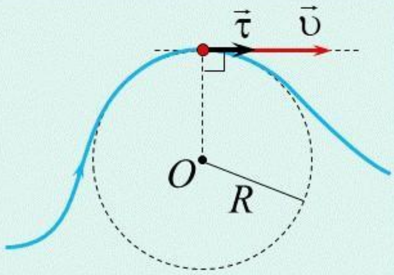
3. Тангенциальное и нормальное ускорение.

https://www.youtube.com/watch?v=h0g5iLrPKlA

Рассмотрим движение МТ вдоль плоской криволинейной траектории, которую можно представить в виде сопряженных дуг различных окружностей.

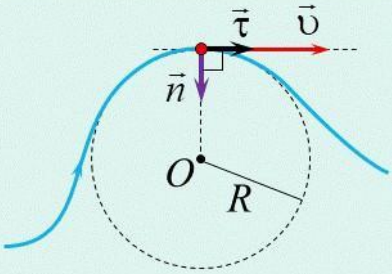


Если через некоторую точку траектории провести окружность наибольшего радиуса так, чтобы касательные в этой точке к окружности и траектории совпали, то такая окружность называется соприкасающейся, а ее радиус R – радиусом кривизны траектории в данной точке.

Для описания криволинейного движения частицы в сопутствующих (подвижных) осях, введем в рассмотрение сопутствующий ортонормированный базис, включающий:

1. $\vec{\tau}$ – ***единичный вектор касательной*** (орт касательной), равный
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}, \tag{1.15}$$
2. $\vec{n}$ – ***единичный вектор главной нормали*** (орт главной нормали), направленный в сторону вогнутости траектории, $|\vec{n}| = 1$.

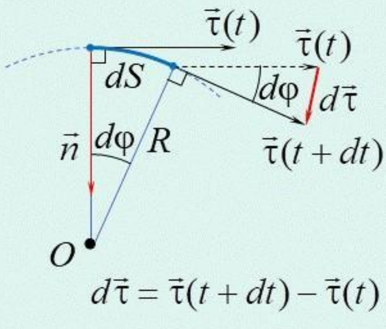
Разложим скорость $\vec{\upsilon}$ МТ и ее ускорение $\vec{a}$ по сопутствующему ортонормированному базису:



$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau}, \tag{1.16}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon \cdot \vec{\tau}) = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} \cdot \vec{\tau} + |\vec{\upsilon}| \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{1.17}$$

Выразим $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$ через радиус кривизны траектории R:



$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{\tau}|}{dt} = \frac{2|\vec{\tau}| \cdot \sin\frac{d\varphi}{2}}{dt} = \left| \begin{array}{c} |\vec{\tau}| = 1, \\ \sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{d\varphi}{dt} = \left| \begin{array}{c} (7): \\ d\varphi = \frac{dS}{R} \end{array} \right| = \frac{dS}{R} \cdot \frac{1}{dt} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \left| \begin{array}{c} (1.8): \\ \frac{dS}{dt} = |\vec{\upsilon}| \end{array} \right| = \frac{|\vec{\upsilon}|}{R}. \tag{1.18}$$

Вектор бесконечно малого приращения $d\vec{\tau}$ вектора постоянной длины ($|\vec{\tau}|$= const) всегда перпендикулярен самому вектору $\vec{\tau}$, т. е. $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$. Для доказательства продифференцируем равенство:

$$\left(\vec{\tau}, \vec{\tau}\right) = 1,$$

$$d\left(\vec{\tau}, \vec{\tau}\right) = d(1),$$

$$\left(d\vec{\tau}, \vec{\tau}\right) + \left(\vec{\tau}, d\vec{\tau}\right) = 0,$$

$$2\left(d\vec{\tau}, \vec{\tau}\right) = 0,$$

$$d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}.$$

Тогда $d\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{n}$, а с учетом выражения (1.18):

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{|\vec{\upsilon}|}{R} \cdot \vec{n}. \qquad (1.19)$$

Подставив (1.19) в (1.17), получим разложение ускорения $\vec{a}$ по сопутствующему ортонормированному базису:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n}.} \qquad (1.20)$$

Первое слагаемое в (1.20):

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} \cdot \vec{\tau}} \qquad (1.21)$$

– ***тангенциальное ускорение***, характеризующее изменение только модуля скорости.

$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}$, если $|\vec{\upsilon}|$ со временем $\uparrow$;
$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}$, если $|\vec{\upsilon}|$ со временем $\downarrow$.

Второе слагаемое в (1.20):

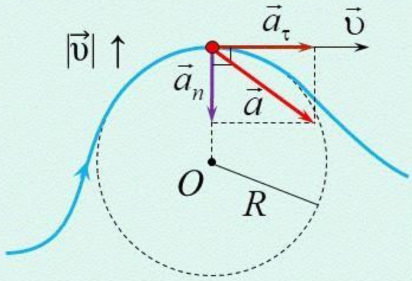
$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n}} \qquad (1.22)$$

– ***нормальное ускорение***, характеризующее изменение только направления скорости.

(1.21) и (1.22) $\rightarrow$ в (1.20):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1.23)$$

– в случае плоской траектории движения МТ ее ускорение $\vec{a}$ можно представить в виде суммы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.



Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.24)$$