Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Diskretne strukture UNI: 2. računski izpit

3. februar 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Naj bo $X = X(p, q)$ neznani izraz in naj bo $I = p \lor \neg q \lor X \Rightarrow p \land (q \Leftrightarrow X)$.

a) (10 točk) Ali je izraz I lahko protislovje?

$\underbrace{p \lor \neg q \lor X}_{1.} \overset{4.}{\Rightarrow} \overset{3.}{p \land} \underbrace{(q \Leftrightarrow X)}_{2.}$

p	q	X	1.	4.	3.	2.
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$I \sim 0$

p	q	X	X_1	X_2
0	0	0 ali 1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

I je protislovje, če ima X eno od teh resničnostnih tabel.

b) (10 točk) Ali je izraz I lahko tavtologija?

$I \sim 1$

p	q	X
0	0	???
0	1	0
1	0	0
1	1	1

→ Pri $p \sim q \sim 0$ bo $I \sim 0$ ne glede na vrednost X, zato I ne more biti tavtologija.

c) (5 točk) Poišči (do enakovrednosti izjavnih izrazov natančno) vse možne izraze X, za katere je I protislovje ali tavtologija, ter vsakega od njih zapiši z uporabo največ dveh izjavnih veznikov.

X_1	X_2
0	1
1	1
1	1
0	0

$X_1 \sim \neg(p \Leftrightarrow q) \sim p \veebar q$

$X_2 \sim \neg(p \land q) \sim p \uparrow q$

2. naloga (25 točk)

Na množici $\mathcal{N}$ vseh nizov iz črk A, B in C definiramo relacijo s predpisom

$$\alpha R \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ in } \beta \text{ sta iste oblike,}$$

pri čemer pravimo, da sta niza iste oblike, če obstaja permutacija črk, s katero iz prvega niza dobimo drugega. Na primer, $ABBA$ je iste oblike kot $ACCA$ in $CBBC$ (vsi so oblike 1221), nobeden od njih pa ni iste oblike kot $AABB$ (oblike 1122). Nizi različnih dolžin niso nikoli iste oblike.

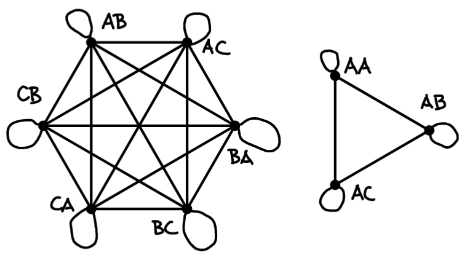
a) (5 točk) Naj bo $\alpha = ACC$. Naštej vse nize, ki so v relaciji R z α.

ACC ABB BCC BAA CBB CAA

b) (5 točk) Naj bo $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$ podmnožica vseh nizov dolžine 2. Nariši graf relacije R na $\mathcal{N}_2$.

$\mathcal{N}_2 = \{ AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC \}$

11 12



c) (10 točk) Ali je relacija R na $\mathcal{N}$ ekvivalenčna? Zakaj?

- R je refleksivna: $\forall \alpha: \alpha R \alpha$ (niz α je iste oblike kot α)
- R je simetrična: $\forall \alpha, \beta: (\alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha)$ (če je α iste oblike kot β, je tudi β iste oblike kot α)
- R je tranzitivna: $\forall \alpha, \beta, \gamma \, (\alpha R \beta \land \beta R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma)$
  (če je α iste oblike kot β in β iste oblike kot γ, je tudi α iste oblike kot γ)

Ker je R refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.

d) (5 točk) Na koliko razredov razbije relacija R množico $\mathcal{N}_3$?

$\mathcal{N}_3 = \{ AAA, AAB, AAC, ABA, ABB, ABC, ACA, \dots \}$

Oblike nizov dolžine 3? 111 112 121 211 123 $\Rightarrow$ <u>5 ekvivalenčnih razredov</u>

111 $\downarrow$ samo 1 črka: AAA, BBB, CCC $\downarrow$ [AAA]

112, 121, 211 $\downarrow$ 2 različni črki:
npr. AAB, AAC, BBA, ... $\rightarrow$ [AAB]
ABA, ACA, BAB, ... $\rightarrow$ [ABA]
ABB, ACC, ... $\rightarrow$ [ABB]

123 $\downarrow$ 3 različne črke npr. ABC, ACB, BAC, ... $\downarrow$ [ABC]

3. naloga (25 točk)

Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 3 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) (5 točk) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov in za vsako določi njene ciklično strukturo, red in parnost.

$\alpha = (1)(2\ 4\ 6\ 8)(3\ 5\ 7\ 9)(\underline{10})$ cikl. str.: $1+1+4+4$ red: $\mathrm{lcm}(1,1,4,4) = 4$ parnost: soda (npr. 6 transp.)

$\beta = (1\ 8\ 7\ 3\ 2)(4\ 9\ \underline{10}\ 6\ 5)$ $5+5$ $\mathrm{lcm}(5,5) = 5$ soda (npr. 8 tr.)

b) (10 točk) Poišči vse možne ciklične strukture permutacije π, ki reši enačbo

$$\alpha^{-1} * \backslash \quad \alpha * \pi^{10} * \alpha^{-1} = \alpha * \beta.$$

$$\pi^{10} * \alpha^{-1} = \beta \quad / * \alpha$$

$$\pi^{10} = \beta * \alpha$$

$$\beta * \alpha = (1\ 8\ 7\ 3\ 2)(4\ 9\ \underline{10}\ 6\ 5) * (2\ 4\ 6\ 8)(3\ 5\ 7\ 9) = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ \underline{10})$$

$$\pi^{10} = \underbrace{(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ \underline{10})}_{\underline{\underline{2+2+3+3}}}$$

$2^{10} = 1+1$ $\quad\gcd(2,10) = 2$

$3^{10} = 3$ $\quad\gcd(3,10) = 1$ $\quad(3^{10} = 3^{10\%3} = 3^1)$ ★

$4^{10} = 2+2$ $\quad\gcd(4,10) = 2$ $\quad(4^{10} = 4^{10\%4} = 4^2)$

$6^{10} = 3+3$ $\quad\gcd(6,10) = 2$ $\quad(6^{10} = 6^{10\%6} = 6^4 = 6^{-2})$

$2+2+3+3 \longrightarrow (2+2+3+3)^{10} = 1+1+1+1+3+3$ //

$4+3+3 \longrightarrow (4+3+3)^{10} = 2+2+3+3$ ✓

$2+2+6 \longrightarrow (2+2+6) = 1+1+1+1+3+3$ //

$4+6 \longrightarrow (4+6)^{10} = 2+2+3+3$ ✓

Možni ciklični strukturi za π sta $4+3+3$ in $4+6$.

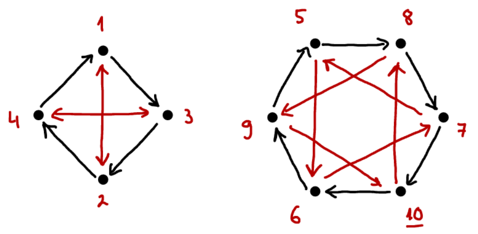
c) (10 točk) Za vsako ciklično strukturo iz (b) poišči vsaj eno rešitev dane enačbe.

i) π: $4+3+3$ $\quad \pi = (a\ b\ c\ d)(e\ f\ g)(h\ i\ j)$

$$\pi^{10} \overset{*}{=} (a\ b\ c\ d)^2 (e\ f\ g)^1 (h\ i\ j)^1 = (\underset{1}{a}\ \underset{2}{c})(\underset{3}{b}\ \underset{4}{d})(\underset{5}{e}\ \underset{6}{f}\ \underset{7}{g})(\underset{8}{h}\ \underset{9}{i}\ \underset{\underline{10}}{j}) = \beta * \alpha$$

$$\underline{\underline{\pi = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)}}$$

ii) π: $4+6$



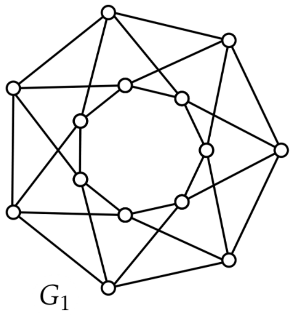
π

$\pi^{10} = \beta * \alpha$

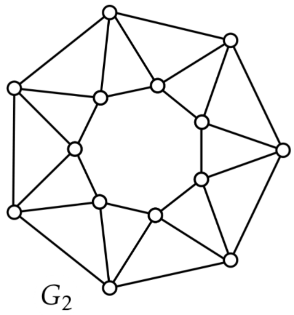
$$\underline{\underline{\pi = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 8\ 7\ \underline{10}\ 6\ 9)}}$$

4. naloga (25 točk)

Dana sta grafa na sliki.

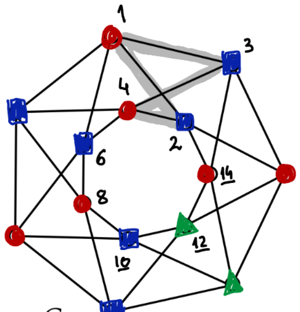


G_1



G_2

a) (5 točk) Določi kromatično število G_1. Ali je G_1 dvodelen? Ali vsebuje G_1 kakšen 4-cikel?



G_1

2 4 6 8 10 12 14

$\left.\begin{array}{l} G_1 \text{ vsebuje cikel lihe dolžine } (C_7) \Rightarrow \chi(G_1) \geq 3 \\ \text{na sliki je barvanje s 3 barvami} \Rightarrow \chi(G_1) \leq 3 \end{array}\right\} \chi(G_1) = 3$

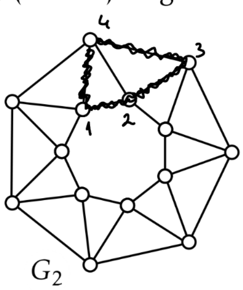
G_1 ni dvodelen, ker $\chi(G_1) \neq 2$

G_1 vsebuje 4-cikle (npr. 1 2 3 4)

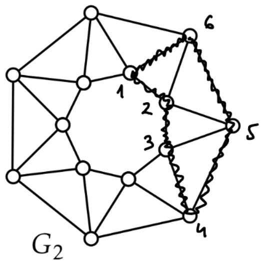
b) (5 točk) Ali je G_2 Eulerjev? Zakaj (ne)?

G_2 je Eulerjev, ker so vsa vozlišča sode stopnje

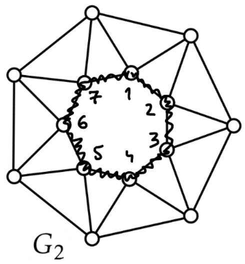
c) (5 točk) V grafu G_2 poišči vsaj po en 4-cikel, 6-cikel, 7-cikel in 8-cikel.



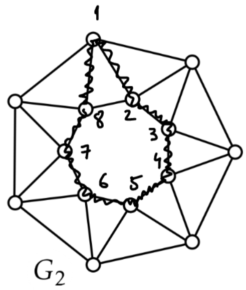
G_2



G_2

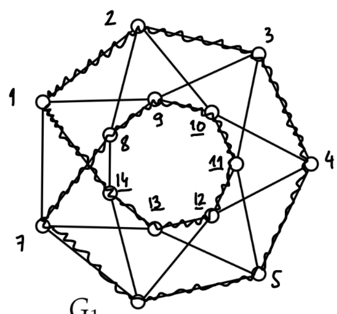


G_2

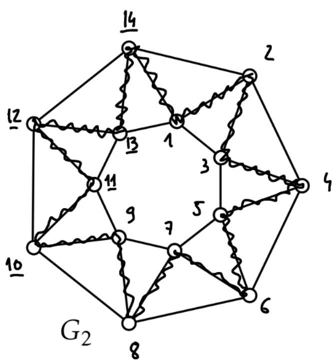


G_2

d) (10 točk) Sta grafa G_1 in G_2 Hamiltonova?



G_1



G_2

Oba sta Hamiltonova, ker vsebujeta H. cikel (= cikel, ki vsebuje vsa vozlišča).