ВОПРОС 29:

УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КВАЗИУПРУГОЙ СИЛЫ И ЕГО ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ.

Рассмотрение динамики свободного колебательного движения механической системы проведем на примере малых колебаний м.т., на которую действуют две силы: сила упругости $F_e = -k \cdot x$ и сила сопротивления вязкой среды $F_r = -r \cdot v = -r \cdot \dot{x}$, где $k > 0$ и $r > 0$. Реально такие колебания можно наблюдать на примере пружинного маятника – механической системы, состоящей из массивного тела, подвешенного посредством упругой и невесомой пружины к горизонтальной перекладине. Возвращающей силой является упругая сила F_e, действующая на тело со стороны деформированной пружины. Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx,$$

а **дифференциальное уравнение** малых затухающих колебаний для удобства записывается в форме:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\beta = r/2m$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – **собственная** угловая **частота** колебаний системы и m – масса колеблющейся системы.

Уравнение движения упрощается при отсутствии затухания ($\beta=0$) к виду:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0,$$

которое называется **уравнением собственных незатухающих колебаний**.

Одним из решений этого уравнения является уравнение гармонических колебаний $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$.

Чтобы убедиться в этом, найдем вторую производную по времени от x: $\ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x$. Подставив этот результат в уравнение движения, получим тождество 0 = 0, ч.т.д.

Период упругих колебаний равен:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{k/m} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

С увеличением массы возрастает инерционность колеблющейся системы, поэтому ее движение замедляется, и период колебаний увеличивается.

Энергия колебаний. В колеблющейся системе протекает непрерывно процесс взаимного превращения кинетической и потенциальной энергии. Полная энергия W незатухающих колебаний механической системы пропорциональна квадрату амплитуды колебаний A^2 и не изменяется со временем, хотя отдельные ее виды – кинетическая $W_к = mv^2/2$ и потенциальная $W_п = kx^2/2$ – претерпевают изменения, дважды достигая за период колебаний максимальных значений. Мгновенные значения энергий – положительные. Они соответственно равны:

$$W_К = m\,v^2/2 = m\,[A\omega_0 \sin(\omega_0 t+\alpha_0)]^2/2 = m\omega_0^2\,A^2\sin^2(\omega_0 t+\alpha_0)\,/2$$

и

$$W_П = k\,x^2/2 = k\,[A\cos(\omega_0 t+\alpha_0)]^2/2 = k\,A^2\cos^2(\omega_0 t+\alpha_0)\,/2.$$

Кинетическая энергия достигает своего максимума

$$W_К^{(max)} = m\omega_0^2 A^2$$

в моменты времени, когда фаза колебаний принимает значения $\alpha = \pi/2 \pm n\pi$, где n – целое число. Потенциальная энергия достигает своего максимума

$$W_П^{(max)} = k\,A^2$$

в моменты времени, когда фаза колебаний принимает значения $\alpha = \pm n\pi$, где n – целое число. Полная энергия имеет постоянное значение, равное:

$$W = W_К + W_П = ½\,m\,\omega_0^2\,A^2\sin^2(\omega_0 t+\alpha_0) + ½\,k\,A^2\cos^2(\omega_0 t+\alpha_0) =$$

$$= \boxed{W_К^{(max)} = W_П^{(max)} = m\,\omega_0^2 A^2 = k\,A^2}.$$