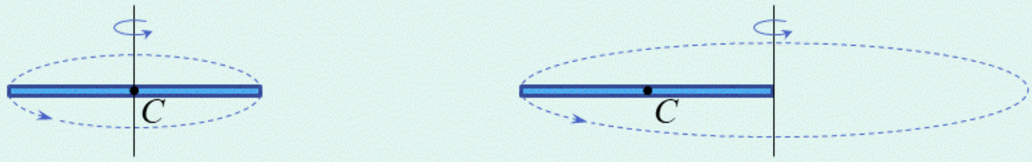
13. Момент импульса тела относительно оси. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Штейнера

Из опыта известно, что при вращении одного и того же тела вокруг различных осей оно в общем случае по-разному проявляет свои инертные свойства.



Пусть ТТ вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси OO'.

<u>Задача</u>: по аналогии с определением импульса $\vec{p} = m\cdot\vec{\upsilon}$ найти связь между моментом импульса $\vec{L}_O$ тела и его $\vec{\omega}$ (в каждый момент времени $\vec{\omega}$ одинакова для всех элементов этого тела)

$$\vec{L}_O = ? \cdot\vec{\omega},$$

из которой можно определить величину, характеризующую инертные свойства этого ТТ.

По (4.2):

$$\vec{L}_O = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\cdot\left[\vec{r},\vec{\upsilon}(\vec{r})\right]\cdot dV = \left| \begin{matrix} (1.30): \\ \vec{\upsilon}(\vec{r}) = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right] \end{matrix} \right| = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\cdot\left[\vec{r},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]\cdot dV =$$

$$= \left| \begin{matrix} (7): \\ \left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\cdot(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right) \end{matrix} \right| = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\cdot\left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r},\vec{r}) - \vec{r}\cdot(\vec{r},\vec{\omega})\right)\cdot dV.$$

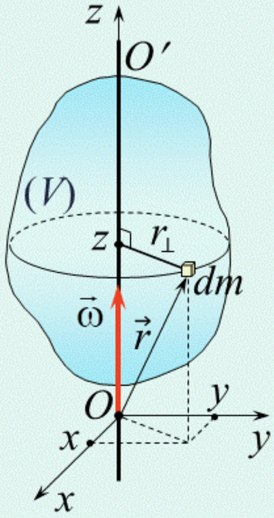
$$\vec{L}_O = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\cdot\vec{\omega}\cdot r^2\cdot dV - \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\cdot\vec{r}\cdot(\vec{r},\vec{\omega})\cdot dV. \qquad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что в общем случае векторы $\vec{L}_O$ и $\vec{\omega}$ неколлинеарны:

$$\boxed{\vec{L}_O \nparallel \vec{\omega}.} \qquad (4.6)$$

Можно показать, что связь между моментом импульса $\vec{L}_O$ ТТ и угловой скоростью $\vec{\omega}$ его вращения вокруг неподвижной оси выражается произведением матриц, в котором коэффициент пропорциональности между $\vec{L}_O$ и $\vec{\omega}$ – это матрица (3×3), которая называется ***тензор инерции*** ТТ (тензор 2-го ранга).

Пусть ось Oz совпадает с неподвижной осью OO' вращения ТТ ($Oz \parallel OO' \parallel \vec{\omega}$). Найдем связь между моментом импульса L_z тела относительно оси Oz и проекцией ω_z на эту ось его угловой скорости.



$$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \vec{e}_z, \qquad \omega_x = \omega_y = 0, \tag{4.7}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z, \tag{4.8}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{4.9}$$

$$(\vec{r}, \vec{\omega}) = x \cdot \omega_x + y \cdot \omega_y + z \cdot \omega_z = z \cdot \omega_z, \tag{4.10}$$

$$r_\perp^2 = x^2 + y^2. \tag{4.11}$$

По (2.1), учитывая (4.5), (4.7)–(4.11):

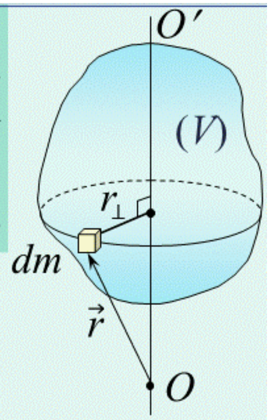
$$L_z = \left[\vec{L}_O\right]_{\text{проек. на } Oz} = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot \omega_z \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot dV - \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot z \cdot z \cdot \omega_z \cdot dV =$$

$$= \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot \omega_z \left(x^2 + y^2 + z^2 - z^2\right) \cdot dV = \omega_z \cdot \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot dV,$$

$p_z = \upsilon_z \cdot m$

$$L_z = \omega_z \cdot \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \cdot dV. \tag{4.12}$$

Момент инерции ТТ относительно некоторой неподвижной оси (*осевой момент инерции*) – скалярная физическая величина, являющаяся наряду с массой количественной мерой инертности этого тела при его вращательном движении вокруг данной оси, и равная:



$$\boxed{I = \int\limits_{(V)} dm(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 = \int\limits_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \cdot dV,} \tag{4.13}$$

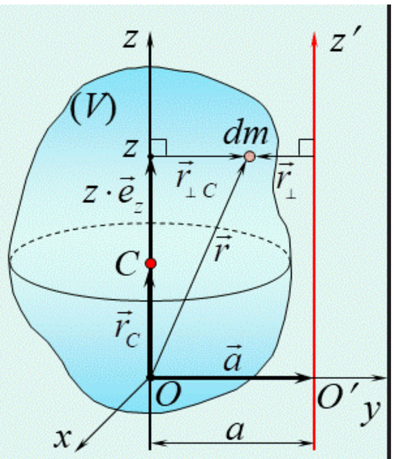
где $dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \cdot dV$ – масса малого элемента тела, находящегося в точке $\vec{r}$; $\rho(\vec{r})$ – плотность вещества в окрестности точки $\vec{r}$, содержащейся внутри элемента объемом $dV = dx \cdot dy \cdot dz$; $r_\perp$ – расстояние от элемента до оси.

В СИ $[I]$ = кг·м^2.

Момент инерции ТТ <u>зависит от распределения его массы относительно выбранной оси</u>, т. е. от массы тела, его геометрической формы и размеров, а также от взаимного расположения оси и данного тела.

Теорема Штейнера:

Момент инерции I тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции I_C этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы m данного тела на квадрат расстояния a между этими осями:



$$\boxed{I = I_C + ma^2.} \qquad (4.14)$$

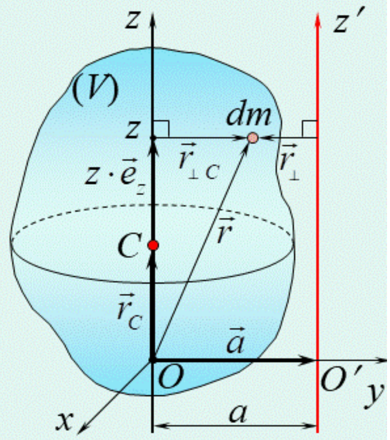
<u>*Доказательство*</u>:

По (4.13) момент инерции I тела относительно оси $O'z'$:

$$I = \int\limits_{(V)} dm \cdot r_\perp^2, \qquad (4.15)$$

где dm – масса малого элемента тела с радиус-вектором $\vec{r}$, $r_\perp$ – расстояние от элемента до $O'z'$.

Центр масс тела т. C лежит на оси Oz и его радиус-вектор по (4.1):



$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int\limits_{(V)} dm \cdot \vec{r}. \qquad (4.16)$$

Момент инерции I_C тела относительно Oz:

$$I_C = \int\limits_{(V)} dm \cdot r_{\perp C}^2, \qquad (4.17)$$

где $r_{\perp C}$ – расстояние от элемента dm до Oz.

$\vec{a} \perp Oz$ и $\vec{a} \perp O'z'$. $|\vec{a}|$ равен расстоянию между Oz и $O'z'$.

Т. к.

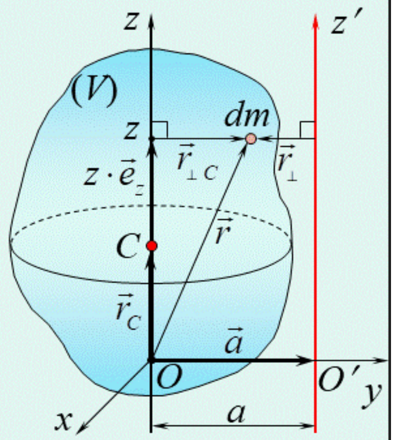
$$\vec{r}_\perp = \vec{r}_{\perp C} - \vec{a},$$

$$r_\perp^2 = \vec{r}_\perp^{\,2} = \left(\vec{r}_{\perp C} - \vec{a}\right)^2 = r_{\perp C}^2 + a^2 - 2\left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right),$$

то (4.15) преобразуем, учитывая (4.17):

$$I = \int\limits_{(V)} dm \cdot \left(r_{\perp C}^2 + a^2 - 2\left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right)\right) = \int\limits_{(V)} dm \cdot r_{\perp C}^2 + \int\limits_{(V)} dm \cdot a^2 - 2\int\limits_{(V)} dm \cdot \left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right),$$

$$I = I_C + ma^2 - 2\int\limits_{(V)} dm \cdot \left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right). \qquad (4.18)$$



Вычислим интеграл в правой части (4.18). Учтем, что $\vec{r}_{\perp C} = \vec{r} - z \cdot \vec{e}_z$,

тогда $\left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right) = \left(\vec{r} - z \cdot \vec{e}_z, \vec{a}\right) =$

$$= \left(\vec{r}, \vec{a}\right) - \left(z \cdot \vec{e}_z, \vec{a}\right) = \left| \begin{array}{c} \vec{e}_z \perp \vec{a} \Rightarrow \\ \left(z \cdot \vec{e}_z, \vec{a}\right) = 0 \end{array} \right| = \left(\vec{r}, \vec{a}\right).$$

Этот результат подставим в интеграл в (4.18):

$$\int\limits_{(V)} dm \cdot \left(\vec{r}_{\perp C}, \vec{a}\right) = \int\limits_{(V)} dm \cdot \left(\vec{r}, \vec{a}\right) = \left| \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}} \right| = \left(\left(\int\limits_{(V)} dm \cdot \vec{r} \right), \vec{a} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{из } (4.16) \Rightarrow \\ \int\limits_{(V)} dm \cdot \vec{r} = m \cdot \vec{r}_C \end{array} \right| = \left(m \cdot \vec{r}_C, \vec{a}\right) = \left| \begin{array}{c} \vec{r}_C \perp \vec{a} \Rightarrow \\ \left(\vec{r}_C, \vec{a}\right) = 0 \end{array} \right| = 0.$$

Поэтому из (4.18) следует, что $I = I_C + ma^2$.