№34 Вынужденные колебания

Для того чтобы колебания не затухали, осциллятору необходимо извне подводить энергию.

Пусть к движущемуся вдоль оси Ox затухающему осциллятору подвод энергии извне происходит за счет действия внешней периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$F_x^{\text{внеш}}(t) = F_{\max}\cos(\omega t), \tag{6.46}$$

где $F_{\max}$ и ω – соответственно амплитуда и циклическая частота внешней силы.

В этом случае уравнение движения (6.30) принимает вид:

$$m\ddot{x} + æ\,\dot{x} + kx = F_{\max}\cos(\omega t), \quad \Big|: m$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\max}\cos(\omega t), \tag{6.47}$$

где $\beta = \dfrac{æ}{2m}, \quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}, \quad f_{\max} = \dfrac{F_{\max}}{m}.$

ДУ (6.47) является неоднородным линейным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение $x(t)$ такого уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $x_{\text{однор}}(t)$ и частного (не содержащего произвольных постоянных) решения неоднородного уравнения $\tilde{x}(t)$:

$$x(t) = x_{\text{однор}}(t) + \tilde{x}(t). \tag{6.48}$$

Неоднородному ДУ (6.47) соответствует однородное ДУ (6.31), общим решением которого является функция (6.38):

$$x_{\text{однор}}(t) = A_0 \cdot \exp(-\beta t) \cdot \cos(\omega_{\text{зк}} t + \varphi_0).$$

Частное решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (6.47) имеет вид:

$$\tilde{x}(t) = A(\omega) \cdot \cos\big(\omega t - \alpha(\omega)\big), \tag{6.49}$$

где

$$A(\omega) = \frac{f_{\max}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{6.50}$$

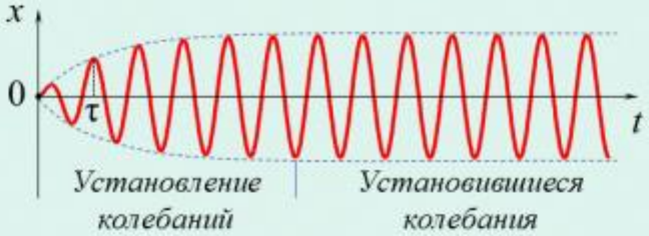
– амплитуда;

$$\alpha(\omega) = \operatorname{arcctg}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}, \qquad 0 \le \alpha \le \pi \tag{6.51}$$

– фазовый сдвиг – отставание по фазе смещения от вынуждающей силы.

График зависимости $x(t)$

$\omega_0 = \omega, \quad x_0 = 0, \quad \upsilon_{0x} = 0$



Со временем $x_{\text{однор}}(t)$ уменьшается и через некоторый промежуток времени $t \gg \tau$ (где $\tau = 1/\beta$ – время релаксации) вклад первого слагаемого в (6.48) становится пренебрежимо малым. Тогда функция $\tilde{x}(t)$ (6.49) будет описывать установившиеся колебания, происходящие с частотой вынуждающей силы.