

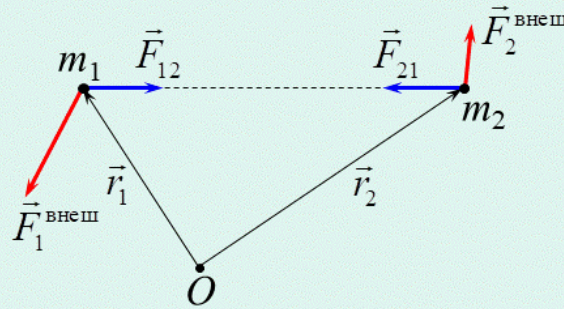
11. Момент импульса системы. Законы изменения и сохранения момента импульса системы.

**Момент импульса системы  $n$  МТ** относительно т.  $O$  – величина, равная:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (3.9)$$

где  $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$  – момент импульса  $i$ -й МТ относительно т.  $O$ ;  
 $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$  – радиус-вектор и импульс соответственно  $i$ -й МТ.

Рассмотрим систему из 2-х МТ  $m_1$  и  $m_2$  с радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ .



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  – силы взаимодействия МТ друг с другом;

$\vec{F}_1^{\text{внеш}}$  и  $\vec{F}_2^{\text{внеш}}$  – результирующая всех внешних сил, действующих на  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Уравнения движения МТ:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{\text{внеш}}, \quad (3.10)$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{\text{внеш}}. \quad (3.11)$$

Умножим векторно слева (3.10) на  $\vec{r}_1$ , а (3.11) – на  $\vec{r}_2$ :

$$\left[ \vec{r}_1, \frac{d\vec{p}_1}{dt} \right] = \left[ \vec{r}_1, \vec{F}_{12} \right] + \left[ \vec{r}_1, \vec{F}_1^{\text{внеш}} \right], \quad (3.12)$$

$$\left[ \vec{r}_2, \frac{d\vec{p}_2}{dt} \right] = \left[ \vec{r}_2, \vec{F}_{21} \right] + \left[ \vec{r}_2, \vec{F}_2^{\text{внеш}} \right]. \quad (3.13)$$

Аналогично преобразованиям в (2.25):

$$\left[ \vec{r}_1, \frac{d\vec{p}_1}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}_1, \vec{p}_1] = \frac{d\vec{L}_1}{dt}, \quad (3.14)$$

$$\left[ \vec{r}_2, \frac{d\vec{p}_2}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}_2, \vec{p}_2] = \frac{d\vec{L}_2}{dt}, \quad (3.15)$$

где  $\vec{L}_1 = [\vec{r}_1, \vec{p}_1]$  и  $\vec{L}_2 = [\vec{r}_2, \vec{p}_2]$  – соответственно момент импульса  $m_1$  и  $m_2$  относительно т.  $O$ .



$$[\vec{r}_1, \vec{F}_{12}] = \vec{M}_{12}, \quad (3.16)$$

$$[\vec{r}_2, \vec{F}_{21}] = \vec{M}_{21} \quad (3.17)$$

– соответственно момент силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  относительно т.  $O$ .

$$[\vec{r}_1, \vec{F}_1^{\text{внеш}}] = \vec{M}_1^{\text{внеш}}, \quad (3.18)$$

$$[\vec{r}_2, \vec{F}_2^{\text{внеш}}] = \vec{M}_2^{\text{внеш}} \quad (3.19)$$

– соответственно результирующий момент всех внешних сил, действующих на  $m_1$  и  $m_2$ , относительно т.  $O$ .

(3.14), (3.16) и (3.18)  $\rightarrow$  в (3.12):

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_1^{\text{внеш}}, \quad (3.20)$$

(3.15), (3.17) и (3.19)  $\rightarrow$  в (3.13):

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{21} + \vec{M}_2^{\text{внеш}} \quad (3.21)$$

и сложим их:

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_1^{\text{внеш}} + \vec{M}_{21} + \vec{M}_2^{\text{внеш}}. \quad (3.22)$$

Учтем, что:

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (3.23)$$

где  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$  – момент импульса системы относительно т.  $O$ ;

$$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}. \quad (3.24)$$

**(3.24) доказать самостоятельно.**

(3.23) и (3.24)  $\rightarrow$  в (3.22):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_1^{\text{внеш}} + \vec{M}_2^{\text{внеш}}. \quad (3.25)$$

Обобщение (3.25) на любое число  $n$  МТ системы очевидно, поэтому

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{внеш}}}, \quad (3.26)$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{внеш}}, \quad (3.26)$$

где  $\vec{L}$  – момент импульса системы  $n$  МТ относительно некоторой точки (т.  $O$ );

$\vec{M}_i^{\text{внеш}}$  – результирующий момент всех внешних сил, действующих на  $i$ -ю МТ, относительно той же т.  $O$ .

(3.26) называется **уравнением моментов**, которое выражает **закон изменения момента импульса МС**:

В ИСО производная по времени момента импульса МС относительно некоторой точки равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на эту систему, относительно той же точки.

Из (3.26) следует, что если

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \vec{0},$$

то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}.$$

Тогда

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

**Закон сохранения момента импульса МС:**

Если суммарный момент всех внешних сил, действующих на МС, относительно некоторой неподвижной точки равен нулю, то момент импульса этой МС относительно данной точки со временем сохраняется:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i(t) = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (3.27)$$

В частности, если система замкнута (на нее не действуют внешние силы), то ее момент импульса относительно любой точки в произвольной ИСО со временем сохраняется.