53 вопрос Физика

Распределение (или закон) Максвелла--Больцмана описывает распределение молекул газа по координатам и скоростям при системном воздействии внешнего потенциального поля.

Распределение Больцмана описывается в пространстве координат x, y и z, а распределение Максвелла в пространстве скоростей v_x, v_y и v_z.

Если ввести 6-мерное пространство, координатами молекулы в котором являются величины x, y, z, v_x, v_y и v_z, то функция распределения в таком пространстве будет зависеть от этих шести переменных: $n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$. Считая пространственные переменные x, y, z и компоненты скорости v_x, v_y, v_z статистически независимыми друг от друга, можно записать:

$$n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n(x, y, z) f(v_x, v_y, v_z) \qquad \textbf{(5.76)}$$

или

$$n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_\Pi(x, y, z) + E_K(v_x, v_y, v_z)}{kT}\right) \qquad \textbf{(5.77)}$$

,

где выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$E_K(v_x, v_y, v_z) = m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)/2 \qquad \textbf{(5.78)}$$

.

Формула (5.77) описывает распределение, называющееся *распределением Максвелла-Больцмана*. Она может быть использована в случае, когда полная энергия молекулы E равна сумме её потенциальной энергий E_Π во внешнем силовом поле и кинетической энергии E_K её поступательного движения: $E = E_\Pi + E_K$.

При получении закона распределения Максвелла-Больцмана предполагалось, что температура газа не зависит от координаты точки. В частности, температура газа на всех высотах над поверхностью Земли при термодинамическом равновесии должна быть одинакова. С этим утверждением связан парадокс, всесторонне рассмотренный Максвеллом. Дело в том, что при движении вверх молекулы газа должны затрачивать свою кинетическую энергию на преодоление силы тяжести, и поэтому их средняя кинетическая энергия (а следовательно и температура) должна уменьшаться. Но этого не происходит вследствие того, что при этом не все молекулы, из-за недостатка их кинетической энергии, смогут преодолеть силу тяжести. Молекулы, имеющие недостаточную кинетическую энергию, не могут подняться высоко, что приведет, в соответствии с распределением

Больцмана, к уменьшению их концентрации с высотой. Поэтому температура газа останется неизменной.

Функция распределения в случае, когда кинетическая энергия зависит только от скорости $\vec{v}$, а потенциальная - только от радиус-вектора $\vec{r}$ частицы, имеет вид:

$$f(\vec{r},\vec{v})=\frac{1}{\Theta}\exp\left(-\frac{E_{\Pi}(\vec{r})+E_{K}(\vec{v})}{kT}\right), \qquad (5.79)$$

где постоянная Θ определяется:

$$\Theta=\int\limits_{V_v}\int\limits_{V}\exp\left(-\frac{E_{\Pi}(\vec{r})+E_{K}(\vec{v})}{kT}\right)dV\,dV_v \qquad (5.80)$$

Здесь: V - объем, занимаемый системой в координатном пространстве, V_v - соответствующий объем в пространстве скоростей.

Формула (5.79) позволяет описывать равновесное распределение для достаточно произвольной термодинамической системы.

Полученные выше функции распределения описывают случай, когда полная энергия частицы E принимает непрерывный ряд значений. При статистическом описании системы, частицы которой могут принимать только некоторый дискретный набор значений энергии $E_1, E_2, \ldots, E_K$ необходимо использовать вместо функции распределения вероятность нахождения частицы в состоянии со значением энергии E_i : $P(E_i)$. В случае дискретных состояний можно записать следующее выражение для этой вероятности $P(E_i)$.

$$P(E_i)=\frac{1}{\Theta}\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \qquad (5.81)$$

где величина Θ определяется из условия нормировки (5.2):

$$\Theta=\sum_{i=1}^{K}\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \qquad (5.82)$$

Если полное число частиц в системе равно N, то число частиц N_i в состоянии с энергией E_i определяется по формуле:

$$N_i = P(E_i)N. \qquad (5.83)$$

Формула (5.81) называется *распределением Больцмана для дискретных состояний.*

Задача 5.4. Рассчитать среднее значение полной энергии случайных тепловых колебаний тела, подвешенного на пружине (осциллятора).

Решение: Кинетическая энергия тела, совершающего одномерные колебания имеет вид:

$$E_К(v) = mv^2/2,$$

а потенциальная энергия соответственно равна:

$$E_П(x) = \chi x^2/2,$$

где: m - масса тела, χ - жесткость пружины.

Функцию распределения для рассматриваемого случая в соответствии с формулами (5.79) и (5.80) можно записать в виде

$$f(x,v) = \frac{\sqrt{m\chi}}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv^2 + \chi x^2}{2kT}\right).$$

Среднее значение полной энергии равно сумме средних значений кинетической и потенциальной энергий:

$$\langle E \rangle = \langle E_К(v) \rangle + \langle E_П(x) \rangle,$$

Которые равны:

$$\langle E_К(v) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2}\frac{\sqrt{m\chi}}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv^2 + \chi x^2}{2kT}\right)dv dx = \frac{kT}{2},$$

$$\langle E_П(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi x^2}{2}\frac{\sqrt{m\chi}}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv^2 + \chi x^2}{2kT}\right)dv dx = \frac{kT}{2}.$$