Интегральная форма теоремы о циркуляции

Линии индукции магнитного поля, которое возникает вокруг постоянного тока, который течет по прямолинейному длинному проводнику -- концентрические окружности с центрами на **линии тока**. Интеграл вида $\oint\limits_L \vec{B}\, d\,\vec{l}$ - циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L. Найдем $\oint\limits_L \vec{B}\, d\,\vec{l}$ по некоторому замкнутому контуру вокруг тока I (рис. 1).

Рис. 1

Линии магнитной индукции лежат в плоскостях перпендикулярных линии тока I, контур L выбираем в плоскости одной из линий $\vec{B}$. Используем рис.1, получим:

Обозначим $\left(\widehat{\vec{B}\, d\,\vec{l}}\right) = \alpha$, тогда имеем:

По условию магнитное поле создает бесконечно длинный прямой проводник с током, индукцию поля которого мы знаем, и запишем в точке на расстоянии r от проводника как:

Подставим (3) и (2) в формулу (1), получим:

Теперь найдем циркуляцию **вектора магнитной индукции**, используя (4), получим:

где использовано то, что для замкнутого контура, который окружает начало координат:

Из полученного результата в (5) видим, что циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру вокруг тока не зависит от вида контура и определена только силой тока. В том случае если контур ток не охватывает, то циркуляция вектора индукции равна нулю.

Тогда теорема о циркуляции для нескольких токов формулируется следующим образом:

ТЕОРЕМА

Циркуляция индукции магнитного поля постоянных токов по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, которые пронизывают этот контур.

В математическом виде данная формулировка выглядит как уравнение:

$$\oint\limits_L \vec{B}\, d\,\vec{l} = \mathrm{M}_0 \sum_{k=1}^{n} I_k = \mathrm{M}_0 I\,(7)\,,$$

где через I -- обозначают **полный ток** (алгебраическая сумма всех токов, охватываемых контуром). Теорема о циркуляции еще называется законом полного тока. Надо иметь в виду, что циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру равна нулю не только в случае отсутствия токов, которые пронизывают заданный контур, но и если токи текут в противоположных направлениях и в сумме дают ноль. В формуле (7) знак тока учитывается по правилу правого винта. Этот закон мы получили для прямого бесконечного проводника, но он справедлив и для произвольного тока.

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции

Пусть S -- поверхность, которую охватывает контур L. Положительная нормаль к поверхности связана с направлением обхода контура L правилом правого винта. Силу полного тока, который течет через поверхность S можно записать как:

$$I = \int\limits_S \vec{j}\, d\,\vec{S}\,(8),$$

где $\vec{j}$ -- объёмная плотность тока. В таком случае теорему о циркуляции запишем как:

$$\oint\limits_L \vec{B}\, d\,\vec{l} = \mu_0 \int\limits_S \vec{j}\, d\,\vec{S}\ (9)\,.$$

По теореме Стокса можно записать, что:

$$\oint\limits_L \vec{B}\, d\,\vec{l} = \int\limits_S rot\,\vec{B}\, d\,\vec{S}\ (10)\,.$$

Следовательно, запишем:

$$\int\limits_S (rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j}) d\,\vec{S} = 0\,(11)\,.$$

Равенство (11) выполняется для любой поверхности, следовательно, подынтегральное выражение также равно нулю:

$$rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j} = 0 \to rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\ \ (12)\,.$$

Равенство (12) дифференциальная форма теоремы о циркуляции. Она справедлива для произвольного поля в каждой точке.

Напомним, что теорема о циркуляции в виде (7) и (12) записана для поля в вакууме и стационарных токов.