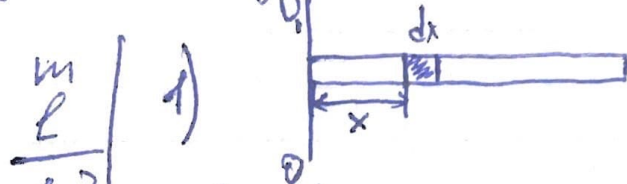30) Рассчитать момент инерции одн. тонк. стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно длине стержня.
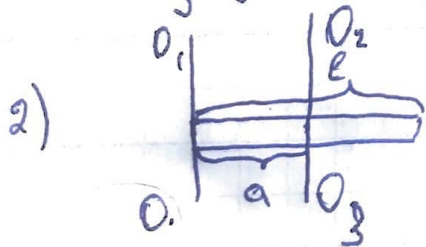

1) $J = mr^2$

На расстоянии x от конца стержня участок dx имеет массу $dm = \rho S dx$, ρ - плотность, S - сечение.

$$J = mx^2 \Rightarrow dJ = dm\, x^2 = \rho S x^2 dx^2.$$

$$J = \int\limits_0^\ell \rho S x^2 dx = \frac{x^3}{3}\rho S \Big|_0^\ell = \frac{\ell^3}{3}\rho S.$$

Масса стержня $m = \rho S \ell \Rightarrow \underline{\rho S = \frac{m}{\ell}}.$

$$J = \frac{\ell^3}{3}\rho S = \frac{m\ell^2}{3}.$$

2)

Теорема Штейнера: $J = J_{O_2O_3} + ma^2$,

Тогда $J_{O_2O_3} = J + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\left(\frac{\ell^2}{3} + \frac{\ell^2}{4}\right) =$ где $a = \frac{\ell}{2}$

$$= \frac{m\ell^2}{12}.$$

Ответ: $\dfrac{m\ell^2}{12}.$