#pLA
Vprašanja iz: https://ucilnica.fri.uni-lj.si/mod/page/view.php?id=56121
Vprašanja brez odgovorov: LA Teorija

Moodle Vprašanja

Vprašanja iz: https://ucilnica.fri.uni-lj.si/mod/page/view.php?id=56121

Q1 Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $u \in \mathbb{R}^n$ fiksen vektor. Množica $u + V = \{u + v : v \in V\}$ je vedno vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. DA/NE

Izrek:

- vsak VP mora vsebovati ničelni vektor

Protiprimer:

- če $u \notin V$ in $u \neq \mathbf{0}$, potem $V' = u + V$ ne vsebuje ničelnega vektorja
- saj ne obstaja $v = -u$, ker če bi, bi bil vsebovan v V, kar je pa po zgornji definiciji prepovedano

Q2 Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Njuna vsota $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$ je tudi vektorski podprostor. DA/NE

Izrek:

- vsota vektorskih prostorov je (najmanjši) vektorski prostor (ki vsebuje oba)

Formalen dokaz:

- naj bo $X = U + V$. Vsak vektor $x \in X$ je oblike $x = u + v$ kjer sta $u \in U, v \in V$
  Trditev: za $x, y \in V$ velja: $z = ax + by; x, y, z \in X, a, b \in \mathbb{R}$
- $(ax + by) = (au + av) + (bu' + bv') = (au + bu') + (av + bv')$
- ker velja $au + bu' \in U$ po definiciji VP (in enako za V) lahko izrazimo:
- $z = u'' + v''$ kjer $u'' \in U, v'' \in V$
- kar ustreza definiciji $X = U + V$

Q3 Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ z bazo $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Množica $\{v_1 + 2v_2 + \cdots + kv_k, v_2, \ldots, v_k\}$ je tudi baza za V. DA/NE

Baznim vektorjem lahko prištevamo poljubne večkratnike ostalih baznih vektorjev istega podprostora. Ker so na začetku linearno neodvisni, bodo tudi na koncu (dokler ne naredimo nekaj takšnega: $v_1' = v_1 + v_2$, $v_2' = 2v_1 + 2v_2$).

Q4 Če sta S in T taki podmnožici vektorskega podprostora V, da je vsak element iz S linearna kombinacija elementov iz T in obratno, potem sta linearni ogrinjači $\mathcal{L}(S)$ in $\mathcal{L}(T)$ enaki. DA/NE

Izrek:

- Linearna ogrinjača je najmanjši podprostor, ki vsebuje dano množico vektorjev

DA. Ker lahko vsak $s \in S$ izrazimo samo z elementi iz T, pomeni da je vsak vektor v s linearna kombinacija vektorjev iz T. To pomeni, da je $s \in \mathcal{L}(T)$. Ker to velja tudi v drugo smer, pomeni da $t \in \mathcal{L}(S)$. Če bi obstajal vektor $v \in \mathcal{L}(S), v \notin \mathcal{L}(T)$, bi to kršilo definicijo S, T.

Q5 Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $V^\perp$ njegov ortogonalni komplement. Obstaja neničelni vektor $v \in V \cap V^\perp$. DA/NE

NE. Po definiciji je vsak $v' \in V^\perp$ pravokoten na vse vektorje $v \in V$. Oziroma: $\forall v, v'(v \cdot v' = 0)$. Vektor $u \in V \cap V^\perp$ mora zadostovati tudi temu pogoju. Zato zanj mora veljati $u \cdot u = 0$. Ampak po definiciji Posplošen Skalarni Produkt, je edin vektor ki temu zadostuje ničelni vektor.

Q6 Ne obstajata kvadratni matriki A in B, tako da velja $AB = 0$ in $BA \neq 0$. DA/NE
NE, protiprimer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q7 Karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki zadošča $A^n = 0$, je lahko oblike $p_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)q(\lambda)$ za nek polinom q. DA/NE

NE
$p_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)q(\lambda) \implies \lambda_{1,2} = i$

- vsak A ki ima lahko tak karakteristični polinom, mora imeti dvojno lastno vrednost -1.

izrek o lastnih vrednostih Lastna Vrednost Matrike:

- če je λ LV A, potem je λ^k LV A^k
- $A^n = 0 \implies \sigma(A) = \{0\}$ Spekter Matrike A mora biti sestavljen le iz ničelnih lastnih vrednosti
  A ki mu ustreza tak p_A bi moral hkrati imeti vse LV 0 in dve LV i, kar je nemogoče

Q8 Naj bosta A in B kvadratni matriki. Velja $\ker A \subseteq \ker AB$. DA/NE

Po definiciji, je

- $\ker A = \{v \in \mathbb{R}^n; Av = 0\}$
- $\ker AB = \{v \in \mathbb{R}^n; ABv = 0\}$
  Pogoj zahteva:
- vsak $v \in \ker A \implies v \in \ker AB$

Protiprimer:
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $Av = 0 \implies v \in \ker A$
- $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $ABv = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies v \notin \ker AB$

Q9 Naj bosta A in B kvadratni matriki, pri čemer $B \neq -A$. Velja $\operatorname{rang}(A + B) \geq \operatorname{rang} A$. DA/NE

Protiprimer:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\text{rang}A > \text{rang}(A + B)$
- $2 > 1$

Q10 Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{10}$ z $\dim V = 6$. Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, za katero velja $\text{rang}A = 5$ in $V \subseteq \ker A$. DA/**NE**

Da bi veljalo $V \in \ker A$, bi bil potreben pogoj: $\dim V \leq \dim \ker A$. V tem primeru bi bil potreben pogoj $\dim \ker A \geq 6$.

Ampak, Zveze med Ničelnim in Stolpičnim Prostorom Matrike zahteva:
$n = \dim C(A) + \dim N(A)$

- $n = 10$
- $\dim C(A) = \text{rang}A = 5$
- zato $\dim N(A) = 5$
- zato $\dim \ker A = 5$
  Kar pa je manjše od 6, zato pogoj ni izpolnjen.

Q11 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{10\times 8}$ matrika. Če ima sistem $Ax = 0$ eno samo rešitev, potem je $\text{rang}A = 8$. **DA**/NE

Izrek:

- $n = \dim C(A) + \dim N(A)$

Če ima $Ax = 0$ samo eno rešitev, je to gotovo Ničelni Vektor. Iz tega sledi, da je baza Ničelni Prostor Matrike prazna množica (baza ne sme vsebovati ničelnega vektorja, ki je edin tak vektor ki "paše" v ta prostor), zato je $\text{rang}N(A) = 0$.

izrek zahteva:

- $n = \min(10, 8) = 8$
- $\dim N(A) = 0$
- zato $\dim C(A) = 8 = \text{rang}(A)$

Q12 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika ranga n. Obstaja neničelna matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $BA = 0$. DA/**NE**

Gotov dokaz:
$BA = 0$

- $BA + I = I$
- $BA + A^{-1}A = A^{-1}A$
- $(B + A^{-1})A = A^{-1}A$
- $B + A^{-1} = A^{-1}$
- $B = 0$
- to je edina rešitev, ki ni dovoljena

Geometrijski dokaz:
pogoj:

- $\text{rang}(BA) = 0$
  pomeni da linearna transformacija pripadajoča matriki B splošči n dimenzionalen prostor v ničelni prostor. Če bi B imela vsaj eno neničelno vrstico, bi transformacija odvzela le $n-1$dimenzij, oz rangov matrike. Zato ima B samo ničelne vrstice, oz. je ničelna matrika, kar pa prepovedujejo navodila.

Mogoč dokaz (nism sigurn če to lahko nrdiš)
$BA = 0$

- saj je $\text{rang}(A) = n$ obstaja A^{-1}
- $B = 0A^{-1}$
- $B = 0$

Q13 Obstaja kvadratna matrika A, ki zadošča $\text{tr}(A) = 0$ in $\text{tr}(A^2) \neq 0$. (Tu tr označuje sled matrike.) **DA**/NE

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $\text{Tr}(A) = -1 + 1 = 0$
- $\text{Tr}(A^2) = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Q14 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kvadratna matrika, za katero za vsak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ velja $v^T Av = 0$. Potem je A ničelna matrika. DA/**NE**

naj bo $a = Av$

- $v^T a = 0$
- $v \cdot a = 0$ (običajni skalarni produkt)
  - po definiciji Posplošen Skalarni Produkt je ta pogoj izpolnjen ko:
    - $\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{a}\| = 0$
    - ali pa ko $v \perp a$
  - ne moremo se zanašati na to da je $\|v\| = 0$
  - samo ničelna matrika spremeni dolžino vsakega vektorja na 0
  - ostane le še pogoj, da naredimo $v \perp a$.
  - v ne moremo nadzorovati, $a = Av$
  - če A zavrti v za 90°, ustreza tem pogojem
  - taka matrika obstaja in ni ničelna matrika

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$Av = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -ba + ab = 0$

Q15 Naj bo $n > m$ in $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrika z neko vrstico brez ničel in nekim stolpcem brez ničel. Matrika A se da zapisati tako kot vsota m matrik ranga 1, kot vsota n matrik ranga 1. DA/NE

N vrstic, M stolpcev.
Zapis: $A = M_1 + M_2 + \cdots + M_m + \cdots + M_n, \operatorname{rang} M_i = 1$
velja:

- $1 \leq \operatorname{rang}(A) \leq \min(n, m) = m$
  - vsaj 1 neničelna vrstica / stolpcev
  - največje število pivotov je manjša od razsežnosti matrike

Razrežemo $A = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$ po stolpcih.

- neničelne stolpce spremenimo v matriko $M_i = [0, 0, \ldots, v_i, \ldots, 0]$
  - ti so ranga 1
  - naj bo M_P alias za prvi neničelni stolpec (ta po definiciji A obstaja)
- ničelne stolpce poimenujmo M_i'
- M_P razrežemo na enako velike kose da:
  + se razdeli na $1 + k$ kosov, kjer je k število ničelnih stolpcev
  Tako dobimo m neničelnih matrik M_i, M_i', ki so vse ranga 1.
- ker se da zapisati z m matrikami ranga 1, se da tudi z n
  - saj lahko samo M_P razbijemo na kose
  - $M_{i\geq m} = \frac{1}{n-m+1} M_P$

Q16 Produkt dveh simetričnih matrik je vedno simetrična matrika. DA/NE
Zahtevana enakost:

- $S_1 S_2 = (S_1 S_2)^T$
- kar lahko preoblikujemo
- $(S_1 S_2)^T = S_2^T S_1^T = S_2 S_1$
- zato
- je trditev enakovredna: $S_1 S_2 = S_2 S_1$
- sepravi je produkt simetričnih matrik simetrična matrika natanko tedaj, ko je množenje simetričnih matrik komutativno
  Protiprimer simetričnosti produkta simetričnih matrik:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q17 Obstaja neničelna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero je $\det 2A = 2 \det A$. DA/NE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q18 Naj bo A kvadratna diagonalizabilna 3×3 matrika in $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ njen karakteristični polinom. Potem je matrika $-A^3 + aA^2 + bA + cI$ ničelna matrika. DA/NE

To je Cayley-Hamilton Izrek. Vsaka matrika je ničla svojega karakterističnega polinoma.

Q19 Naj bo A realna matrika velikosti 11×11. Matrika A ima gotovo vsaj eno realno lastno vrednost. DA/NE

Lastne vrednosti so ničle polinoma $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

- polinom z realnimi koeficienti ima sodo mnogo kompleksnih ničel.
- tako da je vsaj ena ne-kompleksna ničla λ, ki predstavlja realno lastno vrednost

Q20 Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni matriki. Potem je $\ker A = \ker B$. DA/NE

ChatGPT assisted:

Velja:

- $A = PBP^{-1}$

Naj bo $v \in \ker A$

- $Av = 0$
- $(PBP^{-1})v = 0$
- zato ker je P^{-1} obrnljiva je polnega ranga
  - zato je njen ničelni prostor trivialen
  - zato je za $Px = 0$ edina rešitev trivialna
  - zato P ne vpliva na rezultat
- $BP^{-1}v = 0$
- oziroma: $(P^{-1}v) \in \ker B$
- ampak ni nujno, da je $P^{-1} = I$
- zato v splošnem $P^{-1}v \neq v$
- ker je lahko P poljubna transformacija, tudi npr. rotacija za 90° pomeni da lahko $P^{-1}v$ preide iz $N(A)$ v $C(A)$
- velja pa $\dim \ker A = \dim \ker B$

Q21 Naj imata obe matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastno vrednost 0. Potem ima lastno vrednost 0 tudi matrika $A + B$. DA/NE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A + B = I$$

- LV A: 0,1
- LV B: 0,1
- LV A+B: 1,1

Q22 Naj bodo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times o}, C \in \mathbb{R}^{o\times p}$ pravokotne matrike. Velja $\ker C \subseteq \ker(ABC)$ in $\operatorname{im}(A) \subseteq \operatorname{im}(ABC)$. DA/NE

To s "ker" drži, z "im" pa ne.

$\ker M = \{x \in \mathbb{R}^p; Mx = \mathbf{0}\}$
naj bo $v \in \ker C$

- ali je $ABCv = 0$?
  + $(AB)(Cv) = 0$
  + $(AB)0 = 0$
  + zato $v \in \ker ABC$

  Intuitivna razlaga:
- C lahko spravi v na 0
- če ga, nanj ne vplivata A,B
- če ga ne, imata to priložnost še A,B

$\mathrm{im} M = \{Mx; x \in \mathbb{R}^y\}$
Če je $C = 0^{o \times p}$, potem je $\mathrm{im}(ABC) = 0$. Oziroma je ničelni vektor edin dosegljiv vektor, ne glede na vrednosti A, B. Če imata A, B netrivialen stolpičast prostor, potem $\mathrm{im} A \nsubseteq \mathrm{im}(ABC)$

Q23 Naj bosta A in B realni kvadratni matriki. Matrika $AB^T - BA^T$ je diagonalizabilna. DA/NE

ChatGPT:

- je diagonalizabilna nad kompleksnimi števili

NE VEM
$AB^T - BA^T = AB^T - (BA^T)^{TT} =$

- $= AB^T - (AB^T)^T$
- dobimo anti-simetrično matriko (zrcaljenje spremeni predznak), ki ima ničle za diagonalne elemente
- sled matrike je gotovo 0
- determinanta je lahko karkoli

Q24 Naj A pravokotna matrika in A^+ njen Moore-Penroseov inverz. Velja $\mathrm{im} A^T = \mathrm{im} A^+$. DA/NE
NISMO SE UČIL ŠE

ChatGPT:

- po definiciji Moore-Penroseov Inverz velja $\mathrm{im} A^T = \mathrm{im} A^+$

Q25 Naj bo $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjektivna linearna preslikava, $L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pa neka linearna preslikava, ki ni surjektivna. Preslikava $L_1 + L_2$ je surjektivna. DA/NE

Pomislek:

- če bi L_2 lahko bila surjektivna, bi lahko uporabili le $L_2 := -L_1$, tako da bi bila preslikava $L_3 = L_1 - L_1 = 0$, ki gotovo ni surjektivna.
- če bi L_2 bila ničla preslikava, potem bi $L_3 = L_2$

Reševanje:

- če nastavimo $L_2 = -L_1 + L'$ dobimo $L_3 = L'$
- $-L_1$ je surjektivna
- L' moramo narediti ne-surjektivno da do L_2 postala ne-surjektivna
- primer: $L'(v) = [x_1, 0, \dots, 0]^T$

Protiprimer:

- $L_2 = -L_1 + [x_1, 0, \dots, 0]^T$

Q26 Naj bosta $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjektivni linearni preslikavi. Preslikava $L_2 \circ L_1$ je surjektivna. DA/NE

Izrek:

- če je $\mathcal{A} : U \to U$ surjektivna, je tudi injektivna (in obratno, in posledično bijektivna)
  - saj slika prostor v podprostor, ki je manjši ali enak.

Zato:

- L_1, L_2 sta bijektivni preslikavi
- kompozitum bijektivnih preslikav je bijektivna preslikava
  - uporaba več zaporednih bijektivnih preslikav le "premeša" vrstni red vhodov naslednje preslikava

Q27 Naj bo $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna preslikava. Množica $L(\mathbb{R}^n)$ je vektorski podprostor. DA/NE

Definicija:

- Linearna preslikava mora ustrezati pogojem:
  - $L(kx) = kL(x)$
  - $L(x+y) = L(x) + L(y)$
- $\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor

Po definiciji linearna preslikava ohranja linearne odvisnosti. Ker je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor je zaprt za seštevanje in skalarno množenje. Ker linearna preslikava te zveze ohranja, bo tudi njegova slika obdržala te lastnosti.

Q28 Naj bo Z vektorski prostor zgornje trikotnih matrik v $\mathbb{R}^{10}$, S pa spodnje trikotnih matrik v $\mathbb{R}^{10}$. Množica $Z \cap S$ je vektorski podprostor. DA/NE

Množica $D = Z \cap S$ je po definiciji množica matrik, ki so hkrati zgornje in spodnje trikotne

- po definiciji imajo torej za vse $(i > j) \vee (j > i)$ elemente $d_{i,j} = 0$
- zato so le diagonalni elementi ne-ničelni
- diagonalne elemente lahko "zložimo" v vektorje po pravilu $v_i = d_{i,i}$
- saj Z, S imata na diagonalah vse možne elemene $\mathbb{R}$, lahko iz zloženih vektorjev tvorimo prostor $\mathbb{R}^{10}$, ki je zaprt za seštevanje in skalarno množenje, zato je VP.

Q29 Obstaja realna matrika $A \in \mathbb{R}^{21 \times 21}$, ki nima lastnih vektorjev. DA/NE

Predpostavljam da mislijo "realnih lastnih vektorjev".

- lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma
- karakteristični polinom je iste stopnje kot n matrike (21)
- vsak polinom z realnimi koeficienti ima sodo mnogo kompleksnih ničel
- zato ima A vsaj eno realno lastno vrednost
- vsaka lastna vrednost ima geometrično večkratnost vsaj 1
- geometrična večkratnost pove koliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev ima lastni podprostor pri dani lastni vrednosti
- zato ima A vsaj en realen lastni vektor

Če predpostavka ne drži:

- karakteristični polinom ima gotovo 21 kompleksnih rešitev (lahko tudi realne)
- tudi če so vse enake, bo še vedno imel lastno vrednost
- geometrična večkratnost vsake lastne vrednosti je vsaj 1
- zato obstaja kompleksen lastni vektor

Q30 Za kvadratno matriko A velja $\dim\ker(A-2I)=3$. Potem je njen karakteristični polinom oblike $(\lambda-2)^3q(\lambda)$ za nek polinom q. DA/NE

Edina podobna formula, skušamo jo pridobiti iz podatkov
$g(2)=n-\operatorname{rang}(A-2I)$
Velja:

- $n=\dim\ker(A-2I)+\dim\operatorname{im}(A-2I)$
- $n=3+\operatorname{rang}(A-2I)$
- $3=n-\operatorname{rang}(A-2I)=g(2)$
- geometrična večkratnosti $\lambda=2$ je 3.
  - to pomeni, da je aritmetična večkratnost vsaj 3.
  - kar pomeni, da se v razcepu karakterističnega polinoma pojavi vsaj 3x
  - kar pomeni, da je pogoj izpolnjen

Q31 Za kvadratno matriko A velja $\dim\ker(A-2I)=1$. Potem njen karakteristični polinom ne more biti oblike $(\lambda-2)^2q(\lambda)$ za nek polinom q. DA/NE
Velja:

- $n=\dim\ker(A-2I)+\dim\operatorname{im}(A-2I)$
- $n=1+\operatorname{rang}(A-2I)$
- $1=n-\operatorname{rang}(A-2I)=g(2)$
- geometrična večkratnost $\lambda=2$ je 1
  - aritmetična večkratnost je vsaj 1
  - še vedno je lahko $a(2)\geq 2$
  - kar pomeni, da nič ne preprečuje polinomu da bi bil želene oblike

Q32 Naj bo A kvadratna matrika velikosti $n\times n$ s karakterističnim polinomom $p_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-3)^5$. Možno je, da velja $n=15$. DA/NE

Vodilni člen karakterističnega polinoma je $(-1)^n\lambda^n$

- to pomeni, da je stopnja p_A natanko n
  stopnja danega polinoma je $3+2+5=10$, kar je premalo
- zato tak polinom ni mogoč

Q33 Naj bo A kvadratna matrika velikosti 10×10 s karakterističnim polinomom $p_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-3)^5$. Možno je, da je $\dim\ker(A-5I)\geq 1$. DA/NE

Lastne vrednosti A so $(0_3,1_2,3_5)$. To so vse lastne vrednosti, ker ima (karakteristični) polinom natanko toliko rešitev, kot je n (osnovni izrek algebre).

Pogoj $\dim\ker(A-5I)\geq 1$ zahteva, da je $\operatorname{rang}(A-5I)\leq n-1$

- kar pomeni da ni polnega ranga in da je $\det(A-5I)=0$
- to bi pomenilo, da je 5 lastna vrednost A
- ampak imamo že vseh 10 lastnih vrednosti (z ponavljanjem), tako da to ni mogoče

Q34 Naj bo $A\in\mathbb{R}^{10\times 10}$ matrika, da velja $\dim\ker(A-2I)=10$. Ni nujno, da je $A=2I$, kjer je I identična matrika. DA/NE

Izrek:

- $n=\dim\ker A+\dim\operatorname{im}A$

$\dim\ker(A-2I)=10$

- $\implies \dim\operatorname{im}(A-2I)=0$
- $\implies C(A-2I)=0$
- kar je res le za ničelno matriko $A-2I=0$
- zato je edina rešitev $A=2I$

Q35 Naj bosta A in B kvadratni matriki velikosti 2×2. Naj bo karakteristični polinom matrike A enak $p_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$. Potem ima karakteristični polinom matrike BA gotovo eno ničlo enako $\lambda=0$, nima pa nujno ničle $\lambda=1$. DA/NE

$\lambda_{A,1}=1$
$\lambda_{A,2}=0\implies\det(A)=0$

- (determinanta je produkt lastnih vrednosti)
- (lahko tudi: karakteristični polinom ima prosti člen enak 0, ki je enak determinanti, zato je determinanta 0)
  $\det(BA)=\det(B)\cdot\det(A)=0$
- p_{BA} spet nima prostega člena
- zato $p_{BA}(0)=0$, kar pomni, da je $\lambda_{AB,1}=0$

Če je $B=0^{2\times 2}$, potem $\lambda=1$ ni LV BA, kar potrjuje drug del trditve.

Q36 V 8-dimenzionalnem vektorskem prostoru V obstajata 5-dimenzionalna podprostora V_1,V_2, tako da je $V_1\cap V_2$ trivialen podprostor. DA/NE
Pogoj:

- $\dim V_1\cap V_2=0$
  Zato lahko uporabimo:
- $\dim V\geq\dim V_1+\dim V_2$
- $8\geq 5+5?$
- NE DRŽI, pogoj je nemogoč

Q37 Naj bosta U in V 2-dimenzionalna podprostora v $\mathbb{R}^5$. Vektorski podprostor $U+V$ je lahko enak $\mathbb{R}^5$. DA/NE

$\dim(U+V)\leq\dim U+\dim V$

- $\leq 2+2$
- $\dim(U+V)\leq 4$
  ne glede na to, kakšne podprostore U,V vzamemo, še vedno ne bo mogoče "odpreti" vseh 5 dimenzij. U,V skupaj imata lahko največ 4 linearno neodvisne bazne vektorje, $\mathbb{R}^5$ jih pa ima 5. Ker so vse baze istega VP enako velike ne more veljati enakost.

Q38 Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\ker A$ trivialen podprostor. DA/NE

A je obrnljiva $\iff \det(A) \neq 0 \iff \text{rang}(A) = n$
Izrek:

- $n = \dim C(A) + \dim N(A)$
- $\text{rang}(A) = \dim(C(A))$
- $\dim(N(A)) = \dim\ker(A)$
  Zato:
- $n = \text{rang}A + \dim\ker A$
- iz podatkov vemo:
- $n = n + \dim\ker A$
- $\dim\ker A = 0$
  - kar je enakovredno trditvi: $\ker A$ je trivialen podprostor

Q39 Naj bo $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektivna linearna preslikava. Obstajata taki bazi za $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, da jedro matrike, ki predstavlja L, vsebuje neničelni vektor. DA/NE

Pogoj za Injektivnost:

- $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \iff v_1 = v_2$
- injektivnost je mogoča, le če $D_f \leq Z_f$, oz ko slika iz manjše množico v večjo ali enako množico
- Iz tega lahko sklepamo:
  + $n \leq m$
  Injektivna preslikava lahko slika največ en vektor v 0, oziroma:
- $\varphi(v_0) = 0, v_0 \in \ker(A)$
- ker je lahko tak vektor samo en in $\mathbf{0}$ je vedno tak vektor, ni "prostora" za kakšrne koli druge vektorje.
- zato je $\ker(A)$ trivialen podprostor, oz. ima dimenzijo 0

Q40 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrika. Naj enačba $Ax = b$ ne bo rešljiva za noben neničelni vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Obstajata vsaj dve matriki A s to lastnostjo. DA/NE

Izrek:

- $Ax = b$ je rešljiva natanko tedaj, ko je $b \in C(A)$
  Zahtevek naloge:
- ali obstajata 2 različni matriki, za kateri noben neničelen vektor ni v $C(A_i)$
- z drugimi besedami: da je $C(A) = \{\mathbf{0}\}$ oz je trivialen podprostor
  Reševanje:
- ena taka matrika je ničelna matrika
- druga pa se mora razlikovati od prve, oz. ima vsaj en neničelen stolpec
- če ima neničelen stolpec, se bo ta pojavil v stolpičastem prostoru $C(A_2)$
  - $C(A_2)$ ne bo več trivialen podprostor, kar krši zahtevek

Q41 Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dve identični vrstici. Potem je $\dim\ker A$ vsaj 1. DA/NE

A ima 2 identični vrstici $\implies \det(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < \min(n, m)$
Oziroma:

- $\text{rang}(A) \leq \min(n, m) - 1$

Izrek:

- $\min(n, m) = \dim\ker A + \dim\text{im } A$

naj bo $k = \min(n, m)$

- $k = \dim\ker A + \text{rang}(A)$
- $\text{rang}(A) = k - \dim\ker A$
- uporabimo trditev od prej
- $k - \dim\ker A \leq k - 1$
- $\dim\ker A \geq 1$

Q42 Naj bosta dani kvadratni matriki A in B, da velja $\det(A) = 3, \det(B) = 1$. Matrika $A + B$ je zagotovo obrnljiva. DA/NE
Protiprimer:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A + B) = 0$, zato $A + B$ ni obrnljiva.

Q43 Obstaja taka kvadratna matrika A, da ima vsaj po eno lastno vrednost $1, -1, 0$ in zadošča $A^2 = A$. DA/NE

Potreben pogoj za enakost matrik:

- iste lastne vrednosti in ponovitev
  Izrek:
- če je λ LV A, je λ^k LV A^k
  Reševanje:
- $\lambda_{2,A} = -1$
- po izreku dobimo: $\lambda_{2,A^2} = 1$
- $A^2 \neq A$, ker se lastne vrednosti ne ujemajo (krši potreben pogoj enakosti matrik)

Q44 Naj bodo u, v, w linearno odvisni vektorji v $\mathbb{R}^3$. Obstaja taka linearna preslikava $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, da so vektorji $L(u), L(v), L(w)$ linearno neodvisni. DA/NE

Izrek:

- linearne preslikave ohranjajo linearno odvisnost
  Reševanje:
- naj bo $w = xu + yv$
- z uporabo izreka lahko sklepamo:
- (izrek je posledica po definiciji potrebnega pogoja:)
- $L(w) = L(xu + yv) = xL(u) + yL(v)$
- zato je $L(w)$ linearno odvisen od $L(u), L(v)$
- enako lahko ponovimo za u, v

Q45 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Iz $A^2 = A$ sledi natanko ena od možnosti: A je ničelna matrika ali pa je A identična matrika. DA/NE
Protiprimer:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Če nebi uganili, bi za ožanje kandidatov lahko uporabimo:
Izrek:

- $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
  Reševanje:
- da drži $A^2 = A$ mora vedno veljati tudi:
- $\det(A^2) = \det(A)$
- z uporabo izreka dobimo:
- $\det(A)\cdot\det(A) = \det(A)$
  - $\det(A)(\det(A) - 1) = 0$
  - $\det(A) \in \{0, 1\}$

Q46 Naj bosta $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Gotovo velja $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| > \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. DA/NE

- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot|\cos\varphi|$
- $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot|\sin\varphi|$
  Ne drži, da je $\cos\varphi > \sin\varphi$
  Protiprimer:
  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$
- $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = 1$

Q47 Naj bosta $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Če velja $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = 0$, potem je $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. DA/NE

- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot|\cos\varphi|$
- $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot|\sin\varphi|$

Protiprimer:

Če $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ je

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1$
- $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = 0$

Q48 Naj bo A 3×3 matrika z $\ker A \neq \{0\}$. Potem obstaja vektor $v \in \mathbb{R}^3$, da velja $v^T A = 0$. DA/NE
Vse kar navodila technically zahtevajo je, da ničelni prostor ni trivialen. Ampak nič ne rečejo o vektorju v, zato je ta še vedno lahko ničelen. Kar pomeni, da je odgovor DA.

Recimo da naj v ne bo trivialen. Kaj potem?

(nepotrebno) Ničelni prostor A ni trivialen, zato vsebuje $w \in \ker A; w \neq \mathbf{0}$

Izrek:

- $\text{rang} A = \text{rang}(A^T)$
- $\min(n, m) = \dim\ker A + \dim \text{im } A$
- $\dim \text{im}(A) = \text{rang}(A)$
  Reševanje:
- $\ker A$ ni trivialen, kar pomeni da ima vsaj neničlen vektor, zato je $x = \dim\ker A \geq 1$
- $3 = x + \dim \text{im} A$
- $\dim \text{im} A \leq 2$
- kar pomeni da A ni polnega ranga
- kar tudi pomeni, da A^T ni polnega ranga
- zato obstaja $v' \in \ker(A^T)$
- preoblikujemo:
- $v^T A = \mathbf{0}$
  - $(v^T A)^T = 0^T$
  - $A^T v = 0$
  - izberemo $v = v'$

Q49 Naj bosta A in B kvadratni matriki iste velikosti in naj bo AB singularna matrika. Matrika BA je lahko obrnljiva. DA/NE
Definicija:

- singularna matrika = neobrnljiva
  Izrek:
- $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A) = 0$ pomeni, da je matrika singularna oz. neobrnljiva
  Reševaje
- $\det(BA) = \det(B)\cdot\det(A) = \det(AB)$
- velja: $\det(AB) = 0$
- zato tudi $\det(BA) = 0$
- kar pomeni, da tudi BA ni obrnljiva

Q50 Obstaja obrnljiva simetrična matrika A, za katero A^{-1} ni obrnljiva. DA/NE
Izrek:

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A) \neq 0 \iff A^{-1} \text{ obstaja}$
  Reševanje:
- A je po definiciji obrnljiva, ima determinanto ki ni enaka 0
- zato ji lahko priredimo inverz, ki ima determinanto, ki je enaka $\frac{1}{\det(A)}$
  - ta determinanta ni enaka nič, zato je tudi A^{-1} obrnljiva

Q51 Stolpični prostor kvadratne matrike je enak njenemu vrstičnemu prostoru. DA/NE
Protiprimer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- vrstični prostor: $\{[1,1]^T\}$
- stolpični prostor: $C(A) = \{[1,0]^T\}$

Q52 Dimenzija stolpičnega prostora kvadratne matrike je enaka dimenziji njenega vrstičnega prostora. DA/NE

Izrek:

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$
- $\text{rang}(A) = \dim(C(A))$
  Reševanje:
- $\dim(C(A))$
- $= \text{rang}(A)$
- $= \text{rang}(A^T)$
- $= \dim(C(A^T))$
- dimenziji prostorov sta enaki

Q53 Obstaja 3×3 matrika A, za katero imata jedro in sliko isto dimenzijo. DA/NE
Izrek:

- $\min(n, m) = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A$
  Reševanje:
  Predpostavka dokaza s kontradikcijo: $\dim \ker A = \dim \operatorname{im} A = x$
- $3 = x + x$
- $x = \frac{3}{2}$
- $x \notin \mathbb{N}$
- dimenzija mora biti naravno število

Q54 Obstaja 4×4 matrika A, za katero sta jedro in slika enaka. DA/NE
Izrek:

- $\min(n, m) = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A$
  Potrebni pogoji, da sta jedro in slika enaki:

1. $\dim \ker A = \dim \operatorname{im} A = x$
2. v tem primeru pomeni da je $x = 2$
3. $v \in \ker A \iff v \in \operatorname{im} A$
   Definicija:

- $\ker A = \{v \in \mathbb{R}^n; Av = 0\}$
- $\operatorname{im} A = \{v \in \mathbb{R}^n; Av\}$
  Reševanje:
- 3-ji pogoj zahteva, da se mora vsak vektor v sliki izpolnjevati pogoj za vektor, ki je v jedru:
  - $Av = 0$
- to pomeni, da se vsak vektor preslika v vektor $\mathbf{0}$.
- ampak če se vsak vektor preslika v ničelni vektor, potem je $\dim \operatorname{im} A = 0$, kar pa krši 2. pogoj.
- zato takšna matrika ne more obstajati.

Q55 Fiksirajmo linearno neodvisne vektorje v_1, v_2, v_3 v $\mathbb{R}^4$. Do množenja s skalarjem obstaja samo en vektor v_4, da vektorji v_1, v_2, v_3, v_4 tvorijo bazo za $\mathbb{R}^4$. DA/NE
Lažji način:

- če je $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ baza $\mathbb{R}^4$
- je tudi $\{v_1, v_2, v_3, v_4 + v_1\}$ baza $\mathbb{R}^4$
- in po definiciji baze ne moremo izrazit $v_4 + v_1$ kot linearno kombinacijo preostalih baznih vektorjev

Težji način, dokažeš obvious zadevo, da manjka natanko en vektor še.
Definicija:

- baza je množica linearno neodvisnih ne-ničelnih vektorjev
- $\dim \mathbb{R}^n = n$
  Izrek:
- $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$
- $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathbf{v} = \text{proj}_U \mathbf{v} + \text{proj}_{U^\perp} \mathbf{v}$ kjer je $\mathbf{v} \in V,\ U \leq V$
  + vsak vektor lahko razbijemo na projekcijo na podprostor U in $U^\perp$, ki je U-ju pravokoten.
  Reševanje:
- naj bo $U = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$
- velja: $U + U^\perp = \mathbb{R}^4$
- $\dim \mathbb{R}^4 = \dim(U + U^T) = \dim U + \dim U^T - \dim(U \cap U^\perp)$
- $4 = 3 + x - 0$
  - $x = 1$
  - ostane le še ena prosta dimenzija za $U^\perp$
  - to dimenzijo odklepa v_4.
  - Ampak tudi $v_4' = v_4 + v_1$ odklepa to dimenzijo
  - in po definiciji baze ne moremo izrazit v_4' kot linearno kombinacijo preostalih baznih vektorjev, zato je še vedno linearno neodvisen

Q56 Obstaja simetrična matrika A z lastnima vektorjema $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pri različnih lastnih vrednostih, da velja $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$. DA/NE

Izrek: (Spektralni Izrek)

- Vsi lastni vektorji (pri različnih LV) realne simetrične matrike so medsebojno pravokotni

Poskusni Kolokvij 2

Q61 Definicija linearna preslikave

Linearna preslikava je funkcija $L : U \to V$, za katero velja:

- $L(kv) = kL(v)$
- $L(v+u) = L(v) + L(u)$
  Za vse $v, u \in U$

Q62 Kako zapišemo matriko za linearno preslikavo v danih bazah

Za linearno preslikavo $L : U \to V$ bazne vektorje $\mathcal{B}_U(b_1, b_2, \ldots)$ zložimo v matriko $[L(b_1), L(b_2), \ldots, L(b_n)]$.

Q63 Če je $T : U \to V$ injektivna linearna preslikava, je $\dim(\mathrm{im} T) = \dim(U)$ DA/NE

Izrek:

- injektivne linearne preslikave imajo $\ker L = \{0\}$
- injektivne preslikave slikajo manjšo množico v večjo ali enako množico
- $\dim(\mathrm{im}\, T) + \dim(\ker T) = \dim U$

Q64 Za matriko $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $P^2 = P$. Potem sta edini lastni vrednosti P lahko le $0, 1$ DA/NE

Uradna rešitev:

- $Px = \lambda x$
- $P^2 x = PPx = P(\lambda x) = \lambda Px = \lambda^2 x$
- $P^2 = P$
  - $\lambda x = \lambda^2 x$
  - $\lambda(\lambda - 1)x = 0$
  - $\sigma = \{0, 1\}$

Moja rešitev:
Izrek:

- če je λ LV A, potem je λ^k LV A^k, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$

Q65 Matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ je diagonizabilna, njen karakteristični polinom pa je enak $x(x-1)^3$. Poišči min $\mathrm{rang}(A - \lambda I), \lambda \in \mathbb{R}$

Izrek:

- $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq n$
- $g(\lambda) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda I)$
  - preoblikovano: $\mathrm{rang}(A - \lambda I) = n - g(\lambda)$

Iz polinoma dobimo:

- $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3,4} = 1$
- iščemo LV z največjo geometrično večkratnostjo
- to je gotovo $\lambda = 1$
- po prvem izreku dobimo: $1 \leq g(1) \leq a(1)$
- vzamemo kar najvišjo $g(1) = a(1) = 3$
  - ker je 1 trojna lastna vrednost
- zato $\mathrm{rang}(A - \lambda I) = 4 - 3 = 1$
- minimalni range je 1

Q66 Obstajajo taka števila $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da je $p(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ karakteristični polinom matrike DA/NE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Izrek:

- splošne formule za koeficiente karakterističnega polinoma so: (za dani člen)
  - $\lambda^n \to (-1)^n$
  - $\lambda^{n-1} \to (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$
  - $\lambda^0 \to \det(A)$

Pri tej matriki je

- $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 3 + 5 - 8 = 1$
- dani karakteristični polinom pa zahteva $\mathrm{Tr}(A) == 0$
- oboje skupaj ni mogoče

Q67 Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonizabilna, je diagonizbilna tudi matrika $A + tI$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ DA/NE

Velja:

- $A = PDP^{-1}$
- $B = A + tI$

Metoda ostrega pogleda:

Skupaj:

- $B = A + tI = PDP^{-1} + P(tI)P^{-1}$
- Izpostavimo P, P^{-1}
- $B = P(D + tI)P^{-1} = P(D')P^{-1}$
- torej B je diagonizabilna

Q68 Obstaja taka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $i \in \mathbb{C}$ lastna vrednost matrike $A^T A$ DA/NE

Izrek:

- $A^T A = (A^T A)^T$ produkt matrike in transpozicije je simetrična matrika
- realne simetrične matrike imajo realne lastne vrednosti

Reševanje:

- $A^T A$ je simetrična realna matrika
- zato ima samo realne lastne vrednosti
- i ni realno število, zato ne more biti lastna vrednost

Q69 Če je $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalna matrika, imata Q in Q^T iste lastne vektorje DA/NE

Izrek:

- $Q^T Q = I$
- $\sigma(Q) \subseteq \{-1, 1\}$

$Qv = \lambda v$

- $Q^T Q v = Q^T \lambda v$
- $v = \lambda Q^T v$
- $\frac{1}{\lambda} v = Q^T v$
- $Q^T v = \frac{1}{\lambda} v$
- ker je $\lambda \in \{-1, 1\}$ velja $\lambda = \frac{1}{\lambda}$
- $Q^T v = \lambda v$

Q70 Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ imata A in A^T lastne vrednosti DA/NE

Izrek:

- $\det(A) = \det(A^T)$

Reševanje:

- $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I)$
  - $= \det((A^T - \lambda I)^T)$
  - $= \det(A - \lambda I)$
- zato $p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda)$
- ničle karakterističnega polinoma so lastne vrednosti pripadajoče matrike

Official rešitev:
Izrek:

- $N(A^T) = (C(A))^\perp$
- $N(A)^\perp = C(A^T)$

Velja:

- da je λ lastna vrednost A pomeni da je $\det(A - \lambda I) = 0$
- kar pomeni da $A - \lambda I$ ni polnega ranga
- kar pomeni da njen ničelni prostor ni trivialen
- $N(A - \lambda I) \neq 0$
  - $= C(A^T - \lambda I)^\perp$
  - $\Leftrightarrow C(A^T - \lambda I) \neq \mathbb{R}^n$
  - $\Leftrightarrow N(A^T - \lambda I) \neq 0$
  - $\Leftrightarrow \lambda$ je lastna vrednost A^T

Related

- Matrike
- Vektor
- Premica
- Projekcija Točke na Ravnino
- Pravokotna Projekcija Vektorja na Vektor
- Lastna Vrednost Matrike
- Lastni Vektor Matrike
- Ničelni Prostor Matrike
- Stolpični Prostor Matrike
- Skalarni Produkt
- Vektorski Produkt
- Inverz Matrike
- Transpozicija Matrike
- Vektorski Prostor
- Dimenzija Podprostora
- Linearna Ogrinjača
- Linearna Preslikava
- Injektivnost
- Surjektivnost
- Bijektivnost
- Ortogonalna Matrika
- Ortogonalna Množica