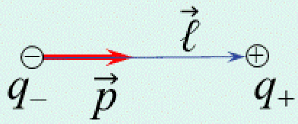
52. Электрическое поле диполя в дальней зоне (потенциал и напряженность электростатического поля точечного диполя).



***Электрический диполь*** – система из двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ($q_+$ и $q_-$), находящихся на некотором расстоянии $\ell$ друг от друга.

***Плечо диполя*** – вектор $\vec{\ell}$, проведенный от отрицательного заряда $q_-$ к положительному $q_+$.

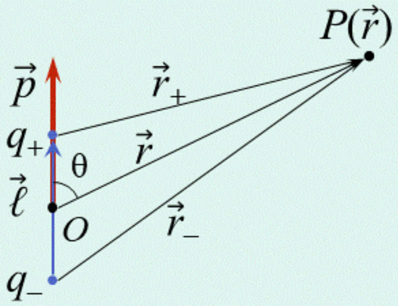



***Дипольный момент*** $\vec{p}$ (*электрический дипольный момент*) – вектор, равный

$$\boxed{\vec{p} = |q| \cdot \vec{\ell},} \tag{9.39}$$

где $|q| = q_+ = |q_-|$ – модуль одного из точечных зарядов диполя. В СИ $[p]$ = Кл·м.

Диполь называется ***точечным***, если расстояние между зарядами значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля ($\ell \ll r$).




Потенциал поля диполя в точке $P(\vec{r})$ согласно (9.35) и (9.34) равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_+(\vec{r}) + \varphi_-(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q_+}{r_+} + \frac{q_-}{r_-}\right) =$$

$$= \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_- - r_+}{r_+\cdot r_-}. \qquad (9.40)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_- &= \vec{r} + \vec{\ell}/2 \\ \vec{r}_+ &= \vec{r} - \vec{\ell}/2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} r_-^2 &= r^2 + \ell^2/4 + r\ell\cos\theta \\ r_+^2 &= r^2 + \ell^2/4 - r\ell\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad r_-^2 - r_+^2 = 2r\ell\cos\theta$$

$$(r_- - r_+)\cdot(r_- + r_+) = 2r\ell\cos\theta$$

$$r_- - r_+ = \frac{2r\ell\cos\theta}{r_- + r_+}. \qquad (9.41)$$

(9.41) → в (9.40):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2r\ell\cos\theta}{(r_- + r_+)\cdot r_+\cdot r_-} = \left|\begin{matrix} \ell \ll r \Rightarrow \\ r_- + r_+ \approx 2r \\ r_+\cdot r_- \approx r^2 \end{matrix}\right| = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\ell\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

***Потенциал электростатического поля точечного диполя***:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{p\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3},} \qquad (9.42)$$

где $\vec{p}$ – дипольный момент диполя; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения относительно диполя; $\theta$ – угол между $\vec{p}$ и $\vec{r}$.

Для нахождения $\vec{E}(\vec{r})$ воспользуемся (9.37):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\cdot\vec{e}_z\right). \qquad (9.43)$$

В ДПСК:

$$\vec{p} = p_x\cdot\vec{e}_x + p_y\cdot\vec{e}_y + p_z\cdot\vec{e}_z,$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y + z\cdot\vec{e}_z, \qquad r = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2},$$

тогда (9.42):

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p_x\cdot x + p_y\cdot y + p_z\cdot z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Самостоятельно вычислить частные производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, подставить их в (9.43) и выполнить преобразования.

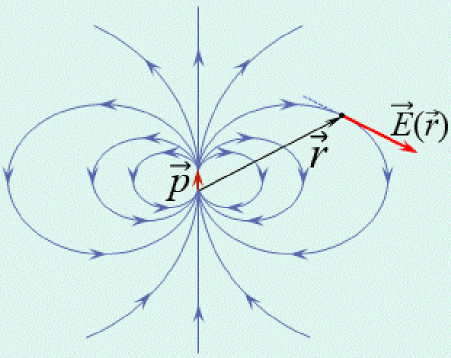
***Напряженность электростатического поля точечного диполя***:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p},\vec{r})}{r^2}\cdot\vec{r}\right).} \qquad (9.44)$$

Модуль напряженности:

$$E = \sqrt{\vec{E}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{p^2 - \frac{6(\vec{p},\vec{r})^2}{r^2} + \frac{9(\vec{p},\vec{r})^2\cdot r^2}{r^4}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{p^2 + \frac{3p^2r^2\cdot\cos^2\theta}{r^2}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}. \qquad (9.45)$$




$$E_{\max} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{при } \theta = 0;\ \pi$$

$$E_{\min} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{при } \theta = \pi/2$$