Ime in priimek

Diskretne strukture UNI: 1. kolokvij

22. november 2023

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dan je tromestni izjavni veznik

$$A(p,q,r) = p \Rightarrow (q \veebar r).$$

a) (5 točk) Ali veznik A ohranja logične konstante?

$A(0,0,0) = 0 \Rightarrow (0 \veebar 0) \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1 \longrightarrow$ ne ohranja ničel

$A(1,1,1) = 1 \Rightarrow (1 \veebar 1) \sim 1 \Rightarrow 0 \sim 0 \longrightarrow$ ne ohranja enic

b) (5 točk) Poišči KNO izraza $A(p,p,q)$.

$A(p,p,q) = p \Rightarrow (p \veebar q) \sim \neg p \vee (p \veebar q) \sim \neg p \vee ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \sim$

$\sim \underbrace{(\neg p \vee p \vee q)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg p \vee \neg p \vee \neg q)}_{\neg p} \sim 1 \wedge (\neg p \vee \neg q) \sim \underline{\underline{(\neg p \vee \neg q)}}$

c) (5 točk) Kateri od naborov $\{A\}, \{A,1\}, \{A,\wedge\}$ so polni? Zakaj oziroma zakaj ne?

Ker je $A(p,p,q) \sim \neg p \vee \neg q \sim \neg(p \wedge q) \sim p \uparrow q$, lahko polni nabor $\{\uparrow\}$ izrazimo z $\mathcal{N} = \{A\}$. Torej je $\{A\}$ poln. Sledi, da sta polna tudi $\{A,1\}$ in $\{A,\wedge\}$.

d) (10 točk) Naj bo $A_0 = p$ in $A_n = A(A_{n-1}, 0, \neg A_{n-1})$ za $n > 0$. Izračunaj A_{2023}.

$0 \veebar A \sim A$

$A_0 = p$

$A_1 = A(p,0,\neg p) \sim p \Rightarrow (0 \veebar \neg p) \sim p \Rightarrow \neg p \sim \neg p \vee \neg p \sim \neg p$

$A_2 = A(\neg p, 0, p) \sim \neg p \Rightarrow (0 \veebar p) \sim \neg p \Rightarrow p \sim p \vee p \sim p$

$A_3 = \neg p$

$A_4 = p$

$\vdots$

$\underline{\underline{A_{2023} = \neg p}}$

2. naloga (25 točk)

Dani so naslednji izjavni izrazi

$$A_1 = p \Rightarrow q\ ,\ A_2 = p \Rightarrow r\ ,\ A_3 = q \Rightarrow r\ ,\ A_4 = q \wedge \neg r\ ,\ A_5 = p\ ,\ A_6 = r\ ,\ A_7 = p \wedge (q \Rightarrow r)$$

ter

$$B = p \wedge (q \Rightarrow r).$$

Opazujemo sklepe oblike

$$A_1 \models B, \quad A_1, A_2 \models B, \quad \ldots \quad A_1, A_2, \ldots, A_k \models B, \quad \ldots \quad A_1, A_2, \ldots, A_7 \models B,$$

tj. sklepe z zaključkom B, pri katerih med predpostavke zaporedno dodajamo izraze $A_1, \ldots, A_7$.

a) (10 točk) Kateri od 7 sklepov $A_1, \ldots, A_k \models B$ *niso* pravilni? Ali lahko nepravilnost teh sklepov utemeljiš z enim samim protiprimerom?

Opazimo: $A_4 = q \wedge \neg r \sim \neg(\neg q \vee r) \sim \neg(q \Rightarrow r) \sim \neg A_3$. Če sklep vsebuje A_3 in A_4, bomo z $Zd(A_3, A_4) \sim 0$ dobili protislovje. Torej so sklepi od 4. dalje pravilni (dokaz spodaj).

Iščemo protiprimer, ki bo dokazal, da so $\overset{1}{A_1} \models \overset{0}{B}$, $\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2} \models \overset{0}{B}$ ter $\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{1}{A_3} \models \overset{0}{B}$ vsi napačni.

$$\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{1}{A_3} \models \overset{0}{B}$$

$$\overbrace{p \Rightarrow q}^{1},\ \overbrace{p \Rightarrow r}^{1},\ \overbrace{q \Rightarrow r}^{1} \models \overbrace{p \wedge (q \Rightarrow r)}^{0}$$

$\underline{p = 0}$

$0 \Rightarrow q$ 1 ✓ $\quad$ $0 \Rightarrow r$ 1 ✓ $\quad$ ($q \sim 0$, r poljuben ali $q \sim 1, r \sim 1$) $\longrightarrow$ npr. $\underline{p \sim q \sim r \sim 0}$

b) (15 točk) Kateri od 7 sklepov $A_1, \ldots, A_k \models B$ *so* pravilni? Zapiši dokaze. Ali lahko pravilnost teh sklepov utemeljiš z enim samim dokazom?

Pravilni so sklepi 4, 5, 6 in 7.

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & A_1 \\ 2. & A_2 \\ 3. & A_3 \\ 4. & A_4 \end{array}\right\} \text{predp. za 4. sklep}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (5. & A_5) \\ (6. & A_6) \\ (7. & A_7) \end{array}\right\} \text{dodatne predpostavke za 5., 6. in 7. sklep}$$

8.1	$\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$	predp. RA
8.2.	$A_3 \wedge A_4$	$Zd(3,4)$
8.3.	0	~ 8.2
8.	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	RA (8.1, 8.3)

3. naloga (25 točk)

Dana je izjavna formula

$$F = \exists x(R(x) \vee \forall y(\neg P(x,y) \vee P(y,x))).$$

a) (10 točk) Pokaži, da je formula F logično veljavna, če je $P(y,x) = P(x,y)$ za vse x in y iz področja pogovora.

$$F = \exists x \Big(R(x) \vee \forall y \big(\underbrace{\neg P(x,y) \vee \overbrace{P(x,y)}^{= P(y,x) \text{ za vse } x,y}}_{\neg A \vee A \sim 1}\big)\Big) \sim \exists x \big(\underbrace{R(x) \vee \underbrace{\forall y : 1}_{1}}_{A \vee 1 \sim A}\big) \sim \exists x : 1 \sim \underline{\underline{1}}$$

b) (15 točk) Poišči primer interpretacije, v kateri formula F ni resnična.

Naj bo $R(x) \equiv 0$. Potem je

$$F = \exists x \big(\underbrace{\underbrace{R(x)}_{0} \vee \forall y(\neg P(x,y) \vee P(y,x))}_{0 \vee A \sim A}\big) \sim \exists x \forall y \, (\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \sim$$

$$\sim \exists x \forall y \, (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$$

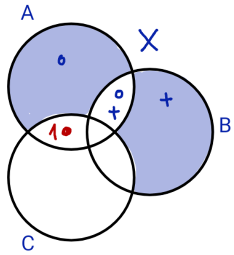
Naj bo $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $P(x,y) = x > y$. V tej interpretaciji je $F \sim \exists x \forall y \big(\underbrace{x > y \Rightarrow y > x}_{0 \text{ za } \underline{\underline{\text{vse}}}\ x \in \mathbb{N} \text{ in vse } y \in \mathbb{N}}\big) \sim 0$

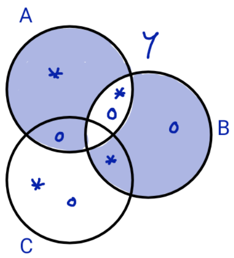
4. naloga (25 točk)

Naj bodo A, B in C poljubne množice. Množici X in Y sta dani kot

$$X = (A \overset{\circ}{\setminus} C) + (B \overset{+}{\setminus} C) \quad \text{ter} \quad Y = (A \overset{*}{+} C) + (B \overset{\circ}{+} C).$$

a) (5 točk) Ali sta množici X in Y enaki? Ali velja $Y \subseteq X$?





$X \neq Y$. Npr. za $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$ je

$X = (\{1\} \setminus \{1\}) + (\emptyset \setminus \{1\}) = \emptyset + \emptyset = \emptyset$ in

$Y = (\{1\} + \{1\}) + (\emptyset + \{1\}) = \emptyset + \{1\} = \{1\}$, torej

$X \neq Y$.

Isti protiprimer pokaže, da $Y \nsubseteq X$, ker $\{1\} \nsubseteq \emptyset$.

b) (10 točk) Ali velja $X \subseteq Y$?

$X = (A \cap C^c) + (B \cap C^c) = (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)^c \cup (A \cap C^c)^c \cap (B \cap C^c) = A \cap C^c \cap (B^c \cup C) \cup (A^c \cup C) \cap B \cap C^c =$

$= (A \cap C^c \cap B^c) \cup \underbrace{(A \cap C^c \cap C)}_{\emptyset} \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup \underbrace{(C \cap B \cap C^c)}_{\emptyset} = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) = M_1 \cup M_2$ in

$Y = (A \cap C^c \cup A^c \cap C) + (B \cap C^c \cup B^c \cap C) = (A \cap C^c \cup A^c \cap C) \cap (B \cap C^c \cup B^c \cap C)^c \cup (A \cap C^c \cup A^c \cap C)^c \cap (B \cap C^c \cup B^c \cap C)$

$= (A \cap C^c \cup A^c \cap C) \cap \underbrace{((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c))}_{\underbrace{B^c \cap B}_{\emptyset} \cup B^c \cap C^c \cup C \cap B \cup \underbrace{C \cap C^c}_{\emptyset}} \cup \underbrace{((A^c \cup C) \cap (A \cup C^c))}_{\underbrace{A^c \cap A}_{\emptyset} \cup A^c \cap C^c \cup C \cap A \cup \underbrace{C \cap C^c}_{\emptyset}} \cap (B \cap C^c \cup B^c \cap C) =$

$= (A \cap C^c \overset{+}{\cup} A^c \cap C) \overset{\cdot}{\cap} (B^c \cap C^c \overset{+}{\cup} C \cap B) \cup (A^c \cap C^c \overset{+}{\cup} C \cap A) \overset{\cdot}{\cap} (B \cap C^c \overset{+}{\cup} B^c \cap C) =$

$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup \underbrace{(A \cap B \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A^c \cap B^c \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup \underbrace{(A^c \cap B^c \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A \cap B \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup (A \cap B^c \cap C)$

$= M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, torej je $X = M_1 \cup M_2 \subseteq M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = Y$.

c) (10 točk) Ali velja $X = Y$, če je $(A \cup B) \cap C = \emptyset$?

Če je $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, je $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, torej je $A \cap C = \emptyset$ in $B \cap C = \emptyset$, zato je

$M_3 = A^c \cap B \cap C = A^c \cap \emptyset = \emptyset$ in $M_4 = A \cap C \cap B^c = \emptyset \cap B^c = \emptyset$ in je $Y = M_1 \cup M_2 = X$.