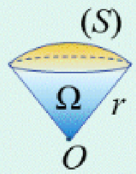
47. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса для поля вектора в вакууме (в интегральной форме).

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники — *Кафедра физики*

<ins>Телесный угол</ins> – часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей этот телесный угол).



Телесный угол измеряется отношением площади S той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса r сферы:

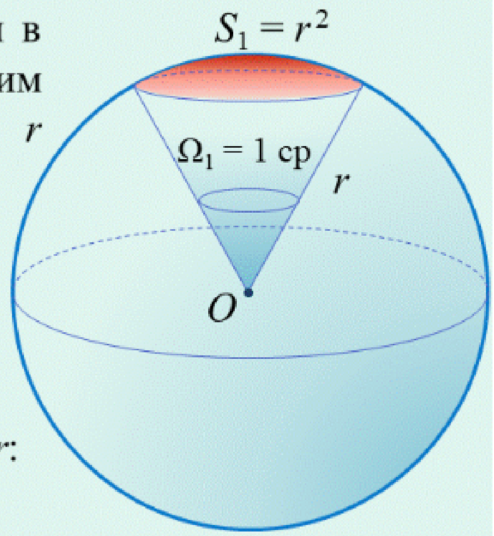
$$\Omega = \frac{S}{r^2}.$$

$[\Omega]$ = 1 стерадиан (ср).

Полный телесный угол равен 4π ср.

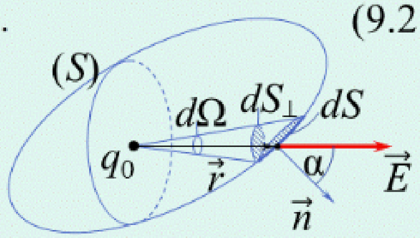
Площадь поверхности сферы радиусом r:

$$S_{сф} = 4\pi r^2.$$



По (9.3) ***поток*** Φ_E векторного поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ через произвольную ориентированную поверхность (S):

$$\Phi_E = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}\right) dS. \qquad (9.21)$$



В СИ $[\Phi_E]$ = В·м.

Вычислим Φ_E поля точечного заряда q_0 через <u>замкнутую</u> поверхность (S), <u>охватывающую</u> этот заряд:

$$\Phi_E = \oint\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}\right) dS = \oint\limits_{(S)} E \cdot \cos\alpha \cdot dS = \oint\limits_{(S)} E \cdot dS_\perp = \left| \begin{array}{c} \text{по определению} \\ \text{телесного угла} \\ dS_\perp = r^2 \cdot d\Omega \\ 0 \le \Omega \le 4\pi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{4\pi} E \cdot r^2 \cdot d\Omega = \int\limits_0^{4\pi} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot r^2 \cdot d\Omega = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q_0}{\varepsilon_0}, \qquad (9.22)$$

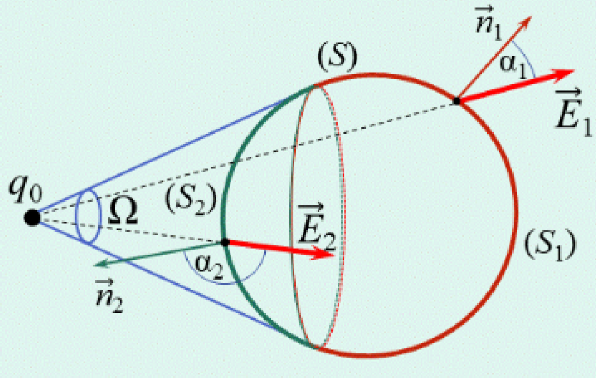
где $d\Omega$ – телесный угол с вершиной в q_0, вырезающий на поверхности (S) элемент площадью dS;

$dS_\perp = dS \cdot \cos\alpha$ – площадь элемента, вырезаемого телесным углом $d\Omega$ на сфере с центром в q_0 и радиусом r.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра физики

Пусть <u>замкнутая</u> поверхность (S) <u>не охватывает</u> заряд q_0.

Разделим (S) на 2 части: $(S) = (S_1) \cup (S_2)$,



где (S_1) и (S_2) – поверхности, стягивающие телесный угол Ω.

Тогда поток Φ_E вектора $\vec{E}$ через (S):

$$\Phi_E = \oint\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}\right) dS =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} \left(\vec{E}_1, \vec{n}_1\right) dS + \int\limits_{(S_2)} \left(\vec{E}_2, \vec{n}_2\right) dS =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} E_1 \cdot dS_{\perp 1} - \int\limits_{(S_2)} E_2 \cdot dS_{\perp 2} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \Omega - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \Omega = 0. \qquad (9.23)$$

Результаты, полученные в (9.22) и (9.23), можно обобщить на любую совокупность электрических зарядов (дискретную или непрерывно распределенную).

Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{E}$ ***в вакууме*** (в интегральной форме):

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в вакууме через любую <u>замкнутую</u> поверхность (S) равен алгебраической сумме зарядов $q_{\text{внт}}$, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную ε_0:

$$\boxed{\oint_{(S)} (\vec{E},\vec{n})dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внт}}\,.} \qquad (9.24)$$

Если внутри замкнутой поверхности (S) находится n точечных зарядов, то

$$q_{\text{внт}} = \sum_{i=1}^{n} q_i\,.$$

Если внутри замкнутой поверхности (S) заряд распределен непрерывно, то

$$q_{\text{внт}} = \int_{(V)} \rho\, dV,$$

где ρ − объемная плотность заряда, (V) − область распределения заряда, находящегося <u>внутри</u> замкнутой поверхности (S).

Т. к.

$$\Phi_E \sim \left(N_{\text{выход}} - N_{\text{вход}}\right),$$

то из (9.24) следует, что:

если $q_{\text{внт}} \neq 0$, то $N_{\text{выход}} \neq N_{\text{вход}}$;

если $q_{\text{внт}} = 0$, то $N_{\text{выход}} = N_{\text{вход}}$.

<u>Содержательный смысл (9.24)</u>:

Силовые линии *электростатического* поля не являются замкнутыми: они начинаются на положительных электрических зарядах и оканчиваются на отрицательных.