Методы вычислений

Лабораторная работа №3. Итерационные методы решения СЛАУ

Общая информация

Результатом выполнения работы является отчет, представляющий собой документ в формате pdf либо *.ipynb. Отчет содержит следующие разделы:

1. Постановка задачи (копия условия вашего задания)
2. Основная часть: код, комментарии, ответы на вопросы, согласно пунктам задания
3. Заключение: краткое описание проделанной работы и сделанные выводы

За каждую неделю задержки сдачи работы максимальная оценка снижается на 2 балла.

Номера вариантов находятся в конце документа.

Задание 1. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя

Дана матрица A (указана в варианте, см. список 1 ниже).

1. Теоретически исследовать сходимость методов Якоби и Гаусса-Зейделя для системы $Ax = b$.
2. Подтвердить сделанные выводы экспериментально путем построения логарифмических диаграмм сходимости. Диаграмма должна быть общей для двух итерационных процессов, обязательно наличие легенды с указанием методов.

Задание 2. Метод релаксации 1

Дана матрица A (указана в варианте, см. список 1 ниже).

1. Написать программу, которая решает СЛАУ $Ax = b$ методом релаксации (в качестве вектора b взять вектор, соответствующий какому-нибудь заданному значению x). Экспериментально подобрать значение параметра ω, при котором итерационный процесс сходится ω_1), а также значение, при котором он расходится (ω_0).
2. Путем теоретического анализа подтвердить сходимость и расходимость.
3. Построить логарифмическую диаграмму сходимости (совмещенную) для $\omega = \omega_0, \omega_1, \omega = 1$ и еще двух любых значений от 0 до 2.

Задание 3. Метод релаксации 2

Дана матрица A (указана в варианте, см. список 1 ниже).

1. Написать программу, которая решает СЛАУ $Ax = b$ методом релаксации (в качестве вектора b взять вектор, соответствующий какому-нибудь заданному значению x)
2. Экспериментально подобрать значение параметра $\omega = \omega^*$, при котором сходимость будет наиболее быстрой.
3. Для подтверждения своего вывода построить совмещенную диаграмму сходимости для как минимум пяти различных значений ω (включая ω^*).
4. Теоретически доказать сходимость метода релаксации при $\omega = \omega^*$.

Задание 4. Симметричный метод Гаусса-Зейделя

Симметричный метод Гаусса-Зейделя (ГЗ) представляет собой композицию обычного и обратного методов ГЗ. То есть, для вычисления x^{k+1} сначала находится промежуточное приближение $x^{k+\frac{1}{2}}$ стандартным методом ГЗ, а затем, начиная с $x^{k+\frac{1}{2}}$ выполняется одна итерация обратного метода ГЗ (в котором обновление компонент осуществляется в обратном порядке, с n-й по 1-ю). Полученный результат и будет новым приближением x^{k+1}.

Постановка задачи

1. Записать симметричный метод ГЗ в виде стационарного итерационного метода $x^{k+1} = Bx^k + g$ (найти вид матрицы B и вектора g).
2. Для указанной в варианте матрицы из списка 1 (см. ниже) теоретически исследовать сходимость симметричного и простого методов ГЗ.
3. Подтвердить теоретические результаты экспериментально путем построения логарифмической диаграммы сходимости обоих методов.

Задание 5. Итерационные методы для разреженных СЛАУ особого вида

1. Написать программу, которая при данном n решает СЛАУ $A_n x = b_n$ указанным в варианте методом. Здесь A_n – разреженные матрицы размерности n из списка 2 (см. ниже), указанные в варианте.
   - Матрицу A_n следует либо хранить в одном из форматов для разреженных матриц, либо сразу реализовать итерационный метод, учитывая известную структуру матрицы. *Хранить в памяти матрицу A_n целиком со всеми нулями запрещено!*
   - Вектор b_n выбирать таким образом, чтобы он соответствовал некоторому заранее заданному решению.
   - Критерий остановки итераций: $\|A_n x^k - b_n\| < \varepsilon$
2. Подвердить правильность работы программы на примере нескольких СЛАУ размерности 5-10.
3. Построить диаграмму сходимости (общую) для $n = 100, 1000, 10000$.
4. Построить диаграмму, в которой по оси абсцисс изменяется $n = [10^{k/2}]$, $k = 1, \ldots, 12$, а на оси ординат отложено время работы, которое требуется, чтобы норма невязки не превышала 10^{-8}.

Варианты методов

1. МетодЯкоби
2. Метод Гаусса-Зейделя
3. Метод релаксации (параметр ω подобрать экспериментально)
4. Симметричный метод Гаусса-Зейделя (см. задание 4)

Список 1. Тестовые матрицы 3x3

1. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 0 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -35 & 47 & -23 \\ 13 & 48 & 0 \\ 27 & -47 & -40 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -22 & 48 & -38 \\ 8 & -28 & -38 \\ -10 & 44 & -48 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 46 & 35 & 14 \\ -20 & -50 & 6 \\ 37 & -46 & -42 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 45 & -43 & 7 \\ 41 & 26 & 45 \\ 9 & 24 & 40 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 12 & 28 & 25 \\ -33 & 39 & -30 \\ 14 & -20 & 19 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Список 2. Разреженные тестовые матрицы

1. Матрицы A_n вида $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ и т. д.: по диагонали — размерность матрицы, по краям — единицы.

2. Матрицы A_n вида $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ и т. д.

3. Матрицы вида $A_n = \begin{pmatrix} d & 0 & e & & & & \\ 0 & d & 0 & e & & & \\ c & 0 & d & 0 & e & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & 0 & d & 0 & e \\ & & & c & 0 & d & 0 \\ & & & & c & 0 & d \end{pmatrix}$.

   A. $c = -1, d = 5, e = -2$
   B. $c = -1, d = 2, e = -1$
   C. $c = -1, d = 2, e = 3$
   D. $c = -1, d = 2, e = 100$

4. Матрицы вида $A_n = \begin{pmatrix} a & & & & & & & b \\ & \ddots & & & & & \dots & \\ & & a & & & b & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & b & & & a & & \\ & \dots & & & & & \ddots & \\ b & & & & & & & a \end{pmatrix}$. Здесь a, и b — параметры, n четное.

   A. $a = -2, b = 1$
   B. $a = 1, b = -2$
   C. $a = 1, b = -100$
   D. $a = 1, b = 100$

ВАРИАНТЫ

1. Задание 1 (1) + Задание 5 (метод 1, задача 4 A)
2. Задание 2 (2) + Задание 5 (метод 2, задача 3 A)
3. Задание 3 (3) + Задание 5 (метод 3, задача 2)
4. Задание 1 (4) + Задание 5 (метод 1, задача 1)
5. Задание 2 (5) + Задание 5 (метод 2, задача 4 B)
6. Задание 3 (6) + Задание 5 (метод 3, задача 3 B)
7. Задание 1 (7) + Задание 5 (метод 1, задача 2)
8. Задание 2 (8) + Задание 5 (метод 2, задача 1)
9. Задание 3 (9) + Задание 5 (метод 3, задача 4 C)
10. Задание 1 (10) + Задание 5 (метод 1, задача 3 C)
11. Задание 2 (11) + Задание 5 (метод 2, задача 2)
12. Задание 3 (12) + Задание 5 (метод 3, задача 1)
13. Задание 1 (13) + Задание 5 (метод 1, задача 4 D)
14. Задание 2 (14) + Задание 5 (метод 2, задача 3 D)
15. Задание 3 (15) + Задание 5 (метод 3, задача 1)
16. Задание 4 (15)
17. Задание 4 (5)
18. Задание 5 (метод 4, задача 4A)
19. Задание 5 (метод 4, задача 2)
20. Задание 5 (метод 4, задача 1)
21. Задание 4 (20)
22. Задание 4 (19)
23. Задание 5 (метод 4, задача 3D)