Методы вычислений

Лабораторная работа №2. Прямые методы решения СЛАУ

Общая информация

Результатом выполнения работы явлется отчет в виде pdf-документа (если работа выполнялась на языке Python, можно высылать документ *.ipynb). Отчет содержит следующие разделы:

1. Постановка задачи (копия условия вашего задания)
2. Основная часть: код, комментарии, ответы на вопросы, согласно пунктам задания
3. Заключение: краткое описание проделаннойработы и сделанные выводы

За каждую неделю задержки сдачи работы максимальная оценка снижается на 2 балла.

Задание 1. Метод Гаусса с выбором ГЭ по столбцу

1. Написать программу, которая решает СЛАУ A x=b и вычисляет определитель матрицы A методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & -8 & -5 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -16 & -10 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & -32 & -20 & 4 & -8 & 0 & -2 \\ -16 & -64 & -40 & 8 & -16 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -18 \\ -30 \\ -58 \\ -123 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1023 \\ 29524 \\ 349525 \\ 2441406 \\ 12093235 \\ 47079208 \\ 153391689 \\ 435848050 \\ 1111111111 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -8 \\ -6 \\ 24 \\ 30 \\ 64 \\ 100 \\ 216 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного ПО и сравнить результаты.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 2. Метод Гаусса с выбором ГЭ по строке

1. Написать программу, которая решает СЛАУ A x=b и вычисляет определитель матрицы A методом Гаусса с выбором главного элемента по строке. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 3 & 5 & -4 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & -3 & 4 & -1 & -5 & 3 & 5 \\ -4 & -8 & -6 & 12 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -8 & -16 & -12 & 24 & 6 & -3 & -4 & 1 \\ -16 & -32 & -24 & 48 & 12 & -5 & 5 & 3 \\ -32 & -64 & -48 & 96 & 24 & -10 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 & 59049 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 & 1048576 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 & 9765625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 & 60466176 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 & 282475249 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 & 1073741824 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 & 3486784401 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 & 10000000000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 & 14641 & 161051 & 1771561 & 19487171 & 214358881 & 2357947691 & 25937424601 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 2047 \\ 88573 \\ 1398101 \\ 12207031 \\ 72559411 \\ 329554457 \\ 1227133513 \\ 3922632451 \\ 11111111111 \\ 28531167061 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 3 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & -2 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 10 & -6 & 3 & 5 & 4 & -2 & 5 & 2 \\ 20 & -12 & 6 & 8 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 40 & -24 & 12 & 16 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 80 & -48 & 24 & 32 & 0 & 9 & 1 & 5 \\ 160 & -96 & 48 & 64 & 0 & 18 & 7 & 4 \\ 4 & -2 & -3 & -1 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \\ 2 \\ 8 \\ 23 \\ 45 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и сравнить результаты.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 3. Метод Гаусса с выбором ГЭ по всей матрице

1. Написать программу, которая решает СЛАУ A x=b и вычисляет определитель матрицы A методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 511 \\ 9841 \\ 87381 \\ 488281 \\ 2015539 \\ 6725601 \\ 19173961 \\ 48427561 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 & 4 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 3 & -5 & 5 & 5 \\ -6 & -2 & 3 & 5 & 3 & -3 & -4 & -3 & 1 \\ -12 & -4 & 6 & 7 & 2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -24 & -8 & 12 & 14 & 9 & 4 & 4 & -1 & 5 \\ -48 & -16 & 24 & 28 & 18 & 6 & -2 & 1 & -2 \\ -96 & -32 & 48 & 56 & 36 & 12 & -3 & 2 & 4 \\ -192 & -64 & 96 & 112 & 72 & 24 & -6 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & 2 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 79 \\ -27 \\ 18 \\ 186 \\ 206 \\ 491 \\ 907 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & -5 & 2 & -1 & 4 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -10 & -1 & 5 & -3 & 1 & -5 & -5 \\ 8 & 0 & -20 & -9 & 5 & 1 & 1 & -5 & 4 \\ 16 & 0 & -40 & -18 & 13 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 32 & 0 & -80 & -36 & 26 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 64 & 0 & -160 & -72 & 52 & -2 & 8 & 0 & -2 \\ 128 & 0 & -320 & -144 & 104 & -4 & 16 & -11 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 41 \\ -44 \\ -101 \\ -54 \\ -139 \\ -281 \\ -418 \\ -843 \\ -15 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и сравнить результаты.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 4. Метод отражений

1. Используя библиотеку NumPy, написать программу, которая решает СЛАУ $Ax = b$ и вычисляет определитель матрицы A методом отражений. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & -8 & -5 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -16 & -10 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & -32 & -20 & 4 & -8 & 0 & -2 \\ -16 & -64 & -40 & 8 & -16 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -18 \\ -30 \\ -58 \\ -123 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1023 \\ 29524 \\ 349525 \\ 2441406 \\ 12093235 \\ 47079208 \\ 153391689 \\ 435848050 \\ 1111111111 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -8 \\ -6 \\ 24 \\ 30 \\ 64 \\ 100 \\ 216 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и сравнить результаты.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 5. Обращение матрицы методом Гаусса с выбором ГЭ по столбцу

1. Написать программу, которая обращает матрицу методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & -8 & -5 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -16 & -10 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & -32 & -20 & 4 & -8 & 0 & -2 \\ -16 & -64 & -40 & 8 & -16 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Найти точные обратные матрицы с использованием библиотеки SymPy и вычислить нормы разности между точной и приближенной матрицами A^{-1}.

3. Проведите экспериментальное исследование скорости обращения матрицы в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Матрицу размерности ваша программа на вашем компьютере может обратить за одну минуту?

Задание 6. Решение СЛАУ методом LU-разложения

1. Написать программу, которая строит LU-разложение матрицы A (с выбором главного элемента по столбцу) и решает СЛАУ A x=b. Кроме вектора x программа должна выводить матрицы L и U (возможно, совмещенные в одну), а также вектор перестановок. Применить программу к следующим ниже входным данным.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 & 5 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 28 \\ 1538 \\ 21324 \\ 145636 \\ 659180 \\ 2284278 \\ 6565468 \\ 16434824 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и сравнить результаты.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из третьего тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 7. Обращение матрицы методом Гаусса с выбором ГЭ по столбцу

1. Написать программу, которая обращает матрицу методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & -8 & -5 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -16 & -10 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & -32 & -20 & 4 & -8 & 0 & -2 \\ -16 & -64 & -40 & 8 & -16 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Найти точные обратные матрицы с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и вычислить нормы разности между точной и приближенной матрицами A^{-1}.

3. Проведите экспериментальное исследование скорости обращения матрицы в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Матрицу размерности ваша программа на вашем компьютере может обратить за одну минуту?

4. Проведите экспериментальное исследование скорости решения СЛАУ в зависимости от размерности системы, используя для тестов матрицу A и вектор b со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 8. Решение СЛАУ методом квадратного корня

1. Написать программу, которая строит знакопеременное разложение Холецкого матрицы $A = GEG^T$, решает СЛАУ $Ax = b$ методом квадратного корня и вычисляет определитель матрицы A. Кроме вектора x программа должна выводить матрицу G и главную диагональ матрицы E. Применить программу к следующим ниже входным данным.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 10 \\ 6 & 10 & -20 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 10 & 20 & 5 & -20 & 20 & 25 & 5 & 20 \\ 0 & -16 & -8 & -8 & 12 & -20 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & 36 & -2 & 20 & -12 & 8 & 8 & 8 & 26 \\ 20 & -8 & -2 & 49 & -10 & 3 & 17 & 6 & -15 & 43 \\ 5 & 12 & 20 & -10 & -20 & 13 & 11 & 9 & 22 & 10 \\ -20 & -20 & -12 & 3 & 13 & -17 & -36 & -22 & -14 & -22 \\ 20 & 12 & 8 & 17 & 11 & -36 & -52 & 6 & -10 & -27 \\ 25 & -4 & 8 & 6 & 9 & -22 & 6 & -6 & -2 & 10 \\ 5 & 0 & 8 & -15 & 22 & -14 & -10 & -2 & -26 & -3 \\ 20 & 0 & 26 & 43 & 10 & -22 & -27 & 10 & -3 & -38 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 625 \\ -96 \\ 574 \\ 624 \\ 474 \\ -895 \\ -701 \\ 54 \\ -355 \\ -328 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & -4950 & 79200 & -600600 & 2522520 & -6306300 & 9609600 & -8751600 & 4375800 & -923780 \\ -4950 & 326700 & -5880600 & 47567520 & -208107900 & 535134600 & -832431600 & 770140800 & -389883780 & 83140200 \\ 79200 & -5880600 & 112907520 & -951350400 & 4281076800 & -11237826600 & 17758540800 & -16635041280 & 8506555200 & -1829084400 \\ -600600 & 47567520 & -951350400 & 8245036800 & -37875637800 & 101001700800 & -161602721280 & 152907955200 & -78843164400 & 17071454400 \\ 2522520 & -208107900 & 4281076800 & -37875637800 & 176752976400 & -477233036280 & 771285715200 & -735869534400 & 382086104400 & -83223340200 \\ -6306300 & 535134600 & -11237826600 & 101001700800 & -477233036280 & 1301544644400 & -2121035716800 & 2037792556800 & -1064382719400 & 233025352560 \\ 9609600 & -832431600 & 17758540800 & -161602721280 & 771285715200 & -2121035716800 & 3480673996800 & -3363975014400 & 1766086882560 & -388375587600 \\ -8751600 & 770140800 & -16635041280 & 152907955200 & -735869534400 & 2037792556800 & -3363975014400 & 3267861442560 & -1723286307600 & 380449555200 \\ 4375800 & -389883780 & 8506555200 & -78843164400 & 382086104400 & -1064382719400 & 1766086882560 & -1723286307600 & 912328045200 & -202113826200 \\ -923780 & 83140200 & -1829084400 & 17071454400 & -83223340200 & 233025352560 & -388375587600 & 380449555200 & -202113826200 & 44914183600 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -19930830 \\ 1825120440 \\ -40513825440 \\ 379810431000 \\ -1855066433220 \\ 5196243812760 \\ -8656214046480 \\ 8471034205920 \\ -4494352236660 \\ 997272241680 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и вычислить нормы погрешности.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости построения разложения Холецкого в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу симметричную матрицу A со случайными числами. Чтобы матрицы получились положительно определенными, они должны обладать свойством диагонального преобладания, а диагональные элементы должны быть положительны. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Написать программу, которая реализует решение СЛАУ $Ax = b$ с симметричной матрицей A методами LU-разложения (без выбора главного элемента) и разложения Холецкого. Провести эксперимент по сравнению эффективности этих методов: решить тестовые системы (со случайными симметричными матрицами) размерности 100, 200, ..., 10000 и изобразить совмещенные графики зависимости времени работы каждого метода от размерности системы. Чтобы матрицы получились положительно определенными, они должны обладать свойством диагонального преобладания, а диагональные элементы должны быть положительны. Результаты экспериментов должны согласовываться с теоретическими оценками сложности алгоритмов.

В отчет включить: описание реализованных алгоритмов (обязательно указать сложность каждого из них), построенные графики, комментарии по результатам вычислительных экспериментов.

Задание 10. Решение СЛАУ методом LDL^T-разложения

1. Написать программу, которая для симметричной матрицы строит разложение $A = LDL^T$ (L – нижнетреугольная, D – диагональная), решает с его помощью СЛАУ $Ax = b$ и вычисляет определитель матрицы A. Кроме вектора x программа должна выводить матрицу L и главную диагональ матрицы D. Применить программу к следующим ниже входным данным.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 10 \\ 6 & 10 & -20 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 10 & 20 & 5 & -20 & 20 & 25 & 5 & 20 \\ 0 & -16 & -8 & -8 & 12 & -20 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & 36 & -2 & 20 & -12 & 8 & 8 & 8 & 26 \\ 20 & -8 & -2 & 49 & -10 & 3 & 17 & 6 & -15 & 43 \\ 5 & 12 & 20 & -10 & -20 & 13 & 11 & 9 & 22 & 10 \\ -20 & -20 & -12 & 3 & 13 & -17 & -36 & -22 & -14 & -22 \\ 20 & 12 & 8 & 17 & 11 & -36 & -52 & 6 & -10 & -27 \\ 25 & -4 & 8 & 6 & 9 & -22 & 6 & -6 & -2 & 10 \\ 5 & 0 & 8 & -15 & 22 & -14 & -10 & -2 & -26 & -3 \\ 20 & 0 & 26 & 43 & 10 & -22 & -27 & 10 & -3 & -38 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 625 \\ -96 \\ 574 \\ 624 \\ 474 \\ -895 \\ -701 \\ 54 \\ -355 \\ -328 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & -4950 & 79200 & -600600 & 2522520 & -6306300 & 9609600 & -8751600 & 4375800 & -923780 \\ -4950 & 326700 & -5880600 & 47567520 & -208107900 & 535134600 & -832431600 & 770140800 & -389883780 & 83140200 \\ 79200 & -5880600 & 112907520 & -951350400 & 4281076800 & -11237826600 & 17758540800 & -16635041280 & 8506555200 & -1829084400 \\ -600600 & 47567520 & -951350400 & 8245036800 & -37875637800 & 101001700800 & -161602721280 & 152907955200 & -78843164400 & 17071454400 \\ 2522520 & -208107900 & 4281076800 & -37875637800 & 176752976400 & -477233036280 & 771285715200 & -735869534400 & 382086104400 & -83223340200 \\ -6306300 & 535134600 & -11237826600 & 101001700800 & -477233036280 & 1301544644400 & -2121035716800 & 2037792556800 & -1064382719400 & 233025352560 \\ 9609600 & -832431600 & 17758540800 & -161602721280 & 771285715200 & -2121035716800 & 3480673996800 & -3363975014400 & 1766086882560 & -388375587600 \\ -8751600 & 770140800 & -16635041280 & 152907955200 & -735869534400 & 2037792556800 & -3363975014400 & 3267861442560 & -1723286307600 & 380449555200 \\ 4375800 & -389883780 & 8506555200 & -78843164400 & 382086104400 & -1064382719400 & 1766086882560 & -1723286307600 & 912328045200 & -202113826200 \\ -923780 & 83140200 & -1829084400 & 17071454400 & -83223340200 & 233025352560 & -388375587600 & 380449555200 & -202113826200 & 44914183600 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -19930830 \\ 1825120440 \\ -40513825440 \\ 379810431000 \\ -1855066433220 \\ 5196243812760 \\ -8656214046480 \\ 8471034205920 \\ -4494352236660 \\ 997272241680 \end{pmatrix}$$

2. Найти точное решение указанных систем с использованием библиотеки SymPy или аналогичного программного обеспечения и вычислить нормы погрешности.

3. Вычислить число обусловленности в максимум-норме матрицы A из второго тестового задания. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с возмущенным вектором b подтвердите связь между числом обусловленности и относительными погрешностями начальных данных и решения.

4. Проведите экспериментальное исследование скорости построения разложения Холецкого в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу симметричную матрицу A со случайными числами. Чтобы матрицы получились положительно определенными, они должны обладать свойством диагонального преобладания, а диагональные элементы должны быть положительны. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Систему какой размерности ваша программа на вашем компьютере может решить за одну минуту?

Задание 11. Метод наименьших квадратов (нормальные уравнения)

1. Написать программу, которая решает задачи наименьших квадратов вида

$$\|A_k x = b\| \to \min$$

методом нормальных уравнений с использованием разложения Холецкого. Здесь A_k — матрица, составленная из первых k столбцов матрицы A, $k = 1, 2, \ldots, n$. Разложение Холецкого следует реализовать самостоятельно.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -8 \\ -6 \\ 24 \\ 30 \\ 64 \\ 100 \\ 216 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Сравнить полученные результаты с результатами работы функции scipy.linalg.lstsq, вычислить нормы погрешности.

3. Построить график нормы невязки в зависимости от k.

Задание 12. Метод наименьших квадратов (QR)

1. Написать программу, которая решает задачи наименьших квадратов вида

$$\|A_k x = b\| \to \min$$

методом QR-разложения с использованием преобразований отражения. Здесь A_k — матрица, составленная из первых k столбцов матрицы A, $k = 1, 2, \ldots, n$. При реализации на k-м шаге следует использовать результаты вычислений на предыдущих шагах.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 & 5 & -5 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 & 1 & -4 & -5 \\ 10 & 6 & 2 & -3 & -2 & -2 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ 20 & 12 & 4 & -5 & -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 40 & 24 & 8 & -10 & 5 & -1 & 5 & 2 & 0 & -3 \\ 80 & 48 & 16 & -20 & 10 & -12 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 160 & 96 & 32 & -40 & 20 & -24 & -3 & -4 & 1 & 4 \\ 320 & 192 & 64 & -80 & 40 & -48 & -6 & -11 & 0 & -3 \\ 640 & 384 & 128 & -160 & 80 & -96 & -12 & -22 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -8 \\ -6 \\ 24 \\ 30 \\ 64 \\ 100 \\ 216 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Построить график нормы невязки в зависимости от k.

Задание 13. Исследование эффективности метода Гаусса для матриц специального вида

1. Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, с матрицей вида
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a & a & a & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \dots & 1 & 1 \\ a & a & a & a & \dots & a & 1 \end{pmatrix},$$
где a=-0.99, и вектором правой части b, который выбран таким образом, чтобы точным решением был вектор $x = (c, c, c, \cdots, c)^T$, $c = 1.1$.

2. Написать программу, которая решает системы такого вида методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и вычисляет норму погрешности полученного решения (обозначим эту норму ϵ_n, где n – размерность матрицы A).

3. Построить график зависимости ϵ_n от n. Полученные результаты (а они должны быть неутешительными), следует обязательно объяснить теоретически.

4. Предложить и обосновать более эффективный метод (назовем его метод 2) решения таких систем, подтвердить его эффективность соответствующим графиком.

5. В отчет включить: постановку задачи, график нормы погрешности для метода Гаусса, объяснение результата, описание метода 2, соответствующий ему график погрешности, объяснение почему этот метод работает лучше первого.