1. nal

(e) Ali je sklep $p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q \models r \vee \neg p$ pravilen?

2. predpostavko lahko enakovredno prepišemo kot $q \Rightarrow r$, zaključek pa kot $p \Rightarrow r$. Sklep tako pretvorimo v

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r,$$

kar je sumljivo podobno enemu od pravil sklepanja.

2. nal

(e) Naj imajo množice A, B, C vse moč 4, naj velja $|A \cap B \cap C| = 0$ in naj ima $A \cup B \cup C$ liho mnogo elementov. Pokaži, da A, B in C niso paroma disjunktne.

Dajmo s protislovjem. Če so A, B, C paroma disjunktne, to pomeni $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, potem so njihove moči enake $|A \cap B| = 0$, $|A \cap C| = 0$ in $|B \cap C| = 0$.

V tem primeru je

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 4 + 4 + 4 - 0 - 0 - 0 + 0 = 12,$$

kar je v nasprotju s predpostavko, da je $|A \cup B \cup C|$ liho.

V resnici ne potrebujemo parnosti $|A \cup B \cup C|$. Dovolj bi bilo privzeti, da $|A \cup B \cup C|$ ni enako 12.

3 nal

(c) Naj bo $\sigma : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ preslikava, ki pozitivnemu naravnemu številu priredi število deliteljev. Ali je σ surjektivna preslikava?

Kako pokazati, da je vsako naravno število $n \geq 1$ v sliki preslikave σ? Dovolj je opaziti, da so delitelji števila 2^{10} v resnici $\underbrace{1, 2, 2^2, \ldots, 2^9, 2^{10}}_{\text{11 jih je skupaj}}$, torej ima število 2^{n-1} natanko n deliteljev.

Zato je $\sigma(2^{n-1}) = n$

Produkt različnih praštevil NE deluje.

$\sigma(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) = 2^5 = 32$

S takšnimi produkti več in več različnih praštevil lahko res dobimo poljubno velike vrednosti preslikave σ, toda za surjektivnost je potrebno premisliti, da res nobenega naravnega števila ne izpustimo iz slike.

(e) Ali obstaja $\lim_{n\to\infty} \sigma(n)$? Zakaj, oz. zakaj ne?

V zaporedju

$$\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \ldots \qquad (*)$$

je neskončno mnogo dvojk (pri praštevilskih argumentih σ), toda $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) \neq 2$, saj imamo v tem istem zaporedju tudi neskončno mnogo trojk (pri argumentih p^2, kjer je p praštevilo)

Lahko bi pa uporabili tudi znanje c), ki pravi, da zaporedje $(*)$ ni navzgor omejeno.

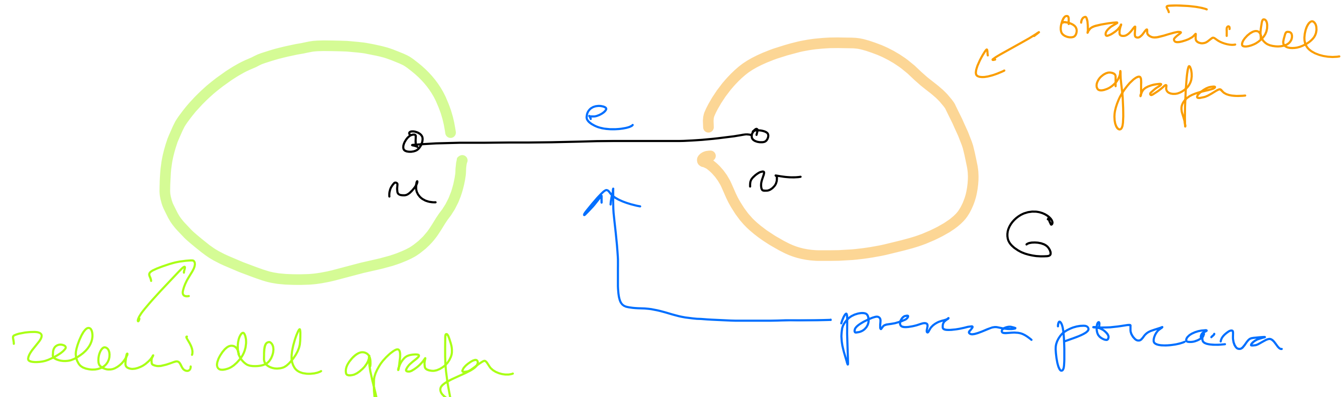
Zato $\lim_{n\to\infty} \sigma(n)$ ne obstaja.

4 nal.

(e) Poišči najmanjši kubični graf s prerezno povezavo.

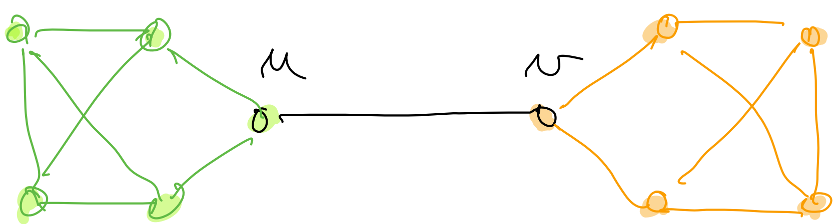
Kubični graf? To je graf, v katerem ima vsaka točka stopnjo 3.

Shematično razmišljamo takole.



Označeni del je zgolj plastično ime za komponento (eno od obeh) grafa $G-e$.

V označenem delu ne morem imeti zgolj štirih točk — poleg v še v_1, v_2, v_3. V tem primeru bi bila vsaka soseda z vsemi preostalimi točkami, toda, ker je v soseda tudi z u, bi bila stopnja točke v prevelika. Gre pa s petimi točkami (tako v označenem kot, simetrično, v zelenem delu). Takole



(d) Naj bo G najmanjši kubični graf s prerezno točko. Pokaži, da ima G sodo mnogo točk.

Tale zgornji graf (rešitev te c)) je v resnici najmanjši kubični graf s prerezno točko (kubični graf ima prerezno točko natanko tedaj, ko ima prerezno povezavo — zakaj že), v njem sta točki u in v prerezni, in ima 10 točk.

Gre lažje. Vsak kubični graf (prerezne točke gor ali dol) ima sodo mnogo točk, saj mora imeti sodo mnogo točk lihe stopnje.

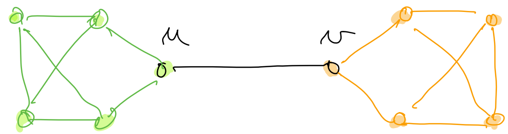
Gre tudi malenkost težje. V kubičnem (3-regularnem) grafu velja zveza

$$2m = 3n$$, če z m oz. n

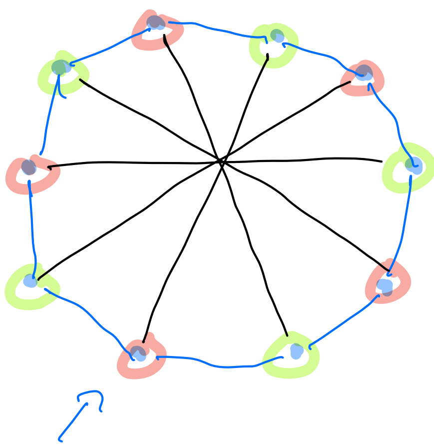
označimo število povezav oz. točk. Torej je $n = 2m/3$, kar je sodo število.

(c) Poišči dva neizomorfna kubična grafa na 10 točkah.

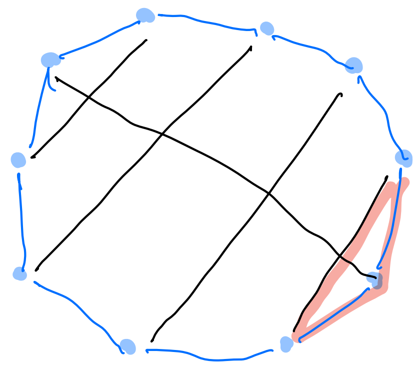
Eden je tale



Gre brez njega. Najlažje takole



Je dvo-delen



Ni dvodelen, ima cikle dolžine 3.