Ime in priimek

3. izpit DSuni, TEORETIČNI DEL

19. avgust 2024

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja je 45 minut. Uporaba pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji, odgovora *da* oziroma *ne* nista dovolj! Vsa vprašanja so enakovredna. Za pozitivno oceno potrebujete **vsaj 50% dosegljivih točk** in pri vsakem od štirih vprašanj **pravilen odgovor na vsaj eno od podvprašanj**

1. naloga (25 točk)

(a) Katere kvantifikatorje poznaš?
(b) Zapiši dva zakona predikatnega računa, ki veljata z omejitvami.
(c) Kdaj pravimo, da je izjavna formula W splošno veljavna?
(d) Poišči izjavno formulo U, za katero je formula $\exists x(U)$ splošno veljavna.
(e) Ali obstaja izjavna formula V, za katero je formula $\forall x(V)$ neizpolnljiva, formula $\exists x(V)$ pa ne? Utemelji.

c) Formula W je splošno veljavna, če je resnična v vsaki interpretaciji.

In je neizpolnljiva, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

d) Za U lahko izberemo kar $P(x) \vee \neg P(x)$, saj je $\exists x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ splošno veljavna.

Celo $\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ je splošno veljavna formula.

e) Tole je pa težko. Najbolj strno podvprašanje v tem izpitu. Premislimo, da je

$W = \forall x\,(P(x) \Leftrightarrow \neg \forall y\, P(y))$ neizpolnljiva.

W je lažna v vsaki interpreta-taciji.

Oglejmo si najprej tiste interpretacije, v katerih imajo vsi elementi področja pogovora lastnost P. To pomeni, da ima $\neg \forall y\, P(y)$ logično vrednost 0. Ampak, če izberem poljuben element pp. x, je $P(x)$ resničen, $P(x) \Leftrightarrow 0$ lažen in zato tudi $\forall x\,(P(x) \Leftrightarrow 0)$ lažno.

Če pa izberem interpretacijo, v kateri nimajo vsi elementi lastnosti P, spet najdem x tisti, za katerega je $P(x)$ lažno, imam problem z $\neg \forall y\, P(y)$, ki je resnična. Torej je $P(x) \Leftrightarrow \neg \forall y\, P(y)$ lažno in zato tudi $\forall x\,(P(x) \Leftrightarrow \neg \forall y\, P(y))$ lažno.

Lahko pa izpolnim $\exists x\,(P(x) \Leftrightarrow \neg \forall y\, P(y))$ z interpretacijo v pp. $\{a, b\}$, kjer je $P(a)$ res in $P(b)$ ni res.

V tej interpretaciji je $\neg \forall y P(y)$ lažno in res obstaja x (b je tak) za katerega je $P(x) \Longleftrightarrow \neg \forall y\, P(y)$ res.

2. naloga (25 točk)

(a) Kaj je relacija R v množici A?

(b) Kdaj pravimo, da je relacija R *antisimetirična*?

(c) Kaj je delna urejenost v množici A?

(d) Poišči/opiši zgled delne urejenosti v množici slovenskih besed. Ali je tvoja opisana urejenost celo linearna?

(e) Poišči/opiši zgled relacije v množici slovenskih besed, ki je refleksivna in tranzitivna, ni pa delna urejenost.

d) Odgovor je odvisen od izbire relacije.

Leksikografska (slovarska) urejenost JE linearna.

Relacija R opisana takole

beseda$_1$ R beseda$_2$ natk. beseda$_1$ = beseda$_2$ ali beseda$_1$ je strogo krajša kot beseda$_2$

pa ni linearna, saj različni besedi iste dolžine nista primerljivi.

e) Lahko se igramo z dolžino besede in definiramo S

beseda$_1$ S beseda$_2$ natk beseda$_1$ je iste dolžine kot beseda$_2$.

Relacija S ni antisimetrična, saj

miš S top in top S miš, toda miš $\neq$ top.

Relacija S je v resnici ekvivalenca – refleksivna, simetrična in tranzitivna. Če ima ekvivalenčna relacija vsaj v enem ekvivalenčnem razredu vsaj dva elementa, potem ni antisimetrična.

3. naloga (25 točk)

(a) Katere zapise permutacij poznaš? Zapiši zglede.

(b) Kdaj pravimo, da je permutacija π soda?

(c) Kaj je red permutacije π (označimo ga tudi z $\mathrm{ord}(\pi)$)?

(d) Ali je red sode permutacije lahko liho število? Ali je red sode permutacije lahko sodo število? Ali je red lihe permutacije lahko liho število? Ali je red lihe permutacije lahko sodo število? Poišči zglede oziroma utemelji, zakaj ni možno.

(e) Naj bo P množica (ne nujno vseh) potenc permutacije π. Pokaži, da P vsebuje največ $\mathrm{ord}(\pi)$ (različnih) permutacij.

Red permutacije lahko določimo kot lcm dolžin ciklov.

d) Če je lcm dolžin ciklov permutacije π liho število, so vsi disjunktni cikli te permutacije lihe dolžine in je permutacija π soda (vsakega od njenih ciklov zapišemo kot produkt sodega števila transpozicij). To pomeni, da permutacija lihega reda NE MORE biti liha (po parnosti). Vse ostale možnosti so dopustne. Opazimo naslednje ciklične strukture

[5] red je enak 5 (lih), parnost je soda

[4] red je enak 4 (sod), parnost je liha

[4,4] red je enak 4 (sod), parnost je soda.

e) V množici potenc

$$\{\pi^{k_1}, \pi^{k_2}, \dots, \pi^{k_\ell}\}$$

lahko opazimo ostanke eksponentov $(k_1, k_2, \dots, k_\ell)$ pri deljenju z $\mathrm{ord}(\pi)$. Dobimo največ $\mathrm{ord}(\pi)$ različnih ostankov. Še več, eksponenta z istima ostankoma bi porodila isto permutacijo.

4. naloga (25 točk)

(a) Kaj je sprehod S v grafu G?

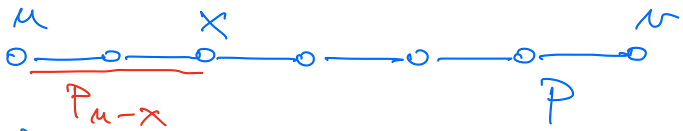
(b) Kaj je povezan graf?

(c) Ali obstaja povezan graf s 7 točkami, v katerem imajo vse najkrajše poti med pari točk isto dolžino? Utemelji.

(d) Ali obstaja povezan graf s 7 točkami, v katerem imajo najkrajše poti med pari točk natančno dve različni dolžini? Utemelji.

(e) Ali obstaja povezan graf s 7 točkami, v katerem so najkrajše poti med pari točk samih različnih dolžin? Utemelji.

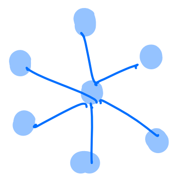
Začnimo z najkrajšimi potmi. Če je P najkrajša $u-v$ pot v grafu G in je x vmesna točka na tej poti, potem je P_{u-x} (tj. odsek poti P med u in x, glej sliko) tudi najkrajša $u-x$ pot.



To pomeni, da če sta v grafu dve točki na razdalji k, potem imamo v tem istem grafu tudi pare točk na razdaljah $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

c) V skladu z zgornjim premislekom morajo vse najkrajše poti med pari točk imeti dolžino 1. To se zgodi le v polnem grafu na 7 točkah.

d) Ti dve dolžini morata biti 1 in 2, ker se lahko zgodi v grafu G_{12} na desni:



V resnici bi grafu G_{12} lahko dodali poljubno množico povezav, paziti moramo le, da ne dobimo polnega grafa.

e) Odgovor je seveda ne. V povezanem grafu na 7 točkah imamo vsaj 6 povezav. Pari sosednjih točk pa ležijo na enakih razdaljah (1).

Lahko drugače. Maksimalna možna razdalja med različnima točkama v povezanem grafu na 7 točkah je 6, minimalna pa 1. Parov točk je enostavno preveč (21), da bi imele lahko najkrajše poti same različne dolžine (možnih je 6).