

Задача 136

В центре скамьи Жуковского массой 15 кг и радиусом 1 м, вращающейся с угловой скоростью 1,5 рад/с, стоит человек и держит на вытянутых руках две гири по 1 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения составляет 80 см. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек сожмет руки так, что гири окажутся на оси вращения? Считать, что момент инерции человека относительно оси вращения пренебрежимо мал.

Дано:

$$m_c = 15 \text{ кг}$$

$$R = 1 \text{ м}$$

$$\omega_1 = 1,5 \text{ рад/с}$$

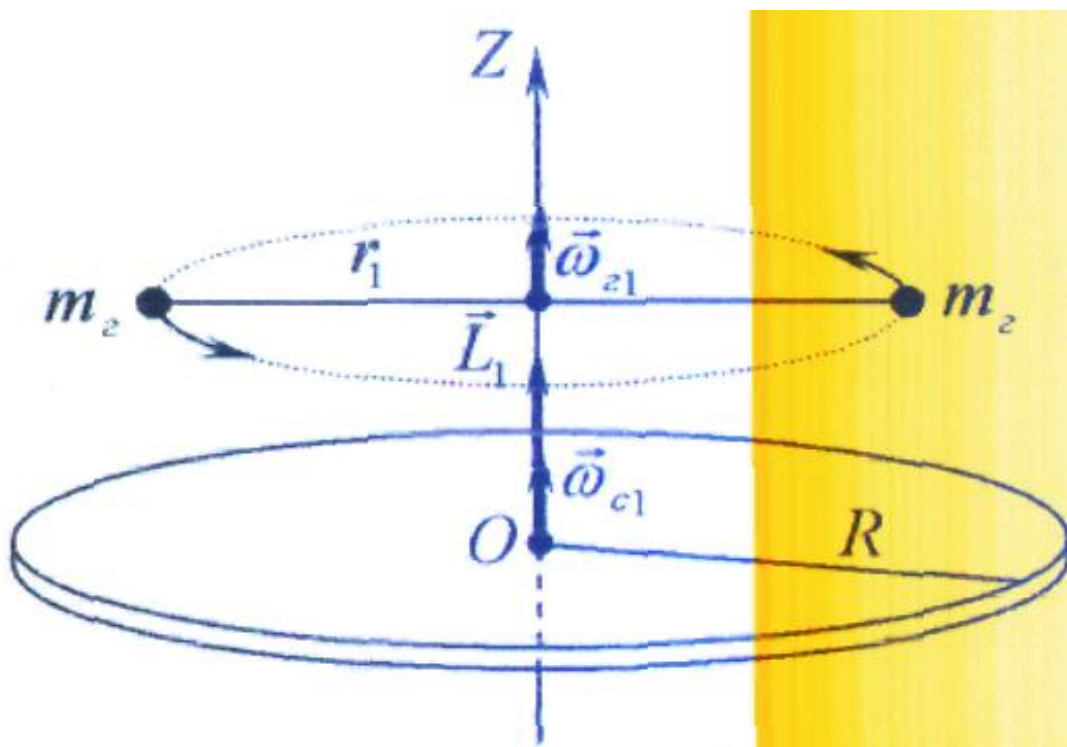
$$m_{r1} = m_{r2} = m_r = 1 \text{ кг}$$

$$r_1 = 85 \text{ см} = 0,85 \text{ м (СИ)}$$

$$r_2 = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м (СИ)}$$

Найти: ω_2

Решение



Скамья Жуковского представляет собой однородный диск, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через

центр диска перпендикулярно его плоскости. Момент инерции скамьи относительно этой оси равен

$$I_c = \frac{m_c R^2}{2} \quad (1)$$

Физическая система состоит из скамьи с человеком и двух гирь.

По условию момент инерции человека относительно оси вращения равен нулю, т.е. $I_h = 0$. Гири можно считать материальными точками и, т.к. они находятся на одном и том же расстоянии r до оси вращения, то момент инерции гирь относительно этой оси равен

$$I_r = m_{r1} r^2 + m_{r2} r^2 = 2m_r r^2 \quad (2),$$

где r – расстояние от каждой гири до оси вращения. Поскольку момент инерции I всей системы относительно оси вращения равен сумме моментов инерции всех тел системы относительно этой же оси, с учетом (1) и (2) имеем

$$I = I_c + I_r = \frac{m_c R^2}{2} + 2m_r r^2 = \frac{m_c R^2 + 4m_r r^2}{2}$$

Момент инерции системы относительно оси вращения в первом состоянии (каждая гиря находится на расстоянии r_1 от оси) равен

$$I_1 = \frac{m_c R^2}{2} + 2m_r r_1^2 = \frac{m_c R^2 + 4m_r r_1^2}{2}$$

Так как в первом случае скамья и гири вращаются относительно оси с одинаковой угловой скоростью $\omega_{c1} = \omega_{r1} = \omega_1$, тогда момент импульса системы относительно оси Oz будет равен

$$L_{1z} = I_1 \omega_1 = \frac{m_c R^2 + 4m_r r_1^2}{2} \cdot \omega_1 \quad (3)$$

Во втором состоянии (каждая гиря находится на расстоянии r_2 от оси вращения) момент инерции системы относительно оси вращения равен

$$I_2 = \frac{m_c R^2}{2} + 2m_r r_2^2 = \frac{m_c R^2 + 4m_r r_2^2}{2},$$

а поскольку скамья и гири вращаются относительно оси с одинаковой угловой скоростью $\omega_{c2} = \omega_{r2} = \omega_2$, тогда момент импульса L_{2z} системы относительно оси Oz будет равен:

$$L_{2z} = I_2 \omega_2 = \frac{m_c R^2 + 4m_r r_2^2}{2} \cdot \omega_2 \quad (4).$$

Так как моменты внешних сил (сил тяжести и реакции опоры), действующих на систему относительно оси вращения Oz, равны нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется:

$$L_{1z} = L_{2z} \quad (5)$$

Подставим в (5) выражения (3) и (4):

$$\frac{m_c R^2 + 4m_z r_1^2}{2} \cdot \omega_1 = \frac{m_c R^2 + 4m_z r_2^2}{2} \cdot \omega_2,$$

откуда угловая скорость ω_2 выражается как

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{m_c R^2 + 4m_z r_1^2}{m_c R^2 + 4m_z r_2^2}$$

Подставляя числовые значения, вычислим угловую скорость ω_2 :

$$\omega_2 = 1,5 \cdot \frac{15 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0.85^2}{15 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0.3^2} = 1.747 \text{ рад/с}$$

Ответ: 1.747 рад/с