20. Связь между силой потенциального поля и потенциальной энергией.

Определение (5.13) W^p МТ в стационарном потенциальном поле позволяет по известной зависимости $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ действующей на нее силы найти W^p МТ как функцию координат $W^p = W^p(\vec{r})$.

Можно решить и обратную задачу: зная вид функции $W^p = W^p(\vec{r})$ МТ в стационарном потенциальном поле, можно найти силу $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, действующую со стороны этого поля на МТ.

Если в каждой точке некоторой области пространства скалярная величина W^p определена как функция координат, то говорят, что имеется стационарное скалярное поле величины $W^p = W^p(\vec{r})$, где $\vec{r} = x\cdot \vec{e}_x + y\cdot \vec{e}_y + z\cdot \vec{e}_z$.

Градиент скалярного поля величины $W^p(\vec{r})$ в некоторой точке – **вектор**, обозначаемый $\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r})$, проекции которого на оси ДПСК равны частным производным функции $W^p(\vec{r})$ по соответствующим переменным:

$$\boxed{\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r}) = \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial z}\cdot\vec{e}_z.} \qquad (5.22)$$

Вектор $\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r})$ в любой точке скалярного поля $W^p = W^p(\vec{r})$ направлен в сторону наибольшего возрастания величины W^p в этой точке, а $|\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r})|$ равен наибольшей скорости возрастания скалярной функции $W^p(\vec{r})$ в данной точке.

Вектор $\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r})$ направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности в любой ее точке.

Оператор на́бла $\vec{\nabla}$ (символический вектор) − векторный дифференциальный оператор, в ДПСК равный

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{e}_z\,.} \tag{5.23}$$

Оператор – символическое обозначение математической операции над функцией, преобразующей ее в другую функцию тех же переменных:

$$\vec{\nabla} W^p(\vec{r}) = \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial z}\cdot\vec{e}_z\,.$$

Обозначение градиента через оператор набла:

$$\mathrm{grad}\, W^p(\vec{r}) = \vec{\nabla} W^p(\vec{r}).$$

По (5.1) и (5.15) элементарная работа $\delta A^{\text{конс}}$ консервативной силы $\vec{F}(\vec{r})$ при малом перемещении $d\vec{r}$ МТ вдоль оси Ox (y и $z = \mathrm{const}$) равна:

$$\left.\begin{aligned} \delta A^{\text{конс}} &= \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_x \cdot dx \\ \delta A^{\text{конс}} &= -dW^p(\vec{r}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_x = -\left(\frac{dW^p(\vec{r})}{dx}\right)_{y,z=\mathrm{const}} = -\frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial x}.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$F_y = -\frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial z}.$$

Тогда

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x\cdot\vec{e}_x + F_y\cdot\vec{e}_y + F_z\cdot\vec{e}_z =$$

$$= -\left(\frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial W^p(\vec{r})}{\partial z}\cdot\vec{e}_z\right) = -\mathrm{grad} W^p(\vec{r}).$$

Связь консервативной силы и потенциальной энергии:

Сила $\vec{F}(\vec{r})$ стационарного потенциального поля (консервативная сила) равна градиенту потенциальной энергии МТ в данной точке поля с обратным знаком:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad} W^p(\vec{r})} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\, W^p(\vec{r}).} \tag{5.24}$$

Сила $\vec{F}(\vec{r})$ стационарного потенциального поля в каждой его точке направлена <u>перпендикулярно</u> эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку, в сторону <u>убывания</u> потенциальной энергии.