UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

VAJE IZ FIZIKE I

**TOMAŽ GYERGYEK
VERONIKA KRALJ-IGLIČ
ALEŠ IGLIČ
MIHA FOŠNARIČ**

LJUBLJANA, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

53(075.8)(076.2)

VAJE iz fizike I / Tomaž Gyergyek ... [et al.] ; [izdajatelj] Fakulteta za elektrotehniko. - 5. popravljena in dopolnjena izd. - Ljubljana : Založba FE in FRI, 2009

ISBN 978-961-243-119-8 (Fakulteta za elektrotehniko)
1. Gyergyek, Tomaž
247920896

Recenzenta: prof. dr. Bruno Cvikl, prof. dr. France Sevšek

Založnik: Založba FE in FRI, Ljubljana
Izdajatelj: Fakuleta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: mag. Peter Šega

Natisnil: KOPIJA Mavrič, Ljubljana
Naklada: 250 izvodov
5. dopolnjena in popravljena izdaja

Kazalo

Predgovor

Pričujoča peta, dopolnjena in popravljena izdaja Vaj iz Fizike I v veliki večini vsebuje naloge z vaj pri predmetu Fizika I v okviru visokošolskega ter univerzitetnega programa na Fakulteti za elektrotehniko. Publikacijo priporočamo študentom vseh fakultet, katerih program vključuje osnove klasične in moderne fizike.

Nekatere naloge naloge so rešene v celoti, posamezne pa imajo na koncu v oklepajih podane rezultate. Precej nalog je bilo prirejenih ali povzetih iz literature, ki je navedena podana na koncu publikacije.

Kljub nekajkratnim pregledom so v tekstu gotovo ostale tako tiskovne kot tudi vsebinske napake. Zato prosimo bralce, predvsem študente, da nam jih sporočijo.

Pri sestavi nalog so sodelovali prof. dr. Dušan Brajnik, prof. dr. Aleš Stanovnik, prof. dr. Radko Osredkar, asist. mag. Darko Korbar, prof. dr. Aleksander Manohin in mag. Marija Pavlič, za kar se jim iskreno zahvaljujemo. Zahvaljujemo se recenzentoma prof. dr. Brunu Cviklu in doc. dr. Francetu Sevšku za koristne pripombe in nasvete ter študentu Miranu Meži za pomoč pri urejanju teksta, tipkanju in iskanju ter odpravi napak. Lepo se zahvaljujemo tudi gospe Liljani Per za izdelavo slik in Alešu Razingerju, prof. fizike, za prepis slik v elektronsko obliko. Zahvaljujemo se tudi vsem študentom, ki so z nami sodelovali pri vajah, in s tem pripomogli k oblikovanju publikacije.

Citati literature iz poglavja 10 so v oglatih oklepajih, vrednosti fizikalnih konstant, ki so potrebne pri računanju, so podane v dodatku "Fizikalne konstante".

Nasveti za študente: Za dobro razumevanje in znanje fizike je nujno potrebno, da rešimo čim več nalog. Tako si pridobimo vajo in izkušnje. Brez tega nikakor ne gre. V začetku je morda koristno, da si pri reševanju naloge pomagamo s podobnimi že rešenimi problemi in učbeniki. Vsekakor pa nalogo najprej poskušamo rešiti sami in si šele nato, če je to potrebno, pomagamo z rešitvami. Kdor samo opazuje, kako naloge rešujejo drugi, kmalu ugotovi, da sam ne zna rešiti niti preprostih problemov, čeprav ima morda občutek, da vse razume. Ponavadi ni dovolj, da rešimo samo eno nalogo določenega tipa, ampak moramo rešiti vsaj nekaj podobnih nalog. Včasih se zgodi, da naloge kljub naporom ne znamo rešiti. Takrat poiščemo pomoč kolegov ali učiteljev.

Avtorji

1 Kinematika, kroženje

1. Telo se giblje tako, da je hitrost v podana z enačbo $v = v_0 + At + Bt^2$, kjer je $v_0 = 1$ m/s, $A = 0.2$ m/s^2 in $B = 0.03$ m/s^3. Izračunajte pospešek telesa po 10 s (t_1) šteto od časa t = 0 naprej? Kolikšno pot napravi telo v tem času?

   Rešitev:
$$a = \frac{dv}{dt} = A + 2Bt = 0.8 \ \ \mathrm{m/s^2},$$
$$s = \int_0^{t_1} vdt = v_0 t_1 + A\frac{t_1^2}{2} + B\frac{t_1^3}{3} = 30 \quad \mathrm{m}$$

2. Telo se giblje premo s pospeškom $a = k \cdot t^{1/2}$ ($k = 1$ m $\times$ s$^{-5/2}$). Telo v začetku miruje. Izračunajte hitrost ter opravljeno pot telesa 10 s po začetku gibanja?

   Rešitev:
$$v = \int_0^{t_1} adt = \frac{2}{3}kt_1^{3/2} = 21.1 \ \ \mathrm{m/s}$$
$$s = \int_0^{t_1} vdt = \int_0^{t_1} \frac{2}{3}kt^{3/2}dt = \frac{4}{15}kt_1^{5/2} = 84.3 \ \ \mathrm{m}$$

3. Hitrost avtomobila je podana z enačbo $v = kt^{1/2}$, kjer je $k = 5$ ms$^{-3/2}$. Kolikšen je pospešek po 30 s in kolikšno pot napravi avtomobil v tem času, če je v začetku miroval? (0.456 m/s^2, 548 m)

4. Čolnu, ki v brezveterju pluje po jezeru, s hitrostjo v_0=3 m/s, se pokvari motor. Zato se začne ustavljati tako, da je trenutni pojemek sorazmeren njegovi trenutni hitrosti, kjer je sorazmernosti koeficient med hitrostjo in pojemkom enak $k = 2$ s^{-1}. Kolikšno pot opravi čoln 0.5 s (t) po ustavitvi motorja?

   Rešitev:
$$a = -k \cdot v,$$
$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t k dt$$

$$\ln v|_{v_0}^{v} = -kt \Longrightarrow v = v_0 e^{-kt}$$

$$s = \int_0^t v dt = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

5. Vozilu, ki se giblje s hitrostjo 4 m/s se ustavi motor. Kolikšno pot napravi vozilo v naslednjih 15 s, če velja za pojemek enačba $a = -qv^2$, kjer je $q = 0.8\ \mathrm{m}^{-1}$. Kolikšna je hitrost vozila po 15 s? (4.86 m, 0.082 m/s)

6. Kamen spustimo, da pade v vodo. Ko zadene gladino, ima hitrost $v_0 = 3$ m/s. Zaradi upora vode se njegova hitrost začne zmanjševati. Trenutni pojemek a kamna je sorazmeren s kvadratom njegove trenutne hitrosti. Velja torej enačba $a = -kv^2$, kjer je $k = 0.2\ \mathrm{m}^{-1}$. Kolikšno pot s opravi kamen $t = 0.8$ s po padcu v vodo, kolikšna sta takrat njegova hitrost v in pospešek a?

   Rešitev:
   Za pospešek kamna velja:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2. \tag{1}$$

   Najprej ločimo spremenljivki, nato pa integriramo.

$$dt = -\frac{1}{k}\frac{dv}{v^2},$$

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{k}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2},$$

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

   Končno izrazimo hitrost $v(t)$ kot funkcijo časa:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + ktv_0}.$$

Za domačo nalogo preverite, če ta rešitev res zadošča enačbi (1).

V času $t = 0.8$ s po padcu v vodo je hitrost kamna $v = 2$ m/s, pojemek kamna pa je $a = 0.8$ m/s^2.

Pot s, kijo kamen opravi, je podana z izrazom:

$$s = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \frac{v_0 dt}{1 + ktv_0} = \frac{1}{k} \ln(1 + ktv_0) = 1.96 \text{ m}.$$

7. Kolikšna je globina vodnjaka napolnjenega z vodo, če potrebuje zvok za pot od vodne gladine do dna vodnjaka in nazaj 0.6 s? Hitrost zvoka v vodi je 1450 m/s. (435 m)

8. Kamen spustimo iz balona na višini 300 m. Koliko časa pada kamen do zemlje, če
   a) se balon dviga s hitrostjo 5 m/s
   b) se balon spušča s hitrostjo 5 m/s
   c) balon miruje
   (a) 8.4 s, b) 7.3 s, c) 7.8 s)

9. Balon se dviguje s hitrostjo 2 m/s. Na višini 50 m vržejo potniki iz balona kamen s hitrostjo 2 m/s v vodoravni smeri. Po kolikšnem času in kje glede na mesto, kjer so odvrgli kamen, pade kamen na tla? (3.36 s, 6.72 m)

10. Dve telesi vržemo navpično navzgor z iste točke in z enako začetno hitrostjo 24.5 m/s v časovnem razmiku 0.5 s. Na kateri višini se telesi srečata?

    Rešitev:
    Telesi se srečata na višini h po času t po prvem metu. Takrat velja za prvo telo enačba

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

    in za drugo telo enačba

$$h = v_0(t - \Delta t) - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2} ,$$

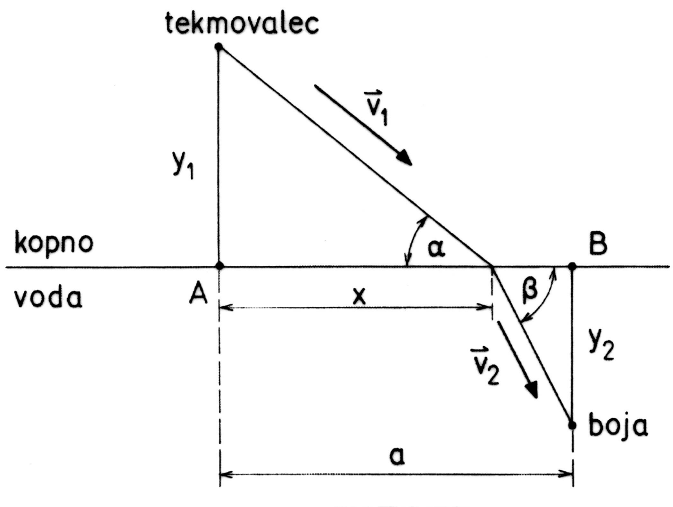
kjer je $\Delta t = 0.5$ s časovni razmik med metoma. Enačbi izenačimo in izrazimo čas:

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2} = 2.75\,\mathrm{s}\,.$$

Višino lahko potem izračunamo iz prve ali druge enačbe:

$$h = 30.3\,\mathrm{m} \approx 30\,\mathrm{m}\,.$$

11. Telo vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo 10 m/s. V trenutku, ko doseže telo najvišjo lego, vržemo drugo telo z enako začetno hitrostjo, tudi navpično navzgor. Na kateri višini se telesi srečata? (3.82 m)



Slika 1:

12. Tekmovalec stoji na razdalji $y_1 = 20$ m od roba bazena tako, kot kaže slika 1. Na gladini vode v bazenu plava boja, ki je oddaljena $y_2 = 17$ m od roba bazena (slika 1). Točki A in B (slika 1), do katerih sežeta pravokotnici od tekmovalca do roba bazena, oziroma od boje do roba bazena, sta med seboj oddaljeni $a = 50$ m. Tekmovalec lahko po kopnem teče

s hitrostjo $v_1 = 6$ m/s, v bazenu pa plava s hitrostjo $v_2 = 2$ m/s. Na kateri razdalji x med točkama A in B, merjeno od točke A, mora tekmovalec skočiti v vodo, da bo prišel do boje v najkrajšem času?

Rešitev:
Pot s_1, ki jo tekmovalec preteče po kopnem je

$$s_1 = \sqrt{y_1^2 + x^2}. \tag{2}$$

V bazenu preplava pot s_2:

$$s_2 = \sqrt{y_2^2 + (a-x)^2}. \tag{3}$$

Za celotno pot porabi čas

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{y_2^2 + (a-x)^2}}{v_2}. \tag{4}$$

Pri tem mora biti x takšen, da bo t najmanjši, torej

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{v_1\sqrt{y_1^2 + x^2}} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{y_2^2 + (a-x)^2}}. \tag{5}$$

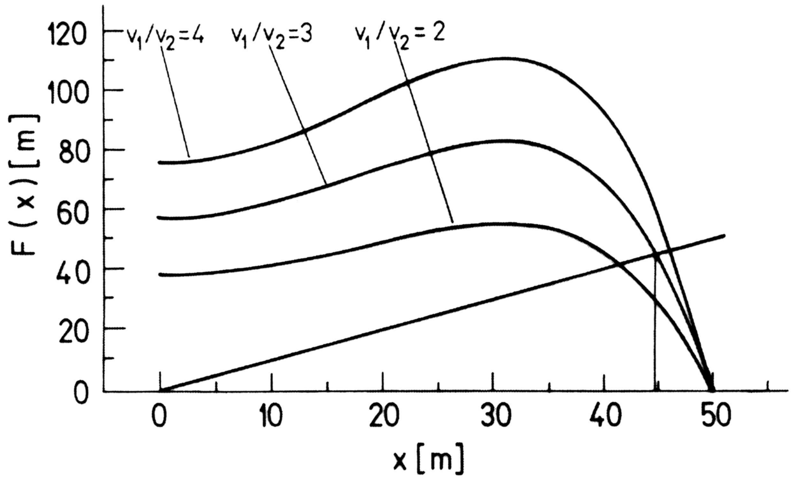
To je enačba četrte stopnje za x in jo je potrebno rešiti numerično. Rešitev za naš primer je $x = 44.57$ m.

Prepišimo zgornjo enačbo v naslednjo obliko:

$$x = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{(a-x)\sqrt{y_1^2 + x^2}}{\sqrt{y_2^2 + (a-x)^2}} \equiv F(x). \tag{6}$$

Na sliki 2 je narisana zgoraj definirana funkcija $F(x)$ za 3 različna razmerja $\frac{v_1}{v_2}$. Iz presečišč s premico $y = x$ poiščemo rešitev. V našem primeru je $v_1/v_2 = 3$ in $x = 44.57$ m. Če enačbo (6) obrnemo, dobimo

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x\sqrt{(a-x)^2 + y_2^2}}{(a-x)\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{7}$$



Slika 2:

Kota α in β sta označena na sliki 1. Enačba (7) je lomni zakon, ki ga bomo srečali tudi pri optiki. Tam bomo spoznali Fermatovo načelo, po katerem svetloba od ene do druge točke vedno potuje tako, da porabi za pot najkrajši čas.

13. Hkrati vržemo dva kamna. Prvega vržemo z vrha $h_1 = 80$ m visokega stolpa v smeri navpično navzgor z začetno hitrostjo $v_1 = 8$ m/s. Drugega vržemo z vznožja tega stolpa prav tako v smeri navpično navzgor z začetno hitrostjo $v_2 = 38$ m/s. Kolikšna je razdalja d med kamnoma čez $t = 2$ s? Kamna se ves čas gibljeta po skupni navpični premici. ($d = h_1 - t(v_2 - v_1) = 20$ m).

14. Telo vržemo navpično navzdol z začetno hitrostjo 19.62 m/s. telo napravi četrtino poti v zadnji sekundi leta. Koliko časa telo pada? (6 s)

15. Kamen spustimo z vrha stolpnice, da prosto pade. Za pot od 8. nadstropja na višini $h_1 = 24$ m, do 7. nadstropja na višini $h_2 = 21$ m porabi kamen čas $t_0 = 0.08$ s. S kolikšne h višine smo kamen spustili?

Rešitev:
Odvisnost poti kamna od 8. do 7. nadstropja od časa zapišemo takole:

$$h_1 - h_2 = vt_0 + \frac{gt_0^2}{2}.$$

Pri tem je v hitrost, ki jo je kamen pridobil med padanjem od mesta, s katerega smo ga spustili, do 8. nadstropja. Za to hitrost velja

$$v = gt,$$

kjer je t čas padanja kamna do 8. nadstropja, velja pa tudi

$$h - h_1 = \frac{gt^2}{2}.$$

Iz zadnjih dveh enačb izločimo v in t ter vstavimo v prvo enačbo:

$$h_1 - h_2 = t_0\sqrt{2g(h - h_1)} + \frac{gt_0^2}{2}.$$

Od tod dobimo:

$$h = h_1 + \frac{\left(h_1 - h_2 - \frac{gt_0^2}{2}\right)^2}{2gt_0^2} = 94 \text{ m}.$$

16. Ravni cesti se križata s podvozom. Prvi avtomobil na prvi cesti ima hitrost 5 m/s, ko je 30 m oddaljen od križišča. Prvi avtomobil vozi s to hitrostjo enakomerno vso pot do križišča. Istočasno je na drugi cesti drugi avtomobil na oddaljenosti 70 m od križišča in ima enako hitrost kot prvi avtomobil, vendar vozi enakomerno pospešeno. Kolikšen mora biti pospešek drugega avtomobila, da oba avtomobila v križišče pripeljeta istočasno? (2.22 m/s^2)

17. Vlak se približuje postaji s hitrostjo 40 km/h. Začne se enakomerno pojemajoče ustavljati tako, da prvih 50 m po začetku zaviranja prevozi v 5 s. Kolikšen je pojemek vlaka? (-0.44 m/s^2)

18. Ko se vlak približuje postaji, se začne enakomerno pojemajoče ustavljati, tako, da prvih 50 m po začetku zaviranja prevozi v 5 s, sledečih 50 m pa v 7 s. Kolikšen je pojemek vlaka? (-0.48 m/s^2)

19. Ladja začne voziti z levega brega s hitrostjo 7.2 km/h v smeri pravokotno na reko, ki je široka 0.5 km. Nasprotni desni breg doseže 200 m nižje v smeri toka reke. Kolikšna je hitrost reke in po kolikšnem času ladja doseže nasprotni breg? (0.8 m/s, 250 s)

20. Pes se nahaja na razdalji 50 m od ravne ceste po kateri se mu približuje avtomobil s hitrostjo 10 m/s. V kateri smeri mora hoditi pes, da bi se srečal z avtomobilom, če se pes giblje s hitrostjo 3 m/s, avtomobil pa je na začetku od psa oddaljen 200 m? (pod kotom 56.4^o glede na zveznico med psom in avtomobilom na začetku.)

21. Voda v reki teče s hitrostjo 5.5 km/h. Proti toku reke pluje čoln s hitrostjo 9 km/h glede na breg. Kapitanu čolna pade v vodo kapa, kar pa opazi šele 27 minut kasneje. Takoj obrne čoln in odpluje proti kapi, pri čemer pa se število obratov na minuto pogonskega vodnega vijaka ne spremeni. Koliko časa porabi, da doseže kapo? (27 min)

22. Z vrha stolpa vržemo istočasno dve telesi z enako začetno hitrostjo 10 m/s. Prvo telo pod kotom 60^o glede na vodoravnico, drugo pa pod kotom 30^o glede na vodoravnico. Na kolikšni medsebojni oddaljenosti se nahajata telesi 2 s po metu? (10.35 m)

23. Letalo leti poševno navzgor s hitrostjo 250 m/s pod kotom 60^o proti vodoravnici. V višini 400 m spusti tovor in nadaljuje let v nespremenjeni smeri z nespremenjeno hitrostjo. Kolikšna je razdalja med krajem, ki ga zadene tovor in letalom v trenutku, ko pade tovor na tla? Pod kolikšnim kotom proti vodoravnici udari tovor na tla? Upor zraka zanemarimo.

    Rešitev:

$v = 250$ m/s
$\alpha = 60^{\circ}$
$h = 400$ m

$d = ?$
$\varphi = ?$

Pravokotni koordinatni sistem postavimo tako, da os x leži v ravnini tal, os y kaže pravokotno navzgor, letalo pa leti v ravnini xy (glej tudi sliko 3). Tako lahko zapišemo za letalo:

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos\alpha \\ v_y &= v\sin\alpha \\ y &= h + v_y t \end{aligned}$$

in za tovor:

$$\begin{aligned} v_{tx} &= v_x\cos\alpha \\ v_{ty} &= v_y - gt\sin\alpha \\ y_t &= h + v_y t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

če začnemo šteti čas v trenutku, ko letalo spusti tovor.

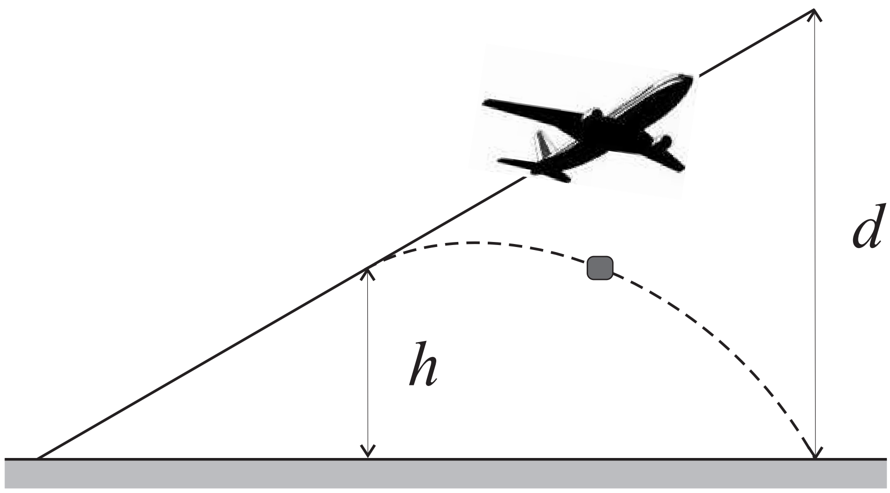
Tovor udari ob tla, ko je $y_t = 0$,

$$0 = h + v_y t_1 - \frac{gt_1^2}{2}\ ,$$

torej ob času

$$t_1 = \frac{v_y}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_y^2}}\right) = 45.9\,\mathrm{s}.$$

Izmed dveh možnih rešitev smo izbrali tisto z znakom $+$, saj nam samo ta da pozitiven t (negativna rešitev nam pove, pred kolikim časom bi morali od tal vreči tovor, da bi se ob času $t = 0$ znašel na istem mestu in z isto hitrostjo kot tovor pravkar spuščen iz letala).



Slika 3:

Ker sta vodoravni komponenti hitrosti letala in tovora ves čas enaki, je letalo ves čas točno nad tovorom. Ko tovor pade na tla je torej razdalja med tovorom in letalom

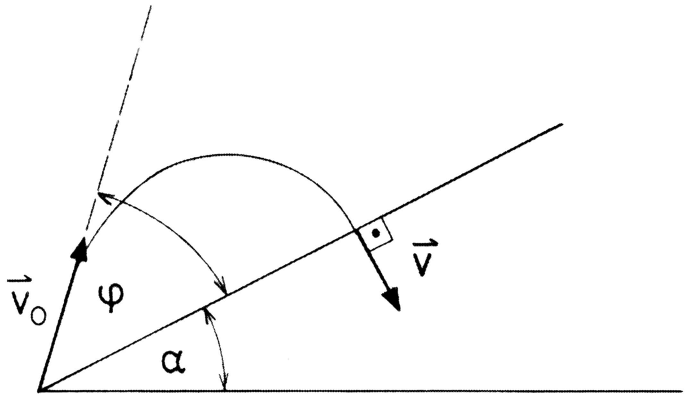
$$y = h + v_y t_1 = 10337\,\mathrm{m}.$$

Kot pod katerim udari tovor na tla dobimo iz enačbe

$$\varphi = \arctan\frac{v_{ty}(t_1)}{v_{tx}(t_1)} = \arctan\frac{v_y - gt_1}{v_x} = 62^{\circ}.$$

24. Mož, ki stoji na začetku zelo dolgega klanca s konstantno strmino $\alpha = 45^{\circ}$ vrže kamen v smeri naraščajoče strmine z začetno hitrostjo v_0. Pod kolikšnim kotom φ glede na klanec mora mož vreči kamen, da bo ta priletel na tla pod pravim kotom? (Glejte sliko 4!)

Rešitev:
Preden se lotimo naloge, povejmo nekaj besed o zasuku koordinatnega sistema. Vzemimo dva pravokotna koordinatna sistema. Prvega označimo S in ima med seboj pravokotne osi x, y in z. Drugega označimo S' in ima med seboj pravokotne



Slika 4:

osi x', y' in z'. Izhodišči obeh sistemov sovpadata (slika 5) in tudi osi z in z' ležita na isti premici. Sistem S' je glede na sistem S zasukan za kot α okoli osi z. Točka A ima v sistemu S koordinate $(A_x, A_y, 0)$ v sistemu S' pa so njene koordinate $(A_{x'}, A_{y'}, 0)$. Iz slike 5 vidimo, da so zveze med koordinatami enega in drugega sistema naslednje:

$$A_{x'} = A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha, \tag{8}$$

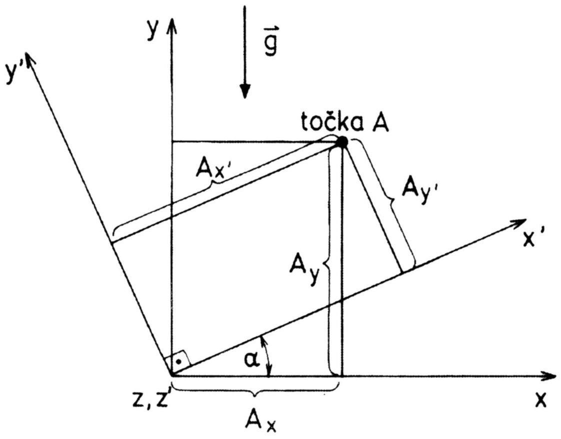
$$A_{y'} = -A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha. \tag{9}$$

Točko A smo postavili v ravnino xy, ker smo koordinatni sistem postavili tako, da se kamen giblje v tej ravnini.

Vrnimo se k nalogi. Reševanje naloge bo lažje v sistemu klanca, to je v sistemu, v katerem je os x' vzporedna s klancem (slika 5). V sistemu, ki ima os x vodoravno, ima težni pospešek koordinati $g_x = 0$ in $g_y = -g$. V sistemu klanca pa sta koordinati težnega pospeška:

$$g_x' = g_x \cos\alpha + g_y \sin\alpha = -g \sin\alpha,$$

$$g_y' = -g_x \sin\alpha + g_y \cos\alpha = -g \cos\alpha.$$



Slika 5:

Uporabili smo enačbi (8) in (9). Komponenti hitrosti $v_x^{'}$ in $v_y^{'}$ v sistemu klanca sta:

$$v_x^{'} = \int g_x^{'} dt = v_0 \cos\varphi - gt \sin\alpha,$$

$$v_y^{'} = \int g_y^{'} dt = v_0 \sin\varphi - gt \cos\alpha.$$

Lega kamna pa je v sistemu klanca podana s koordinatama $x^{'}$ in $y^{'}$:

$$x^{'} = \int v_x^{'} dt = v_0 t \cos\varphi - \frac{gt^2 \sin\alpha}{2},$$

$$y^{'} = \int v_y^{'} dt = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2 \cos\alpha}{2}.$$

V trenutku, ko kamen zadene tla pod pravim kotom, velja $y^{'} = 0$ in $v_x^{'} = 0$. Torej:

$$v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2 \cos\alpha}{2} = 0,$$

$$v_0 \cos\varphi - gt \sin\alpha = 0.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo čas t in ga vstavimo v predzadnjo enačbo. Dobimo:

$$2\sin\varphi\sin\alpha - \cos\varphi\cos\alpha = 0,$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{2}.$$

Od tod dobimo $\varphi = 25.56^o$.

Sedaj pa rešimo nalogo še v "običajnem", vodoravnem koordinatnem sistemu. V tem sistemu vržemo kamen pod kotm β glede na vodoravnico, zanj pa velja $\beta = \alpha + \varphi$ (slika 4). Komponenti hitrosti kamna sta:

$$v_x = v_0\cos\beta,$$

$$v_y = v_0\sin\beta - gt.$$

Lega kamna pa je določena s koordinatama:

$$x = v_0 t\cos\beta,$$

$$y = v_0 t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}.$$

V trenutku, ko kamen zadene strmino pod pravim kotom, vektor hitrosti kamna $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ oklepa z vodoravnico kot γ, za katerega velja

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{v_y}{v_x}.$$

Iz slike 4 in pravil o zunanjih kotih trikotnika, ugotovimo, da je $\gamma = 180^o - \alpha = 135^o$. Torej ob zadetku strmine velja $v_x = -v_y$, oziroma:

$$v_0\cos\beta = gt - v_0\sin\beta. \tag{10}$$

Ob zadetku velja tudi (slika 4):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2v_0\sin\beta - gt}{2v_0\cos\beta}. \tag{11}$$

Iz enačbe (10) izrazimo gt in vstavimo v enačbo (11). Dobimo:

$$\mathrm{tg}\beta = 2\mathrm{tg}\alpha + 1,$$

oziroma $\beta = 71.56^o$ ter $\varphi = \beta - \alpha = 25.56^o$.

25. Z vznožja klanca, ki je nagnjen za kot $\alpha = 18^o$ glede na vodoravnico, vržemo kamen z začetno hitrostjo v_0 pod določenim kotom φ glede na vodoravnico poševno navzgor proti vrhu klanca (slika 6). Kolikšen mora biti kot φ, da bo kamen zadel strmino najdlje (s) od mesta meta?

Rešitev:
Najprej rešimo nalogo v bolj običajnem "vodoravnem" koordinatnem sistemu. Trenutna lega kamna je v tem koordinatnem sistemu določena s komponentama

$$x = v_0 t \cos\varphi, \tag{12}$$

$$y = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}. \tag{13}$$

Iz slike 5 vidimo, da velja

$$s = \frac{x}{\cos\alpha}, \tag{14}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2v_0 \sin\varphi - gt}{2v_0 \cos\varphi}. \tag{15}$$

Iz enačbe (15) izrazimo čas t:

$$t = \frac{2v_0}{g} \cos\varphi(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\alpha). \tag{16}$$

Iz enačb (16), (12) in (14) potem dobimo:

$$s = \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \cos^2\varphi(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\alpha). \tag{17}$$

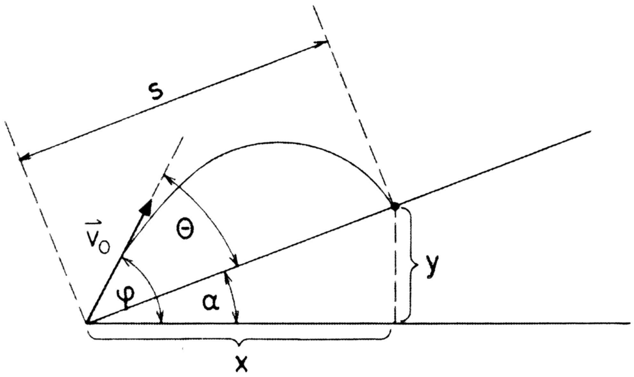
Razdalja s je največja pri kotu φ za katerega velja

$$\frac{ds}{d\varphi} = 0,$$

oziroma

$$-2\sin\varphi\cos\varphi(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\alpha) + 1 = 0,$$

$$\mathrm{ctg}2\varphi = -\mathrm{tg}\alpha.$$



Slika 6:

Od tod pa sledi, da je $2\varphi = \alpha + 90^o$, oziroma $\varphi = \frac{\alpha}{2} + 45^o = 54^o$.

Sedaj pa rešimo nalogo še v sistemu klanca. V tem sistemu so koordinate težnega pospeška, hitrosti in lege kamna naslednje:

$$g_x^{'} = -g\sin\alpha,$$

$$g_y^{'} = -g\cos\alpha,$$

$$v_x^{'} = \int g_x^{'} dt = v_0\cos\theta - gt\sin\alpha,$$

$$v_y^{'} = \int g_y^{'} dt = v_0\sin\theta - gt\cos\alpha.$$

$$x^{'} = \int v_x^{'} dt = v_0 t\cos\theta - \frac{gt^2\sin\alpha}{2},$$

$$y^{'} = \int v_y^{'} dt = v_0 t\sin\theta - \frac{gt^2\cos\alpha}{2}.$$

Pri tem je θ kot, ki ga vektor začetne hitrosti kamna oklepa s strmino. Velja $\varphi = \theta + \alpha$. Ko kamen zadene strmino, je $y^{'} = 0$. Iz te zahteve izračunamo čas leta kamna

$$t = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}\sin\theta.$$

To vstavimo v izraz za $x^{'}$ in dobimo

$$x^{'} = \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta \mathrm{tg}\alpha).$$

Kamen zadene strmino najdlje od mesta meta pri kotu θ za katerega velja

$$\frac{dx^{'}}{d\theta} = 0 = \cos\theta(\cos\theta - \sin\theta\mathrm{tg}\alpha) - \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta\mathrm{tg}\alpha),$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}2\theta,$$

oziroma $\alpha = 90^o - 2\theta$, $\theta = 45^o - \frac{\alpha}{2} = 36^o$.

26. Z 10 m visokega stolpa vržemo kamen z začetno hitrostjo 40 m/s pod kotom 30^o proti vodoravnici poševno navzgor. Na kolikšni višini, merjeno od vodoravnih tal, zadene kamen navpično steno, ki je 75 m oddaljena od stolpa?

27. Z vrha 14 m visokega stolpa vržemo kamen z začetno hitrostjo 18 m/s pod kotom 20^o poševno navzgor glede na vodoravnico proti navpični steni. Kamen zadene steno na višini 18 m. Kolikšna je razdalja med steno in stolpom?

28. Z vrha 12 m visokega stolpa vržemo kamen z začetno hitrostjo 17 m/s pod kotom 24^o poševno navzgor proti vodoravnici. Kako daleč od stolpa, s kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom pade kamen na tla?

29. Kamen vržemo s $y_0 = 6$ m visokega stolpa s hitrostjo $v_0 = 22$ m/s proti $x = 9$ m oddaljeni navpični steni. Kamen zadene steno na višini $y = 12$ m. Pod kolikšnim kotom φ glede na vodoravna tla smo vrgli kamen?

    Rešitev:
    Lega kamna, podana z njegovima koordinatama x in y, je takole odvisna od časa:

$$x = v_0 t\cos\varphi,$$

$$y = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} + y_0.$$

Izhodišče koordinatnega sistema smo postavili ob vznožje stolpa, s katerega smo vrgli kamen. Iz prve enačbe izrazimo čas t in vstavimo v drugo enačbo:

$$y = x\mathrm{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi} + y_0.$$

Dobili smo enačbo, v kateri je edina neznanka iskani kot φ. Najprej jo malo preuredimo:

$$\cos^2\varphi\frac{y-y_0}{x} + \frac{gx}{2v_0^2} = \cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi},$$

oziroma:

$$A\cos^2\varphi + B = \cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi}. \qquad (18)$$

Uvedli smo oznaki:

$$A \equiv \frac{y-y_0}{x}, \quad B \equiv \frac{gx}{2v_0^2}.$$

Enačbo (18) kvadriramo in uvedemo novo neznanko

$$\cos^2\varphi \equiv z.$$

Dobimo:

$$(A^2+1)z^2 + (2AB-1)z + B^2 - 1 = 0.$$

Rešitvi te enačbe sta:

$$z_{1,2} = \frac{-(2AB-1) \pm \sqrt{(2AB-1)^2 - 4B^2(A^2-1)}}{2(A^2+1)}.$$

Dobimo dve možni rešitvi za z, $z_1 = 0.632$ in $z_2 = 0.0042$. Kamen smo torej vrgli pod kotom $\varphi = 37.3^o$ ali pa pod kotom $\varphi = 86.3^o$. V obeh primerih kamen zadene steno na višini $y = 12$ m.

30. Kamen vržemo z začetno hitrostjo $v_0 = 16$ m/s proti $x = 7$ m oddaljeni navpični steni. Pod kolikšnim kotom φ glede na vodoravnico moramo vreči kamen, da bo zadel steno na največji višini?

Rešitev:
Višina y, na kateri kamen zadene steno, je:

$$y = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}.$$

Pri tem je t čas leta kamna do stene, ki ga dobimo iz razdalje do stene:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}.$$

Iz teh dveh enačb dobimo:

$$y = x\left(\mathrm{tg}\varphi - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\varphi}\right).$$

Kot φ mora bit takšen, da bo višina y največja. Torej mora biti

$$\frac{dy}{d\varphi} = 0.$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{gx}{v_0^2}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0,$$

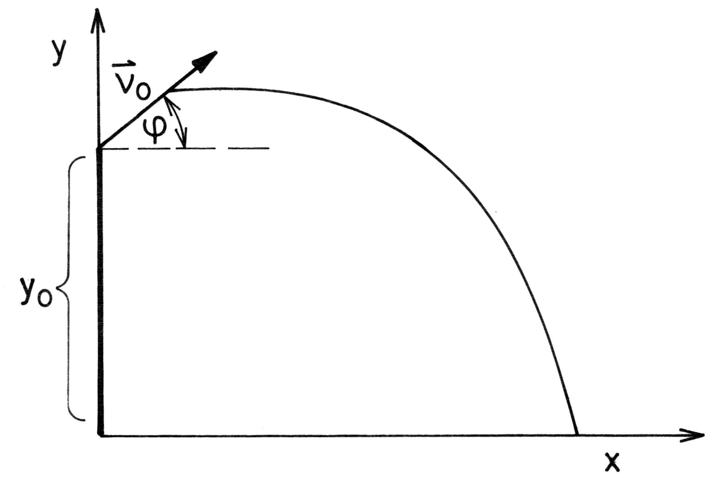
oziroma

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_0^2}{gx}, \quad \varphi = 75^o.$$

31. Z vrha 9 m visokega stolpa vržemo kamen z začetno hitrostjo 20 m/s pod določenim kotom poševno navzgor glede na vodoravnico. Kolikšen mora biti ta kot, da bo kamen padel na tla najdlje od stolpa?

Rešitev:
Količine označimo takole (glejte sliko 7): višina stolpa $y_0 = 9$ m, začetna hitrost $v_0 = 20$ m/s, iskani kot glede na vodoravnico φ, domet kamna, ki naj bo največji x.

$$x = v_0 t \cos(\varphi),$$



Slika 7:

$$y = y_0 + v_0 t \sin(\varphi) - \frac{gt^2}{2}.$$

Iz druge enačbe izrazimo čas letenja kamna t, ki ga dobimo iz zahteve, da je $y = 0$, ko pade kamen na tla:

$$t = \frac{v_0}{g}\left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin^2(\varphi) + \frac{2gy_0}{v_0^2}}\right).$$

To vstavimo v prvo enačbo in izrazimo domet kamna x

$$x = z\cos(\varphi)\left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin^2(\varphi) + w}\right).$$

Uvedli smo novi oznaki $z = \frac{v_0^2}{g}$ in $w = \frac{2gy_0}{v_0^2}$. Domet kamna x je največji pri kotu φ, ki ga izračunamo iz zahteve $\frac{dx}{d\varphi} = 0$.

$$\frac{dx}{d\varphi} = -z\sin(\varphi)\left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin^2(\varphi) + w}\right) +$$

$$+z\cos(\varphi)\left(\cos(\varphi) + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\sin^2(\varphi) + w}}\right) = 0.$$

Definiramo novi spremenljivki $\sin(\varphi) = \sqrt{u}$ in $\cos(\varphi) = \sqrt{1-u}$. Zgornja enačba potem preide v

$$(u + w) \cdot (1 - 2u)^2 = u \cdot (2u - 1 + w)^2.$$

Od tod dobimo

$$u = \frac{1}{w+2},$$

oziroma

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{gy_0}{v_0^2}\right)}}.$$

Če vzamemo $g = 10$ m/s^2, dobimo $\sin(\varphi) = 0.64$ in $\varphi = 39.7^{\mathrm{o}}$. Če bi kamen vrgli s tal ($y_0 = 0$), bi dobili dobro znan rezultat $\varphi = 45^{\mathrm{o}}$.

32. Skala ima obliko polkrogle s polmerom $R = 7$ m in leži na vodoravnih tleh na svoji osnovni ploskvi. Na vrhu skale miruje žoga. S kolikšno najmanjšo začetno hitrostjo v_0 moramo brcniti žogo v vodoravni smeri, da se med letom ne bo več dotaknila skale?

Rešitev:
Koordinatni sistem postavimo tako, da je izhodišče v središču krogle, od katere skala predstavlja zgornjo polovico (slika 8). Os x usmerimo v smeri gibanja žoge, na osi y pa leži zveznica med izhodiščem in začetno lego žoge. V tako postavljenem koordinatnem sistemu je trenutna lega žoge podana s koordinatama

$$x = v_0 t, \tag{19}$$

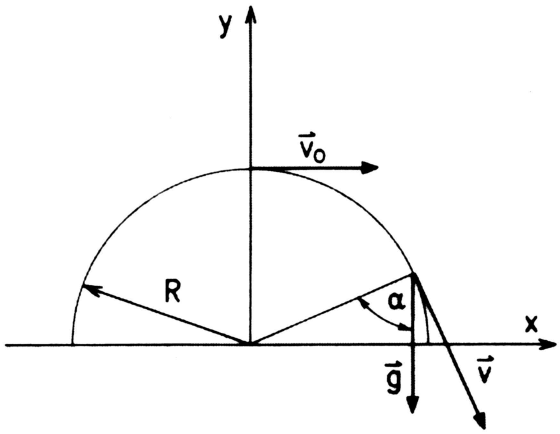
$$y = R - \frac{gt^2}{2}. \tag{20}$$

Prerez površine skale z ravnino gibanja žoge pa je določen z enačbo:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{21}$$

Iz enačbe (19) izrazimo čas t in ga vstavimo v enačbo (20).

$$y = R - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$



Slika 8:

Koordinato y izrazimo iz enačbe (21):

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Od tod sledi

$$R - \frac{gx^2}{2v_0^2} = \sqrt{R^2 - x^2},$$

oziroma

$$x = \frac{2v_0}{g}\sqrt{gR - v_0^2}. \qquad (22)$$

Če naj žoga med letom več ne zadene skale, potem enačba (22) ne sme imeti realne rešitve za x. To pomeni, da mora biti koren v enačbi (22) negativen, oziroma

$$v_0 \geq \sqrt{gR}.$$

33. Telo kroži po krogu s polmerom 10 cm s konstantnim kotnim pospeškom 3.14 s^{-2}. Poiščite kotno hitrost, hitrost, radialni pospešek, tangentni pospešek, pospešek in kot med pospeškom in polmerom kroga po prvi sekundi gibanja! V začetku je telo mirovalo. (3.14 s^{-1}, 0.314 m/s, 0.986 m/s^2, 0.314 m/s^2, 17.7^o)

34. Vrtiljak se vrti s konstantno kotno hitrostjo 2 s^{-1}. Nenadoma se začne vrteti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom 0.08 s^{-2}. Kolikšna je kotna hitrost vrtenja vrtiljaka po 4 obratih po začetku pospeševanja?

Rešitev:
$\omega_0 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$
$\alpha = 0.08\,\mathrm{s}^{-2}$
$\varphi = 8\pi$

Uporabimo enačbo, ki povezuje kot, kotno hitrost in kotni pospešek pri enakomerno pospešenem vrtenju:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi \ ,$$

kar nam takoj da $\omega = 2.8\,\mathrm{s}^{-1}$.

Opomba: Bodite pozorni na analogijo z enakomerno pospešenim premim gibanjem, kjer je

$$v^2 = v_0^2 + 2as \ .$$

35. Točkasto telo začne krožiti po krogu z polmerom 20 cm s konstantnim tangentnim pospeškom 5 cm/s^2. Po kolikšnem času je radialni pospešek enak tangentnemu?

Rešitev:
$r = 20$ cm
$a_t = 5$ cm/s^2

Za radialno komponento pospeška velja zveza

$$a_r = \frac{v^2}{r} \ ,$$

hitrost pa se spreminja s časom kot

$$v = a_t t \ ,$$

torej

$$a_t = \frac{a_t^2 t^2}{r} \ .$$

Enačimo $a_r = a_t$ in dobimo za čas:

$$t = \sqrt{\frac{r}{a_t}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

36. Vrtiljak se vrti s konstantno kotno hitrostjo $6\,\mathrm{s}^{-1}$. Nenadoma se začne vrteti enakomerno pojemajoče in se ustavi po 15 vrtljajih. Koliko časa se ustavlja in kolikšen je kotni pospešek?

Rešitev:
$\omega_0 = 6\,\mathrm{s}^{-1}$
$\alpha = konst.$
$\varphi = 30\pi$

Uporabimo enačbo, ki povezuje kot, kotno hitrost in kotni pospešek pri enakomerno pojemajočem vrtenju:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\varphi\,,$$

Vrtiljak se ustavi, ko je $\omega = 0$, torej

$$0 = \omega_0^2 - 2\alpha\varphi\,.$$

Iz zgornje enačbe takoj dobimo za kotni pospešek

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{2\varphi} = 0.19\,\mathrm{s}^{-2}\,.$$

(Opomba: Čeprav gre za pojemek, kotni pospešek nima negativnega predznaka, ker smo tega upoštevali že v prvi enačbi.)

Zapišimo še, kako se kotna hitrost spreminja s časom pri enakomerno pojemajočem vrtenju:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t\,.$$

Spet se vrtiljak ustavi, ko je

$$0 = \omega_0 - \alpha t\,,$$

kar nam da

$$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = 31.6\,\mathrm{s}\,.$$

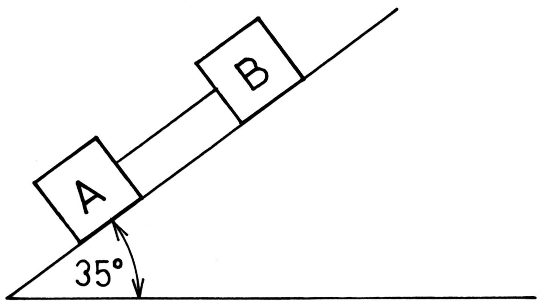
37. Vijak ventilatorja se vrti s frekvenco 50 s^{-1}. Po izključitvi motorja se zaradi trenja vrti enakomerno pojemajoče in se ustavi v 100 s. Koliko vrtljajev naredi do prenehanja vrtenja šteto od izključitve motorja? (2500)

2 Newtonov zakon, ravnovesje sil

1. Sila, ki je podana po komponentah, $\mathbf{F} = (1,\ 2,\ 3)$ N, deluje na točkasto telo z maso 0.7 kg. Kolikšna je hitrost telesa po 9 s, če je ob začetku delovanja sile hitrost telesa $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ m/s?

2. S kolikšno konstantno silo moramo potiskati 100 kg težak voziček, ki se lahko giblje po vodoravnem tiru brez trenja, da se mu v 10 s hitrost enakomerno poveča od 0.5 m/s na 1.5 m/s? (10 N)

3. Dve kladi A in B enakih mas (2 kg) sta zvezani z neraztegljivo vrvjo zanemarljive mase in se gibata po klancu z nagibom 35° (slika 9). Klada A se giblje pred klado B. Koeficenta trenja sta $k_A = 0.35$ in $k_B = 0.42$. Kolikšna sila napenja vrv? Kolikšen je pospešek klad? (0.56 N, 2.5 m/s^2)



Slika 9:

Rešitev:
Zapišimo Newtonov zakon posebej za vsako klado posebej:
Klada A:

$$mg\sin\varphi - k_A mg\cos\varphi - F = ma.$$

Klada B:

$$mg\sin\varphi - k_B mg\cos\varphi + F = ma.$$

Prvo enačbo odštejemo od druge in dobimo:

$$F = \frac{(k_B - k_A)mg\cos\varphi}{2}.$$

Nato iz ene izmed prvih dveh enačb izračunamo se pospešek. Številke vstavite sami!

4. Zaledeneli klanec ima nagib 10°. Po njem navzgor se gibljejo sani, ki se potem, ko dosežejo neko največjo višino, pričnejo gibati navzdol proti izhodiščni točki. Kolikšen je koeficient trenja med sanmi in podlago, če je čas spuščanja sani dvakrat večji od časa njihovega gibanja navzgor po klancu? (0.106)

5. Kladi sta zvezani z zelo lahko vrvjo, ki teče preko izredno lahkega škripca. Prva klada z maso 3 kg drsi po klancu navzdol z nagibom 35°, druga klada pa se giblje po vodoravni podlagi. Koeficient trenja med posamezno klado in podlago je 0.12. Kladi se gibljeta s pospeškom 2.33 m/s^2. Kolikšna je masa druge klade, ki se giblje po vodoravni podlagi? Vrv, ki povezuje obe kladi, je med gibanjem obeh klad ves čas napeta.

6. Kroglica z maso $m = 0.2$ kg in polmerom $R = 1.5$ cm drsi brez trenja v vodoravni ravnini po krogu tako, da je pripeta na raztegljivo vzmet, katere neraztegnjena dolžina (x_0) je 2 cm. Konstanta vzmeti (k) je 43 N/m. Za koliko se vzmet podaljša, če enakomerno kroži s kotno hitrostjo $\omega = 6.28$ s^{-1}?

Rešitev:
Na kroglico, ki se giblje pospešeno, saj kroži, deluje sistemska sila m$a_{radialni}$, ki je uravnovešena s silo vzmeti kx:

$$F_{vzmeti} = \mathrm{m}a_{radialni},$$

$$kx = \mathrm{m}\omega^2(x_0 + x + R),$$

od tod izrazimo raztezek x:

$$x = \frac{\mathrm{m}\omega^2(x_0 + R)}{k - \mathrm{m}\omega^2} = 0.00787 \text{ m}.$$

7. Dve majhni kroglici se privlačita s silo F, ki je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje x med kroglicama. Silo lahko torej zapišemo kot $F = kx^{-2}$, kjer je $k = 0.002$ Nm^2. V začetku kroglici mirujeta v medsebojni oddaljenosti $x_1 = 80$ cm. V nekem trenutku pa eno od kroglic spustimo, da se začne gibati pod vplivom sile druge kroglice, druga kroglica pa ostane pritrjena na mestu. Masa gibajoče se kroglice je $m = 5$ g. Kolikšna je hitrost te kroglice v trenutku, ko je razdalja med kroglicama $x_2 = 40$ cm?

   Rešitev:
   Newtonov zakon za gibajočo se kroglico zapišemo takole:

$$F = ma = \frac{k}{x^2}. \tag{23}$$

   Trenutni pospešek $a(t)$ gibajoče se kroglice je torej obratno sorazmeren kvadratom trenutne razdalje $x(t)$ med kroglicama.

$$a = \frac{k}{mx^2}. \tag{24}$$

   Obe količini se s časom seveda spreminjata. Pravimo, da sta funkciji časa t. Kot je znano, je definicija pospeška naslednja:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{25}$$

   Ker pa je

$$v = \frac{dx}{dt},$$

   lahko pospešek (25) zapišemo takole:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v. \tag{26}$$

   Iz enačb (24) in (26) dobimo

$$\frac{k}{mx^2} = v\frac{dv}{dx}. \tag{27}$$

To je diferencialna enačba, katere rešitev je hitrost kroglice kot funkcija razdalje med kroglicama; $v = v(x)$. V enačbi (27) ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\frac{k}{m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = \int_0^v vdv, \tag{28}$$

$$v = \sqrt{\frac{2k(x_1 - x_2)}{mx_1x_2}} = \tag{29}$$

Dodajmo še eno pripombo. Če bi hoteli gibanje kroglice čisto popisati, bi morali poznati lego gibajoče se kroglice $x(t)$ kot funkcijo časa. Iz enačb (24) in (25) dobimo:

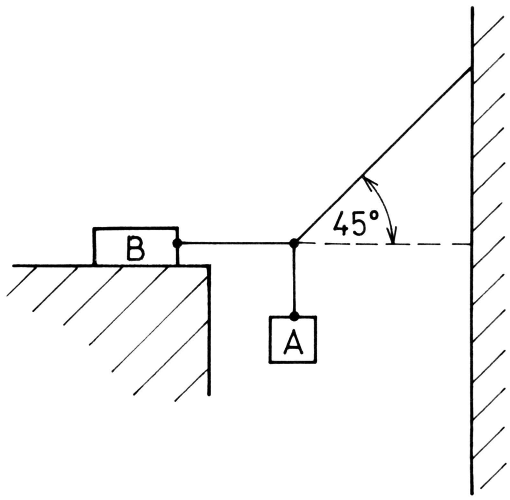
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{mx^2}. \tag{30}$$

To je diferencialna enačba, katere rešitev $x(t)$ je iskana odvisnost lege kroglice od časa. Vendar pa je ta diferencialna enačba nelinearna in je ne znamo rešiti. Zato smo nalogo reševali "po ovinku" tako, da smo poiskali odvisnost hitrosti kroglice od njene lege.

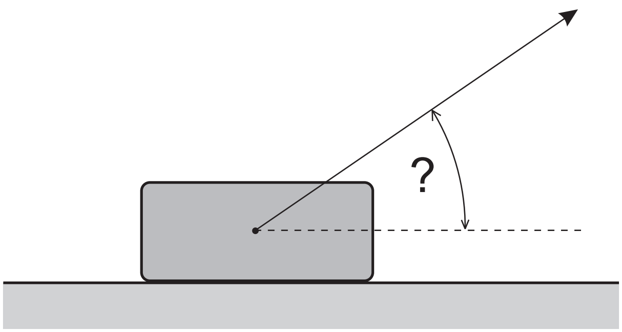
8. S kolikšno največjo frekvenco lahko vrtimo obroč, ki ima gostoto na enoto dolžine 3000 kg/m in polmer 15 cm, da ne bo počil? Površina preseka obroča je 1 cm^2, maksimalna sila, ki jo obroč še prenese, je 850 N.

9. Kocka B tehta 710 N, koeficient lepenja med kocko in podlago je 0.25. Največ kolikšna je lahko masa telesa A, da je sistem v ravnovesju? (slika 10). (17.7 kg)

10. Telo mase 5 kg vlečemo po vodoravni podlagi s konstantno hitrostjo. Koeficient trenja med telesom in podlago je 0.3. Pri kolikšnem kotu med vrvico in podlago je sila vrvice najmanjša? Kolikšna je ta sila? (Pri nalogi vztrajamo pri nekoliko umetni zahtevi, da sila vrvice prijemlje v težišču telesa - glej sliko 11).



Slika 10:



Slika 11:

11. Voziček, ki je poln vode, je gibljiv brez trenja po vodoravnem tiru. V začetku voziček miruje, masa vozička in vode skupaj pa je 4 kg. S silo 0.95 N ga začnemo vleči v smeri tira. Obenem začne voda odtekati skozi luknjico na dnu vozička. Masni pretok vode skozi luknjico je 70 g/s. Kolikšna je hitrost vozička po 8 s, če je na začetku miroval?

12. Klada z maso 2 kg miruje na vodoravni podlagi, po kateri je gibljiva brez trenja. Nanjo začne delovati sila, ki ima vodoravno smer ter s časom linearno narašča tako, da se vsakih 10 s poveča za 8 N. V začetku je sila enaka 0. Kolikšna je hitrost klade 8 s po začetku delovanja sile, kolikšen je takrat pospešek klade in kolikšno pot opravi klada v prvih 9 s gibanja?

    Rešitev:
    Sila linearno narašča s časom,

$$F = kt + n,$$

kjer je $k = 0.8$ N/s in $n = 0$. Po Newtonovem zakonu je $F = ma$, iz česar takoj sledi

$$a = \frac{kt}{m}.$$

Sedaj, ko poznamo pospešek kot funkcijo časa, lahko izračunamo še hitrost in pot klade:

$$v = \int_0^t a \, \mathrm{d}t' = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}$$

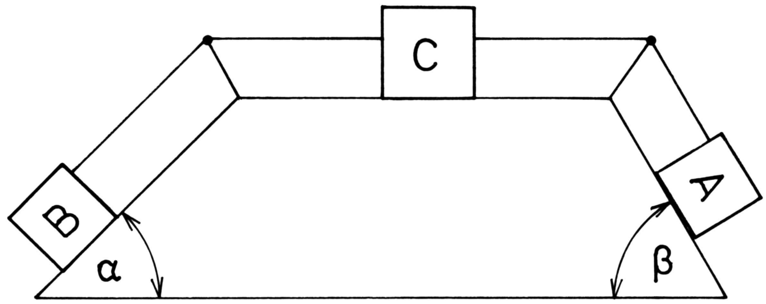
in

$$s = \int_0^t v \, \mathrm{d}t' = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6}.$$

Hitrost klade 8 s po začetku delovanja sile je 12.8 m/s in pospešek klade takrat je 3.2 m/s^2. V prvih devetih sekundah gibanja klada opravi pot 48.6 m.

13. Dve kladi sta povezani z zelo lahko vrvico in mirujeta na vodoravni podlagi, po kateri se lahko gibljeta brez trenja. Prva klada ima maso 4 kg, druga pa 3 kg. Težjo klado vlečemo s silo 44 N v vodoravni smeri proč od lažje klade. S kolikšnim pospeškom se gibljeta kladi in kolikšna sila napenja vrvico?

14. Tri klade so povezane z zelo lahko vrvico, ki teče preko dveh zelo lahkih škripcev tako, kot kaže slika 12. Masa klade A je 5 kg, mase klade B je 3 kg, masa klade C pa 2 kg, $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$. Koeficient trenja med kladami in podlago je 0.1. Kolikšno pot opravijo klade v 3 s potem, ko jih spustimo?

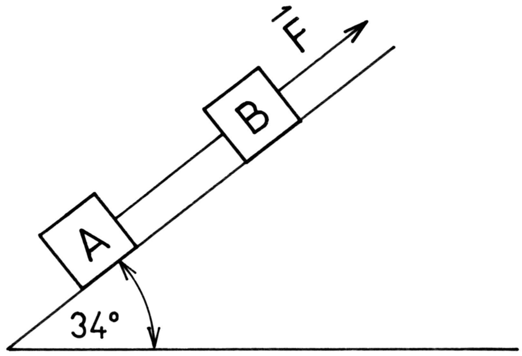


Slika 12:

15. Kladi sta povezani z zelo lahko, neraztegljivo vrvico. Vlečemo ju navzgor po klancu z nagibom 34^o tako, kot kaže slika 13. Masa klade A je 2 kg, masa klade B pa 3 kg. Koeficient trenja med klado A in podlago je 0.2, koeficient trenja med klado B in podlago pa 0.3. S kolikšno največjo silo smemo vleči navzgor po klancu klado A, da se vrvica med kladama ne pretrga? Vrvica vzdrži največ silo 120 N. S kolikšnim največjim pospeškom se lahko gibljeta kladi?

Rešitev:
Zapišemo Newtonov zakon za vsako klado posebej:

$$-m_A g \sin\varphi - k_A m_A g \cos\varphi + F_v = m_A a,$$



Slika 13:

$$F - m_B g \sin\varphi - k_B m_B g \cos\varphi - F_v = m_B a.$$

Pospeška obeh klad sta seveda enaka, saj je vrvica neraztegljiva. Obe enačbi delimo z masama in ju odštejemo. Tako dobimo za vlečno silo izraz

$$F = (k_B - k_A) m_B g \cos\varphi + F_v(1 + \frac{m_B}{m_A}).$$

V zgornjo enačbo vstavimo za F_v največjo silo, ki jo vrvica še vzdrži (120 N), in dobimo

$$F_{\max} = 377\,\mathrm{N}.$$

Sedaj iz ene izmed zgornjih enačb izračunamo še pospešek obeh klad

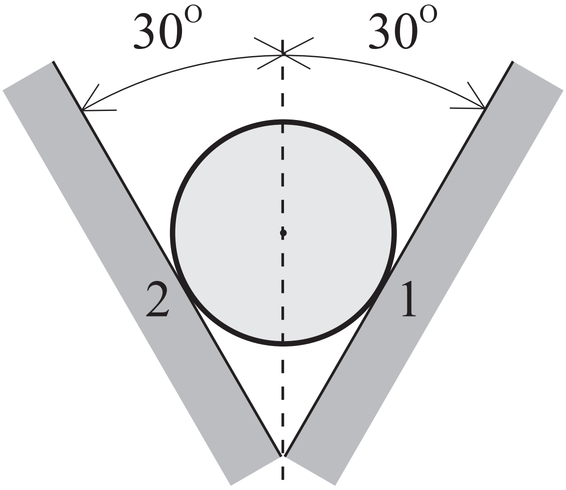
$$a = -g(\sin\varphi + k_A \cos\varphi) + \frac{F_v}{m_A}$$

in dobimo

$$a_{\max} = 52.9\,\mathrm{m/s^2}.$$

16. Valj z maso m položimo v okvir oblike V, kot kaže slika 14. S kolikšnima silama okvir deluje na valj?

Rešitev:



Slika 14:

Sili s katerima okvir deluje na valj imata samo normalni komponentni, torej komponenti pravokotni na podlago (označimo ju z $F_{\rm p1}$ in $F_{\rm p2}$). Ker valj miruje, je vsota vseh sil, ki delujejo na valj enaka 0. Pravokotni koordinatni sistem postavimo tako, da na sliki 14 os y kaže navpično navzgor, os x pa v desno. V smeri osi x velja:

$$-F_{\rm p1}\cos\varphi + F_{\rm p2}\cos\varphi = 0$$

in v smeri osi y:

$$F_{\rm p1}\sin\varphi + F_{\rm p2}\sin\varphi - mg = 0\,.$$

Iz prve enačbe sledi $F_{\rm p1} = F_{\rm p2}$, kar bi lahko uganili že iz simetrije (drugače je, če se valj tudi vrti in moramo upoštevati še trenje med valjem in okvirjem - glej nalogo 17). Druga enačba nam potem da sili, s katerima okvir deluje na valj

$$F_{\rm p1} = F_{\rm p2} = \frac{mg}{2\sin\varphi}\,.$$

17. Kot pri nalogi 16, valj z maso m leži v okviru oblike V, kot kaže slika 14. Vendar sedaj valj tudi vrtimo okoli geometrijske osi valja, koeficient trenja med valjem in okvirom pa je

k_t. S kolikšnima silama sedaj okvir deluje na valj?

Rešitev:
Sili s katerima okvir deluje na valj imata sedaj normalni komponentni, torej komponenti pravokotni na podlago (označimo ju z F_{p1} in F_{p2}) in komponenti vzporedni z okvirjem, ki sta posledica trenja med okvirjem in valjem (označimo ju z F_{t1} in F_{t2}). Vendar pozor: ker se valj vrti, ni več simetrije, ki bi nam zagotavljala, da sta F_{p1} in F_{p2} enaki, kot pri prejšnji nalogi! Nepreviden reševalec se lahko tukaj kaj hitro zmoti. Ker težišče valja miruje, je vsota vseh sil, ki delujejo na valj, še vedno enaka 0. Pravokotni koordinatni sistem spet postavimo tako, da na sliki 14 os y kaže navpično navzgor, os x pa v desno. V smeri osi x sedaj velja:

$$-F_{\mathrm{p1}}\cos\varphi + F_{\mathrm{p2}}\cos\varphi + F_{\mathrm{t1}}\sin\varphi + F_{\mathrm{t2}}\sin\varphi = 0$$

in v smeri osi y:

$$F_{\mathrm{p1}}\sin\varphi + F_{\mathrm{p2}}\sin\varphi + F_{\mathrm{t1}}\cos\varphi - F_{\mathrm{t2}}\cos\varphi - mg = 0\,.$$

Upoštevajmo še, da velja

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{t1}} &= k_t F_{\mathrm{p1}}\,, \\ F_{\mathrm{t2}} &= k_t F_{\mathrm{p2}}\,, \end{aligned}$$

kar nesemo v zgornji enačbi. Potem lahko izrazimo:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{p1}} &= mg\frac{\cos\varphi - k_t\sin\varphi}{2(1+k_t^2)\sin\varphi\cos\varphi}\,, \\ F_{\mathrm{p2}} &= mg\frac{\cos\varphi + k_t\sin\varphi}{2(1+k_t^2)\sin\varphi\cos\varphi}\,. \end{aligned}$$

Z zgornjimi štirimi enačbami so torej podane vse sile, s katerimi okvir deluje na valj. Preverimo še, kaj se dogaja, če je $k_t = 0$ (npr., če je okvir prekrit z ledom). V tem primeru trenja ni in valj se prosto vrti okoli svoje osi, sili s katerima okvir deluje na valj, pa sta enaki kot pri nalogi 16. Če vstavimo v zgornje enačbe $k_t = 0$, res dobimo

$$F_{\mathrm{p1}} = F_{\mathrm{p2}} = \frac{mg}{2\sin\varphi}$$

in

$$F_{\rm t1} = F_{\rm t2} = 0\ ,$$

kot pri prejšnji nalogi.

18. Sani z maso 6 kg vlečemo navzgor po klancu z nagibom 10° s konstantno silo 42 N. Kolikšno pot opravijo sani v 3 s, če so v začetku mirovale? Koeficient trenja med sanmi in podlago je 0.1.

19. Zelo velika okrogla plošča se vrti okoli svoje geometrijske osi s konstantno kotno hitrostjo $\omega = 4\ \mathrm{s}^{-1}$. Majhna miška v začetku miruje v središču plošče, v nekem trenutku pa se začne gibati proti robu plošče v smeri polmera s konstantno hitrostjo $v = 15$ cm/s. Koeficient trenja med miško in ploščo je $k = 0.87$. Po kolikšnem času t po začetku gibanja, začne miška drseti po plošči? Kako daleč r od središča plošče je miška v tem trenutku?

    Rešitev:
    Miška začne drseti po plošči, ko sistemska sila na miško postane enaka sili trenja med miško in podlago, oziroma, ko sistemski pospešek a_s po velikosti postane enak produktu težnega pospeška in koeficienta trenja:

    $$a_s = gk.$$

    Sistemski pospešek je sestavljen iz dveh prispevkov, centrifugalnega a_r in Coriolisovega a_c. Ta dva prispevka sta med seboj pravokotna in velja:

    $$\vec{a}_s = \vec{a}_r + \vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}.$$

    Pri tem je $\vec{r}$ vektor, ki kaže od središča plošče do miške, $\vec{\omega}$ pa je vektor kotne hitrosti plošče in ima smer osi, okoli katere se plošča vrti.

    Miška začne drseti, ko se sistemski pospešek po velikost izenači s produktom koeficienta trenja in težnega pospeška.

    $$a_s = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + 4\omega^2 v^2} = gk.$$

Od tod izračunamo oddaljenost miške od središča plošče v trenutku, ko začne miška drseti:

$$r = \sqrt{\frac{g^2k^2 - 4\omega^2v^2}{\omega^4}} = 53 \text{ cm}.$$

Do tja potrebuje miška čas:

$$t = \frac{r}{v} = 3.5 \text{ s}.$$

20. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita $l = 5$ m dolga, ravna, tanka, homogena palica z maso $m_1 = 30$ kg in majhna utež z maso $m_2 = 1$ kg, ki leži na isti premici, kot palica in je $a = 0.7$ m oddaljena od krajišča palice?

Rešitev:
Palica naj leži na osi x (slika 15). Utež naj bo v izhodišču koordinatnega sistema, pri $x = 0$, levo krajišče palice je v točki $x = a$, desno pa v točki $x = a + l$. Gravitacijska sila med dvema telesoma z določenima masama je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med telesoma. Ker so posamezni delčki palice različno oddaljeni od uteži, vsak tak delček palice prinese drugačen prispevek k celotni gravitacijski sile palice na utež. Za izračun celotne sile je potrebno sešteti prispevke delčkov palice k skupni sili. Ker pa je masa po palici porazdeljena zvezno, se vsota po delčkih palice spremeni v integral. Prispevek delčka palice z maso dm_1, ki je od uteži oddaljen x, k sili je:

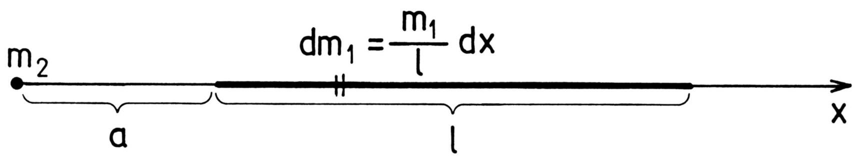
$$dF = \frac{Gm_2dm_1}{x^2} = \frac{Gm_2m_1dx}{lx^2}.$$

Pri tem je $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2} gravitacijska konstanta in

$$dm_1 = \frac{m_1}{l}dx,$$

dx pa je dolžina delčka palice. Celotno silo dobimo z integracijo po palici:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{Gm_1m_2}{a(a+l)} = 5.0 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

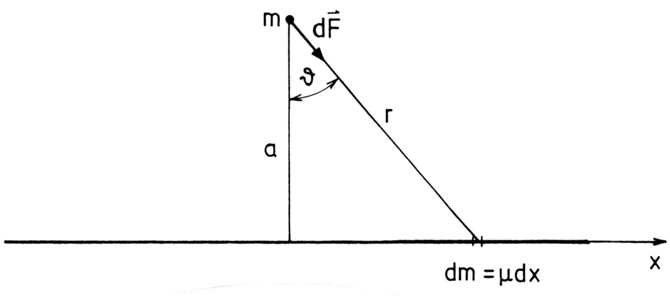


Slika 15:

21. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita zelo dolga, ravna, tanka, homogena palica z maso 5 kg na meter dolžine palice ($\mu = 5$ kg/m) in majhna utež z maso $m = 1$ kg, ki je $a = 1.2$ m oddaljena od palice?

    Rešitev:
    Podobno, kot pri prejšnji nalogi, je potrebno upoštevati, da so različni deli palice različno oddaljeni od uteži in zato prispevajo različne prispevke k skupni sili. Prispevke posameznih delčkov palice je potrebno sešteti. Ta vsota pa zaradi zvezne porazdelitve mase po palici preide v integral. Za razliko od prejšnje naloge pa je tokrat potrebno biti malo bolj pozoren še na smer sile.

    Koordinatni sistem postavimo tako, kot kaže slika 16. Palica



Slika 16:

leži na osi x, zveznica med palico in utežjo pa na osi y. Delček palice z maso μdx privlači utež s silo $d\vec{F}$, ki oklepa kot ϑ z osjo y. Sila $d\vec{F}$ ima dve komponenti:

$$dF_x = \frac{G\mu m dx}{r^2}\sin\vartheta,$$

$$dF_y = \frac{G\mu m dx}{r^2}\cos\vartheta.$$

Pri tem je r razdalja os izbranega delčka palice do uteži. Zaradi simetrije se prispevki k sili v vodoravni smeri (komponenta x) med seboj odštejejo. Gravitacijska sila ima smer pravokotno na palico, to je v smeri osi y. Iz slike 16 razberemo naslednje zveze med količinami:

$$r = \frac{a}{\cos\vartheta}, \;\; x = a\tan\vartheta, \;\; dx = \frac{a d\vartheta}{\cos^2\vartheta}.$$

Potem je:

$$dF_y = \frac{G\mu m}{a}\cos\vartheta d\vartheta.$$

Celotno silo dobimo z integracijo po palici:

$$F_y = \frac{G\mu m}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{2G\mu m}{a} = 5.6\cdot 10^{-10}\ \text{N}.$$

Kot integracijsko spremenljivko bi lahko namesto kota ϑ izbrali tudi koordinato palice x. V tem primeru, bi dobili:

$$r = \sqrt{a^2+x^2}, \;\; \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

in

$$dF_y = \frac{G\mu m a dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

Celotna sila je potem:

$$F_y = G\mu m a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2G\mu m}{a}.$$

Ta pot je nekoliko težja, kajti zgornjega integrala ne znamo rešiti s kakšnim preprostim prijemom, ampak moramo iskati po tabelah, kjer najdemo

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

V večini primerov se pri podobnih nalogah pokaže, da je kot integracijsko spremenljivko bolje izbrati kot, ker dobimo preprostejše integrale.

22. S kolikšno gravitacijsko silo F se privlačita $b = 4$ m dolga, ravna, tanka, homogena palica z maso $m_1 = 30$ kg in majhna utež z maso $m_2 = 1$ kg, ki je oddaljena $a = 3$ m od levega in $c = 5$ m od desnega krajišča palice?

Rešitev:
Najprej ugotovimo, da je pravokotnik s stranicami 3 m, 4 m in 5 m pravokoten in da palica predstavlja daljšo kateto tega pravokotnega trikotnika (slika 17).Koordinatni sistem postavimo tako, da palica leži na osi x, druga kateta pravokotnega trikotnika pa na osi y. Delček palice z maso $dm_2 = \frac{m_2}{b}dx$ privlači utež s silo $d\vec{F}$, ki ima komponenti:

$$dF_x = \frac{Gm_1m_2dx}{br^2}\sin\vartheta,$$

$$dF_y = \frac{Gm_1m_2dx}{br^2}\cos\vartheta.$$

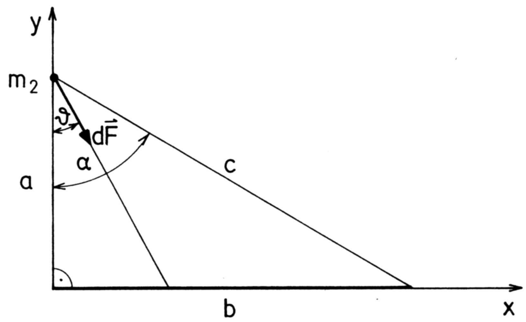
Iz slike 17 vidimo, da je

$$r = \frac{a}{\cos\vartheta}, \;\; x = a\tan\vartheta, \;\; dx = \frac{ad\vartheta}{\cos^2\vartheta}.$$

Diferenciala komponent sile potem zapišemo takole:

$$dF_x = \frac{Gm_1m_2}{ab}\sin\vartheta d\vartheta,$$

$$dF_y = \frac{Gm_1m_2}{ab}\cos\vartheta d\vartheta.$$



Slika 17:

Celotni komponenti F_x in F_y dobimo z integracijo:

$$F_x = \frac{Gm_1m_2}{ab}\int_0^{\alpha}\sin\vartheta d\vartheta = \frac{Gm_1m_2}{ab}(1-\cos\alpha) =$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{ab}\left(1-\frac{a}{c}\right) = \frac{Gm_1m_2(c-a)}{abc} = 6.67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}.$$

$$F_y = \frac{Gm_1m_2}{ab}\int_0^{\alpha}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{Gm_1m_2}{ab}\sin\alpha =$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{ac} = 1.33\cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}.$$

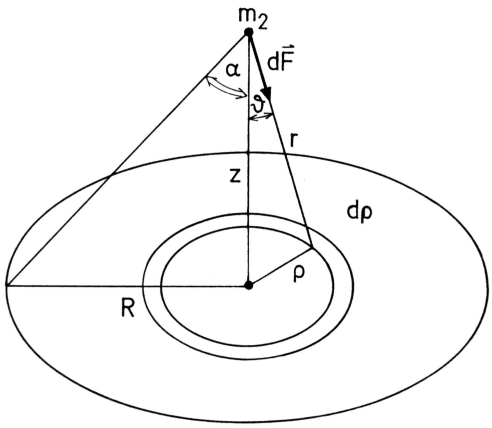
Velikost celotne sile je potem:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2+F_y^2} = \frac{Gm_1m_2}{ac}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{b^2}} = \\ &= 1.5\cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

23. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita homogena okrogla plošča s polmerom $R = 8$ m in maso $m_1 = 23$ ton in majhna utež z maso $m_2 = 1$ kg, ki se nahaja v točki, ki leži na geometrijski osi plošče in je $z = 6$ m oddaljena od središča plošče?

Rešitev:

Ker so različni deli plošče različno oddaljeni od uteži, je potrebno sešteti prispevke delčkov plošče na različnih razdaljah od uteži k skupni gravitacijski sili med utežjo in ploščo. Ker je sila odvisna od razdalje, poiščemo tiste delčke plošče, ki so vsi enako oddaljeni od uteži. Iz slike 18 vidimo, da so to tanki kolobarji s polmerom ϱ in debelino $d\varrho$. Masa takšnega



Slika 18:

kolobarčka je

$$dm_1 = \frac{m_1}{\pi R^2} 2\pi \varrho d\varrho.$$

Njegov prispevek k sili $d\vec{F}$ ima dve komponenti. Vodoravna komponenta je zaradi simetrije enaka 0. Navpična komponenta pa je:

$$dF_z = \frac{2Gm_1 m_2 \varrho d\varrho}{R^2 r^2} \cos\vartheta.$$

Iz slike 18 vidimo, da velja:

$$r = \frac{z}{\cos\vartheta}, \;\; \varrho = z\tan\vartheta, \;\; d\varrho = \frac{z d\vartheta}{\cos^2\vartheta}.$$

Diferencial sile je potem:

$$dF_z = \frac{2Gm_1 m_2}{R^2} \sin\vartheta d\vartheta.$$

Sila pa je:

$$F_z = \frac{2Gm_1m_2}{R^2}\int_0^{\alpha}\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2Gm_1m_2}{R^2}(1-\cos\alpha) =$$

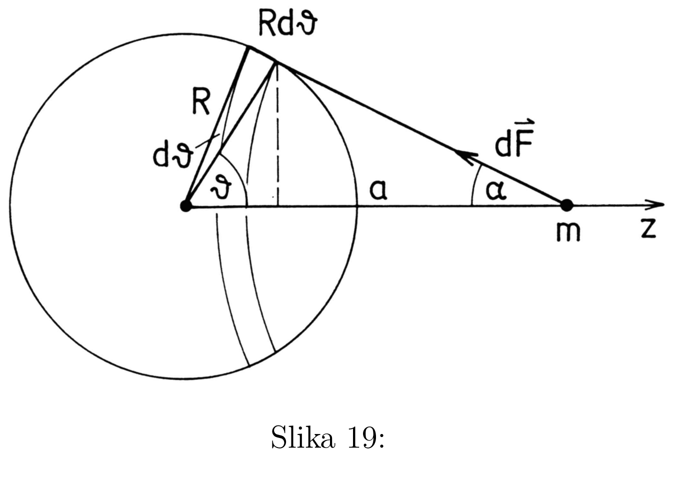
$$= \frac{2Gm_1m_2}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 1.9\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Za domačo nalogo rešite nalogo še z integracijo po koordinati ϱ!

24. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita zelo velika homogena plošča s ploskovno gostoto 7 ton na m^2 površine in majhna utež z maso 1 kg, ki je 5 m oddaljena od plošče?

25. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita tanka homogena krogelna lupina s polmerom $R = 8$ m in maso $M = 950$ kg in majhna utež z maso $m = 1$ kg, ki je $a = 12$ m oddaljena od središča krogelne lupine?

Rešitev:



Slika 19:

Ker so različni deli krogelne lupine različno oddaljeni od uteži, je potrebno sešteti prispevke delčkov lupine na različnih razdaljah od uteži k skupni gravitacijski sili med utežjo in lupine.

Ker je sila odvisna od razdalje, poiščemo tiste delčke lupine, ki so vsi enako oddaljeni od uteži. Iz slike 19 vidimo, da so to tanke rezine s polmerom $R \sin \vartheta$ in širino $Rd\vartheta$. Masa takšne rezine je:

$$dM = \sigma 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta,$$

kjer je

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2},$$

ploskovna gostota lupine. Tista komponenta sile, ki je pravokotna na zveznico med utežjo in središčem lupine je zaradi simetrije enaka nič. Komponenta v smeri zveznice pa je enaka:

$$dF = \frac{2\pi m \sigma R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{r^2} \cos \alpha. \tag{31}$$

Pomen simbolov je razviden iz slike 19. Izbrati moramo itegracijsko spremenljivko. Kandidata sta kot ϑ ali razdalja od uteži do rezine lupine r. Tokrat se pokaže, da dobimo lažji integral, če izberemo r. Poiskati moramo torej zveze med ϑ, α in r. Iz slike vidimo, da velja:

$$\cos \alpha = \frac{a - R \cos \vartheta}{r}. \tag{32}$$

Kosinusni izrek pa da zvezo:

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta. \tag{33}$$

Od tod sledi, da je:

$$R \cos \vartheta = \frac{R^2 + a^2 - r^2}{2a}$$

in

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2ar}.$$

Če v kosinusnem izreku odvajamo r po ϑ dobimo:

$$2rdr = 2Ra \sin \vartheta d\vartheta \rightarrow \sin \vartheta d\vartheta = \frac{rdr}{aR}.$$

Diferencial sile je potem

$$dF = \frac{\pi G\sigma m R}{a^2} \cdot \frac{a^2 - R^2 + r^2}{r^2} dr.$$

Sila je potem:

$$F = \frac{\pi G\sigma m R}{a^2} \int_{a-R}^{a+R} \frac{a^2 - R^2 + r^2}{r^2} dr = \frac{\pi G\sigma m R}{a^2} 4R = \frac{GMm}{a^2}.$$

Sila je torej enaka, kot če bi bila vsa masa krogelne lupine zbrana v središču lupine.

Iz enačb (31), (32) in (33) se vidi, da bi lahko diferencial sile zapisali tudi kot funkcijo kota ϑ:

$$dF = 2\pi m\sigma R^2 \frac{\sin\vartheta(a - R\cos\vartheta)d\vartheta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta)^{3/2}}.$$

Sila je potem

$$F = 2\pi m\sigma R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta(a - R\cos\vartheta)d\vartheta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta)^{3/2}} = \frac{GMm}{a^2}.$$

Integral pa je bolj zahteven, kot je bil prej in je najbolje, če si pri reševanju pomagamo z računalnikom. Za domačo nalogo z odvajanjem preverite, da je:

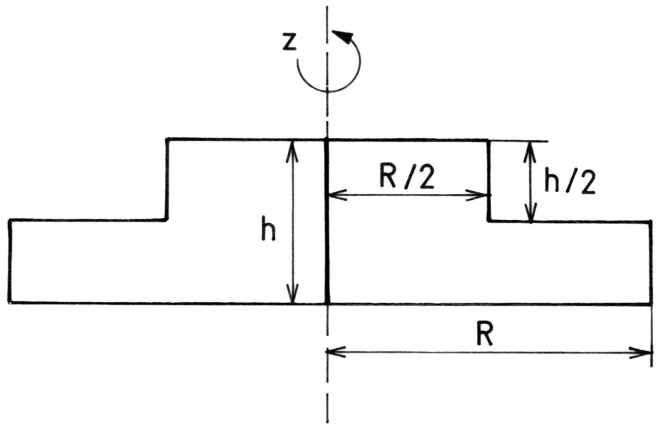
$$\int \frac{\sin\vartheta(a - R\cos\vartheta)d\vartheta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta)^{3/2}} = \frac{R(R^2 + a^2) - a^2R - aR^2\cos\vartheta}{a^2R^2\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta}}.$$

Nato pa še dokažite, da je:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta(a - R\cos\vartheta)d\vartheta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

3 Navor, vrtenje, kotaljenje

1. Izračunajte vztrajnostni moment homogenega rotacijskega telesa, katerega prerez je prikazan na sliki 20, okrog osi z. Masa telesa je 10 kg, in R = 1 m.



Slika 20:

Pomoč pri reševanju:
Vztrajnostni moment je aditivna količina. Vedno lahko zapišemo skupni vztrajnostni moment togega telesa okoli neke osi vrtenja kot vsoto vztrajnostnih momentov vseh sestavnih delov okoli iste osi.

Pri tej nalogi je smiselno razdeliti telo na dva valja: zgornji valj z 1/5 celotne mase in radijem R/2 ter spodnji valj s 4/5 celotne mase in radijem R. (Opomba: navedene deleže mas lahko dobite, če izracunate prostornini obeh valjev!)

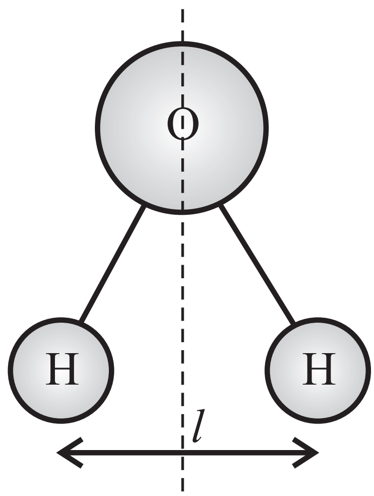
2. Kolikšen je vztrajnostini moment molekule vode, če gre os vrtenja skozi simetrijsko os molekule? Masa protona je 1.66 $\times$ 10^{-27} kg, razdalja med protonoma v molekuli vode pa je 1.51 $\times$ 10^{-10} m.

Rešitev:

$m = 1.66 \times 10^{-27}$ kg
$l = 1.51 \times 10^{-10}$ m

Molekula vode (H_2O) je sestavljena iz atoma kisika in dveh atomov vodika. V zelo poenostavljenem modelu (glej sliko 21) lahko vztrajnostni moment zapišemo kot vztrajnostni moment dveh točkastih teles (dveh protonov H^+ z masama m), ki sta od osi oddaljena za polovico svoje medsebojne razdalje l:

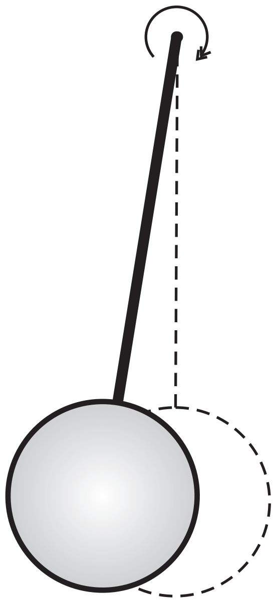
$$J = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1.9 \times 10^{-47}\mathrm{kgm}^2$$



Slika 21: Shema molekule vode.

3. Ravna palica z dolžino 0.7 m in maso 2 kg, je vrtljiva okoli vodoravne osi skozi zgornje krajišče. Na spodnjem krajišču palice je pritrjena valjasta plošča z maso 1 kg in polmerom 0.3 m, tako da je geometrijska os plošče vzporedna z osjo vrtenja palice in od nje oddaljena 1 m. Kolikšen je vztrajnostni moment tako sestavljenega nihala glede na os vrtenja?

   Rešitev:
   $l = 0.7$ m



Slika 22:

$R = 0.3$ m
$m = 2$ kg
$m_p = 1$ kg

Za predstavo: to je v bistvu enostaven model nihala stare stenske ure (slika 22).

Za palico lahko zapišemo:

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

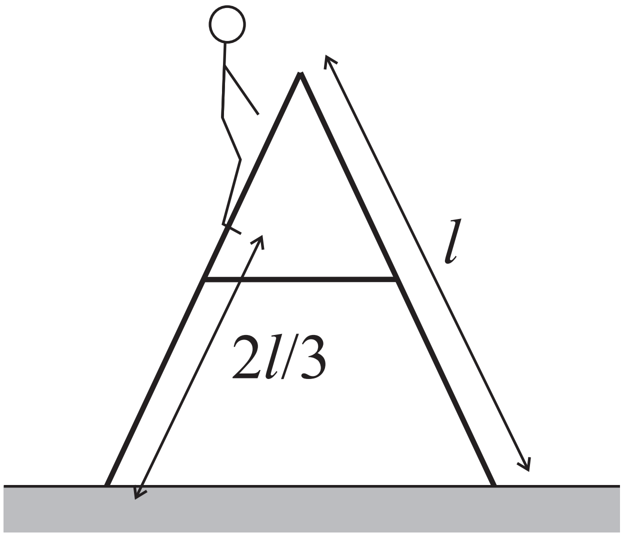
Za ploščo (valj) pa zapišemo po Steinerjevem izreku:

$$J_p = \frac{m_p R^2}{2} + m_p(l + R)^2$$

Skupni vztrajnostni moment je seštevek obeh,

$$J_{\text{skupni}} = J + J_p = 1.37\,\text{kgm}^2$$

4. Na lestev oblike A stopi mož z maso 80 kg. S kolikšnima silama deluje lestev na podlago, če mož stoji na 2/3 dolžine stranice lestve (glej sliko 23)?



Slika 23:

Rešitev:
Ker lestev miruje, je vsota vseh sil na lestev enaka nič. Zapišemo lahko

$$F_1 + F_2 - mg = 0\,,$$

kjer je F_1 sila podlage na stranico lestve, kjer stoji mož in F_2 sila podlage na drugo stranico. Obe sili seveda prijemata v točkah, kjer se lestev dotika tal. Nič naj nas ne moti, da je lestev sestavljena iz dveh stranic, ki sta na vrhu speti. Sile med stranicami lestve so notranje sile, ki se pri togem telesu med seboj odštejejo.

Prav tako je vsota vseh navorov na lestev enaka nič. Zapišimo navor okoli osi, ki je pravokotna na ravnino lestve (pravokotna na sliko 23) in gre skozi točko, kjer prijemlje sila F_1. Tako se pri zapisu navora znebimo prispevka sile F_1. Velja:

$$mgx\cos\alpha - F_2 2l\cos\alpha = 0\,,$$

kjer je x razdalja med točko prijemališča sile F_1 in možem (v našem primeru je $x = 2l/3$) in α je kot med stranico lestve in tlemi. Tako dobimo:

$$F_2 = mg\frac{x}{2l}$$

in

$$F_1 = mg(1 - \frac{x}{2l}) \, .$$

Za naš primer, ko je $x = 2l/3$, je torej

$$F_2 = \frac{mg}{3}$$

in

$$F_1 = \frac{2mg}{3} \, .$$

Lestev deluje na podlago seveda z nasprotno enakima silama.

Opomba: Računali smo, kot da sile podlage nimajo vodoravne komponente, torej ni sile trenja oziroma lepenja. V našem primeru je to res, saj za togost lestve poskrbi vmesna povezovalna prečka

5. Vztrajnik se v začetku vrti s konstantno kotno hitrostjo. Nanj začne delovati zaviralni navor, ki je sorazmeren s kvadratom kotne hitrosti vrtenja vztrajnika. Zaradi tega se čez dve minuti kotna hitrost vrtenja zmanjša na polovico začetne vrednosti. Po kolikšnem času se kotna hitrost zmanjša na petino začetne vrednosti?

   Rešitev:
   Navor M je sorazmeren kvadratu kotne hitrosti vrtenja vztrajnika ω^2, torej

   $$M = A\omega^2,$$

   kjer je A sorazmernostna konstanta. Navor pa je

   $$M = J\alpha,$$

kjer je J vztrajnostni moment vztrajnika in α kotni pospešek vztrajnika, ta pa je po definiciji

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Torej je

$$J\frac{d\omega}{dt} = A\omega^2.$$

Po ločitvi spremenljivk in integraciji dobimo

$$\int_0^{t_1} dt = \frac{J}{A}\int_{\omega_0}^{\omega_0/2} \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Pri tem je $t_1 = 120$ s čas po katerem se začetna kotna hitrost vrtenja vztrajnika zmanjša na polovico. Iz zgornje enačbe dobimo

$$t_1 = -\frac{J}{A}\frac{1}{\omega_0}. \tag{34}$$

Na enak način dobimo še:

$$\int_0^{t_2} dt = \frac{J}{A}\int_{\omega_0}^{\omega_0/5} \frac{d\omega}{\omega^2},$$

kjer je t_2 čas po katerem se kotna hitrost zmanjša na petino začetne vrednosti. Iz zgornje enačbe sledi:

$$t_2 = -\frac{J}{A}\frac{4}{\omega_0}. \tag{35}$$

Iz enačb (1) in (2) potem dobimo:

$$t_2 = 4t_1 = 480\text{s}.$$

6. Vztrajnik ima vztrajnostni moment $J = 5$ kgm^2. Najprej se vrti s konstantno kotno hitrostjo $\omega_0 = 2$ s^{-1}, potem pa začne nanj delovati navor, ki je sorazmeren s kotno hitrostjo vrtenja vztrajnika. Za navor velja enačba $M = K\omega$, kjer je $K = 5$ Nms. Po kolikšnem času doseže kotna hitrost vrednost $\omega_1 = 9$ s^{-1}?

Rešitev:

Za navor velja

$$M = J\frac{d\omega}{dt} = K\omega.$$

Od tod dobimo:

$$\int_0^t dt = \frac{J}{K}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{d\omega}{\omega},$$

$$t = \frac{J}{K}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = 1.5 \text{ s}.$$

7. Vztrajnik ima vztrajnostni moment $J = 5$ kgm^2. Najprej se vrti s konstantno kotno hitrostjo $\omega_0 = 2$ s^{-1}, potem pa začne nanj delovati navor, ki vrtenje pospešuje in je obratno sorazmeren s trenutno kotno hitrostjo vrtenja vztrajnika. Za navor velja enačba $M = K\omega^{-1}$, kjer je $K = 2$ Nms^{-1}. Kolikšna je kotna hitrost (ω_1) vztrajnika čez $t = 4$ s?

   Rešitev:
   Navor zapišemo kot:

$$M = J\frac{d\omega}{dt} = K\omega^{-1}.$$

   Od tod dobimo:

$$\int_0^t dt = \frac{J}{K}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\omega d\omega,$$

$$t = \frac{J}{2K}(\omega_1^2 - \omega_0^2),$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2Kt}{J} + \omega_0^2} = 2.7 \text{ s}^{-1}.$$

8. Valj se giblje po klancu z naklonom 45°. Kolikšen mora biti najmanj koeficient lepenja med valjem in klancem, da se valj kotali brez podrsavanja?

Rešitev:
Zapišemo Newtonov zakon za težišče valja (glej sliko 24)

$$mg\sin\varphi - F = ma$$

in navor, ki deluje na valj, $M = J\alpha$, torej

$$rF = \frac{1}{2}mr^2\alpha.$$

Če se valj kotali brez podrsavanja, med kotnim pospeškom in pospeškom težišca velja zveza $a = \alpha r$, pa dobimo iz zgornje enačbe

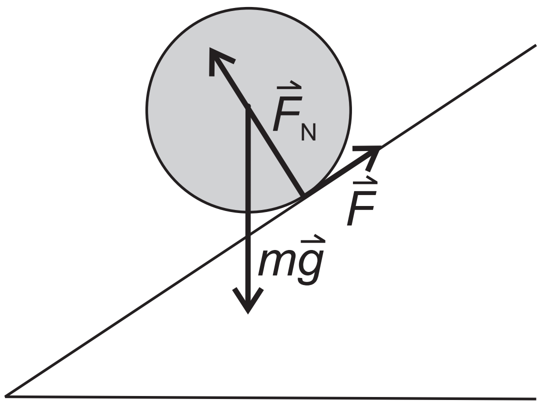
$$rF = \frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r}.$$

Iz zgornjih enačb izračunamo pospešek, ki ga nato vstavimo v izraz za silo podlage F. Ta ne sme preseči sile lepenja, torej

$$F = \frac{1}{3}mg\sin\varphi < k_L mg\cos\varphi.$$

Tako dobimo:

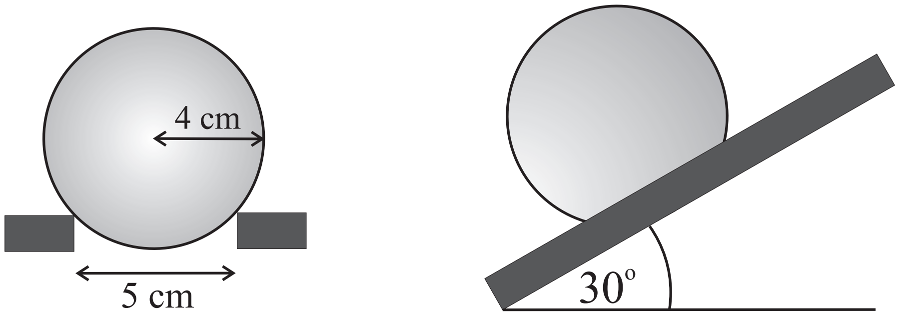
$$k_L \geq \frac{1}{3}\tan\varphi = \frac{1}{3}\tan 45^o = \frac{1}{3}.$$



Slika 24: Sile na valj, ki se kotali po klancu

9. Homogen valj se giblje navzdol po klancu z nagibom 45^o. S kolikšnim pospeškom se giblje težišče valja in kolikšen je kotni pospešek vrtenja valja, preden se začne valj kotaliti brez podrsavanja? Koeficient trenja med valjem in klancem je 0.1.

10. Dve togi deski sta postavljeni vzporedno druga ob drugi na razdalji 5 cm pod kotom 30^o glede na vodoravnico. Kolikšen je pospešek težišča kroglice s polmerom 4 cm, ki se brez podrsavanja kotali po vrzeli, ki jo tvorita deski (slika 25)?



Slika 25:

11. Poln homogen valj se začne kotaliti vzdolž 10 m dolge strmine z nagibom 10^o. V kolikšnem času pride valj do dna strmine, če se kotali brez podrsavanja? (4.2 s)

12. Ravna, zelo dolga deska mase 2 kg leži na 4 vzporednih enakih valjih, ki ležijo na vodoravnih tleh. Polmer posameznega valja je 10 cm, njegova masa pa 0.5 kg. Deska je pravokotna na osi valjev. S kolikšnim pospeškom se začne gibati težišče posameznega valja potem, ko začnemo desko vleči v vodoravni smeri s konstantno silo 10 N? Deska na valjih ne podrsava. (1.82 m/s^2)

13. Vzdolž 10 m dolge strmine z nagibom 45^o spustimo istočasno poln homogen valj in polno homogeno kocko. Pri tem se valj kotali brez podrsavanja, kocka pa drsi brez trenja. V kolikšnem časovnem razmiku dosežeta obe telesi dno strmine? (0.38 s)

14. Homogen valj miruje na vrhu klanca z nagibom 47°. Valj spustimo, da se zakotali brez podrsavanja. Kolikšna je hitrost težišča valja potem, ko težišče opravi pot 3 m?

15. Valj drsi brez trenja po vodoravni podlagi s konstantno hitrostjo 14 m/s. Nenadoma naleti na hrapavo podlago, na kateri je koeficient trenja enak 0.42. Koliko časa se valj giblje po hrapavi podlagi preden preneha podrsavati in se samo še kotali?

    Rešitev:
    Dokler valj (krogla) drsi po hrapavi podlagi, nanj deluje sila trenja v nasprotni smeri gibanja težišča (glej sliko 26). Zaradi tega velja po Newtonovem zakonu:

    $$-k_t mg = ma \Longrightarrow a = -k_t g$$

    in zato se hitrost težišča spreminja s časom kot

    $$v = v_0 - k_t gt.$$

    Sila trenja pa deluje na valj (kroglo) tudi z navorom:

    $$k_t mgr = J\alpha.$$

    Kotna hitrost se torej spreminja s časom kot

    $$\omega = \alpha t = k_t mgrt/J.$$

    Valj (krogla) se začne kotaliti brez podrsavanja, ko velja zveza

    $$v = \omega r.$$

    V zgornjo enačbo vstavimo izraza za v in ω, in izrazimo čas:

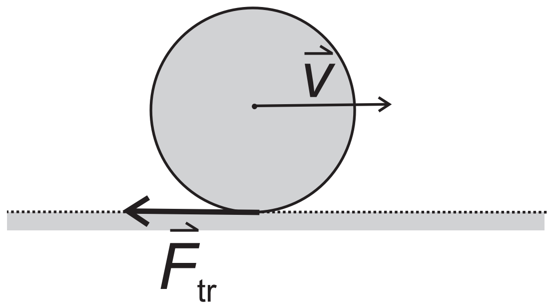
    $$t = \frac{v_0}{k_t g(\frac{mr^2}{J} + 1)}.$$

    Za valj dobimo:

    $$t = \frac{2v_0}{3k_t g}$$

za kroglo pa:

$$t = \frac{5v_0}{7k_t g}.$$



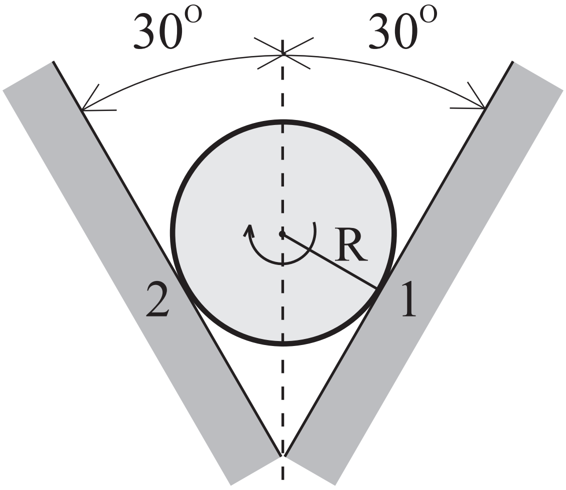
Slika 26: Sila trenja, ki deluje na valj ali kroglo, ki drsi po hrapavi podlagi. Sila teže in nasprotno enaka sila podlage nista narisani.

16. Krogla drsi brez trenja po vodoravni podlagi s konstantno hitrostjo 12 m/s. Nenadoma naleti na hrapavo podlago, na kateri je koeficient trenja enak 0.31. Koliko časa se krogla giblje po hrapavi podlagi preden preneha podrsavati in se samo še kotali?

    Rešitev: Glej prejšnjo nalogo!

17. Valj z radijem $R = 0.5$ m, ki se vrti okoli svoje geometrijske osi s frekvenco $\nu_0 = 10\ \mathrm{s}^{-1}$, položimo v okvir oblike V, kot kaže slika 27. Koeficient trenja med valjem in okvirom je $k_t = 0.1$. Koliko obratov naredi valj, preden se ustavi?

    Rešitev:
    Sili s katerima okvir deluje na valj smo izpeljali že v nalogi 17 iz poglavja 2. Ti sili imata normalni komponentnti, torej komponenti pravokotni na podlago (označimo ju z F_{p1} in F_{p2}) in komponenti vzporedni z okvirjem, ki sta posledica trenja med okvirjem in valjem (označimo ju z F_{t1} in F_{t2}). Še enkrat



Slika 27:

opozorilo: ker se valj vrti, ni simetrije, ki bi nam zagotavljala, da sta $F_{\rm p1}$ in $F_{\rm p2}$ enaki. V nalogi 17 smo za sili trenja dobili:

$$
\begin{aligned}
F_{\rm t1} &= k_t mg \frac{\cos\varphi - k_t \sin\varphi}{2(1+k_t^2)\sin\varphi\cos\varphi} \,, \\
F_{\rm t2} &= k_t mg \frac{\cos\varphi + k_t \sin\varphi}{2(1+k_t^2)\sin\varphi\cos\varphi} \,.
\end{aligned}
$$

Ti dve sili delujeta na valj z navorom

$$
M = (F_{\rm p1} + F_{\rm p2})R = J\alpha \,,
$$

kar nam da

$$
\alpha = \frac{mgk_t}{(1+k_t^2)J\sin\varphi}.
$$

Za vztrajnostni moment valja vstavimo $J = mR^2/2$ in dobimo

$$
\alpha = \frac{2gk_t}{(1+k_t^2)R\sin\varphi}.
$$

Ko se valj ustavi, velja:

$$
\omega^2 = 0 = \omega_0^2 - 2\alpha\phi
$$

in za kot zasuka valja dobimo

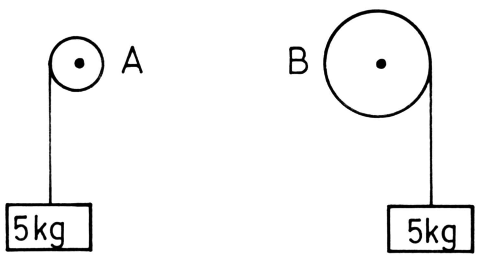
$$\phi = \frac{(2\pi\nu_0)^2}{2\alpha} = \frac{\pi^2\nu_0^2(1+k_t^2)R\sin\varphi}{gk_t} = 254\,\mathrm{rad}.$$

Število obratov, ki jih naredi valj preden se ustavi, je torej:

$$N = \frac{\phi}{2\pi} \approx 40\,.$$

18. Na vreteno je navita vrv, na kateri visi utež z maso 1 kg. Vreteno v začetku miruje. Ko spustimo utež, naredi utež v prvih 5 s pot 1 m. Kolikšna je masa vretena? Vreteno ima obliko valja s polmerom 12 cm in se vrti okoli svoje geometrijske osi.

19. Na vreteni A in B s polmeroma 10 cm in 20 cm sta naviti zelo lahki vrvici na katerih visita enaki 5 kg uteži (slika 28). Obe vreteni v začetku mirujeta. Kolikšna sta kotna pospeška obeh vreten, ko ju sprostimo? Obe vreteni sta polna homogena valja z maso 10 kg.



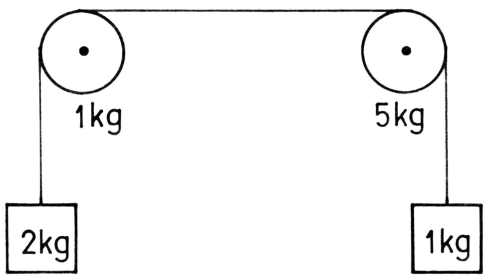
Slika 28:

20. Valj mase 1 kg in polmera 0.1 m se lahko vrti okoli vodoravne osi, ki je hkrati tudi geometrijska os valja. Okoli valja je navita vrv, na katere prostem koncu je pritrjena utež mase 0.1 kg. Trenje v osi valja in težo vrvi zanemarimo.
(a) Kolikšna sila napenja vrv, ko valj sprostimo, da se prosto vrti?

(b) Kolikšna je hitrost uteži potem, ko napravi pot 1.22 m? (0.82 N, 2 m/s)

21. Na homogen valj z maso 2 kg in radijem 10 cm navijemo zelo lahko vrvico. Na drugi konec vrvi pritrdimo utež z maso 0.9 kg. Utež spustimo, da začne padati, valj pa se začne vrteti, ko se vrvica odvija. S kolikšno kotno hitrostjo se vrti valj potem, ko opravi utež pot 1.6 m? Vrvica na valju pri odvijanju ne podrsava.

22. Preko dveh homogenih valjev, ki sta vrtljiva okoli vzporednih geometrijskih osi, je napeta vrv, na katere koncih visita dve uteži (slika 29). Masi uteži sta 2 kg in 1 kg, masi valjev pa 1 kg in 5 kg. Izračunajte pospešek uteži! (1.635 m/s^2)



Slika 29:

Rešitev:
Zapišimo Newtonov zakon za uteži:

$$-m_1 g + F_{v1} = m_1 a,$$

$$m_2 g + F_{v2} = m_2 a$$

in še Newtonov zakon za valja (v obliki navora, $M = J\alpha$). Pri tem upoštevamo, da vrv po valju ne zdrsuje in torej velja zveza $a = \alpha R$. Dobimo:

$$(F_{v3} - F_{v1})R_1 = \frac{1}{2} m_{v1} R_1^2 \frac{a}{R_1},$$

$$(F_{v2} - F_{v3})R_2 = \frac{1}{2} m_{v2} R_2^2 \frac{a}{R_2}.$$

V zadnjih dveh enačbah se radiji valjev pokrajšajo. Nato vse štiri enačbe seštejemo in dobimo za pospešek:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_{v1} + \frac{1}{2} m_{v2}} = 1.635\,\mathrm{m/s}^2.$$

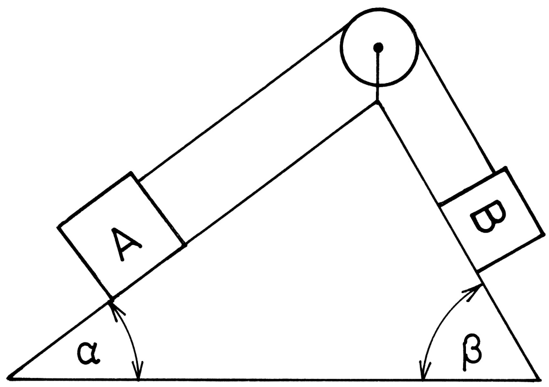
23. Na vreteno s polmerom 10 cm je navita zelo lahka vrvica, na kateri visi utež z maso 5 kg. Vreteno v začetku miruje. Kolikšen je kotni pospešek vretena, ko ga sprostimo? Vreteno je poln homogen valj z maso 10 kg. (50 s^{-2})

24. Utež A z maso 2 kg in utež B z maso 8 kg sta povezani z zelo lahko vrvico preko valja z maso 1 kg tako, kot kaže slika 30. Koeficient trenja med utežema in podlago je 0.04. S kolikšnim pospeškom se uteži začneta gibati, ko ju spustimo? Vrvica na valju ne podrsava. Naklonska kota merita $\alpha = 30^o$ in $\beta = 60^o$.

25. Na homogen valj z maso 2 kg navijemo zelo lahko vrvico, katere drugi konec pritrdimo na strop. Valj spustimo, da začne padati in se vrteti, ko se vrvica odvija. S kolikšnim pospeškom se giblje težišče valja in kolikšna sila napenja vrvico? Vrvica na valju pri odvijanju ne podrsava.

26. Votel, homogen valj s polmerom votline $r_1 = 3$ cm in zunanjim polmerom $r_2 = 8$ cm se kotali navzdol po klancu z nagibom $\varphi = 30^o$. Koliko mora biti najmanj koeficient trenja k med valjem in podlago, da se valj kotali brez podrsavanja in kolikšen je v tem primeru pospešek a težiča valja? Geometrijski osi valja in votline v njem sovpadata, votlina ima obliko valja z enako višino h, kot je višina osnovnega valja.

Rešitev:



Slika 30:

Zapišemo Newtonova zakona za gibanje težišča valja in za vrtenje

$$mg\sin\varphi - mgk\cos\varphi = ma, \tag{36}$$

$$mgkr_2\cos\varphi = J\frac{a}{r_2}. \tag{37}$$

Pri tem je m masa J pa vztrajnostni moment valja. Iz teh dveh enačb izrazimo a in k

$$k = \mathrm{tg}\varphi\frac{J}{J+mr_2^2}, \tag{38}$$

$$a = g\frac{mr_2^2\sin\varphi}{J+mr_2^2}. \tag{39}$$

Poiskati moramo samo še vztrajnostni moment votlega valja J. Pri tem je oblika votline opisana v besedilu naloge. Kot je znano, je definicija vztrajnostnega momenta

$$J = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \varrho(\vec{r}) dV.$$

Pri tem je $\varrho(\vec{r})$ gostota telesa, ki je lahko odvisna od kraja, r pa razdalja od osi vrtenja do prostorninskega elementa dV. Integral je določeni in sicer po prostornini telesa. Ponavadi se torej pri računanju vztrajnostnih momentov srečamo s trojnimi integrali.

Ker nas zanima vztrajnostni moment valja, prostorninski element dV izrazimo v cilindričnih koordinatah

$$dV = rdrdzd\varphi.$$

V našem primeru je valj homogen in je

$$\varrho = \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}.$$

Vztrajnostni moment je potem

$$J = \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)h} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2}. \tag{40}$$

Vstavimo (40) v (38) in dobimo:

$$k = \mathrm{tg}\varphi \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 + 3r_2^2} = 0.21. \tag{41}$$

Nato vstavimo (40) v (39) in dobimo:

$$a = g \sin\varphi \frac{2r_2^2}{r_1^2 + 3r_2^2} = 3.12 \ \mathrm{m/s^2}. \tag{42}$$

Vprašajmo se še, kaj bi se zgodilo, če bi namesto votlega valja imeli votlo, homogeno kroglo z maso m. Krogla ima polmer $r_2 = 8$ cm, votlina ima obliko krogle s polmerom $r_1 = 3$ cm, središči votline in krogle pa sovpadata. Edina razlika je pri vztrajnostnem momentu. Prostorninski element dV zapišemo v krogelnih koordinatah

$$dV = r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Gostota krogle z opisano votlino je:

$$\varrho = \frac{3m}{4\pi(r_2^3 - r_1^3)}.$$

Vztrajnostni moment je potem

$$J = \frac{3m}{4\pi(r_2^3 - r_1^3)} \int_{r_1}^{r_2} r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2m(r_2^5 - r_1^5)}{5(r_2^3 - r_1^3)}. \tag{43}$$

Če vstavimo (43) v (38), dobimo:

$$k = \mathrm{tg}\varphi \frac{2(r_2^5 - r_1^5)}{7r_2^5 - 5r_1^3 r_2^2 - 2r_1^5} = 0.18. \tag{44}$$

Če vstavimo (43) v (39), dobimo:

$$a = g \sin\varphi \frac{5r_2^2(r_2^3 - r_1^3)}{7r_2^5 - 5r_1^3 r_2^2 - 2r_1^5} = 3.46 \ \mathrm{m/s^2}. \tag{45}$$

27. Homogen, votel valj mase $m = 2$ kg in zunanjega polmera $r = 5$ cm se prične kotaliti vzdolž strmine dolžine $s = 2$ m in nagiba $\varphi = 30^{\mathrm{o}}$. Hitrost težišča valja na koncu strmine je $v = 3.3$ m/s. Valj je na vrhu strmine miroval. Ali ta valj med kotaljenjem podrsava in kolikšen je koeficient trenja k med valjem in podlago? Če se izkaže, da ne podrsava, določite njegov vztrajnostni moment J glede na geometrijsko os! Izračunajte tudi polmer r_1 votline v valju! Geometrijska os votline sovpada z geometrijsko osjo valja, višini votline in osnovnega valja sta enaki.

    Rešitev:
    Zapišemo Newtonova zakona za gibanje težiča valja in za kotaljenje valja, pri čemer se vrti okoli geometrijske osi:

$$mg \sin\varphi - mgk \cos\varphi = m\frac{v^2}{2s}, \tag{46}$$

$$mgkr \cos\varphi = J\frac{v^2}{2rs}. \tag{47}$$

    Pri tem smo pospešek težiča valja izrazili kot

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Predpostavili smo tudi, da valj ne podrsava in da sta torej kotni pospešek α in pospešek težišča povezana z enačbo

$$\alpha = \frac{a}{r}.$$

Če te predpostavke ne bi sprejeli, bi enačbi (46) in (47) predstavljali sistem dveh enačb s tremi neznankami in ga ne bi mogli rešiti. Potem, ko bomo izračunali k in J pa bomo ugotovili, ali je bila predpostavka upravičena tako, da bomo preverili, če je izpolnjena enačba (38).

Iz enačbe (46) izrazimo k:

$$k = \frac{2sg\sin\varphi - v^2}{2sg\cos\varphi} = 0.26. \tag{48}$$

Vstavimo (48) v (47) in izrazimo J:

$$J = mr^2\left(\frac{2sg\sin\varphi}{v^2} - 1\right) = 0.004\ \mathrm{kgm}^2. \tag{49}$$

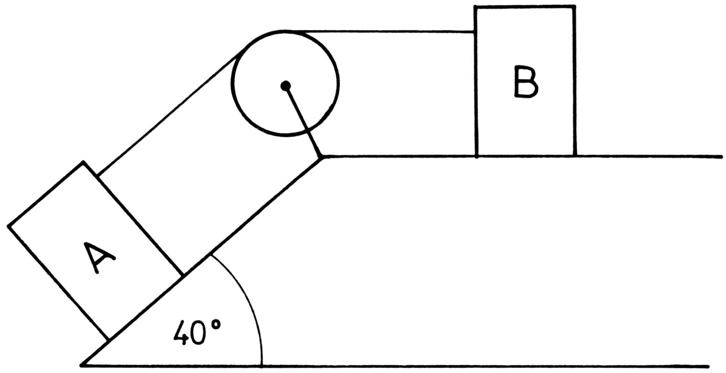
Hitro se prepričamo, da dobimo (48), če vstavimo (49) v (38) in da je bila torej predpostavka, da valj ne podrsava, upravičena.

Polmer r_1 votline v valju dobimo iz (40) in (49)

$$r_1 = r\sqrt{\frac{4sg\sin\varphi}{v^2} - 3} = 3.9\ \mathrm{cm}. \tag{50}$$

28. Dve kladi sta povezani z vrvico tako, kot kaže slika 31. Klada A ima maso 9 kg, klada B pa 3 kg. Koeficient trenja med klado B in podlago je 0.2, koeficient trenja med klado A in podlago je enak 0.1, naklonski kot strmine pa je 40°. Škripec ima obliko valja z maso 2 kg, vrvica na škripcu ne podrsava. S kolikšnim pospeškom se gibljeta kladi?

29. Uteži z masama 3 kg in 5 kg sta povezani z zelo lahko vrvico. Vrvica je napeljana preko škripca, ki ima obliko valja z maso 2 kg. Kolikšno pot opravita uteži v 3 s potem, ko ju spustimo? Vrvica na škripcu ne podrsava.



Slika 31:

30. Zelo majhna točkasta kroglica se lahko brez trenja giblje po tankem obroču polmera a = 0.5 m, ki je postavljen navpično. Obroč se vrti okoli navpične osi ($\omega = 6.26\ \mathrm{s}^{-1}$), ki poteka skozi njegovo težišče. Na kakšni razdalji od osi vrtenja je kroglica v ravnovesju? (0.43 m)

4 Gibalna in vrtilna količina

1. Vagon z maso 200 kg se brez trenja giblje po vodoravnem tiru s hitrostjo 0.7 m/s proti levi. Na vagonu sedi mož z maso 80 kg. Nenadoma začne mož hoditi s hitrostjo 2 m/s glede na vagon v smeri tira proti desni. S kolikšno hitrostjo se sedaj giblje vagon?

2. Na postaji stojita povezana vagona, prvi z maso 110 kg in drugi z maso 130 kg. Na prvem vagonu stoji mož z maso 70 kg, na drugem vagonu pa mož z maso 90 kg. Sprva moža in vagona mirujeta. V nekem trenutku pa se začneta moža gibati proti težišču obeh vagonov z relativno hitrostjo 2.5 m/s glede na vagona. Kolikšna je hitrost obeh vagonov in obeh mož glede na opazovalca, ki sedi na klopi pred postajo? (0.125 m/s, 2.625 m/s, -2.375 m/s)

3. Vesoljec z vso opremo ima maso $m_0 = 180$ kg. V breztežnem prostoru v vesolju se premika tako, da iz posebne pištole strelja majhne kroglice z maso $m_1 = 100$ g in hitrostjo $v_0 = 50$ m/s glede na pištolo v nasprotno smer od željene smeri gibanja. Na zalogi ima 200 kroglic. Kolikšna je njegova hitrost, ko izstreli vseh 200 kroglic? Izračunajte to hitrost na dva načina; prvič tako, da zanemarite, da se mu je pri streljanju kroglic zmanjševala masa, drugič pa tako, da to upoštevate! Pred izstrelitvijo prve kroglice, je vesoljec miroval.

   Rešitev:
   Po izstrelitvi vsake kroglice, se vesoljcu ohrani gibalna količina. Po prvem strelu ohranitev gibalne količine napišemo takole:

   $$0 = m_0 v_1 - m_1(v_0 - v_1). \qquad (51)$$

   Na levi strani enačbe zapišemo gibalno količino pred strelom, na desni pa po strelu. Smer gibanja vesoljca štejemo pozitivno, smer gibanja kroglice pa negativno. Po drugem strelu se gibalna količina prav tako ohrani:

   $$m_0 v_1 = m_0 v_2 - m_1(v_0 - v_2), \qquad (52)$$

prav tako po tretjem strelu,

$$m_0 v_2 = m_0 v_3 - m_1(v_0 - v_3). \tag{53}$$

Po n strelih velja:

$$m_0 v_{n-1} = m_0 v_n - m_1(v_0 - v_n). \tag{54}$$

Iz enačbe (51) sledi:

$$v_1 = \frac{m_1 v_0}{m_0 + m_1}. \tag{55}$$

Iz enačbe (52) sledi:

$$v_2 = \frac{m_1 v_0 + m_0 v_1}{m_0 + m_1}. \tag{56}$$

Iz enačb (53) in (54) dobimo:

$$v_3 = \frac{m_1 v_0 + m_0 v_2}{m_0 + m_1}, \qquad v_n = \frac{m_1 v_0 + m_0 v_{n-1}}{m_0 + m_1}. \tag{57}$$

Ob upoštevanju podatkov iz naloge izračunamo

$$v_1 = 0.0278 \mathrm{m/s}, \quad v_2 = 0.0555 \ \mathrm{m/s}, \quad v_3 = 0.0832 \ \mathrm{m/s},$$

$$v_4 = 0.1110 \ \mathrm{m/s}, \quad v_5 = 0.1387 \ \mathrm{m/s}, ... \quad v_{100} = 2.7013 \ \mathrm{m/s}, ...$$

$$v_{200} = 5.2566 \ \mathrm{m/s}.$$

Sedaj pa nalogo rešimo še tako, da upoštevamo, da se pri vsakem strelu masa vesoljca zmanjša za $m_1 = 100$ g. Ohranitev gibalne količine po prvem strelu zapišemo takole:

$$0 = (m_0 - m_1)v_1 - m_1(v_0 - v_1). \tag{58}$$

Po drugem strelu velja:

$$(m_0 - m_1)v_1 = (m_0 - 2m_1)v_2 - m_1(v_0 - v_2), \tag{59}$$

po tretjem strelu

$$(m_0 - 2m_1)v_2 = (m_0 - 3m_1)v_3 - m_1(v_0 - v_3), \tag{60}$$

po n-tem strelu

$$(m_0 - (n-1)m_1)v_{n-1} = (m_0 - nm_1)v_n - m_1(v_0 - v_n). \quad (61)$$

Iz enačbe (58) sledi:

$$v_1 = \frac{m_1 v_0}{m_0}.$$

Iz enačb (59), (60) in (61) pa dobimo:

$$v_2 = \frac{m_1 v_0 + v_1(m_0 - m_1)}{m_0 - m_1}, \quad v_3 = \frac{m_1 v_0 + v_2(m_0 - 2m_1)}{m_0 - 2m_1}, ...$$

$$v_n = \frac{m_1 v_0 + v_{n-1}(m_0 - (n-1)m_1)}{m_0 - (n-1)m_1}. \quad (62)$$

Ob upoštevanju podatkov iz naloge dobimo:

$$v_1 = 0.0278 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0.0556 \text{ m/s}, \quad v_3 = 0.0834 \text{ m/s},$$

$$v_4 = 0.1112 \text{ m/s}, \quad v_5 = 0.1390 \text{ m/s}, ... \ v_{100} = 2.8571 \text{ m/s}, ...$$

$$v_{200} = 5.8874 \text{ m/s}.$$

Za vajo sedaj še izrazimo prvih nekaj hitrosti kot funkcije m_0, m_1 in v_0. Če zanemarimo zmanjševanje mase vesoljca pri posameznih strelih, dobimo:

$$v_2 = \frac{m_1 v_1 + m_0 v_1}{m_0 + m_1} = \frac{m_1 v_0 + m_0 \frac{m_1 v_0}{m_0 + m_1}}{m_0 + m_1} = \frac{m_1 v_0 (2m_0 + m_1)}{(m_0 + m_1)^2},$$

$$v_3 = \frac{m_1 v_0 (3m_0^2 + 3m_0 m_1 + m_1^2)}{(m_0 + m_1)^3}.$$

Za vajo izračunajte še v_4, v_5 in v_6.
Če pa upoštevamo še zmanjšanje mase vesoljca pri posameznih strelih, pa dobimo:

$$v_2 = \frac{m_1 v_0 + v_1(m_0 - m_1)}{m_0 - m_1} =$$

$$= \frac{m_1 v_0 + \frac{m_1 v_0}{m_0}(m_0 - m_1)}{m_0 - m_1} = \frac{m_1 v_0 (2m_0 - m_1)}{(m_0 - m_1) m_0},$$

$$v_3 = \frac{m_1 v_0 + v_2(m_0 - 2m_1)}{m_0 - 2m_1} =$$
$$= \frac{m_1 v_0 (3m_0^2 - 4m_0 m_1 + 2m_1^2)}{(m_0 - 2m_1)(m_0 - m_1)m_0}.$$

Tudi za ta primer za vajo izračunajte še v_4, v_5 in v_6. Nato izračunajte z računalnikom prvih 1000 hitrosti z uporabo enačbe (57) oziroma (62). Ugotovili boste, da v prvem primeru pospešek vesoljca pojema, v drugem pa narašča, če vesoljec strelja kroglice v enakomernih časovnih presledkih.

4. Mož sedi v čolnu, ki je 10 m oddaljen od brega. Vsakih 5 s vrže jabolko. Ocenite, čez koliko časa bo čoln pristal ob bregu! Začetna skupna masa masa čolna, moža in jabolk je 200 kg, masa posameznega jabolka pa je 0.2 kg. Hitrost jabolka glede na čoln je 25 m/s. Koliko jabolk bo mož porabil do trenutka, ko se čoln dotakne brega? Zanemarite upor pri premikanju čolna po vodi. Zanemarite tudi dejstvo, da se masa čolna, moža in jabolk manjša, ker mož odmetava jabolka. (61 s, 13 jabolk)

5. Vagon z maso 3 t miruje na vodoravnem tiru, po katerem je gibljiv brez trenja. Topovska cev na vagonu je obrnjena v smeri tira in dvignjena za 10° poševno navzgor proti vodoravnici. V začetku vagon miruje, potem pa začnejo iz topa streljati. Vsako sekundo izstrelijo 4 izstrelke, od katerih ima vsak maso 8 kg ter hitrost 1600 m/s. Kolikšna je hitrost vagona po 25 s?

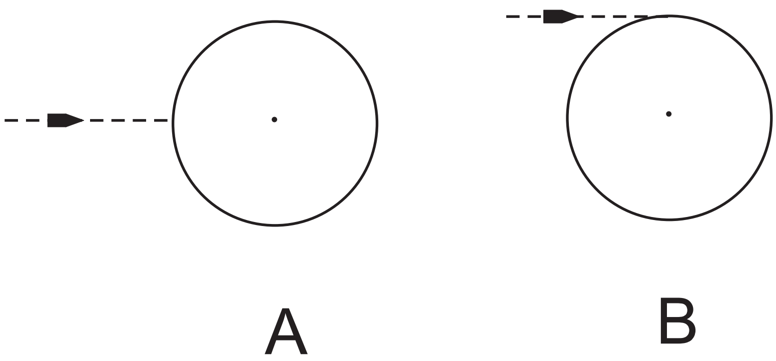
6. Voziček z maso 2 kg se giblje s hitrostjo 3 m/s po vodoravnem tiru. Trči v mirujoč voziček z maso 3 kg is se z njim sprime. S kolikšno hitrostjo se po trku gibljeta vozička?

7. Voziček z maso 1 kg je gibljiv brez trenja po vodoravnem tiru. S silo 0.8 N ga vlečemo v smeri tira. Na voziček ves čas pada dež v navpični smeri tako, da se vsako sekundo na vozičku nabere 95 g vode. Kolikšna je hitrost vozička po 14 s, če je na začetku miroval?

8. Homogena krožna plošča s polmerom 1.7 m in maso 150 kg je brez trenja vrtljiva okoli geometrijske osi. Na plošči stoji

1.2 m od osi mož z maso 70 kg. Na začetku plošča in mož mirujeta. S kolikšno hitrostjo glede na ploščo mora začeti hoditi mož po krogu s polmerom 1.2 m, da se bo plošča vrtela s kotno hitrostjo 0.05 s^{-1}?

9. Valj z maso 1 kg in polmerom osnovne ploskve 25 cm miruje na gladki površini. Vanj se zapiči izstrelek z maso 50 g in hitrostjo 150 m/s v vodoravni smeri. Kolikšna je hitrost valja takoj po trku, če se
a) izstrelek zapiči v ravnini osi valja (slika 32A)
b) izstrelek zapiči ob robu (slika 32B)
Upoštevajte, da masa izstrelka ni zanemarljiva v primerjavi z maso valja!



Slika 32:

Rešitev:
$m = 1$ kg
$r = 25$ cm
$m_i = 50$ g
$v_i = 150$ m/s

Primer a)
Ta primer je enostaven. Zapišemo ohranitev gibalne količine pred in po trku:

$$G = G'$$

$$m_i v_i = (m_i + m)v'$$

kar nam takoj da

$$v' = \frac{v_i}{1 + \frac{m}{m_i}} = 7.1 \text{ m/s}$$

Primer b)
Iz ohranitve vrtilne količine pred in takoj po trku lahko zapišemo:

$$\Gamma = \Gamma'$$

$$m_i r^2 \frac{v_i}{r} = (\frac{1}{2} m r^2 + m_i r^2)\omega'$$

Pri tem smo vrtilno količino zapisali okoli geometrijske osi valja. Zapišemo še ohranitev gibalne količine:

$$G = G'$$

$$m_i v_i = m_i v_i' + m v'$$

kjer je $v_i' = \omega' r + v'$. Iz obeh enačb lahko izrazimo hitrost težišča valja takoj po trku:

$$v' = \frac{v_i}{(1 + \frac{m}{m_i})(1 + 2\frac{m_i}{m})} = 6.5 \text{ m/s}$$

(Opomba: Primerjaj rezultata primerov a in b).

10. Metrski drog z maso 1 kg je vrtljiv okrog pravokotne osi skozi krajišče. Os je vodoravna. Ko je drog v mirovni legi, po spodnjem krajišču droga udarimo s kladivom pravokotno na os in pravokotno na drog. Pri tem je sunek sile kladiva na drog enak 1 Ns. S kolikšno hitrostjo se začne gibati prosti konec droga? Sunek sile je tako kratek, da se palica med sunkom praktično ne premakne. (3 m/s)

11. Homogena palica dolžine $L = 9$ cm (s krajiščema A in B) miruje na popolnoma gladkih tleh. Izstrelek zadene palico in ostane v njej. Smer hitrosti izstrelka je pravokotna na palico. Točka, kjer izstrelek zadene palico leži na razdalji d od krajišča B ($d < L/2$). Največ kolikšna sme biti razdalja d, da se po trku začne gibati krajišče A vzvratno? (3 cm)

12. Istočasno z višine 20 m spustimo telo mase 1 kg in na višini 5 m vržemo navpično navzgor s hitrostjo 10 m/s telo mase 5 kg. Kakšna je velikost in smer gibalne količine sistema dveh teles v trenutku trka?

Rešitev:
$h_1 = 20$ m
$m_1 = 1$ kg
$h_2 = 5$ m
$m_2 = 2$ kg
$v_0 = 10$ m/s

$G =?$

Zapišemo oddaljenost obeh kamnov od tal, v odvisnosti od časa:

$$y_1 = h_1 - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_2 = h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Ko kamna trčita je seveda $y_1 = y_2$ in iz tega dobimo za čas trka

$$t = \frac{h_1 - h_2}{v_0}.$$

Za hitrosti obeh kamnov tik pred trkom torej velja:

$$v_1 = -gt = -g\frac{h_1 - h_2}{v_0},$$

$$v_2 = v_0 - gt = v_0 - g\frac{h_1 - h_2}{v_0}.$$

Skupna gibalna količina v trenutku trka je tako

$$G = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_2 v_0 - g(m_1 + m_2)\frac{h_1 - h_2}{v_0}.$$

Ko vstavimo številke, dobimo

$$G = -68.3\,\mathrm{kgm/s^2}\,.$$

Negativni predznak pove, da skupna gibalna količina sistema obeh teles v trenutku trka kaže navzdol.

13. Istočasno spustimo kepo ilovice z maso $m_1 = 100$ g z višine $h_0 = 15$ m in vržemo s tal kepo ilovice z maso $m_2 = 200$ g navpično navzgor s hitrostjo $v_{20} = 22$ m/s. Kepi v zraku trčita in se sprimeta. S kolikšno hitrostjo (v_p) pade sprimek na tla?

Rešitev:
Označimo s simbolom h_s višino srečanja obeh kep in s t_s ustrezen čas srečanja. Ob času srečanja obeh kep velja:
prva kepa:

$$v_1 = -gt_s,\ h_1 = h_s = h_0 - gt_s^2/2, \tag{63}$$

druga kepa:

$$v_2 = v_{20} - gt_s,\ h_2 = h_s = v_{20}t_s - gt_s^2/2. \tag{64}$$

Kepi se srečata na isti višini, torej:

$$h_0 - \frac{gt_s^2}{2} = v_{20}t_s - \frac{gt_s^2}{2},$$

od koder sledi:

$$t_s = \frac{h_0}{v_{20}} = 0.68s.$$

Iz enačb (63) in (64) tako dobimo:

$$v_1 = -6.82\,\mathrm{m/s},\ v_2 = 15.18\,\mathrm{m/s},\ h_s = 12.68\,\mathrm{m}.$$

Iz zakona o ohranitvi gibalne količine izračunamo hitrost sprimka ob trku (v_{12}):

$$m_1v_1 + m_2v_2 + (m_1 + m_2)v_{12} = 0, \tag{65}$$

oziroma

$$v_{12} = \frac{-m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = -7.85\,\mathrm{m/s}.$$

Zapišimo zakon o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije za sprimek:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v_{12}^2 + (m_1 + m_2) g h_s = \frac{m_1 + m_2}{2} v_p^2 \qquad (66)$$

od koder sledi:

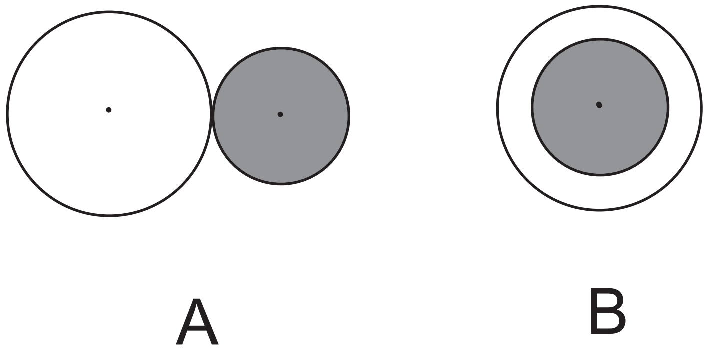
$$v_p = \sqrt{v_{12}^2 + 2 g h_s} = 17.75 \, \mathrm{m/s}.$$

14. Z vrha 50 m visokega stolpa vržemo kepo ilovice z maso 0.4 kg z začetno hitrostjo 2 m/s navpično navzdol. V istem trenutku vržemo od tal drugo kepo ilovice z maso 0.6 kg in začetno hitrostjo 45 m/s v smeri navpično navzgor. Kepi trčita in se sprimeta. S kolikšno hitrostjo pade sprimek na tla?

15. Kepi ilovice v zraku trčita in se sprimeta. Prva kepa je pred trkom imela maso 0.5 kg in hitrost 12 m/s, druga pa maso 0.6 kg in hitrost 9 m/s, hitrosti pa sta oklepali pravi kot. S kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom glede na začetno smer težje kepe se giblje sprimek? Predpostavite, da se kepi gibljeta v breztežnem in brezzračnem prostoru!

16. Valj z maso 3 kg in polmerom 12 cm se vrti okoli svoje geometrijske osi s kotno hitrostjo 100 s^{-1}. Z njim se dotaknemo drugega valja z maso 2 kg in polmerom 8 cm, ki pred dotikom miruje in je vrtljiv okoli svoje geometrijske osi. Geometrijski osi obeh valjev sta ves čas vzporedni. Kolikšni sta kotni hitrosti vrtenja obeh valjev, ko valja prenehata podrsavati, če se valja dotakneta s plaščema (slika 33A)? In kolikšni sta kotni hitrosti, ko valja prenehata podrsavati, če osi valjev sovpadata in se valja dotakneta z osnovnima ploščama (slika 33B)?

17. Na ledu miruje valjasta plošča s polmerom 0.7 m in maso 45 kg. Na njenem robu stojita drug proti drugemu dva človeka z enakima masama 75 kg, ki istočasno odskočita s plošče s hitrostima 1 m/s glede na led, prvi v radialni smeri in drugi



Slika 33:

v tangentni smeri. S kolikšno frekvenco se začne vrteti plošča in s kolikšno hitrostjo se začne gibati težišče plošče? (0.76 s^{-1}, 2.4 m/s)

18. Kepa ilovice z maso 700 g leti po zraku. V trenutku, ko je na višini 15 m, znaša vodoravna komponenta njene hitrosti 9 m/s, navpična komponenta pa 2 m/s v smeri navzdol. V tem trenutku jo zadene druga kepa z maso 900 g in hitrostjo 25 m/s v smeri navpično navzgor. Kepi se pri trku sprimeta. Kolikšno največjo višino doseže sprimek obeh kep in s kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom pade sprimek na tla?

5 Delo, energija, moč

1. Skala ima obliko polkrogle s polmerom $R = 9$ m in leži na vodoravnih tleh na svoji osnovni ploskvi (slika 8). Na vrhu skale miruje majhna ploščica. Ploščico rahlo porinemo, da začne drseti po skali, trenje pa je zanemarljivo majhno. Na kolikšni višini h, merjeno od vodoravnih tal, se ploščica odlepi od skale?

   Rešitev:
   Ploščica se odlepi od skale, ko njen radialni pospešek postane večji od komponente težnega pospeška v smeri polmera skale. Takrat torej velja:
   $$g \cos \alpha = \frac{v^2}{R},$$
   kjer je v hitrost ploščice, kot α pa je definiran na sliki 8. Če je trenje zanemarljivo majhno, je kinetična energija ploščice enaka spremembi njene potencialne enerije:
   $$\frac{1}{2} m v^2 = mgR(1 - \cos \alpha),$$
   kjer je m masa ploščice. Iz teh dveh enačb izločimo v in dobimo:
   $$\cos \alpha = \frac{2}{3}.$$
   Ploščica se torej odlepi od skale na višini:
   $$h = \frac{2R}{3} = 6 \text{ m}.$$

2. Pri balinanju na ledu vrže 75 kilogramski tekmovalec z mesta čok z maso 5 kg s hitrostjo 6 m/s glede na led. Za koliko se premakne tekmovalec po metu, če je koeficient trenja med njim in ledom 0.02? (0.4 m)

3. Dva metra dolgo palico obesimo na enem koncu in jo spustimo iz vodoravne lege. S kolikšno hitrostjo in s kolikšnim pospeškom gre drugi konec palice skozi ravnovesno lego?

4. Homogena palica dolžine 1 m in mase 4 kg je v središču pritrjena na os, ki je pravokotna na palico. Na enem koncu palice je pritrjena krogla polmera 5 cm in mase 1 kg. Palico vrtimo okoli osi s stalnim navorom 150 Nm. Kolikšna je rotacijska energija palice po času 5 s, če je palica v začetku mirovala?

5. Palica z dolžino 1.5 m in maso 1 kg je vrtljiva okrog pravokotne vodoravne osi, ki jo prebada na 3/4 njene dolžine. Ko je palica v ravnovesni legi, jo udarimo po spodnjem krajišču pravokotno na os in pravokotno na palico tako, da se palica v skrajni legi odmakne za 10^{o}. Kolikšen je bil sunek sile, s katerim smo delovali na spodnje krajišče palice? Predpostavite, da je sunek sile tako kratek, da se palica med sunkom praktično ne premakne iz ravnovesne lege. (0.17 Ns)

6. Svinčena kroglica mase $m = 0.1$ kg je privezana na vrvico dolžine R in se vrti v navpični ravnini. Kolikšna sila F_- napenja vrvico pri najnižjem položaju kroglice, če je sila pri najvišjem položaju enaka $F_+ = 2$ N? Izgube zaradi upora zraka in trenja v osi vrtenja zanemarite in predpostavite, da se energija kroglice med vrtenjem ohranja!

   Rešitev:
   Ker kroglica kroži, je njen opazovalni sistem pospešen. Kroglica v lastnem opazovalnem sistemu miruje, zato je vsota sil na kroglico enaka nič. Pri tem pa seveda ne smemo pozabiti na sistemsko silo, ki je posledica pospešenega gibanja opazovalnega sistema.

   Newtonov zakon za kroglico v najvišji legi zapišemo takole:

$$m\frac{v_+^2}{R} - mg - F_+ = 0. \tag{67}$$

   Ko pa je kroglica v najnižji legi, je Newtonov zakon takle:

$$m\frac{v_-^2}{R} + mg - F_- = 0. \tag{68}$$

   Pri tem je v_+ hitrost kroglice v najvišji legi, v_- pa hitrost v najnižji legi. Zaradi ohranitve energije kroglice med kroženjem velja še:

$$m\frac{v_+^2}{2} + 2mgR = m\frac{v_-^2}{2}. \tag{69}$$

Iz enačbe (67) izrazimo v_+:

$$mv_+^2 = R(mg + F_+),$$

to vstavimo v enačbo (69) in izrazimo v_-:

$$mv_-^2 = R(mg + F_+) + 4mgR.$$

To vstavimo v enačbo (68):

$$mg + F_+ + 4mgR + mg - F_- = 0,$$

$$F_- = F_+ + 6mgR = 8 \ \mathrm{N}.$$

7. Vodoraven drog z maso 1 kg in dolžino 1 m je vrtljiv okoli navpične osi skozi njegovo krajišče. Na drugem krajišču je pritrjena majhna utež z maso 0.1 kg. Drog z utežjo se vrti okoli osi s kotno hitrostjo 1 s^{-1}. Kolikšni sta vrtilna količina in kinetična energija tega droga z utežjo? (0.433 kgms, 0.217 J)

8. Ploščat kamen zadrsamo po poševni ledeni ploskvi navzgor proti 10 m odaljenemu kamnu z enako maso. Kolikšna je razdalja med kamnoma po elastičnem trku? Koeficient trenja je 0.1, strmina ima nagib 4^o, začetna hitrost prvega kamna pa je 6 m/s. (0.62 m)

9. Na robu vodoravne valjaste plošče z maso 100 kg in premerom 2 m stoji mož z maso 80 kg. Plošča se spočetka vrti s frekvenco četrt obrata na sekundo okoli fiksne osi, ki se ujema z geometrijsko osjo plošče. Ocenite kolikšno delo mora opraviti mož, da pride v središče plošče! Trenje zanemarimo. (256 J)

10. Homogen valj z maso 2 kg in polmerom 9 cm se vrti okoli osi, ki je vzporedna z njegovo geometrijsko osjo in od nje oddaljena za 5 cm, s frekvenco 8 s^{-1}. Kolikšna je kinetična energija tega valja?

11. Kroglica z maso 0.2 kg in polmerom 1.5 cm drsi brez trenja v vodoravni ravnini po krogu tako, da je pripeta na raztegljivo vzmet, katere neraztegnjena dolžina je 2 cm. Konstanta vzmeti je 43 N/m. Izračunajte kinetično energijo kroglice, če le ta enakomerno kroži s frekvenco 1 s^{-1}? (7.610 J)

12. Z vrha klanca višine 1 m in dolžine 10 m spustimo telo mase 2 kg. Kolikšna je kinetična energija telesa, ki drsi navzdol po klancu, pri dnu klanca, če je koeficient trenja enak 0.06? (8.1 J)

13. Otrok se sanka po 3 m visokem hribu z nagibom 45°. Kako daleč od vznožja se ustavijo sanke z otrokom, če je koeficient trenja med sankami in snegom 0.2? (12 m)

14. Človek potiska klado mase 10 kg s konstantno hitrostjo po klancu navzgor. Nagib klanca je 30^o, koeficient trenja med klado in podlago je 0.2. Kolikšno delo opravi človek, ko napravi pot 3 m? (198 J)

15. Kolikšen mora biti koeficient trenja med kocko in podlago, da bi bilo delo pri potiskanju kocke enako kot pri prevračanju kocke? (0.207)

16. Na vrhu klanca z nagibom 30° miruje homogen valj s polmerom 5 cm in maso 3 kg. Spustimo ga, da se zakotali navzdol po klancu. Koeficient trenja med valjem in podlago je 0.15. Kolikšna je njegova kinetična enerija po 10 s in kolikšno pot v tem času opravi težišče valja?

17. Homogeno, rotacijsko telo mase $m = 2$ kg in zunanjega polmera $r = 5$ cm se prične kotaliti vzdolž strmine dolžine $s = 2$ m in nagiba $\varphi = 30^o$. Hitrost težišča telesa na koncu strmine je $v = 3.3$ m/s. Telo je na vrhu strmine mirovalo. Kolikšen je vztrajnostni moment J tega telesa? Predpostavljamo, da se telo kotali brez podrsavanja. Nalogo rešite brez uporabe Newtonovega zakona!

    Rešitev:

Potencialna energija, ki jo je telo imelo na vrhu strmine, se spremeni v kinetično. Delo sile trenja se pretvori v rotacijsko kinetično energijo, preostanek pa gre v kinetično energijo težišča:

$$mgs\sin\varphi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \tag{70}$$

Ker telo ne podrsava, sta hitrost vrtenja telesa okoli geometrijske osi ω in hitrost težišča telesa povezani z enačbo:

$$v = \omega r. \tag{71}$$

Iz enačb (70) in (71) dobimo

$$J = mr^2\left(\frac{2gs\sin\varphi}{v^2} - 1\right) = 0.004\ \mathrm{kgm}^2.$$

18. En meter dolga tanka palica z maso 800 g stoji navpično z enim krajiščem na vodoravnih tleh. Na višini 70 cm od tal je na palico pritrjena majhna utež z maso 300 g. S kolikšno hitrostjo udari utež po tleh, ko se palica prevrne, ne da bi spodnje krajišče zdrsnilo?

    Rešitev:
    Zapišemo ohranitev kinetične energije. Potencialna energija je največja, ko palica stoj navpično in se spreminja v rotacijsko kinetično energijo med prevračanjem palice. Tik preden palica udari po tleh, je rotacijska kinetična energija največja. Lahko zapišemo:

$$W_{\mathrm{p,palica}} + W_{\mathrm{p,utež}} = W_{\mathrm{k,palica}} + W_{\mathrm{k,utež}}$$

$$mg\frac{l}{2} + m_ugh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{J_u\omega^2}{2},$$

    kjer je $J = ml^2/3$ vztrajnostni moment palice glede na os vrtenja palice in $J = m_uh^2$ vztrajnostni moment uteži glede na isto os. Hitrost uteži je povezana s kotno hitrostjo, $v = \omega h$. Tako dobimo za hitrost izraz:

$$v = h\sqrt{\frac{3g(ml + 2m_uh)}{ml^2 + 3m_uh}}.$$

19. Klada z maso 3 kg je gibljiva po vodoravni podlagi. Koeficient trenja med klado in podlago je 0.4. Klado pospešujemo v vodoravni smeri s silo 39 N. Koliko dela opravimo v prvih 8 s, če je klada pred začetkom pospeševanja imela hitrost 1 m/s v smeri sile?

    Rešitev:
    Iz Newtonovega zakona za klado dobimo pospešek klade:

    $$a = \frac{F - k_t mg}{m}.$$

    Nato lahko izračunamo pot, ki jo opravi klada

    $$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

    in delo, ki ga opravimo je

    $$A = Fs.$$

    Seveda se pa del dela, ki ga opravimo, porabi za trenje ($A_t = k_t mgs$) in le preostali del se spremeni v kinetično energijo klade.

20. Izstrelek z maso 10 g in hitrostjo 300 m/s, ki se giblje vodoravno, zadene leseno kroglo z maso 1 kg, ki se nahaja na robu mize, in ostane v krogli. Krogla pade z roba 1 m visoke mize na tla. Koliko dela opravi sila upora zraka, če je hitrost krogle pri tleh 4 m/s? Izstrelek zadene kroglo v višini težišča. (6.5 J)

21. Aluminijasta kocka leži na poplnoma gladkih tleh. Kocka ima maso 1 kg in je na enem koncu vpeta z vzmetjo na navpično steno, tako da je vzdolžna geometrijska os vzmeti pravokotna na steno in stranico kocke na katero je vzmet pripeta. V kocko se v smeri vzdolžne geometrijske osi vzmeti z nasprotne strani zaleti telo z maso 0.5 kg in hitrostjo 4 m/s tako, da se pri tem vzmet skrči za 0.1 m, telo pa se odbije od kocke s hitrostjo 1 m/s. Kolikšna je konstanta vzmeti? Trk telesa in kocke je neelastičen! (625 N/m)

22. Lesena klada z maso 2 kg leži na ravni podlagi, tako, da je z vzmetjo s koeficientom 1000 N/m povezana z nepremično steno. V klado se zapiči izstrelek z maso 5 g in hitrostjo 100 m/s, v vodoravni smeri. Za koliko se največ skrči vzmet, če je koeficient trenja med klado in podlago 0.2?

23. Kroglica mase 0.01 kg s hitrostjo 100 m/s trči v leseno klado mase 1 kg, ki je z vzmetjo privezana na drugo klado mase 3 kg. S kolikšno hitrostjo se kroglica odbije od prve klade, če se pri trku druga klada le za malenkost premakne? Konstanta vzmeti je 10 N/m. Vzmet pred trkom ni raztegnjena. Koeficient trenja in koeficient lepenja sta enaka 0.2. (-79 m/s)

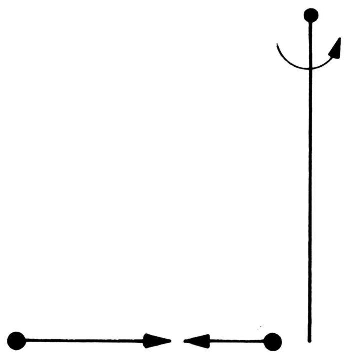
24. V telo z maso 0.75 kg, ki je pritrjeno na v zid vpeto vzmet, se v smeri vzolžne osi vzmeti s hitrostjo 2 m/s zaleti drugo telo z maso 0.5 kg tako, da se z njim sprime. Za koliko se vzmet lahko največ skrči, če je konstanta vzmeti 5 N/m? Zanemarite trenje med podlago in telesoma! (0.4 m)

25. Tanek, raven drog je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo krajišče in je pravokotna na drog. Masa droga je 1 kg, dolžina 1 m. Na drugem krajišču je pritrjena majhna utež z maso 0.3 kg. V začetku je drog postavljen navpično tako, da gre os skozi njegovo spodnje krajišče. Nato drog spustimo. Kolikšna je hitrost uteži, ko je drog v najnižji legi, tako, da gre sedaj os skozi zgornje krajišče droga? (7 m/s)

26. Raven drog z maso 1 kg in dolžino 1 m je vrtljiv okoli navpične osi, ki je pravokotna na drog in gre skozi njegovo težišče. Po enem krajišču mirujočega droga udarimo s kladivom v smeri pravokotno na drog in na os vrtenja tako, da drog prejme sunek navora 0.97 Nms. Kolikšna je kinetična energija droga po udarcu? (5.6 J)

27. Tanek, raven drog je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo zgornje krajišče in je pravokotna na drog. Masa droga je m = 1 kg, dolžina l = 1 m. Majhna kroglica z maso m_0 = 0.2 kg prileti v vodoravni smeri, pravokotno na drog s hitrostjo v_0 = 60 m/s in zadene spodnje krajišče droga. Trk

je idealno prožen in kroglica se odbije od droga v vodoravni smeri (slika 34). S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se po trku začne vrteti drog in s kolikšno hitrostjo (v) se po odboju giblje kroglica?



Slika 34:

Rešitev:
Pri trku se ohrani kinetična energija:

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Pri tem je J vztrajnostni moment droga

$$J = \frac{ml^2}{3}.$$

Poleg tega velja še izrek o vrtilni količini. Sunek navora kroglice na drog je enak spremembi vrtilne količine droga

$$m_0(v_0 + v)l = J\omega.$$

Iz druge in tretje enačbe izrazimo ω,

$$\omega = \frac{3m_0(v_0 + v)}{ml},$$

in to vstavimo v prvo enačbo. Dobimo kvadratno enačbo za hitrost kroglice po odboju v:

$$v^2(3m_0 + m) + v6m_0v_0 + v_0^2(3m_0 - m) = 0.$$

Rešitvi sta:

$$v = v_0\frac{-3m_0 \pm m}{3m_0 + m}.$$

Fizikalno smiselna je rešitev s pozitivnim znakom:

$$v = v_0\frac{-3m_0 + m}{3m_0 + m} = 15 \text{ m/s}.$$

Nato izračunamo se kotno hitrost droga takoj po trku

$$\omega = \frac{6m_0v_0}{l(3m_0 + m)} = 45 \text{ s}^{-1}.$$

28. Metrski drog ($l = 1$ m) z maso $m = 1$ kg je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo zgornje krajišče. V vodoravni smeri prileti majhna kroglica iz plastelina z maso $m_0 = 0.4$ kg in zadene spodnje krajišče droga ter se prilepi nanj. Koliko mora biti najmanj hitrost (v) te kepe, da se bo po zadetku drog zavrtel za 180°?

Rešitev:
Najprej opozorilo, da se začetna kinetična energija kroglice ne ohrani. Del te energije se spremeni v notranjo energijo kroglice, ko se kroglica deformira in prilepi na drog. Kroglica se pri tem malo segreje. Se pa začetna kinetična energija droga s prilepljeno kroglico takoj po zadetku spremeni v potencialno energijo, ko se drog za trenutek ustavi v navpični legi:

$$\frac{J\omega^2}{2} = gl(m + 2m_0),$$

oziroma

$$l\omega^2\left(\frac{m}{3} + m_0\right) = 2g(m + 2m_0),$$

ker je vztrajnostni moment

$$J = l^2\left(\frac{m}{3} + m_0\right).$$

Poleg tega velja še izrek o vrtilni količini. Sunek navora kroglice na drog je enak spremembi vrtilne količine droga:

$$m_0 v l = J\omega.$$

Iz tretje in četrte enačbe izrazimo ω:

$$\omega = \frac{3m_0 v}{l(m + 3m_0)},$$

ter vstavimo v drugo enačbo, da dobimo hitrost

$$v = \sqrt{\frac{2gl(m + 2m_0)(m + 3m_0)}{3m_0^2}} = 12.7 \text{ m/s}.$$

Na koncu še poglejmo, koliko začetne kinetične energije kroglice se je pretvorilo v notranjo energijo W_n:

$$W_n = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{J\omega^2}{2} = \frac{glm(m + 2m_0)}{3m_0} = 14.7 \text{ J}.$$

Začetna kinetična energija kroglice pa je bila 32.3 J.

29. Metrski drog z maso 1 kg je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo zgornje krajišče. V vodoravni smeri prileti majhna kroglica z maso 0.4 kg ter zadene spodnje krajišče droga (slika 34). Trk je idealno prožen, kroglica pa se odbije v vodoravni smeri. S kolikšno kotno hitrostjo se po trku zavrti drog in s kolikšno hitrostjo je priletela kroglica, če se drog po trku zavrti za 180°? S kolikšno hitrostjo se giblje kroglica po odboju?

30. Dva tanka homogena drogova se vrtita okoli dveh vzporednih navpičnih osi, ki gresta skozi njuni težišči. Prvi drog ima maso $m_1 = 0.9$ kg in dolžino $l_1 = 1$ m, drugi je dolg $l_2 = 80$ cm in ima maso $m_2 = 1.2$ kg. Razdalja med osema je malo manj kot 90 cm tako, da se krajišči drogov lahko dotakneta. V začetku se daljši drog vrti s kotno hitrostjo $\omega_0 = 70 \text{ s}^{-1}$, krajši pa miruje. S kolikšno kotno hitrostjo se vrtita drogova potem, ko krajišči trčita, če je trk idealno prožen?

Rešitev:
Pri trku se ohrani kinetična energija, zato velja:

$$m_1 l_1^2 \omega_0^2 = m_1 l_1^2 \omega_1^2 + m_2 l_2^2 \omega_2^2.$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$J_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12}, \quad J_2 = \frac{m_2 l_2^2}{12}.$$

Izrek o vrtilni količini pa pove naslednje. Ob trku drugi drog deluje na prvi drog s sunkom navora, ki je enak spremembi vrtilne količine prvega droga:

$$F\Delta t \frac{l_1}{2} = J_1(\omega_0 - \omega_1).$$

Podobno velja tudi za drugi drog:

$$F\Delta t \frac{l_2}{2} = J_2 \omega_2.$$

Sunka sile $F\Delta t$ sta med seboj nasprotno enaka, ker pa sta ročici različni, sunka navorov nista enaka. Vrtilna količina se torej ne ohrani! Zadnji dve enačbi delimo med seboj, da krajšamo neznani sunek sile in izrazimo ω_2:

$$\omega_2 = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}(\omega_0 - \omega_1).$$

To vstavimo v prvo enačbo in dobimo kvadratno enačbo za ω_1:

$$\omega_1^2(m_1 + m_2) - 2m_1\omega_0\omega_1 = \omega_0^2(m_1 - m_2) = 0.$$

Rešitvi sta:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2}.$$

Pravo rešitev da negativni znak:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -10 \ \mathrm{s}^{-1}.$$

Negativna kotna hitrost pomeni, da se drog vrti v nasprotno smer, kot pred trkom. Kotna hitrost drugega droga je potem:

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{2m_1 l_1}{(m_1 + m_2) l_2} = 75 \ \mathrm{s}^{-1}.$$

31. Po vodoravnem tiru se brez trenja gibljeta drug proti drugemu dva vozička. Prvi ima maso $m_1 = 2$ kg in hitrost $v_1 = 3$ m/s proti desni, drugi pa maso $m_2 = 1$ kg in hitrost $v_2 = 1$ m/s proti levi. Vozička trčita in se sprimeta. S kolikšno hitrostjo in v katero smer se po trku gibljeta vozička? Koliko kinetične energije je pri trku šlo v izgubo?

32. Po vodoravnem tiru se brez trenja gibljeta drug proti drugemu dva vozička. Prvi ima maso $m_1 = 3$ kg in hitrost $v_1 = 3$ m/s proti desni, drugi pa maso $m_2 = 1$ kg in hitrost $v_2 = 4$ m/s proti levi. Vozička idealno prožno trčita. S kolikšno hitrostjo in v katero smer se po trku gibljeta vozička?

    Rešitev:
    Ker je trk idealno prožen, se ohrani kinetična energija:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2}. \qquad (72)$$

Pri tem sta $v_1^{'}$ in $v_2^{'}$ hitrosti prvega in drugega vozička po trku. Ohrani se tudi gibalna količina:

$$m_1v_1 - m_2v_2^2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'}. \qquad (73)$$

Ker se drugi voziček pred trkom giblje v levo, smo njegovi hitrosti dali negativen predznak.

V enačbi (72) damo člene z m_1 na levo stran, člene z m_2 pa na desno stran in razstavimo razlike kvadratov hitrosti. Dobimo:

$$m_1(v_1 - v_1^{'})(v_1 + v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2)(v_2 + v_2^{'}). \qquad (74)$$

Iz enačbe (73) na podoben način dobimo:

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2 + v_2^{'}). \qquad (75)$$

Enačbi (74) in (75) delimo med seboj in dobimo:

$$v_2^{'} = v_1 + v_2 + v_1^{'}. \qquad (76)$$

To vstavimo v enačbo (73) in izrazimo $v_1^{'}$:

$$v_1^{'} = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - v_2\frac{2m_2}{m_1 + m_2} = -0.5 \text{ m/s}. \qquad (77)$$

Prvi voziček se po trku giblje s hitrostjo 0.5 m/s proti **levi**, to je v nasprotno smer, kot pred trkom.

Iz enačb (76) in (77) dobimo še v_2':

$$v_2' = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 6.5 \text{ m/s}. \qquad (78)$$

Drugi voziček se po trku giblje s hitrostjo 6.5 m/s proti **desni**, prav tako v nasprotno smer, kot pred trkom.

33. Klada z maso $m_1 = 1$ kg se zaleti s hitrostjo $v_0 = 6$ m/s v mirujočo klado z maso $m_2 = 3$ kg. Po trku se prva klada odbije nazaj in se ustavi, ko opravi pot $s_1 = 1.5$ m od mesta trka. Za koliko (s_2) se po trku premakne druga klada? Koeficient trenja med kladama in podlago je $k = 0.1$. Koliko J kinetične energije prve klade je šlo pri trku v izgubo?

34. Betonski blok z zelo veliko maso, ki je v začetku miroval na tleh, se začne dvigati v smeri navpično navzgor s konstantno hitrostjo $v_0 = 2$ m/s. V istem trenutku spustimo z višine $h_0 = 100$ m majhno žogico z maso $m = 0.3$ kg, da prosto pade. Kroglica trči v betonski blok in se od njega odbije, trk pa je idealno prožen. Do kolikšne višine h, merjeno glede na lego betonskega bloka pred začetkom dvigovanja, se po trku dvigne kroglica?

35. Kroglica 2 miruje na vodoravni ravnini. Kroglica 1, ki ima dvakrat večjo maso, kot kroglica 2 ($m_1 = 2m_2$), se ji približuje s konstantno hitrostjo $v_0 = 8$ m/s. Kroglici trčita, trk je idealno prožen. Kroglica 1 se po trku giblje pod kotom $\alpha = 30^o$ glede na svojo začetno smer gibanja. Pod kolikšnim kotom (β) glede na prvotno smer kroglice 1 se po trku giblje kroglica 2? Kolikšni sta hitrosti obeh kroglic (v_1, v_2) po trku?

    Rešitev:
    Pri trku se ohrani kinetična energija kroglic. Od tod sledi enačba

$$v_0^2 = v_1^2 + A v_2^2. \qquad (79)$$

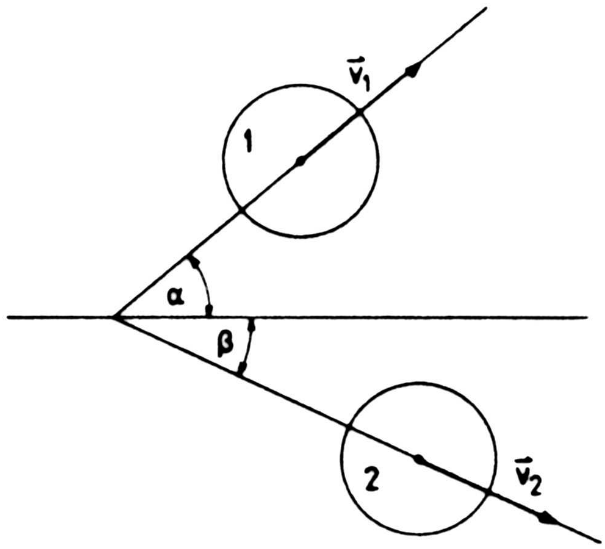
    Pri tem je $A = \frac{m_2}{m_1} = 0.5$.

Iz ohranitve gibalne količine pa sledita enačbi:

$$v_0 = v_1 \cos\alpha + A v_2 \cos\beta, \tag{80}$$

$$0 = v_1 \sin\alpha - A v_2 \sin\beta. \tag{81}$$

Glejte sliko 35. Iz (81) dobimo:



Slika 35:

$$v_1 = A v_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{82}$$

To vstavimo v enačbi (80) in (79). Dobimo

$$v_0 = A v_2 \left(\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} + \cos\beta \right), \tag{83}$$

$$v_0^2 = A v_2^2 \left(A \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + 1 \right). \tag{84}$$

Iz enačb (83) in (84) sledi enačba:

$$A \left(\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} + \cos\beta \right)^2 = A \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + 1. \tag{85}$$

Od tod pa po krajšem računu dobimo:

$$A\sin\alpha\sin^2\beta + \sin\alpha(1 - A\cos^2\beta) = 2A\cos\alpha\sin\beta\cos\beta. \quad (86)$$

Uvedemo novo spremenljivko

$$\sin\beta = \sqrt{u}, \quad \cos\beta = \sqrt{1-u}$$

in enačba (86) preide v:

$$4A^2u^2 + 4Au(\sin^2\alpha - A) + \sin^2\alpha(1-A)^2 = 0. \quad (87)$$

Ta enačba ima rešitvi:

$$u_{1,2} = \frac{-(\sin^2\alpha - A) \pm \sqrt{\sin^4\alpha - \sin^2\alpha(A^2+1) + A^2}}{2A}. \quad (88)$$

Če vstavimo podatke $\alpha = 30^o$, $A = 0.5$, se pokaže, da je rešitev samo ena in sicer $u = 0.25$, oziroma $\sin\beta = 0.5$ in $\beta = 30^o$. Iz enačb (82) in (83) nato izračunamo še hitrosti obeh kroglic po trku, $v_1 = 4.619$ m/s in $v_2 = 9.238$ m/s.

Dodajmo še nekaj komentarjev. Če bi bili masi obeh kroglic enaki ($A = 1$), bi iz enačbe (85) dobili zvezo

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta,$$

oziroma

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

To pomeni, da bi se kroglici po trku gibali pravokotno druga na drugo.

Enačba (87) ima realni rešitvi, če je diskriminanta pozitivna ali enaka nič. To pomeni:

$$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha(A^2+1) + A^2 \geq 0. \quad (89)$$

Kadar je $A < 1$, kot v našem primeru, je zahteva (89) izpolnjena, če je $\sin\alpha \leq A$.

Če pa je izstrelek lažji od tarče ($A > 1$), je pogoj (89) izpolnjen za vsak α.

36. Biljardna kroglica elastično trči z dvema drugima enakima dotikajočima se biljardnima kroglicama, ki odletita po trku simetrično na obe strani. Prva kroglica prileti v smeri, ki je pravokotna na premico skozi središči druge in tretje kroglice. Kolikšni sta velikosti hitrosti druge in tretje kroglice po trku, če je velikost hitrosti prve kroglice pred trkom 2 m/s in se pri trku kinetična energija ohrani? Na začetku mirujoči kroglici se po trku gibljeta pod kotom 30^o oziroma -30^o glede na vpadno smer prve kroglice.
($v_1 = v_2 = 1.39$ m/s)

37. Na nitkah dolžine 1 m sta obešeni majhni jekleni kroglici mas m in $2m$ tako, da sta prosta konca obeh nitk pritrjena v težišču kroglic. Lažjo kroglico odklonimo za kot 60^o in spustimo. Na kolikšni višini se posta povzpeli obe kroglici po popolnoma elastičnem trku? ($h_{\rm 2m} = 0.055$ m, $h_{\rm m} = 0.22$ m)

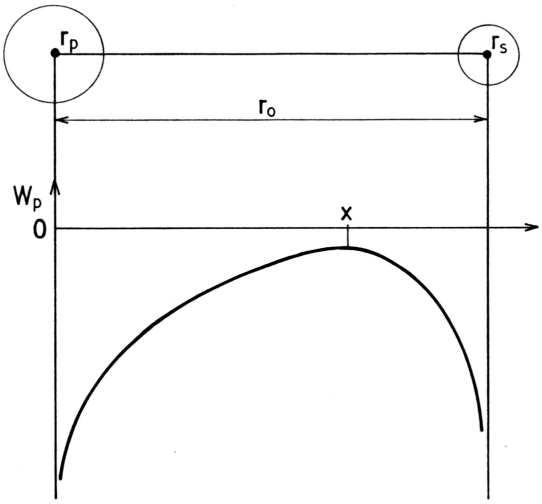
38. Poševni žleb spodaj zavije v navpični krog polmera 0.5 m tako, da je ravnina v kateri žleb leži pravokotna na podlago. Po žlebu spustimo z višine 2.5 m od tal majhno kocko, ki lahko drsi po njem brez trenja. Kolikšna je sila, ki deluje na kocko na polovični višini kroga, če je masa kocke 0.1 kg?
(7.92 N)

39. V vesolju se nahajata planet in njegov naravni satelit. Masa planeta je $m_p = 1.6 \cdot 10^{25}$ kg, masa satelita pa je $m_s = 10^{24}$ kg. Polmer planeta je $r_p = 8000$ km, polmer satelita pa je $r_s = 3000$ km. Razdalja med središčema planeta in satelita je $r_0 = 700000$ km. Na kateri razdalji, merjeno od središča planeta, sta gravitacijski sili planeta in satelita med seboj nasprotno enaki? S kolikšno najmanjšo hitrostjo je potrebno izstreliti izstrelek s površine planeta, da bo padel na satelit?

Rešitev:

Gravitacijski sili sta nasprotno enaki na razdalji x od središča planeta, za katero velja (glejte sliko 36):

$$\frac{Gm_pm}{x^2} = \frac{Gm_sm}{(r_0 - x)^2},$$



Slika 36:

kjer je G gravitacijska konstanta, m pa masa izstrelka. Od tod sledi:

$$m_p(r_0 - x)^2 = m_s x^2,$$

$$x^2(m_p - m_s) - 2m_p r_0 x + m_p r_0^2 = 0.$$

Rešitvi te kvadratne enačbe sta:

$$x_{1,2} = \frac{2m_p r_0 \pm \sqrt{4m_p^2 r_0^2 - 4(m_p - m_s)m_p r_0^2}}{2(m_p - m_s)},$$

$$x_{1,2} = r_0 \frac{1 \pm \sqrt{\frac{m_s}{m_p}}}{1 - \frac{m_s}{m_p}}.$$

Pravilna je seveda rešitev z negativnim predznakom:

$$x = r_0 \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{m_s}{m_p}}} = \frac{4r_0}{5} = 560000 \text{ km}. \tag{90}$$

Sedaj poiščimo še najmanjšo potrebno hitrost izstrelka, da bo le-ta dosegel površino satelita, če ga izstrelimo s planeta. To hitrost označimo v. Ob izstrelitvi s površine planeta, mora biti vsota kinetične in potencialne energije izstrelka enaka potencialni energiji izstrelka v točki, kjer sta gravitacijski sili planeta in satelita nasprotno enaki:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_pm}{r_p} - \frac{Gm_sm}{v_0 - v_p} = -\frac{Gm_pm}{x} - \frac{Gm_sm}{r_0 - x}$$

$$v = \sqrt{2G\left[\frac{m_p}{r_p} + \frac{m_s}{r_0 - r_p} - \frac{m_p(1 + \sqrt{\frac{m_s}{m_p}})}{r_0} - \frac{m_s(1 + \sqrt{\frac{m_s}{m_p}})}{r_0\sqrt{\frac{m_s}{m_p}}}\right]} =$$

$$= 16193.5 \text{ m/s} \approx 16.2 \text{ km/s}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je x podan z enačbo (90).

40. S kolikšno najmanjšo hitrostjo moramo izstreliti izstrelek v smeri navpično navzgor, da bo dosegel višino 3000 km? Polmer Zemlje je 6400 km, težni pospešek na površini Zemlje je $g_0 = 9.81$ m/s^2. Zanemarite zračni upor!

41. Izstrelek izstrelimo navpično navzgor. Na višini 2000 km ima hitrost 4 km/s v smeri navpično navzgor. Kolikšna je hitrost tega izstrelka na višini 3000 km? Polmer Zemlje je 6400 km, težni pospešek na površini Zemlje je $g_0 = 9.81$ m/s^2. Zanemarite zračni upor!

42. Satelit kroži okrog Zemlje na višini 7000 km. Kolikšna je hitrost tega satelita? Polmer Zemlje je 6400 km. Kolikšna je celotna energija tega satelita? Energijo štejemo tako, da ima mirujoč satelit na zemeljski površini energijo nič. Masa satelita je 100 kg.

43. Na kolikšni višini nad površino zemlje se nahaja satelit, ki obkroži Zemljo v 48 urah? Polmer Zemlje je 6400 km.

44. Telo spustimo, da prosto pade z višine 4000 km. S kolikšno hitrostjo bi to telo padlo na tla, če ne bi bilo zračnega upora in vrtenja Zemlje? Polmer Zemlje je 6400 km.

45. Homogena, ravna tanka palica z maso $m_1 = 5$ kg in majhna utež z maso $m_2 = 1$ kg mirujeta v breztežnem prostoru. Utež leži na isti premici, kot palica in je oddaljena $a = 30$ cm od njenega krajišča. Koliko dela moramo opraviti, da utež spravimo na razdaljo $b = 70$ cm od krajišča palice po premici, na kateri leži palica?

46. Okrogla, homogena plošča z maso $m_1 = 8000$ kg in polmerom $R = 5$ m ter majhna utež z maso $m_2 = 1$ kg mirujeta v breztežnem prostoru. Utež leži na geometrijski osi plošče v razdalji $h_1 = 2$ m od središča plošče. Koliko dela moramo opraviti, da utež spravimo na razdaljo $h_2 = 4$ m od središča plošče po geometrijski osi plošče?

47. Telo z maso 1 kg se giblje premo s pospeškom $a = kt^{1/2}$, $(k = 1ms^{-5/2})$. Hitrost telesa ob času t = 0 je enaka nič. Izračunajte translacijsko kinetično energijo telesa ob času t = 10 s?

    Rešitev:

$$v = \int_0^t a \, \mathrm{dt}' = \frac{2\mathrm{kt}^{3/2}}{3}$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = 222 \text{ J.}$$

48. Košara z maso 400 kg se začne ob času t = 0 dvigati s pospeškom, ki se v odvisnosti od časa spreminja po enačbi $a = kt$, $(k = 2 \text{ ms}^{-3})$. Koliko dela opravi motor dvigala v prvi sekundi? Pri tem predpostavite, da ni nobenih izgub energije!

    Rešitev:

$$v = \int_0^t a \, \mathrm{dt}' = \frac{\mathrm{kt}^2}{2}$$

$$h = \int_0^t v \, \mathrm{dt}' = \frac{\mathrm{kt}^3}{6}$$

$$A = \Delta W_p = mgh = 1522 \text{ J}.$$

49. Moč motorja v vozilu z maso 950 kg, ki se brez trenja giblje po vodoravnem tiru, narašča sorazmerno s časom. Po 10 s doseže 1 kW. Kolikšna je v tem času hitrost vozila? Vozilo je v začetku mirovalo.

50. Dvigalo dviguje breme z maso $m = 100$ kg. Moč motorja $P(t)$ s časom najprej narašča, nato pa pojema tako, da se breme zaustavi na višini $x = 20$ m. Pri tem pa je povprečna moč motorja enaka $< P > = 1$ kW. V kolikšnem času dvigne dvigalo breme do končne višine, če je izkoristek motorja 80 % ($\eta = 0.8$)? Breme v začetku miruje na tleh.

    Rešitev:
    Ker se breme na koncu ustavi, je delo A, ki ga opravi motor, enako spremembi potencialne energije bremena:

    $$A = \eta t < P >= mgx,$$

    oziroma

    $$t = \frac{mgx}{\eta < P >} = 25s.$$

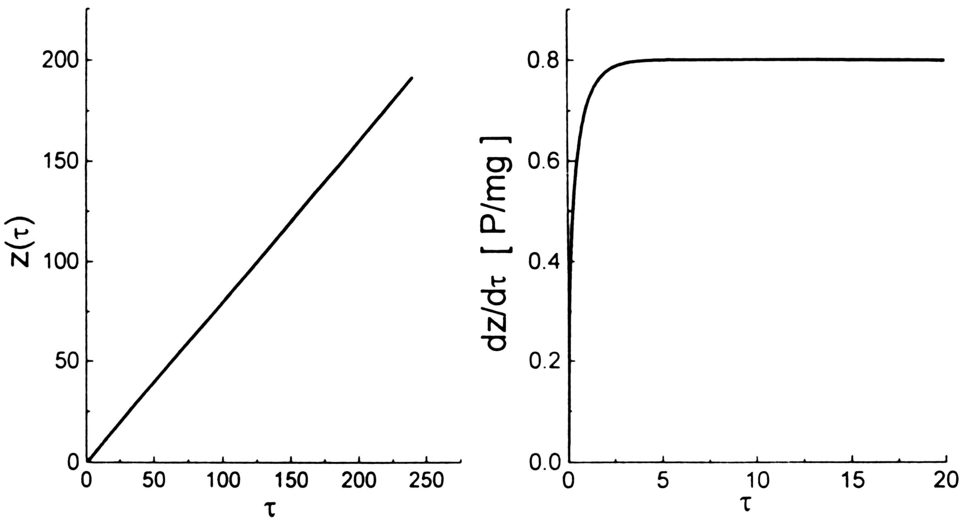
    Pri tem smo vzeli za težni pospešek $g = 10m/s^2$. Iz definicije povprečne moči:

    $$< P >= \frac{\int_0^t P(t)dt}{t},$$

    namreč sledi:

    $$A = \eta \int_0^t P(t)dt = \eta < P > t.$$

51. Motor s konstantno močjo $P = 1$ kW poganja vitel, ki dvigne breme mase $m = 100$ kg do višine $x = 20$ m. V kolikšnem času se breme dvigne do te višine, če je izkoristek motorja 80 % ($\eta = 0.8$)! Breme v začetku miruje na tleh. Kolikšna je končna hitrost bremena?



Slika 37:

Rešitev:
Opravljeno delo motorja A je enako spremembi kinetične in potencialne energije bremena. Torej:

$$A = \eta P t = \frac{1}{2} m v^2 + m g x = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m g x.$$

Pri tem je hitrost bremena v enaka $v = \frac{dx}{dt}$. Zgornjo enačbo zapišemo v brezdimenzijski obliki:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sqrt{2(\eta\tau - z)},$$

kjer smo uvedli brezdimenzijski čas:

$$\tau = t \frac{m g^2}{P}$$

in brezdimenzijsko višino:

$$z = x \frac{m^2 g^3}{P^2}.$$

Dobili smo nelinearno diferencialno enačbo, ki jo rešimo numerično. Na sliki 37 sta skicirani funkciji $z(\tau)$ in $\frac{dz}{d\tau}$ za $\eta = 0.8$, $z(\tau = 0) = 0$ in $\frac{dz}{d\tau}(\tau = 0) = 0$. Iz numerične rešitve ugotovimo, da breme višino $x = 20$ m, $(z = 188.86)$ doseže po času $t = 24.6$ s, $(\tau = 236.46)$. Hitrost bremena je takrat enaka $v = 0.8$ m/s. Tokrat smo vzeli za težni pospešek $g = 9.81$ m/s^2.

52. Elektromotor začne poganjati homogen valj, ki ima vztrajnostni moment 25 kgm^2. Po kolikšnem času valj doseže kotno hitrost 100 s^{-1}, če moč motorja narašča sorazmerno s kvadratom časa. Sorazmernostna konstanta je 20 Ws^{-2}, moč ob času t = 0 pa je enaka nič? Izgube zaradi trenja zanemarimo. (26.6 s)

53. Elektromotor vrti vztrajnik z vztrajnostnim momentom 18 kgm^2. Moč motorja se v odvisnosti od časa spreminja po enačbi $P = P_0 t^{3/4}$, kjer je P_0 konstanta, ki je enaka $P_0 = 32$ Ws$^{-3/4}$. Kolikšna je kotna hitrost vrtenja vztrajnika 8 s po začetku delovanja motorja, če je vztrajnik v začetku miroval? Kolikšen pa je takrat kotni pospešek? Koliko vrtljajev naredi vztrajnik v tem času?

6 Nihanje

1. Nihalo je sestavljeno iz uteži z maso 0.3 kg in vijačne vzmeti s koeficientom 16 N/m. Utež odmaknemo za 8 cm od ravnovesne lege in spustimo, da zaniha. Kolikšen je odmik uteži od ravnovesne lege in kolikšna je hitrost uteži 0.2 s po tem, ko gre utež prvič skozi ravnovesno lego?

2. Na vijačni vzmeti niha 10 g težka utež s frekvenco 2 s^{-1} in amplitudo 2 cm. S kolikšno hitrostjo gre utež skozi ravnovesno lego, kolikšen je takrat pospešek, kolikšna sila vleče utež v mirovno lego, ko ima utež največji odmik, kolikšen je koeficient vijačne vzmeti?

3. Maksimalna sila, ki vrača harmonično nihajoče telo v ravnovesno lego je 3×10^{-3} N, celotna energija nihanja pa je 7×10^{-5} J. Kolikšna je amplituda nihanja tega telesa? (4.7×10^{-2} m)

4. Na elastično vzmet s konstanto $k = 1$ N/m je obešena kroglica z maso 10 g, ki harmonično niha z amplitudo 0.02 m. Določite odmik kroglice iz ravnovesne lege ob času $t = 0.5$ s, če je odmik ob času $t = 0$ enak nič? (-0.0192 m)

5. Kolikšen je nihajni čas valja s polmerom osnovne ploskve 10 cm, višino 20 cm in gostoto 2.7 g/cm^3, ki je pritrjen na 1 m dolgi tanki žici tako, da je žica pravokotna na geometrijsko os valja in bi njen podaljšek šel skozi težišče valja. Masa žice je zanemarljivo majhna. Geometrijska os valja je v vodoravni legi in je 110 cm oddaljena od pritrdišča žice.

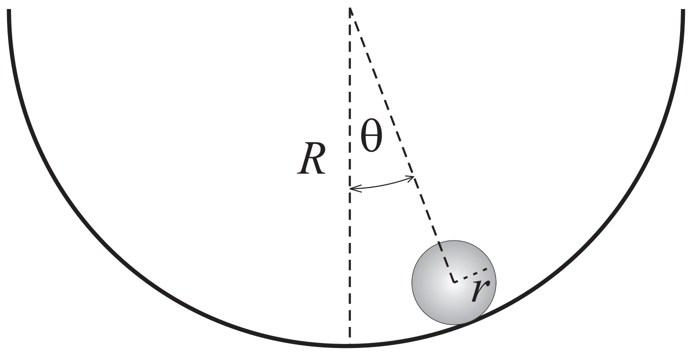
6. Homogena valjasta plošča s polmerom 10 cm in debelino 0.5 cm, se lahko brez trenja vrti okoli svoje vodoravno ležeče geometrijske osi, ki je pravokotna na ravnino plošče. Na obod plošče pritrdimo majhno svinčeno utež mase 20 g. S kolikšnim nihajnim časom niha plošča pri majhnih odmikih? Gostota plošče je 8 g/cm^{-3}. ($t_0 = 3.52$ s)

7. Metrski drog z maso 1 kg je vrtljiv okoli osi skozi njegovo zgornje krajišče. V razdalji 50 cm od osi je na drog pritrjena

majhna utež z maso 0.2 kg. S kolikšnim nihajnim časom zaniha ta drog, ko ga za malenkost izmaknemo iz ravnovesne lege? (1.58 s)

8. Ravna palica z dolžino 1 m in maso 4 kg je vrtljiva okoli vodoravne osi skozi zgornje krajišče. Na drugem krajišču palice je pritrjena valjasta plošča z maso 1 kg in polmerom 0.2 m tako, da je geometrijska os plošče vzporedna z osjo vrtenja palice in od nje oddaljena 1.2 m. S kolikšnim nihajnim časom zaniha nihalo, če ga za malenkost izmaknemo iz ravnovesne lege? (1.86 s)

9. Kroglica s polmerom r se kotali brez podrsavanja v jami, ki ima obliko spodnje polovice krogle s polmerom R. Kolikšen je nihajni čas t_0 nihanja te kroglice okoli ravnovesne lege na dnu jame pri majhnih odmikih?



Slika 38:

Rešitev: Kroglica niha okoli osi, ki je vodoravna in pravokotna na zveznico med središčema velike krogle in majhne kroglice. (slika 38). Newtonov zakon za vrtenje kroglice okoli te osi zapišemo takole:

$$-(mg\sin\theta(R-r) - FR) = J\ddot{\theta}. \qquad (91)$$

Pri tem je R polmer velike krogle, r pa polmer male kroglice (slika 38), F je sila trenja med kroglico in podlago, J pa vztrajnostni moment kroglice glede na os vrtenja, ki gre skozi središče velike krogle. Ta vztrajnostni moment izračunamo s Steinerjevim izrekom:

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + m(R-r)^2 = m(R^2 - 2Rr + \frac{7}{5}r^2). \qquad (92)$$

Silo trenja F izračunamo iz zahteve, da kroglica ne podrsava. Newtonov zakon za težišče kroglice zapišemo takole:

$$mg\sin\theta - F = ma.$$

Pri tem je a pospešek težišča kroglice, ki je s kotnim pospeškom vrtenja kroglice okoli njene geometrijske osi α pvezan takole

$$a = \alpha r.$$

Newtonov zakon za vrtenje kroglice okoli njene geometrijske osi pri kotaljenju po dnu velike krogle pa je

$$Fr = \frac{2}{5}mr^2\alpha.$$

Iz teh treh enačb izrazimo pospešek težišča kroglice a in silo trenja F:

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta, \quad F = \frac{2}{7}mg\sin\theta. \qquad (93)$$

Enačbi (92) in (93) vstavimo v (91) in dobimo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g(\frac{5}{7}R - r)}{R^2 - 2Rr + \frac{7}{5}r^2}\sin\theta = 0.$$

Če pa je odmik θ dovolj majhen, pa približno velja:

$$\ddot{\theta} + \frac{g(\frac{5}{7}R - r)}{R^2 - 2Rr + \frac{7}{5}r^2}\theta = 0.$$

Nihajni čas t_0 je torej:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7(5R^2 - 10Rr + 7r^2)}{5g(5R - 7r)}}. \qquad (94)$$

Če pa je $R \gg r$ pa je nihajni čas približno

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}}.$$

Dodajmo še pripombo. Za pospešek težišča kroglice velja tudi zveza:

$$a = (R - r)\ddot{\theta}. \tag{95}$$

Pospešek težiča kroglice si lahko namreč mislimo kot tangencialni pospešek kroženja težišča po krogu s polmerom $R - r$. Iz enačb (93) in (95) pa sledi za nihajni čas:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}. \tag{96}$$

Za domačo nalogo primerjajte rezultata (94) in (96) in razmislite od kod pride razlika med njima! $(5R - 7r)(R - r) = 5R^2 - 12Rr + 7r^2$.

10. Tanek obroč polmera 0.3 m (R_1) je vrtljiv okoli osi, ki je vzporedna z geometrijsko osjo obroča in je od nje oddaljena 0.3 m. Na obroč je pritrjena krogla, ki ima enako maso, kot obroč ter polmer 0.1 m (R_2) tako, da je središče krogle oddaljeno v navpični smeri 0.6 m od osi vrtenja (slika 39). Kolikšen je nihajni čas (t_0) pri majhnih odmikih ($\varphi << 1$) od ravnovesja?

    Rešitev:
    Napišimo Newtonov zakon za vrtenje:

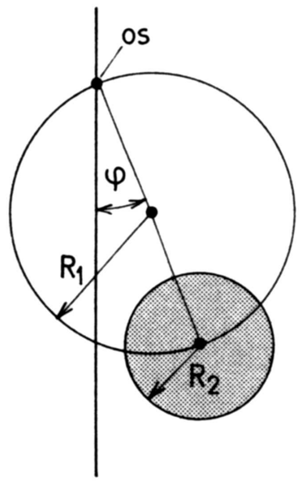
    $$M = J \cdot \alpha, \tag{97}$$

    kjer je α kotni pospešek, J vztrajnostni moment in M navor. Torej:

    $$-(mgR_1\varphi + mg2R_1\varphi) = (2mR_1^2 + \frac{2}{5}mR_2^2 + m(2R_1)^2)\alpha, \tag{98}$$

    kjer smo upoštevali $\sin\varphi \approx \varphi$, ker je $\varphi << 1$. Iz enačbe (98) sledi:

    $$\alpha = -\left[\frac{15gR_1}{30R_1^2 + 2R_2^2}\right]\varphi \tag{99}$$



Slika 39:

Enačba (99) je značilna za sučno sinusno nihanje [2,6]:

$$\alpha = -\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi. \qquad (100)$$

Iz primerjave med (99) in (100) dobimo končni rezultat:

$$t_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{30R_1^2 + 2R_2^2}{15gR_1}}.$$

11. Zelo lahka palica je na enem koncu pritrjena na vodoravno os. Na 1/4, 1/2, 3/4 dolžine palice, merjeno od osi, so pritrjene enake svinčene kroglice. Kolikšna je dolžina palice, če je nihajni čas tega nihala 1.5 s? Kolikšen je tangetni pospešek kroglice na polovici dolžine palice, ko gre le ta skozi svojo mirovno lego?

    Rešitev:
    Napišimo Newtonov zakon za vrtenje ($M = J\alpha$):

$$-mg(\frac{l}{4} + \frac{l}{2} + \frac{3l}{4})\varphi = m(\frac{l^2}{16} + \frac{l^2}{4} + \frac{9^2}{16})\alpha, \qquad (101)$$

kjer je α kotni pospešek, l dolžina palice in m masa posamezne kroglice. V enačbi (101) smo pri računanju navora upoštevali, da je odmik φ majhen, torej $\sin(\varphi) \approx \varphi$.
Enačbo (101) malo predelamo in dobimo:

$$\alpha = -\frac{g}{l}\frac{12}{7}\varphi. \tag{102}$$

Enačba (101) je značilna za sučno sinusno nihanje [2.6]:

$$\alpha = -\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi, \tag{103}$$

ki ima rešitev $\varphi = \varphi_0 \sin(\frac{2\pi}{t_0}t)$. Iz primerjave med (102) in (103) dobimo:

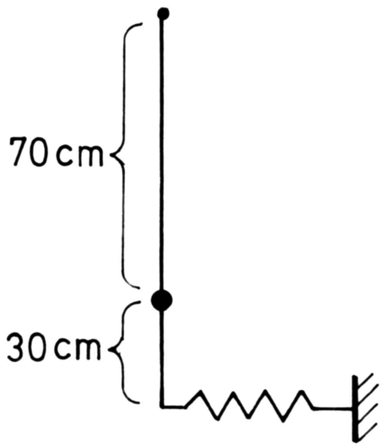
$$l = \frac{24}{14} g \frac{t_0^2}{4\pi^2} = 0.98 \text{ m}.$$

Ko gre kroglica pri $\frac{l}{2}$ skozi mirovno lego je $\varphi = 0$. Torej:

$$a_t = \frac{l}{2}\alpha = -\frac{l}{2}\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi = 0.$$

12. Ravna, tanka palica z dolžino 1 m in maso 1 kg je vrtljiva okoli vodoravne osi skozi njeno zgornje krajišče. Na spodnjem krajišču je pritrjena majhna utež z maso 0.6 kg. S kolikšnim nihajnim časom zaniha to nihalo, ko ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege?

13. Metrski drog z maso 1 kg je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo zgornje krajišče. V razdalji 70 cm od osi je na drog pritrjena majhna utež z maso 0.4 kg. Na spodnje krajišče droga pa je v pravokotni smeri pritrjena lahka vijačna vzmet s koeficientom 1 N/cm (slika 40). S kolikšnim nihajnim časom zaniha to nihalo, ko ga malo odmaknemo od ravnovesne lege?



Slika 40:

14. Metrski drog z maso 1 kg je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki je oddaljena 10 cm od njegovega zgornjega krajišča. V x od osi je na drog pritrjena majhna utež z maso 0.4 kg. Kolikšna mora biti razdalja x, da bo nihajni čas nihala najmanjši in kolikšen je ta nihajni čas?

15. Ravna, tanka, 70 cm dolga palica z maso 0.8 kg je vrtljiva okoli vodoravne osi skozi njeno zgornje krajišče. Na palici je pritrjena kroglica z maso 0.6 kg in polmerom 5 cm tako, da je težišče kroglice 55 cm oddaljeno od zgornjega krajišča palice in leži na palici. Kolikšen je nihajni čas tega nihala pri majhnih odmikih od ravnovesja?

16. Homogen valj z maso 3 kg in polmerom 10 cm je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki je vzporedna z geometrijsko osjo in od nje oddaljena 8 cm. S kolikšnim nihajnim časom zaniha ta valj, ko ga malo odmaknemo od ravnovesne lege? Kolikšna pa bi morala biti razdalja med osema, da bi bil nihajni čas najmanjši?

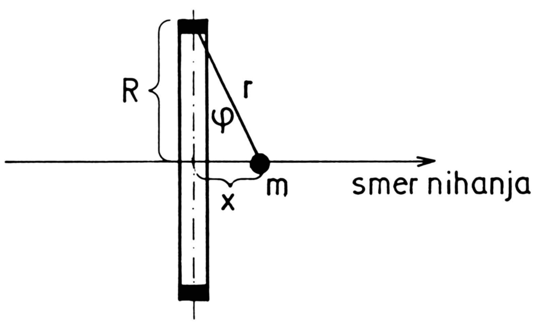
17. Tanka, ravna palica z dolžino 1 m je vrtljiva okoli vodoravne osi, ki gre skozi njeno zgornje krajišče in je pravokotna na

palico. Gostota palice na dolžinsko enoto, $\rho(x)$, se v odvisnosti od oddaljenosti od osi vrtenja, x, spreminja po enačbi: $\rho(x) = \rho_0(\frac{x^2}{a} + b)$, kjer je $\rho_0 = 1$ kg/m^2, $a = 20$ cm in $b = 50$ cm. S kolikšnim nihajnim časom zaniha ta palica, če jo malo izmaknemo iz ravnovesne lege?

18. Tanka, ravna palica z dolžino 1 m je vrtljiva okoli vodoravne osi, ki gre skozi njeno zgornje krajišče in je pravokotna na palico. Gostota palice na dolžinsko enoto, $\rho(x)$, se v odvisnosti od oddaljenosti od osi vrtenja, x, spreminja po enačbi: $\rho(x) = \rho_0(x + b)$, kjer je $\rho_0 = 1$ kg/m^2 in $b = 50$ cm. S kolikšnim nihajnim časom zaniha ta palica, če jo malo izmaknemo iz ravnovesne lege?

19. Tanek obroč mase $M = 2500$ kg in pomera $R = 5$ m lebdi v breztežnem prostoru. V smeri geometrijske osi obroča, ki je pravokotna na ravnino obroča, niha majhna kroglica, katere masa m je veliko manjša od mase obroča. Amplituda nihanja kroglice je veliko manjša od polmera obroča. Izračunajte nihajni čas t_0 kroglice!

Rešitev:
Komponenta sile majhnega dela obroča z maso dM na kroglico z maso m, ki vrača kroglico v ravnovesno lego v središču obroča, je (glejte sliko 41):



Slika 41:

$$dF = -\frac{GmdM}{r^2}\sin(\varphi).$$

Pri tem je r razdalja od kroglice do delčka obroča z maso dM. Celotno silo dobimo z integracijo dF po obroču:

$$F = -\frac{GmM}{r^2}\sin(\varphi).$$

Iz slike pa vidimo še:

$$\sin(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Pri tem je x odmik kroglice od ravnovesne lege, to je od središča obroča. Newtonov zakon za gibanje kroglice zapišemo potem takole:

$$F = -GMm\frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = m\ddot{x}.$$

Pri tem simbol $\ddot{x}$ pomeni drugi odvod x po času. Dobili smo diferencialno enačbo, katere rešitev je odmik x kot funkcija časa t; $x(t)$. Ker je enačba nelinearna, je ne znamo analitično rešiti. Ker pa je $x \ll R$, pa lahko zgornjo enačbo zapišemo približno kot

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x.$$

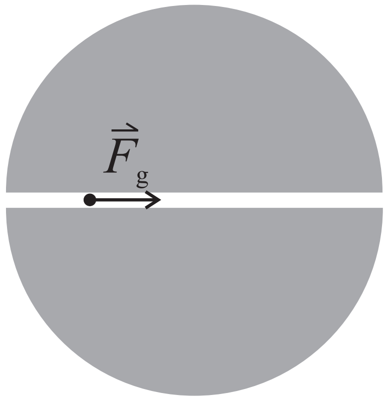
Torej je

$$\frac{GM}{R^3} = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2,$$

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx 47.8 \text{ ur}.$$

20. Raven tanek drog z dolžino 1 m je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo zgornje krajišče in je pravokotna na drog. Kolikšen bi bil pri majhnih odmikih od ravnovesja nihajni čas tega nihala na površini planeta, ki bi imel polmer 8000 km in maso 7×10^{25} kg?

21. Homogena krogla ima polmer 50 km in maso $4.2{\cdot}10^{18}$ kg ter miruje v breztežnem prostoru v vesolju. V smeri premera krogle je skoznjo izvrtan tanek, raven tunel. Majhno utež spustimo z enega konca krogle, da prosto pade skozi tunel. S kolikšnim nihajnim časom niha utež v tunelu? Kolikšna je hitrost uteži v središču krogle?



Slika 42: Gravitacijska sila, ki deluje na utež v notranjosti homogene krogle, ves čas kaže proti središču krogle in pada linearno z oddaljenostnjo od središča.

Rešitev:
V notranjosti homogene krogle pada gravitacijski pospešek linearno z oddaljenostnjo od središča (x) (glej sliko 42; zvezo lahko bralec izpelje sam ali pa pogleda v katerega izmed učbenikov, npr. Strnad J. (2002) Fizika (1. del)):

$$F_g = m_u g = -m_u G \frac{mx}{R^3} \, .$$

Po Newtonovem zakonu je $F_g = m_u \ddot{x}$. To lahko zapišemo v obliki

$$\ddot{x} = -\frac{Gm}{R^3} \, x \, .$$

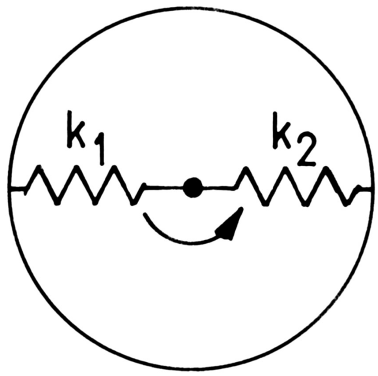
Enačbo primerjamo z diferencialno enačbo za sinusno nihanje:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \, x \, .$$

Uporabimo še, da je $t_0 = 2\pi/\omega_0$ in za nihajni čas nihanja uteži okoli središča krogle dobimo:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm}} = 4197\,\mathrm{s} \approx 1.16\,\mathrm{h}\,.$$

22. Med dve vzmeti enakih dolžin (l = 0.5 m) s konstantama k_1 = 90 N/m in k_2 = 30 N/m je pritrjena majhna utež z maso 0.3 kg. Vzmeti sta na obeh prostih koncih pritrjeni na rob okrogle plošče s premerom 1 m, ki se lahko vrti okoli svoje geometrijske osi (slika 43). Utež izmaknemo iz ravnovesne lege, potem pa začnemo vrteti ploščo okrog geometrijske osi. S kolikšno frekvenco se mora vrteti plošča, da bo utež nihala z dvojno frekvenco vrtenja plošče? Utež se giblje po plošči brez trenja. (1.42 s^{-1})



Slika 43:

Rešitev:
Na utež, ki jo malo izmaknemo iz ravnovesne lege, delujeta sili vzmeti in centrifugalna sila zaradi kroženja plošče. Zapišemo Newtonov zakon:

$$-k_1x - k_2x + m\omega^2 x = m\ddot{x}$$

ali drugače

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k_1 + k_2}{m} - \omega^2\right) x.$$

Krožna frekvenca nihanja je torej

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} - \omega^2.$$

Da bo frekvenca nihanja dvakrat večja kot frekvenca kroženja plošče, $\nu_0 = 2\nu$ ali drugače zapisano,

$$\omega_0^2 = 4\omega^2,$$

mora torej veljati

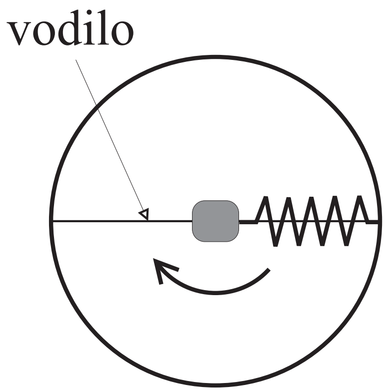
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{5m}} = 1.42\,\mathrm{s}^{-1}.$$

23. Okrogla plošča se vrti s frekvenco 2 obrata na sekundo. V središču plošče se nahaja majhna utež z maso 0.2 kg. Utež je pripeta na vijačno vzmet s koeficientom 50 N/m. Drugi konec vzmeti je pripet na rob plošče tako, da ima vzmet smer polmera plošče. Utež se lahko giblje samo v smeri premera plošče, za kar je poskrbljeno s posebnim vodilom (slika 44). S kolikšno frekvenco zaniha utež, če jo med vrtenjem plošče izmaknemo iz ravnovesne lege za 2 mm? Ravnovesna lega uteži je v središču plošče, utež se giblje po vodilu brez trenja.

Rešitev:
$\nu = 2\,\mathrm{s}^{-1}$
$m = 0.2\,\mathrm{kg}$
$k = 50\,\mathrm{N/m}$

Ko utež za x izmaknemo iz ravnovesne lege (torej iz središča plošče), nanjo deluje sila vzmeti $-kx$ in centrifugalna sila $m(2\pi\nu)^2 x$. Po Newtonovem zakonu velja

$$-kx + m(2\pi\nu)^2 x = m\ddot{x}.$$



Slika 44: Utež se lahko brez trenja premika po vodilu.

Enačbo preuredimo v obliko $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, kjer je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - (2\pi\nu)^2}.$$

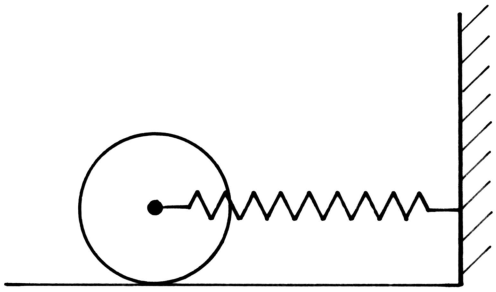
Frekvenca nihala je torej

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1.53\,\mathrm{s}^{-1}.$$

24. Utež visi na vijačni vzmeti ($k = 80$ N/m) in niha z nihajnim časom 2 s. Kakšno vijačno vzmet moramo zaporedno zvezati z obstoječo vzmetjo, da se bo nihajni čas povečal za 2 s?

25. Valj je pritrjen na lahko vijačno vzmet in se lahko kotali brez podrsavanja po vodoravni podlagi (slika 45). Koeficient vzmeti je 3 N/m. Valj izmaknemo za 0.25 m iz ravnovesne lege. Izračunajte frekvenco težišča valja, če je masa valja 1 kg, polmer osnovne ploskve valja pa 0.1 m.

26. V valju preseka 1 cm^2 je z batom mase 0.3 kg zaprt enoatomen plin s prostornino 2 dm^3. Bat in stene posode so toplotno izolirani. Bat se lahko giblje vzdolž geometrijske osi valja brez trenja. Zunanji tlak je 10^5 Pa. Kolikšen je nihajni čas bata pri majhnih odmikih? Valj je postavljen navpično.



Slika 45:

27. V valju preseka 1 cm^2 je z batom mase 0,4 kg zaprt zrak s prostornino 1 dm^3. Bat se lahko giblje vzdolž geometrijske osi valja brez trenja. Zunanji tlak je 10^5 Pa. Če je valj položen vodoravno je nihajni čas bata T_1, če ga izmaknemo iz ravnovesne lege. Če pa je valj položen navpično, je njegov nihajni čas T_2. Kolikšno je razmerje T_2/T_1? Bat in stene valja so popolnoma toplotno izolirane.

28. Nihalu, ki ima lastno krožno frekvenco 300 s^{-1} vsiljujemo nihanje s krožno frekvenco 320 s^{-1}. Amplituda nihala je 8 cm. Nato povečamo koeficient dušenja za 20 %. Sedaj je amplituda nihala 7.4 cm. Kolikšen je bil koeficient dušenja na začetku?

29. Na zelo lahki vijačni vzmeti ($k = 0.1$ N/m) visi utež z maso 0.12 kg. Utež začnemo poganjati s silo 2.5 N, ko gre le ta skozi ravnovesno lego. Čas delovanja sile je vsakič 0.001 s. Po katerem sunku je amplituda nihanja uteži 100 krat večja od amplitude po prvem sunku? Utež niha nedušeno. Odgovor argumentirajte z računom! (100)

30. Na vzmetno tehtnico spustimo žogo mase 1 kg z višine 2 m. Žoga odskoči do višine 0.8 m. Koliko največ pokaže tehtnica? Nihajni čas tehtnice je 1 s. (65 N)

31. Nihalo na vijačno vmet je sestavljeno iz uteži z maso 0.25 kg

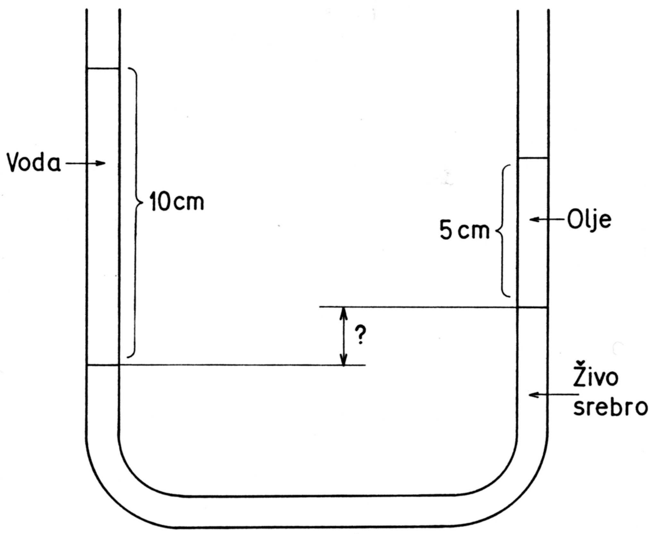
in vzmeti s koeficientom 25 N/cm. Nihalo odmaknemo za 10 cm od ravnovesne lege in spustimo, da zaniha. Čez 2 sekundi je amplituda nihanja nihala 6 cm. Kolikšna sta koeficient dušenja in nihajni čas tega nihala?

32. Nihalu, ki ima lastno krožno frekvenco $\omega_0 = 300$ s^{-1} in koeficient dušenja $\beta = 60$ $^{-1}$ vsiljujemo nihanje s krožno frekvenco $\omega_1 = 400$ s^{-1}. Nihalo niha z amplitudo $A_1 = 6$ cm. S kolikšno krožno frekvenco ω_m bi mu morali vsiljevati nihanje, da bi bila amplituda največja in kolikšna A_m bi bila ta amplituda?

7 Mehanika tekočin

1. V cevki oblike U je živo srebro z gostoto 13.6 g/cm^3. V levi krak cevke dolijemo 10 cm visok stolpec vode z gostoto 1 g/cm^3, v desni krak pa 5 cm visok stolpec olja z gostoto 0.8 g/cm^3. Kolikšna je višinska razlika gladin olja in vode v obeh krakih?

   Rešitev:
   Količine označimo na primer takole: gostota živega srebra je $\varrho_{Hg} = 13.6$ g/cm^3, gostota vode $\varrho_v = 1$ g/cm^3, višina vodnega stolpa $h_v = 10$ cm, višina stolpca olja h_o =5 cm, gostota olja pa je $\varrho_o = 0.8$g/cm^3 Ker je hidrostatični tlak v dveh krakih



Slika 46:

   enak, velja (glej sliko 46):

$$\varrho_v h_v g = g \varrho_{Hg} h_{Hg} + \varrho_o h_o g.$$

   Od tod dobimo:

$$h_{Hg} = \frac{\varrho_v h_v - \varrho_o h_o}{\varrho_{Hg}} = 0.44 \text{ cm}$$

$$\Delta h = h_v - h_o - h_{Hg} = 4.56\,\text{cm}.$$

2. V cevko oblike U nalijemo nekaj živega srebra. V levi krak nato nalijemo stolpec vode višine 10 cm. Kolikšen tlak moramo imeti v desnem kraku, da bo zgornja gladina živega srebra 5 cm višja od zgornje gladine vode? Tlak v levem kraku je 10^5 Pa, gostota živega srebra je 13.6 kg/l, gostota vode pa 1 kg/l.

   Rešitev:
   $p_0 = 10^5$ Pa
   $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13.6$ kg/dm^3
   $\rho_{\mathrm{v}} = 1$ kg/dm^3
   $h = 10$ cm
   $\Delta h = 5$ cm

   $p = ?$

   Na višini, kjer se olje stika z vodo, je na obeh staneh enak tlak, torej

   $$p_0 + \rho_{\mathrm{Hg}} g h = p + \rho_{\mathrm{v}} g \Delta h.$$

   Tlak v desnem kraku je tako

   $$p = p_0 + \rho_{\mathrm{Hg}} g h - \rho_{\mathrm{v}} g \Delta h.$$

   Številke vstavite sami.

3. Železna votla krogla tehta na zraku 270 N, v vodi pa 230 N. Kolikšna je prostornina votline? Gostota vode je 1000 kg/m^3, gostota železa pa je 7800 kg/m^3. (0.54 dm^3)

4. Ocenite, kolikšna sta gostota vode ϱ v oceanu in hidrostatiči tlak p v globini $x = 7000$ m! Na površini sta ti dve vrednosti $p_0 = 10^5$ Pa in $\varrho_0 = 1.025$ g/cm^3. Stisljivost vode je $\chi = 5 \cdot 10^{-10}$ m^2/N. Predpostavite, da se stisljivost vode z globino ne spreminja!

5. V cevko oblike U natočimo $m = 80$ g vode, ki ima gostoto $\varrho = 1$ g/cm^3. S kolikšnim nihajnim časom t_0 zaniha vodni stolpec, ko ga spravimo iz ravnovesja? Presek cevke je $S = 1$ cm^2.

6. Kocka z gostoto $\varrho_1 = 0.7$ g/cm^3 in stranico $a = 8$ cm plava v vodi z gostoto $\varrho_2 = 1$ g/cm^3. Kocko pritisnemo od zgoraj tako, da jo malo potopimo v vodo in spustimo, da zaniha. Kolikšen je nihajni čas t_0? Koliko dela moramo opraviti, da kocko od ravnovesne lege potopimo v vodo do takšne globine, da se zgornja ploskev kocke ujema z vodno gladino? Predpostavljamo, da je nivo vodne gladine ves čas konstanten.

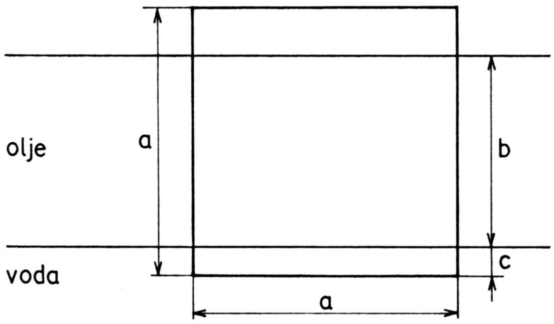
7. Predmet lebdi na meji dveh tekočin, ki se ne mešata. Gostota spodnje tekočine je 820 kg/m^3, gostota zgornje pa 658 kg/m^3. Del predmeta, ki je potopljen v zgornji tekočini, zavzema 43 % celotne prostornine predmeta. Kolikšna je gostota predmeta? (750 kg/m^3)

8. V severnem morju plava ledena gora z gostoto 0.9 g/cm^3. Prostornina dela ledene gore, ki je potopljen v vodi je 1545 m^3. Kolikšna je prostornina dela ledene gore, ki štrli iz vode? Gostota vode je 1.03 g/cm^3. (223 m^3)

9. Na vodi, ki ima gostoto 1 g/cm^3 plava 6 cm debela plast olja z gostoto 0.8 g/cm^3. V olju in vodi plava kocka s stranico 8 cm. Spodnja ploskev kocke je 0.4 cm pod vodno gladino. Kolikšna je gostota snovi, iz katere je kocka?

   Rešitev:
   Količine označimo takole: gostota vode je ϱ_v =1 g/cm^3, gostota olja $\varrho_o = 0.8$ g/cm^3, stranica kocke $a = 8$ cm, debelina olja $b = 6$ cm, globina kocke v vodi $c = 0.4$ cm, neznano gostoto kocke pa označimo z ϱ_k. Sila teže kocke je uravnovešena s silo vzgona. Sila vzgona pa je vsota dveh prispevkov: prispevka vzgona olja in prispevka vzgona vode:

$$\varrho_k a^3 g = \varrho_o a^2 b g + \varrho_v a^2 c g,$$



Slika 47:

$$\varrho_k = \frac{\varrho_o b + \varrho_v c}{a} = 0.65 \ \text{g/cm}^3.$$

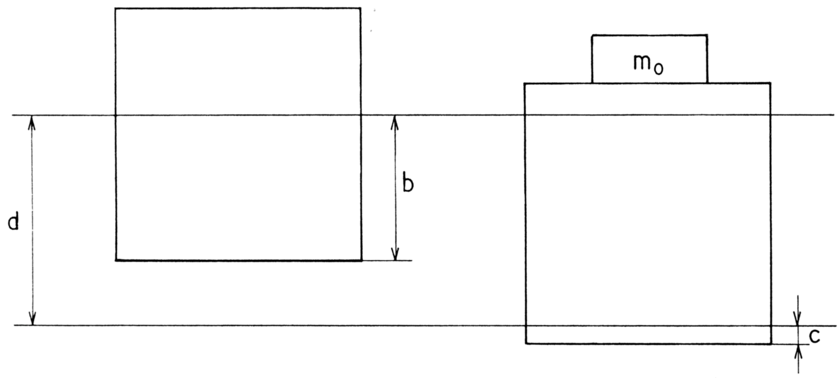
10. Na vodi, ki ima gostoto 1 g/cm^3 plava 6 cm debela plast olja. V olju plava kocka s stranico 8 cm. Spodnja ploskev kocke je 0.5 cm nad vodno gladino. Nato na zgornjo ploskev kocke položimo majhno utež z maso 70 gramov. Sedaj je spodnja ploskev kocke 0.7 cm pod vodno gladino. Kolikšna je gostota snovi, iz katere je kocka, in kolikšna je gostota olja, ki plava na vodi?

Rešitev:
Količine označimo takole: gostota vode: $\varrho_v = 1$ g/cm^3, masa uteži $m_0 = 70$ kg, debelina plasti olja: $d = 6$cm, stranica kocke: $a = 8$cm, globina spodnje ploskve kocke v olju: $b = 6$ cm - 0.5 cm = 5.5 cm, globina spodnje ploskve kocke v vodi: $c =$ 0.7 cm, gostota olja ϱ_o. V prvem primeru je sila teže kocke uravnovešena s silo vzgona (glejte sliko 48). Zato velja:

$$\varrho_k a^3 g = \varrho_o a^2 b \cdot g. \tag{104}$$

V drugem primeru je sila teže kocke + sila teže uteži enaka sili vzgona:

$$\varrho_k a^3 g + m_0 g = \varrho_v a^2 c g + \varrho_o a^2 d g. \tag{105}$$



Slika 48:

Iz enačbe (104) izrazimo ϱ_o in vstavimo v enačbo (105) ter dobimo gostoto kocke:

$$\varrho_k = \frac{b(\varrho_v a^2 c - m_0)}{a^3(b-d)} = 0.54 \ \mathrm{g/cm^3}$$

in nato še gostoto olja:

$$\varrho_o = \frac{\varrho_v a^2 c - m_0}{a^2(b-d)} = 0.79 \ \mathrm{g/cm^3}.$$

11. Zapestnica ima volumen 5 cm^3 in maso 80 g. Koliko je v zapestnici zlata in koliko bakra? Gostota zlata je 19.3 g/cm^3, gostota bakra 8.9 g/cm^3.

Rešitev:
Količine označimo takole: Masa zapestnice je $m_z = 80$g, volumen zapestnice $V_z = 5$ cm^3, gostota bakra $\varrho_{Cu} = 8.9$ g/cm^3, gostota zlata pa je $\varrho_{Au} = 19.3$ g/cm^3, neznana masa bakra je m_{Cu}, neznana masa zlata pa m_{Au}.
Masa zapestnice je vsota mas zlata in bakra:

$$m_z = m_{Cu} + m_{Au}. \tag{106}$$

Volumen zapestnice je vsota volumnov zlata in bakra. Ta dva izrazimo z gostotama in masama:

$$V_z = \frac{m_{Cu}}{\varrho_{Cu}} + \frac{m_{Au}}{\varrho_{Au}}. \tag{107}$$

Enačbi (106) in (107) sestavljata sistem dveh enačb z dvema neznankama. Rešitvi sta:

$$m_{Au} = \frac{\varrho_{Au}(\varrho_{Cu}V_z - m_z)}{\varrho_{Cu} - \varrho_{Au}} = 65.9 \text{ g}, \qquad \text{(masa zlata)},$$

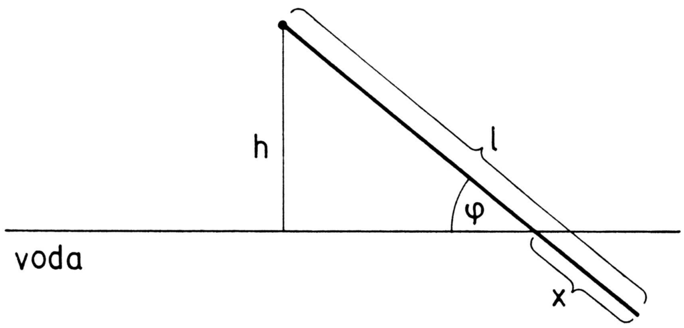
$$m_{Cu} = \frac{\varrho_{Cu}(m_z - \varrho_{Au}V_z)}{\varrho_{Cu} - \varrho_{Au}} = 14.1 \text{ g}, \qquad \text{(masa bakra)}.$$

12. Gostota tekočine v posodi je linearna funkcija razdalje od dna posode, gostota na dnu je 1.19 g/cm^3, na gladini pa je 10 % manjša. Razdalja od dna posode do gladine tekočine je 1m. Ocenite kolikšno delo je potrebno, da se predmet mase 0.01 kg in prostornine 5 cm vzdigne z dna posode na gladino! Zanemarite delo zaradi trenja upora tekočine! (4.3×10^{-2} J)

13. Tanek lesen drog z dolžino 1 m in gostoto 0.7 g/cm^3 je vrtljiv okoli vodoravne osi, ki gre skozi njegovo krajišče in je 30 cm nad vodno gladino. Kolikšen kot oklepa drog z vodno gladino v ravnovesju? Gostota vode je 1 g/cm^3.

    Rešitev:
    Količine označimo takole (glejte sliko 49): dolžina droga je l = 1 cm, gostota droga $\varrho_1 = 0.7$ g/cm^3, višina osi nad vodno gladino h = 30 cm, gostota vode $\varrho_0 = 1$ g/cm^3, neznana dolžina droga v vodi je x, neznani kot med drogom in vodno gladino pa φ.
    Ker drog miruje, je vsota sil na drog in vsota navorov na drog enaka 0. Glede sil vidimo, da je sila teže droga uravnovešena s silo vzgona in silo osi vrtenja, vendar nam ta ugotovitev ne da nobene enačbe, ki bi nam pomagala rešiti nalogo. Ker je pa tudi vsota navorov glede na os vrtenja enaka nič, dobimo enačbo:

$$\varrho_1 l S g \frac{l}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \varrho_0 x S g \left(l - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0.$$



Slika 49:

Prvi člen predstavlja navor sile teže droga, drugi člen pa navor sile vzgona, pri čemer je S presek droga. Po preureditvi gornje enačbe dobimo kvadratno enačbo za x:

$$\varrho_0 x^2 - 2\varrho_0 l x + \varrho_1 l^2 = 0,$$

z rešitvama

$$x = l(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0}}).$$

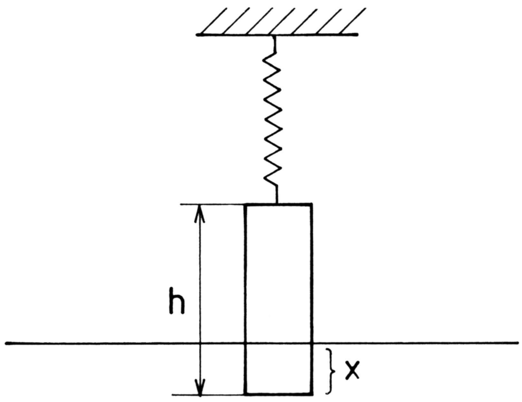
Fizikalno smiselna je rešitev z negativnim znakom. Od tod sledi:

$$\sin\varphi = \frac{h}{l-x} = \frac{h}{l\sqrt{1-\frac{\varrho_1}{\varrho_0}}} = 0.55 \Longrightarrow \varphi = 33.2°.$$

14. Na krajišče 20 cm dolge vijačne vzmeti s koeficientom 14 N/m pritrdimo 25 cm dolg aluminijast valj s premerom 2 cm in gostoto 2.7 g/cm^3. Prosto krajišče vzmeti pritrdimo 45 cm nad vodno gladino. Kolikšna je prostornina potopljenega dela valja v ravnovesni legi? Gostota vode je 1 g/cm^3.

    Rešitev:
    Količine označimo takole (glejte tudi sliko 50): dolžina neraztegnjene vzmeti je $l = 20$ cm, koeficient vzmeti $k = 14$ N/m,

višina valja $h = 25$ cm, polmer valja $r = 1$ cm, gostota aluminija $\varrho_{Al} = 2.7$ g/cm^3, gostota vode $\varrho_v = 1$ g/cm^3, neznana globina potopljenega dela valja pa x.



Slika 50:

Sila teže valja je uravnovešena s silo vzgona vode in silo vzmeti. Ker je višina pritrdišča vzmeti nad vodno gladino enaka vsoti višine valja in dolžine neraztegnjene vzmeti, je podaljšek vzmeti enak globini potopljenega dela valja:

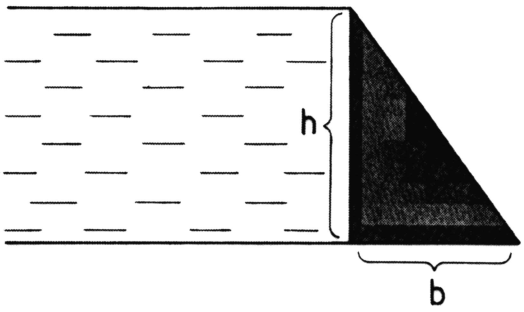
$$\varrho_{Al}\pi r^2 hg = \varrho_v \pi r^2 xg + kx$$

$$x = \frac{\varrho_{Al}\pi r^2 hg}{\varrho_v \pi r^2 g + k} = 12.2 \text{ cm}.$$

Volumen potopljenega dela valja je:

$$V = \pi r^2 x = \frac{\varrho_{Al}\pi^2 r^4 hg}{\varrho_v \pi r^2 g + k} = 38.3 \text{ cm}^3.$$

15. Navpičen jez ima obliko navpične tristrane prizme s katetama $b = 5$ m in h (slika 51) in je do vrha poln vode. Kolikšna je kateta h, če je navor teže jezu M_g trikrat večji od navora tlaka vode M_v. Gostota vode je $\varrho_1 = 1$ g/cm^3, gostota betona, iz katerega je jez, je $\varrho_2 = 2.7$ g/cm^3.



Slika 51:

16. Pokončna posoda je do višine 30 cm napolnjena z vodo. Na kolikšni višini moramo zvrtati luknjico s presekom 4 mm^2 v steno posode, da bo prostorninski pretok izstopajočega curka vode enak 6.9×10^{-6} m^3/s?

17. Jez umetnega jezera je do višine 20 m napolnjen z vodo. S kolikšno hitrostjo bi tekla voda skozi luknjo, ki bi jo izvrtali v jez na višini 5 m?

    Rešitev:
    Oznake količin so naslednje: višina vode v jezu je $h_1 = 20$ m, višina luknje pa $h_2 = 5$ m.
    Predpostavimo, da velja Bernoullijeva enačba. V našem primeru jo napišemo takole:

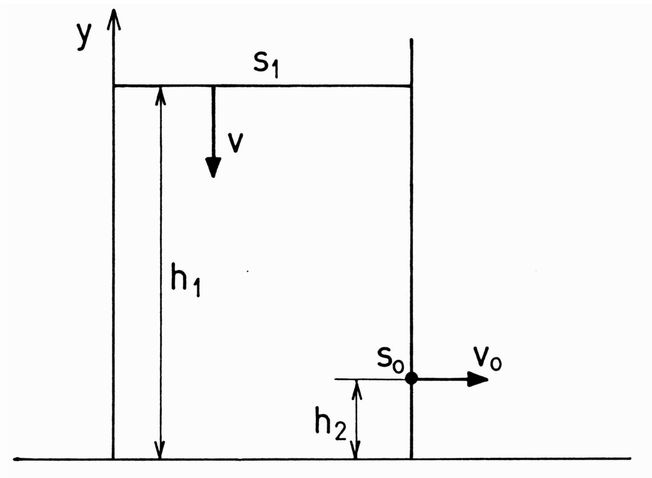
    $$\varrho g h_1 = \varrho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\varrho v^2,$$

    kjer je ϱ gostota vode, v pa neznana hitrost vodnega toka skozi luknjo v jezu. Predpostavili smo, da je volumski pretok vode, ki izteka skozi luknjo v jezu tako majhen, da se gladina vode v jezu znižuje z zanemarljivo majhno hitrostjo. Hitrost iztekanja vode je potem

    $$v = \sqrt{g(h_1 - h_2)} = 12.1 \text{ m/s}.$$

18. Pokončna posoda s prečnim presekom 600 cm^2 je do višine 2 m napolnjena z vodo. V stransko steno posode v višini 80 cm izvrtamo luknjico tako, da ima iztekajoči curek presek 1 cm^2. Po kolikšnem času se gladina vode v posodi zniža na 1 m? Uporabite Bernoullijevo enačbo!

Rešitev:
Količine označimo takole (glejte sliko 52): Presek posode je $S_1 = 600$ cm^2, presek luknjice $S_0 = 1$ cm^2, začetna višina vode $h_1 = 2$ m, končna višina vode $h_3 = 1$ m, višina luknjice pa h_2 = 0.8m.



Slika 52:

Veljata kontinuitetna in Bernoullijeva enačba:

$$S_1 v = S_0 v_0, \tag{108}$$

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \frac{1}{2}\varrho v_0^2 + \varrho g h_2. \tag{109}$$

Pri tem je ϱ gostota vode, y pa trenutna višina vodne gladine. Iz enačbe (108) izrazimo v_0 in vstavimo v enačbo (109) ter izrazimo hitrost zniževanja vodne gladine v:

$$v = \sqrt{\frac{2gS_0^2(h_2 - y)}{S_0^2 - S_1^2}}.$$

Če upoštevamo še definicijo hitrosti zniževanja vodne gladine $v = -\frac{dy}{dt}$, dobimo:

$$-\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2gS_0^2(h_2 - y)}{S_0^2 - S_1^2}},$$

$$dt = -\frac{dy}{\sqrt{\frac{2gS_0^2(h_2-y)}{S_0^2-S_1^2}}}.$$

Na levi strani enačbe integriramo od 0 do iskanega časa t, na desni pa od začetne višine h_1 do končne višine h_3.

$$t = -\int_{h_1}^{h_3} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2gS_0^2(y-h_2)}{S_1^2-S_0^2}}}$$

V izrazu pod korenom smo produkt dveh negativnih faktorjev spremenili v produkt dveh pozitivnih faktorjev. Po integraciji dobimo:

$$t = \sqrt{\frac{2(S_1^2 - S_0^2)}{gS_0^2}}[\sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_3 - h_2}] = 175.6 \text{ s}.$$

19. Posoda višine 20 cm je polna vode. Na dnu posode je vdelana vodoravno ležeča tanka cevka dolžine 10 cm in površine preseka 5 mm^2. V posodo dotakamo vodo tako, da je ves čas polna. Izračunajte prostorninski pretok iztekajoče vode? Viskoznost vode je 0.001 kg/ms. (2×10^{-5} m^3/s)

20. Prostorninski tok viskozne tekočine skozi kapilaro podaja Poiseuilleov zakon:

$$\Phi_V = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l},$$

kjer je Δp tlačna razlika med koncema kapilare, r polmer kapilare, η viskoznost tekočine in l dolžina kapilare. Za koliko procentov se spremeni tok skozi kapilaro, če se polmer kapilare zmanjša za 1 %?

21. Pokončna posoda s prečnim presekom 600 cm^2 je do višine 1 m napolnjena z vodo, ki ima gostoto 1 $\mathrm{g/cm}^3$ in viskoznost 10^{-3} kg/ms. Pri dnu posode skozi stransko steno posode v vodoravni smeri porinemo cevko z dolžino 15 cm in polmerom 0.7 mm. Po kolikšnem času se gladina vode v posodi zniža za 60 cm? Predpostavite, da za pretok vode skozi cevko velja Poiseuilleov zakon!

22. Kroglica s polmerom $r = 0.8$ mm in gostoto $\rho_1 = 19.3\ \mathrm{g/mm}^3$, pada v tekočini z gostoto $\rho = 0.8\ \mathrm{g/cm}^3$ s konstatno hitrostjo $v_1 = 1.1$ mm/s. S kolikšno hitrostjo bi v tej tekočini padala kroglica z gostoto $\rho_2 = 8.9\ \mathrm{g/cm}^3$ in enakim polmerom? Za obe kroglici velja linearni zakon upora.

    Rešitev
    Ko se vzpostavi ravnovesje, je vsota vseh sil, ki delujejo na kroglico (te so: sila teže, sila vzgona in sila upora - glej sliko 53), enaka nič. Potem lahko zapišemo:

$$\rho_1 V g - \rho V g - 6\pi r \eta v_1 = 0,$$

$$\rho_2 V g - \rho V g - 6\pi r \eta v_2 = 0.$$

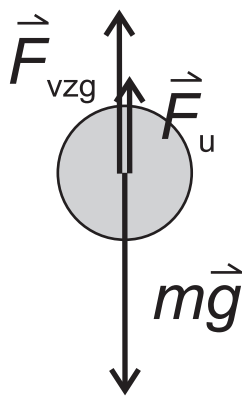
    Najhitreje pridemo do rešitve, če enačbi zapišemo v obliki:

$$(\rho_1 - \rho) V g = 6\pi r \eta v_1,$$

$$(\rho_2 - \rho) V g = 6\pi r \eta v_2$$

    in eno enačbo delimo z drugo. Hitrost druge kroglice je potem:

$$v_2 = v_1 \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_1 - \rho}.$$



Slika 53: Sile na kroglico v viskozni tekočini. Hitrost padanja kroglice narašča in s tem se veča sila upora, dokler se ne vzpostavi ravnovesje. Takrat je sila upora takšna, da je vsota vseh sil enaka nič.

23. Kroglica s polmerom 1.5 mm in maso 6 mg pada s hitrostjo 4 mm/s v tekočini z viskoznostjo 8×10^{-2} kg/ms. Enako velika kroglica z maso 4.5 mg pa se v tej tekočini dviga. Kolikšna je hitrost te kroglice in kolikšna je gostota tekočine? Predpostavite, da za obe kroglici velja linearni zakon upora!

24. Kroglica s polmerom 0.1 mm in gostoto 2.6 g/cm^3 pade s hitrostjo 15 mm/s pravokotno na gladino. Gostota tekočine je 1.2 g/cm^3, viskoznost pa 6×10^{-2} Pas. Ocenite, kolikšna bo hitrost kroglice 0.12 s po padcu v tekočino in kako globoko se potopi v tem času! Predpostavite, da za kroglico velja linearni zakon upora!

    Rešitev:
    Količine označimo takole: polmer kroglice r = 0.1 mm, gostota kroglice ϱ_1 = 2.6 g/m^3, gostota tekočine ϱ_2 =1.2 g/cm^3, viskoznost tekočine η = 0.06 Pas, čas t = 0.12 s, hitrost kroglice ob padcu v tekočino v_0 = 15 mm/s.

Zapišemo Newtonov zakon za kroglico:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g - 6\pi r\eta v = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 \frac{dv}{dt}.$$

To je diferencialna enačba, katere rešitev je hitrost kot funkcija časa. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{2r^2\varrho_1 dv}{2r^2 g(\varrho_1 - \varrho_2) - 9\eta v}.$$

Po integraciji dobimo:

$$t = -\frac{2r^2\varrho_1}{9\eta} \cdot \ln \frac{2r^2 g(\varrho 1 - \varrho_2) - 9\eta v}{2r^2 g(\varrho 1 - \varrho_2) - 9\eta v_0}.$$

Od tod izrazimo hitrost:

$$v = \frac{2r^2 g(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} \cdot \left(1 - e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}}\right) + v_0 e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}}.$$

Po $t = 0.12$ s, je hitrost $v = 0.51$ mm/s. Sedaj ocenimo še globino s, do katere se kroglica potopi v tem času. Ta globina je podana z izrazom:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v(t)dt = \frac{2r^2 g(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} = \\ &= \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}}\right) dt + v_0 \int_0^t e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}} dt. \end{aligned}$$

Po integraciji dobimo:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2r^2 g}{9\eta} \Bigg[(\varrho_1 \varrho_2) t \\ &- \frac{2r^2}{9\eta} \varrho_1 (\varrho_1 - \varrho_2) \left(1 - e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}}\right) + \frac{v_0 \varrho_1}{g} \left(1 - e^{-\frac{9\eta t}{2r^2\varrho_1}}\right) \Bigg]. \end{aligned}$$

Globina, do katere se kroglica potopi v 0.12 s je $s = 6.2 \cdot 10^{-5}$ m.

25. Aluminijasta kroglica polmera $r = 1$ cm pade z višine $h = 1$ m v viskozno tekočino z viskoznostjo ($\eta = 0.005$ Pas). Ocenite, kolikšna bo hitrost kroglice (v) v stacionarnem stanju! Ugotovite, ali velja linearni ali kvadratni zakon upora! Izračunajte, do katere globine se kroglica potopi v prvih 2 s po padcu v tekočino! Gostota aluminija je $\varrho_1 = 2.7$ g/cm^3, gostota tekočine je $\varrho_2 = 1.2$ g/cm^3, geometrijski koeficient upora za kroglico je $C = 0.4$.

Rešitev:
Ker vnaprej ne vemo, kateri zakon upora je potrebno upoštevati, se reševanja naloge lotimo kar s poskušanjem. Najprej vzamemo linearni zakon upora:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \varrho_1 g - \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \varrho_2 g - 6\pi r \eta v = 0.$$

Od tod dobimo hitrost kroglice:

$$v = \frac{2r^2 g(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} = 65.4 \text{ m/s}.$$

Nato poskusimo še s kvadratnim zakonom:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g - \frac{1}{2}\varrho_2 v^2 \pi r^2 C = 0.$$

Od tod dobimo hitrost:

$$v = \sqrt{\frac{8rg(\varrho_1 - \varrho_2)}{3\varrho_2 c}} = 0.9 \text{ m/s}.$$

Že iz primerjave obeh rezultatov je jasno, da je potrebno upoštevati kvadratni zakon upora. O tem se prepričamo z Reynoldsovim številom (Re).

$$Re = \frac{2r\varrho_2 v}{\eta} = 4320.$$

Globina s, do katere se kroglica potopi v prvih dveh sekundah ($t = 2$ s) po padcu v tekočino je podana z izrazom:

$$s = \int_0^t v(t)dt.$$

To pomeni, da moramo najprej ugotoviti odvisnost hitrosti kroglice od časa $v(t)$. Zapišemo Newtonov za kroglico:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\varrho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3\varrho_2 g - \frac{1}{2}\varrho_2 v^2\pi r^2 C = \frac{4}{3}\pi r^3\varrho_1\frac{dv}{dt}.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\int_0^t dt = 8r\varrho_1\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{8rg(\varrho_1-\varrho_2)-3\varrho_2 C v^2},$$

kjer je v_0 hitrost kroglice ob padcu v tekočino; $v_0 = \sqrt{2gh} = 4.43$ m/s. Po integraciji dobimo:

$$t = \frac{2r\varrho_1}{\sqrt{6rg\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)C}}\cdot$$

$$\cdot\ln\frac{(\sqrt{8rg(\varrho_1-\varrho_2)}+v\sqrt{3\varrho_2 C})(\sqrt{8rg(\varrho_1-\varrho_2)}-v_0\sqrt{3\varrho_2 C})}{(\sqrt{8rg(\varrho_1-\varrho_2)}-v\sqrt{3\varrho_2 C})(\sqrt{8rg(\varrho_1-\varrho_2)}+v_0\sqrt{3\varrho_2 C})}.$$

Od tod izrazimo hitrost $v(t)$, kot funkcijo časa:

$$v(t) = \frac{b^2(e^{\frac{t}{\tau}}-1)+bcv_0(e^{\frac{t}{\tau}}+1)}{c^2v_0(e^{\frac{t}{\tau}}-1)+bc(e^{\frac{t}{\tau}}+1)},$$

kjer je
$\tau = \frac{2r\varrho_1}{\sqrt{6rgC\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)}} = 0.083$ s;
$b = \sqrt{8rg(\varrho_1-\varrho_2)} = 34.3\sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}}$;
$c = \sqrt{3\varrho_2 C} = 37.95\sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$.
Globina s, do katere se kroglica potopi v času $t = 2$ s je:

$$s = \int_0^t \frac{b^2(e^{\frac{t}{\tau}}-1)+bcv_0(e^{\frac{t}{\tau}}+1)}{c^2v_0(e^{\frac{t}{\tau}}-1)+bc(e^{\frac{t}{\tau}}+1)}dt =$$

$$= \frac{1}{c^2(cv_0-b)(cv_0+b)}\Bigg[bct(b-cv_0)(b+cv_0)+2\tau bc(c^2v_0^2-b^2)\cdot$$

$$\cdot\ln\Big(\frac{e^{\frac{t}{\tau}}(cv_0+b)-cv_0+b}{2b}\Big)\Bigg] = 1.97\ \text{m}.$$

26. Kroglica s polmerom $r = 1$ cm pada v vodi z gostoto $\varrho_2 = 1$ g/cm^3 s konstantno hitrostjo $v = 0.93$ m/s. Kolikšna je gostota (ϱ_1) kroglice? Predpostavite, da velja kvadratni zakon upora! Koeficient upora za kroglo je $C = 0.4$.

    Rešitev:
    Zapišemo vsoto sil na kroglico, ki je enaka nič, ker se kroglica giblje s konstantno hitrostjo:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g - \frac{1}{2}\pi r^2 C \varrho_2 v^2 = 0.$$

    Od tod izrazimo iskano gostoto kroglice:

$$\varrho_1 = \varrho_2 \left(1 + \frac{3Cv^2}{8rg}\right) = 2322 \ \text{kg/m}^3.$$

27. Okrogel kamen s polmerom 1 cm in gostoto 2.7 g/cm^3 pada s konstantno hitrostjo v vodi z gostoto 1 g/cm^3. Za kamen velja kvadratni zakon upora, koeficient upora pa je enak 0.4. Kolikšna je hitrost kamna?

28. V neki tekočini pada kroglica z maso $m_1 = 5.3$ mg in polmerom $r = 0.8$ mm s konstantno hitrostjo $v_1 = 2$ mm/s. Druga kroglica z maso $m_2 = 4.6$ mg in enakim polmerom pa se v tej tekočini dviga s konstantno hitrostjo $V_2 = 1$ mm/s. Kolikšni sta gostota (ϱ) in viskoznost (η) te tekočine? Za obe kroglici velja linearni zakon upora.

    Rešitev:
    Zapišemo izraza za vsoto sil na vsako od obeh kroglic. Pri tem upoštevamo, da ima pri prvi kroglici, ki se spušča, sila upora nasprotno smer, kot sila teže. Pri drugi kroglici, ki se dviga, pa ima sila upora isto smer kot sila teže.

$$m_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g - 6\pi r \eta v_1 = 0$$

$$m_2 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g + 6\pi r \eta v_2 = 0$$

Najprej odštejemo drugo enačbo od prve, da izločimo neznano gostoto tekočine ϱ. Dobimo:

$$g(m_1 - m_2) - 6\pi r\eta(v_1 + v_2) = 0,$$

$$\eta = \frac{g(m_1 - m_2)}{6\pi r(v_1 + v_2)} = 0.152 \text{ Pas}.$$

Nato drugo enačbo pomnožimo s faktorjem $\frac{v_1}{v_2}$ in enačbi seštejemo. Dobimo:

$$\left(m_1 + m_2\frac{v_1}{v_2}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3\varrho\left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) = 0,$$

$$\varrho = \frac{3(m_1v_2 + m_2v_1)}{4\pi r^3(v_1 + v_2)} = 2.4 \text{ g/cm}^3.$$

29. Kroglica iz zlata z gostoto $\varrho_1 = 19.3$ g/cm^3 in polmerom $r_1 = 0.8$ mm pada v neki tekočini s konstantno hitrostjo $v_1 = 3.5$ mm/s. Druga kroglica iz bakra z gostoto $\varrho_2 = 8.9$ g/cm^3 in polmerom $r_2 = 0.7$ mm pa v isti tekočini pada s konstantno hitrostjo $v_2 = 1.1$ mm/s. Kolikšni sta gostota (ϱ) in viskoznost (η) te tekočine? Za obe kroglici velja linearni zakon upora.

Rešitev:
Zapišemo izraza za vsoto sil na obe kroglici:

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho_1 g - \frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho g - 6\pi r_1\eta v_1 = 0,$$

$$\frac{4}{3}\pi r_2^3\varrho_2 g - \frac{4}{3}\pi r_2^3\varrho g - 6\pi r_2\eta v_2 = 0.$$

Najprej drugo enačbo pomnožimo z r_1^2/r_2^2 in odštejemo drugo enačbo od prve. Tako izločimo neznano gostoto tekočine ϱ. Dobimo:

$$2r_1^2 g(\varrho_1 - \varrho_2) - 9\eta\left(v_1 - v_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 0,$$

$$\eta = \frac{2r_1^2r_2^2 g(\varrho_1 - \varrho_2)}{9(v_1r_2^2 - v_2r_1^2)} = 7 \text{ Pas}.$$

Nato drugo enačbo množimo z v_1/v_2 in zopet odštejemo drugo enačbo od prve. Na ta način se znebimo viskoznosti tekočine η. Dobimo:

$$\left(r_1^2\varrho_1 - r_2^2\varrho_2\frac{v_1}{v_2}\right) - \varrho\left(r_1^2 - r_2^2\frac{v_1}{v_2}\right) = 0,$$

$$\varrho = \frac{r_1^2\varrho_1 v_2 - r_2^2\varrho_2 v_1}{r_1^2 v_2 - r_2^2 v_1} = 1.7\ \text{g/cm}^3.$$

30. Kroglica iz zlata s polmerom 0.8 mm in gostoto 19.3 g/cm^3 pada v olju z gostoto 0.8 g/cm^3 s konstantno hitrostjo 1.4 mm/s. S kolikšno hitrostjo bi v tem olju padala kroglica iz bakra z gostoto 8.9 g/cm^3 in polmerom 0.7 mm? Za obe kroglici velja linearni zakon upora.

31. V olju z gostoto 0.8 g/cm^3 in viskoznostjo 0.1 Ns/m^2 pada kroglica s polmerom 0.8 mm s konstatno hitrostjo 1.4 mm/s. Kolikšna je gostota snovi iz katere je kroglica? Predpostavite, da velja linearni zakon upora!

32. Kolikšen je premer kroglice z gostoto 1.05×10^3 kg/m^3, ki se v tekočini z gostoto 1000 kg/m^3 in viskoznostjo 1.5×10^{-3} kg/(ms) potopi za 10 cm v enem dnevu? Kroglica doseže ravnovesno hitrost v zanemarljivo kratkem času. (8 μm)

33. Avtomobil vozi navzgor po klancu z nagibom $\varphi = 10^o$ s konstantno hitrostjo $v = 20$ m/s. Koeficient trenja med avtomobilom in podlago je $k = 0.2$, sprednji presek avtomobila meri $S = 2$ m^2, koeficient upora je $C = 0.4$, gostota zraka je $\varrho = 1.2$ kg/m^3. Moč motorja v avtomobilu je $P = 65$ kW. Kolikšna je masa (m) tega avtomobila, če velja kvadratni zakon zračnega upora?

    Rešitev:
    Delo A, ki ga opravi motor avtomobila, se porabi za premagovanje sil, ki avtomobil zavirajo. Te sile so: dinamična komponenta sile teže F_d, sila trenja F_t in sila upora F_u. Te

sile opravljajo delo na poti s, ki jo prevozi avtomobil navzgor po klancu. Torej:

$$A = (F_d + F_t + F_u)s.$$

To enačbo enkrat odvajamo po času:

$$P = (F_d + F_t + F_u)v,$$

pri tem je $v = \frac{ds}{dt}$, hitrost avtomobila in $P = \frac{dA}{dt}$ moč motorja. V zgornjem izrazu zapišemo izraze za sile,

$$P = \left[mg(\sin\varphi + k\cos\varphi) + \frac{1}{2}\varrho v^2 SC\right]v.$$

Masa avtomobila je potem:

$$m = \frac{2P - \varrho v^3 SC}{2gv(\sin\varphi + k\cos\varphi)} = 841\ \text{kg}.$$

8 Valovanje, akustika

1. Kovinska struna napravi 284 nihajev na sekundo. Izračunaj valovno dolžino zvoka, ki ga oddaja struna pri temperaturi zraka 25 °C. Hitrost zvoka pri temperaturi 273 °K je 331 m/s. (1.22 m)

2. Železna in srebrna struna, ki imata isti premer in dolžino, sta napeti z enako silo. Kolikšna je osnovna frekvenca nihanja srebrne strune, če je osnovna frekvenca nihanja železne strune 200 s^{-1}? Gostota železa je 7.8 kg/dm^3, gostota srebra pa 10.6 kg/dm^3. (171.6 s^{-1})

3. Glasbeni instrument ima srebrno struno s presekom $S = 0.5$ mm^2 in dolzino $l = 1$ m napeto s silo $F = 100$ N. Struna zazveni z osnovno frekvenco. Kolikšna je valovna dolžina tega zvoka v zraku in kolikšna bi bila v vodiku pri istem tlaku in temperaturi. Gostota srebra je $\rho = 10.6$ kg/dm^3, hitrost zvoka v zraku je $c_z = 340$ m/s, kilomolska masa za zrak je $M_z = 29$ kg/kmol in za vodik $M_{H_2} = 2$ kg/kmol.

   Rešitev:
   Pri osnovni frekvenci nihanja strune je valovna dolžina nihanja strune $\lambda = 2l$ (slika 54). Hitrost potovanja motnje po struni je

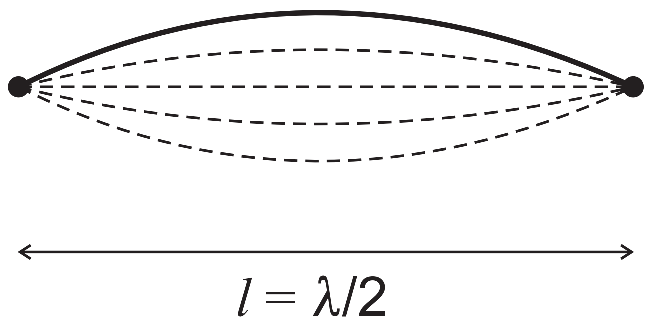
   $$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}.$$

   Frekvenca nihanja strune je tako

   $$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}.$$

   Struna torej v zraku vzbuja valovanje s frekvenco ν. Valovna dolžina zvoka v zraku je potem

   $$\lambda_z = \frac{c_z}{\nu} = 2lc_z\sqrt{\frac{\rho S}{F}} = 4.95\,\mathrm{m}\,.$$



Slika 54: Lastno nihanje strune z osnovno lastno frekvenco pri vpetih krajiščih.

Sedaj izračunajmo še valovno dolžino zvoka v vodiku (H_2). Frekvenca nihanja strune ostane ista, spremeni se pa hitrost širjenja valovanja (zvoka). Hitrost valovanja v plinu je

$$c^2 = \frac{\kappa p}{\rho} = \frac{\kappa RT}{M}.$$

Pri tem smo uporabili plinsko enačbo v obliki $p/\rho = RT/M$. Razmerje specifičnih toplot je za idealni dvoatomni plin $\kappa = \frac{7}{5}\frac{R}{M}$. Če obravnavamo zrak in vodik kot idealna dvoatomna plina, dobimo za hitrost valovanja v vodiku zvezo:

$$c_{H_2} = c_z \sqrt{\frac{M_z}{M_{H_2}}}.$$

Valovna dolžina zvoka v vodiku je torej

$$\lambda_{H_2} = \frac{c_{H_2}}{\nu} = \frac{c_z}{\nu}\sqrt{\frac{M_z}{M_{H_2}}} = \lambda_z \sqrt{\frac{M_z}{M_{H_2}}} = 18.9\,\mathrm{m}\,.$$

4. Kovinska palica dolžine 1 m je vpeta na sredini. Kakšne so tri najnižje frekvence transverzalnega valovanja, ki jih lahko vzbudimo v palici, če je hitrost širjenja motnje v palici enaka 3500 m/s? ($\nu_1 = 1750$ s^{-1}, $\nu_2 = 3500$ s^{-1}, $\nu_3 = 5250$ s^{-1})

5. Violinska struna je dolga 50 cm. Struna sama ustvari ton A (440 Hz). Za koliko moramo skrajšati struno (s pritiskom na struno), da zaigramo ton C (528 Hz)? (8.33 cm)

6. Za koliko odstotkov se spremeni osnovna lastna frekvenca strune, ki je vpeta na obeh krajiščih, če silo, ki napenja struno, povečamo za 1.6 odstotka? Se frekvenca poveča ali zmanjša?

7. Dolgo struno preseka 2 mm^2 in gostote 7000 kg/m^3, ki je napeta s silo 100 N, vzbujamo na njenem začetku s frekvenco 60 s^{-1} tako, da je amplituda odmika strune 3 mm. Kolikšna je povprečna gostota energijskega toka transverzalnega vala, ki se širi po struni?

8. Izvor valovanja oddaja ravne valove, ki se širijo v smeri osi x s fazno hitrostjo 25 m/s in imajo frekvenco 40 Hz ter amplitudo 12 cm. Kolikšen je 0.5 s po začetku oddajanja valovanja odmik v točki, ki je 12 m oddaljena od izvira valovanja? Čas začnemo šteti v trenutku, ko izvor začne oddajati valove in takrat je odmik enak 0.

9. Izvor valovanja oddaja ravne valove, ki se širijo v smeri osi x s fazno hitrostjo 32 m/s in imajo frekvenco 48 Hz. Kolikšna je fazna razlika med točkama na osi x, ki sta 11 m in 12.8 m oddaljeni od izvora valovanja?

10. Dve anteni, ki sta oddaljeni 100 m, v fazi oddajata radijske valove z valovno dolžino 200 m. Intenziteti emisije obeh anten sta enaki v vodoravni smeri. V kateri smeri (v vodoravni ravnini) glede na simetralo med obema antenama je skupno žarčenje obeh anten maksimalno in v kateri smeri minimalno? (0, $\pi/2$)

11. Dva točkasta zvočnika sta v razmiku 1 m in oddajata zvok s frekvenco 5000 Hz. Poišči tri največje kote glede na simetralo zveznice med zvočnikoma, pod katerimi dobimo ojačitve! Opazujemo v veliki razdalji od obeh zvočnikov. Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

12. Točkasto zvočilo oddaja zvok enakomerno na vse strani. Mož, ki je 50 m oddaljen od zvočila, sliši zvok jakosti 30 db, žena, ki je 100 m oddaljena od zvočila pa komaj še sliši ta zvok. Kakšen je absorpcijski koeficient zraka za zvok?

13. Netopir se v prostoru orientira tako, da oddaja kratke ponavljajoče zvočne signale in posluša frekvence odbitega zvoka. Netopir se s hitrostjo 0.025 c (kjer je c hitrost zvoka) giblje naravnost proti navpični steni in odda zvočni signal s frekvenco 39000 s^{-1}. Kolikšna je frekvenca od stene odbitega zvoka, ki jo zazna gibajoči se netopir?

    Rešitev:
    Ker se netopir približuje steni, bi poslušalec, ki miruje glede na zrak in stoji med netopirjem in steno, zaradi Dopplerjevega pojava zaznal zvočni signal s frekvenco (slika 55)

$$\nu\,' = \frac{\nu}{1 - v/c}.$$

    Zvok s to frekvenco se od stene odbije in odbiti zvok netopir zazna (spet zaradi Dopplerjevega pojava) s frekvenco

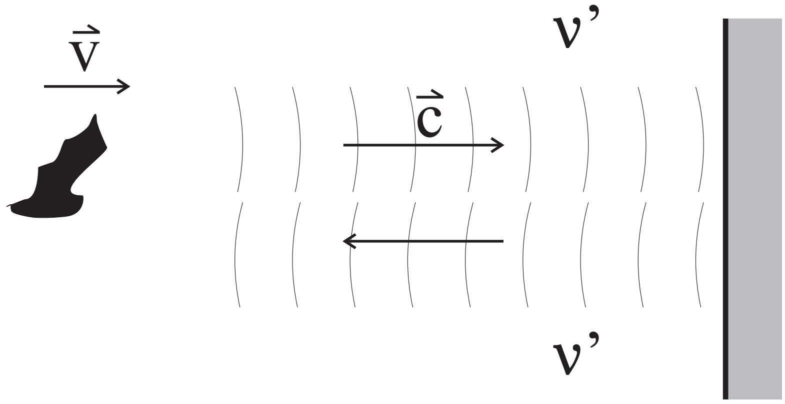
$$\nu\,'' = \nu\,'(1 + \frac{v}{c}).$$

    Vstavimo prvo enačbo v drugo in dobimo

$$\nu\,'' = \nu\,\frac{1 + v/c}{1 - v/c} = 41000\,\mathrm{s}^{-1}.$$

14. Glasbene vilice, ki nihajo s frekvenco 500 s^{-1}, se gibljejo s hitrostjo 20 m/s stran od opazovalca proti ravni steni. Kolikšna je frekvenca utripanja zvoka glasbenih vilic, ki jo zazna opazovalec? Zvok glasbenih vilic se odbija od stene v smeri nazaj proti opazovalcu. Hitrost zvoka v zraku je 332 m/s.

15. Dva delfina plavata proti navpični steni s hitrostima 10 m/s in 15 m/s. Oba delfina istočasno oddata enak zvočni signal s frekvenco 1000 s^{-1}. Kolikšna je razlika frekvenc obeh od



Slika 55:

stene odbitih zvočnih signalov, ki jo zazna posamezen delfin? Hitrost zvoka v vodi je 1450 m/s. ($\Delta f_1 = 3.53$ s^{-1}, $\Delta f_2 = 3.54$ s^{-1})

16. Avto vozi s hitrostjo 80 km/h proti navpični steni. Avtomobilska sirena pri tem oddaja zvok s frekvenco 500 Hz. Kolikšna je frekvenca odbitega zvoka, ki ga sliši voznik v avtomobilu? Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

17. Rešilni avtomobil vozi po vodoravni cesti s hitrostjo 25 m/s. Njegova sirena oddaja signal s frekvenco 500 Hz. Kolikšno frekvenco zvoka zazna voznik v avtomobilu, ki se vozi po isti cesti v nasprotni smeri s hitrostjo 15 m/s tako, da se oddaljuje od reševalnega avtomobila? Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

18. Rešilni avtomobil vozi po vodoravni cesti s hitrostjo 25 m/s. Njegova sirena oddaja signal s frekvenco 500 Hz. Kolikšno frekvenco zvoka zazna voznik v avtomobilu, ki se vozi po isti cesti v nasprotni smeri s hitrostjo 15 m/s tako, da se reševalnemu avtomobilu približuje? Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

19. S kolikšno hitrostjo se zvok širi skozi zrak pri temperaturi 29 °C, če se pri temperaturi 0 °C širi s hitrostjo 331 m/s?

9 Toplota in kinetična teorija plinov

1. V posodi s prostornino $V = 5$ dm^3 je zaprt plin z molekulsko maso $M = 40$ kg/kmol pri tlaku $p = 10^4$ N/m^2 in temperaturi $T = 20$ °C. Kolikšna je gostota (ϱ) tega plina?

   Rešitev:
   Predpostavljamo, da za plin velja splošna plinska enačba:

   $$pV = \frac{m}{M} RT.$$

   Iz nje izrazimo gostoto plina:

   $$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = 0.164 \ \text{kg/m}^3.$$

   Pri tem je $R = 8314$ J/kmolK splošna plinska konstanta, temperaturo pa je potrebno vzeti v absolutnem merilu, torej T = 293 K.

2. Dve posodi sta napolnjeni s plinom iste vrste. Povezani sta s cevko, na kateri je ventil, ki je na začetku zaprt. V prvi posodi prostornine $V_1 = 3 \times 10^{-3}$ m^3 je tlak $p_1 = 1.2 \times 10^5$ Pa, v drugi posodi prostornine $V_2 = 10^{-3}$ m^3 pa je tlak $p_2 = 0.9 \times 10^5$ Pa. Kolikšen je končni tlak (p) v posodah, ko ventil odpremo? Predpostavljamo, da je temperatura plina v obeh posodah ves čas enaka in konstantna.

   Rešitev:
   Za prvo in za drugo posodo posebej, kot tudi za obe posodi skupaj, potem, ko je ventil odprt, veljajo plinske enačbe:

   $$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT, \tag{110}$$

   $$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT, \tag{111}$$

   $$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT. \tag{112}$$

Iz enačbe (110) izrazimo maso plina v prvi posodi m_1, iz enačbe (111) izrazimo maso plina v drugi posodi m_2 in oboje vstavimo v enačbo (112). Dobimo:

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2,$$

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 1.125 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Rešitev z nekoliko drugačnim razmislekom:
Predstavljajmo si, da se vsak izmed plinov, ko odpremo ventil, izotermno raztegne na celotno prostornino posode. Tako dobimo iz plinske enačbe ($pV = konst.$) delna tlaka plinov v celotni posodi po odprtju ventila:

$$p_1' = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2}, \quad p_2' = \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Pri idealnem plinu je skupni tlak plina kar enak vsoti delnih tlakov plinov, ki ga sestavljajo. Končni tlak plina v obeh posodah je torej

$$p' = p_1 + p_2 = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

3. Steklena cevka višine $h_1 = 0.3$ m je na vrhu neprodušno zaprta s premičnim zelo lahkim čepom (tlak v cevki je enak zunanjemu zračnemu tlaku). Kolikšna bo višina (h_2) stolpca v cevki, če jo postavimo v posodo, ki je napolnjeno s tekočino gostote $\varrho = 13600$ kg/m^3 do višine $h_3 = 1$ m. Cevko postavimo navpično s čepom navzgor tako, da se dotika dna posode. Temperatura zraka v cevki se ne spremeni. Zunanji zračni tlak je $p_1 = 10^5$ Pa.

   Rešitev:
   Ker gre za izotermno (konstantna temperatura) stiskanje zraka v cevki, velja med začetno in končno prostornino in tlakom zveza:

$$p_1V_1 = p_2V_2. \tag{113}$$

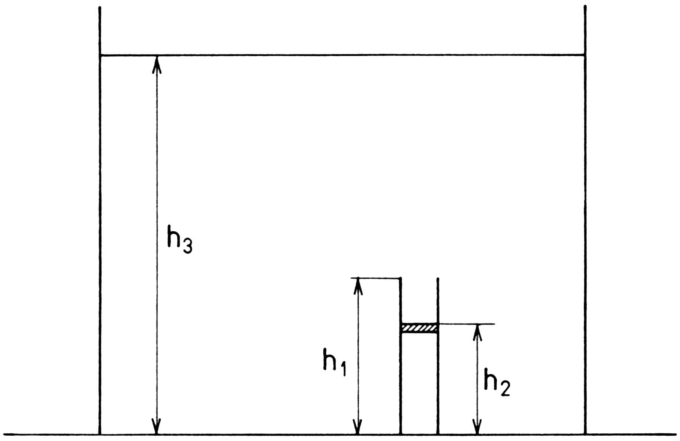
Ker je presek cevke po vsej višini cevke enak, je volumen stolpca zraka v cevki sorazmeren z njegovo višino:

$$p_1 h_1 = p_2 h_2; \tag{114}$$

glejte tudi sliko 56. Velja torej:

$$h_2 = \frac{p_1 h_1}{p_2}. \tag{115}$$

Končni tlak zraka v stolpcu je enak tlaku tekočine nad stolp-



Slika 56:

cem, temu pa je potrebno prišteti še zunanji zračni tlak p_1, ki je samo enak začetnemu tlaku v cevki.

$$p_2 = \varrho g(h_3 - h_2) + p_1 \tag{116}$$

Vstavimo enačbo (116) v enačbo (115) in dobimo:

$$h_2^2 - h_2(h_3 + \frac{p_1}{\varrho g}) + \frac{p_1 h_1}{\varrho g} = 0.$$

Rešitvi te kvadratne enačbe sta:

$$h_{2_{1,2}} = \frac{h_3 + \frac{p_1}{\varrho g} \pm \sqrt{(h_3 + \frac{p_1}{\varrho g})^2 - 4\frac{p_1 h_1}{\varrho g}}}{2}.$$

Pravo rešitev da negativni znak:

$$h_2 = \frac{1}{2}\left[h_3 + \frac{p_1}{\varrho g} - \sqrt{(h_3 + \frac{p_1}{\varrho g})^2 - 4\frac{p_1 h_1}{\varrho g}}\right] = 14 \ \text{cm}.$$

4. Pri napihovanju milnega mehurčka s polmerom $r = 2$ cm opravimo delo $A = 4 \times 10^{-4}$ J. Za koliko se razlikujeta gostoti zraka v mehurčku in izven njega, če je temperatura zraka v mehurčku in izven njega enaka $T = 300$ K? Molska masa zraka je $M = 29$ kg/kmol.

Rešitev:
Zračni tlak p_2 znotraj mehurčka je večji kot zračni tlak p_1 zunaj mehurčka. Napišemo plinski enačbi za zrak v mehurčku in za enak volumen zraka pri nižjem tlaku zunaj mehurčka:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} RT,$$

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT.$$

Gostota zraka v mehurčku ϱ_2 je potem:

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 M}{RT},$$

gostota zraka zunaj mehurčka ϱ_1 pa je:

$$\varrho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{p_1 M}{RT}.$$

Razlika gostot $\Delta\varrho$ je:

$$\Delta\varrho = \varrho_2 - \varrho_1 = (p_2 - p_1)\frac{M}{RT} = \Delta p \frac{M}{RT}.$$

Pri tem je Δp tlačna razlika med notranjostjo in zunanjostjo mehurčka. Razlika tlakov je podana z izrazom:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2A}{4\pi r^3} = \frac{A}{2\pi r^3}.$$

Pri tem je γ površinska napetost mehurčka, ki je enaka ploskovni gostoti površinske energije $\gamma = \frac{A}{4\pi r^2}$. Iskana razlika gostot je torej:

$$\Delta\varrho = \frac{A}{2\pi r^3 \cdot \frac{M}{RT}} = 9.25 \cdot 10^{-5}\ \text{Pa}.$$

5. Liter ($V_1 = 1\ \text{dm}^3$) idealnega dvoatomnega plina s temperaturo $T_1 = 0\ ^{\text{o}}\text{C}$ pri tlaku $p_1 = 10^5$ Pa izredno hitro stisnemo na polovico začetne prostornine ($V_2 = \frac{V_1}{2}$). Plin nato pri konstantnem tlaku počasi ohladimo nazaj na temperaturo 0 ^{o}C. Kolikšna je končna prostornina (V_3) plina?

   Rešitev:
   Najprej plin hitro stisnemo. Ker je stiskanje hitro, ni časa, da bi prišlo do izmenjave toplote med plinom in okolico. Proces je torej adiabaten in velja:

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}, \tag{117}$$

   pri tem je κ razmerje specifičnih toplot. Ker je plin dvoatomen je $\kappa = 1.4$ [1,6]. Končni tlak plina je potem:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = p_1 \cdot 2^{\kappa}. \tag{118}$$

   Poleg tega za začetno in končno stanje plina veljata plinski enačbi:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \qquad p_2 V_3 = \frac{m}{M} R T_1. \tag{119}$$

   Iz enačb (118) in (119) potem izrazimo končni volumen plina: V_3

$$V_3 = \frac{V_1}{2^{\kappa}} = 0.38\ \text{dm}^3.$$

6. 1 mol idealnega dvoatomnega plina pri tlaku 1 bar in temperaturi 500 K najprej izobarno skrčimo na 4/5 začetne prostornine, nato pa ga adiabatno razširimo do začetne prostornine. Koliko toplote oddamo/sprejmemo pri celotnem procesu in za koliko se spremeni notranja energija plina?

Rešitev:
$m/M = 10^{-3}$ ... (masa mola/masa kilomola $= 10^{-3}$)
$p_1 = 10^5$ Pa[3]
$T_1 = 500$ K
$V_2 = \frac{4}{5}V_1$
$V_3 = V_1$

$\Delta Q =?$
$\Delta W_{\mathrm{n}} =?$

Za dvoatomni idealni plin (sploh pa pri tako visokih temperaturah) velja za specifični toploti $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$ in $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M}$, torej $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$.

Za izobarno spremembo velja $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. Temperatura po izobarni spremembi je torej

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 400\,\mathrm{K}.$$

Za adiabatno spremembo velja $T_2 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1}$. Temperatura po adiabatni spremembi je torej

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} = 366\,\mathrm{K}.$$

Ker pri adiabatni spremembi sistem ne izmenjuje toplote z okolico, je sprememba toplote kar enaka spremembi toplote pri izobarni spremembi:

$$\Delta Q = mc_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}\frac{mR}{M}(T_2 - T_1) \approx -2905\,\mathrm{J}.$$

Plin torej pri celotnem procesu odda 2905 J toplote.

Notranja energija sistema je enolična funkcija stanja, zato je sprememba notranje enegije odvisna samo od začetnega in končnega stanja sistema. V našem primeru po celotnem procesu torej velja:

$$\Delta W_{\mathrm{n}} = mc_v(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}\frac{mR}{M}(T_3 - T_1) = -2785\,\mathrm{J}.$$

7. Balon z vročim zrakom ima prostornino $V = 500$ m^3. Zračni tlak je $p = 10^5$ N/m^2, temperatura okoliškega zraka pa $T_2 =$ 20 °C. Molekulska masa zraka je $M = 29$ kg/kmol. Najmanj kolikšna mora biti temperatura zraka v balonu (T_1), da se bo balon dvignil od tal? Masa balona skupaj s tovorom je $m_0 =$ 180 kg.

   Rešitev:
   Balon dviguje sila vzgona. Torej mora biti masa izpodrinjenega hladnega zraka najmanj enaka masi vročega zraka v balonu in masi tovora:

$$m(T_2) = m(T_1) + m_0. \tag{120}$$

   Masi vročega $m(T_1)$ in hladnega $m(T_2)$ zraka izrazimo iz plinske enačbe:

$$m(T_1) = \frac{pVM}{RT_1}, \qquad m(T_2) = \frac{pVM}{RT_2}. \tag{121}$$

   Enačbo (121) vstavimo v enačbo (120) in dobimo:

$$\frac{pVM}{RT_2} = \frac{pVM}{RT_1} + m_0.$$

   Iskana temperatura T_1 je potem:

$$T_1 = \frac{pVMT_2}{pVM - m_0RT_2} = 420\,\mathrm{K}\ \ (147^\circ\,\mathrm{C}).$$

8. Balon, ki ima prostornino 200 m^3, je napolnjen z vročim zrakom, ki ima temperaturo 150 °C pri tlaku 10^5 Pa. Kolikšna je masa tovora, ki ga ta balon še lahko dvigne, če je temperatura okoliškega zraka enaka 18 °C, tlak pa je enak, kot v balonu. Masa balona s pripadajočo opremo je 30 kg, molekulska masa zraka je 29 kg/kmol.

9. Idealni enoatomni plin adiabatno razpnemo iz začetnega stanja pri tlaku $p_1 = 10^5$ Pa in prostornine $V_1 = 6$ dm^3 na trikrat večjo končno prostornino ($V_2 = 3 \cdot V_1$). Kolikšno delo (A)

opravi plin?

Rešitev:
Nalogo rešimo na dva načina. Pri krajšem načinu upoštevamo, da je opravljeno delo enako spremembi notranje energije, ker je proces adiabaten. Torej:

$$A = \Delta W_n = mc_v(T_2 - T_1),$$

pri tem je c_v specifična toplota plina, pri konstantnem volumnu, T_2 pa končna temperatura. Ker je plin enoatomen, je $c_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{M}$. Končno temperaturo pa izračunamo iz zveze:

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}.$$

Ker je plin enoatomen, je $\kappa = \frac{5}{3} = 1.67$. Opravljeno delo je potem:

$$\begin{aligned} A &= m\frac{3}{2}\frac{R}{M}T_1\left(\left(\frac{V_1}{W_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = \\ &= \frac{3}{2}p_1V_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = \\ &= -467 \text{ J}. \end{aligned}$$

Plin je opravil 476 J dela. Pri računu smo upoštevali tudi plinsko enačbo $p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$. Sedaj izračunamo opravljeno delo še po definiciji dela:

$$\begin{aligned} A &= -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -p_1V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\kappa} = \\ &= -p_1V_1^\kappa \frac{V^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}\Bigg|_{V_1}^{V_2} = \\ &= \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{(\kappa-1)} \cdot (V_2^{-\kappa+1} - V_1^{-\kappa+1}) = \\ &= -467 \text{ J}. \end{aligned}$$

10. Idealni dvoatomni plin, ki je imel v začetku prostornino $V_1 = 2$ m^3 in tlak $p_1 = 3 \cdot 10^4$ Pa adiabatno stisnemo na četrtino

začetne prostornine. Koliko dela pri tem opravimo?

Rešitev:
Za idealni dvoatomni plin je razmerje specifičnih toplot $\kappa = 7/5 = 1.4$. Za adiabatne spremembe idealnega plina velja zveza

$$p_1 V_1^\kappa = p V^\kappa.$$

Za delo torej lahko zapišemo

$$\begin{aligned} A &= -\int_{V_1}^{V_2} p \ \mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} \ \mathrm{dV} = ... \\ &= \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Spremembo temperature pa bi lahko dobili iz zveze $T_1 V_1^{\kappa-1} = T V^{\kappa-1}$.

11. Pet gramov ($m = 5$ g) dvoatomnega idealnega plina reverzibilno in adiabatno stisnemo iz začetnega stanja pri temperaturi $T_1 = 20$ °C in prostornini $V_1 = 6$ dm^3 na petkrat manjšo končno prostornino V_2. Kolikšno delo (A) moramo opraviti pri tem? ($M = 28$ kg/kmol)

    Rešitev:
    Nalogo rešujemo podobno kot prejšnjo. Ker je proces adiabaten, je opravljeno delo enako spremembi notranje energije:

$$\begin{aligned} A &= \Delta W_n = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = \\ &= m \cdot \frac{5}{2} \frac{R}{M} \cdot T_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) = \\ &= 972.7 \text{ J}. \end{aligned}$$

    Pri tem smo upoštevali, da je $\kappa = 1.4$ in $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$, ker je plin dvoatomen. Sedaj je delo pozitivno, ker je plin delo prejel. Pri prejšnji nalogi je bil rezultat negativen, ker je plin delo oddal.

12. Idealni plin z maso $m = 0.58$ kg v jeklenki segrejemo pri konstantem volumnu od $T_1 = 27$ °C na $T_2 = 327$ °C. Pri tem se entropija plina spremeni za $\Delta S = 296.43$ J/K. Molska masa plina je $M = 28$ kg/kmol. Izračunajte specifično toploto plina pri konstantni prostornini (c_v) in ugotovite, koliko atomov (x) je v molekuli tega plina.

Rešitev:
Sprememba entropije je:

$$\Delta S = mc_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc_v \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Od tod dobimo:

$$c_v = \frac{\Delta S}{m \cdot} \ln \frac{T_2}{T_1} = 737.1 \text{ J/kgK}.$$

Koliko atomov je v molekuli plina, ugotovimo iz specifične toplote:

$$c_v = x\frac{R}{M} \Rightarrow x = \frac{c_v M}{R} = \frac{5}{2}.$$

Plin je torej dvoatomen.

13. Štiri kg ($m = 4$ kg) helija izotermno stisnemo, pri čemer se tlak poveča od $p_1 = 0.1$ Pa na $p_2 = 4$ Pa. Kolikšno delo (A) smo morali opraviti za stiskanje plina? Kolikšne so spremembe notranje energije (ΔW_n), entropije (ΔS) in entalpije (ΔH) plina pri opisanem procesu? ($M_{He} = 4$ kg/kmol)

Rešitev:
Sprememba notranje energije je enaka 0, ker je proces izotermen, notranja enrgija idealnega plina pa je odvisna samo od temperature. Kolikor smo plinu dovedli dela, toliko je plin oddal toplote. Dovedeno delo je:

$$\begin{aligned} A &= -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -\frac{m}{M}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{mRT}{M} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \frac{mRT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}. \end{aligned} \tag{122}$$

Pri tem je T konstantna temperatura, pri kateri izotermni proces poteka. Te temperature ne poznamo, vendar je tudi ni potrebno poznati, ker nas zanima samo sprememba entropije ΔS. Sprememba entropije je:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = -\frac{A}{T} = -\frac{mR}{M}\ln\frac{p_2}{p_1} = -30669\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.$$

Entropija se je zmanjšala. Pri izračunu dela smo upoštevali plinsko enačbo:

$$pV = \frac{m}{M}RT \ \Rightarrow\ V = \frac{mRT}{Mp} \ \Rightarrow\ dV = -\frac{mRT}{Mp^2}dp.$$

Sprememba entalpije je po definiciji:

$$\Delta H = \int_{p_1}^{p_2} V dp + \int_{S_1}^{S_2} T dS.$$

Prvi člen v zgornjem izrazu je enak dovedenemu delu, drugi pa odvedeni toploti. Zato je tudi sprememba entalpije enaka 0, $\Delta H = 0$.

14. Dvoatomen idealen plin v jeklenki s prostornino 0.25 litra ima pri temperaturi 20 °C tlak 10^5 Pa. Za koliko se spremenita entropija in notranja energija plina v jeklenki, če ga segrejemo na 38 °C. (M = 28 kg/kmol) ($\Delta S = 12.7{\times}10^{-3}$ J/K, $\Delta W_n = 3.85$ J)

15. V zmes 10 kg vode in 1 kg ledu dodamo 15 kg vode, ki ima temperaturo 350 K. Kolikšna je sprememba entropije? Talilna toplota ledu je 335 kJ/kg. (992 J/K)

16. Pet molov ($\frac{m}{M} = 5$) enoatomnega idealnega plina se adiabatno in ireverzibilno raztegne v vakuum na trikratno protornino ($V_2 = V_3$) (Hirnov poskus). Kolikšna je sprememba entropije ΔS pri opisanem procesu?

    Rešitev:
    Izotermo raztezanje plina pri Hirnovem poskusu je ireverzibilno. Če želimo oceniti spremembo entropije plina pri tem

procesu, si moramo zamisliti nadomestni reverzibilni proces, ki pripelje iz istega začetnega v isto končno stanje. Takšen proces je izotermno reverzibilno razpenjanje plina, kjer je delo, ki ga plin opravi, enako toploti, ki jo plin prejme iz okolice. Sprememba entropije je

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = -\frac{1}{T}\int dA = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{M}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} =$$

$$= \frac{m}{M}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 45.67 \text{ J/K}.$$

17. Koliko vodne pare s temperaturo 100 °C moramo napeljati v izolirano posodo v kateri je 1 kg ledu s temperaturo 0 °C, da se bo ravno ves led stalil? Za koliko se spremeni skupna entropija? Talilna toplota ledu je 3.3×10^5 J/kg, izparilna toplota vodne pare je 2.27×10^6 J/kg.

18. Iz kotla, v katerega doteka voda s temperaturo 15^oC, hočemo dobiti vsako uro 45 m^3 vodne pare s temperaturo 100^oC in tlakom 10^5 Pa. Kolikšno moč mora imeti grelna naprava? ($q_{izp} = 2.26$ MJ/kg, $c_{p,vode} = 4200$ J/kgK)

    Rešitev:
    $\Delta T = 85K$
    $\Phi_V = 45\frac{m^3}{h}$

    $P =?$

    Toplota, ki jo potrebujemo, da segrejemo in izparimo vodo z maso m, je

    $$Q = mc_{p,vode}\Delta T + mq_{izp}.$$

    Moč grelca mora biti torej

    $$\begin{aligned} P &= \frac{dQ}{dt} = \Phi_m(c_{p,vode}\Delta T + q_{izp}) = \\ &= \rho_{vode}\Phi_V(c_{p,vode}\Delta T + q_{izp}) = 32.7 \text{ MW}. \end{aligned}$$

19. Deset gramov vodika H_2, s temperaturo 27 °C in prostornine V najprej adiabatno raztegnemo na štirikratno začetno prostornino ($4V$), nato pa ga izotermno stisnemo na polovično začetno prostornino ($V/2$). Molekulska masa plina je 2 kg/kmol. Za koliko se spremeni notranja energija plina pri opisanem procesu? (13.27 kJ)

20. Devet dm^3 ($V_1 = 9$ dm^3) kisika O_2 pri temperaturi $T_1 = 300$ K in tlaku $p_1 = 10^5$ Pa izotermno stisnemo na prostornino $V_2 = 3$ dm^3, potem pa adiabatno razpnemo nazaj na prostornino $V_3 = V_1 = 9$ dm^3. Prikažite ta proces na pV diagramu! Izračunajte delo, ki ga opravimo, spremembo notranje energije ΔW_n in spremembo entropije ΔS plina!

Rešitev:
Sprememba iz začetnega stanja 1 v vmesno stanje 2 je izotermna, zato velja:

$$p_1V_1 = p_2V_2, \quad T_1 = T_2.$$

Sprememba iz vmesnega stanja 2 v končno stanje 3 je adiabatna, zato velja:

$$p_2V_2^\kappa = p_3V_1^\kappa, \quad V_1 = V_3,$$
$$T_1V_2^{\kappa-1} = T_3V_1^{\kappa-1}, \quad T_1 = T_2.$$

Ker je kisik dvoatomen plin, je razmerje specifičnih toplot $\kappa = 1.4$. Delo A_{12} pri izotermnem stiskanju plina iz stanja 1 v stanje 2 je

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -p_1V_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \\ &= -p_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 988.8 \text{ J}. \end{aligned}$$

Pri izotermnem stiskanju je plin prejel 988.8 J dela. Pri adiabatnem raztezanju iz stanja 2 v stanje 3, plin odda delo A_{23}, ki je

$$A_{23} = -\int_{V_2}^{V_1} pdV = -p_2V_2^\kappa\int_{V_2}^{V_1}\frac{dV}{V^\kappa} = \frac{p_2V_2^\kappa}{1-\kappa}V^{-\kappa+1}\Big|_{V_2}^{V_1} =$$

$$= \frac{p_1 V_1 V_2^{\kappa-1}}{1-\kappa}\left(V_1^{-\kappa+1} - V_2^{-\kappa+1}\right) = 800 \text{ J.}$$

Pri adiabatnem raztezanju je plin oddal 800 J dela. Sedaj izračunajmo spremembo notranje energije ΔW_n.

$$\Delta W_n = mc_v(T_3 - T_1) = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = -800 \text{ J.}$$

Pri tem smo upoštevali, da je plin dvoatomen in je zato specifična toplota pri konstantnem volumnu c_v enaka $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$ maso plina m pa smo izrazili iz plinske enačbe

$$m = \frac{p_1 V_1 M}{RT_1}.$$

Sprememba notranje energije je očitno enaka delu, ki ga je plin opravil pri adiabatnem raztezanju $\Delta W_n = A_{23}$. Sprememba notranje energije pri izotermnem stiskanju je seveda enaka nič, saj smo plinu sproti odvajali toliko toplote Q, kolikor je prejel dela pri stiskanju tako, da velja $Q = -A_{12}$. Spremembe notranje energije torej sploh ne bi bilo treba posebej računati.

Na koncu poglejmo še spremembo entropije ΔS

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{-A_{12}}{T_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -3.3 \text{ J/K.}$$

Entropija se je torej zmanjšala za 3.3 J/K. Ta rezultat seveda velja samo ob predpostavki, da je coltna sprememba reverzibilna.

21. Idealni enoatomni plin pri temperaturi 27 °C in tlaku 1.25×10^5 Pa ima prostornino 4×10^{-3} m^3. Plinu izobarno dovedemo toploto 2×10^3 J. Kolikšna sta končna temperatura in prostornina plina? (781 K, 1.04×10^{-2} m^3)

22. Pet molov idealnega plina v valju izotermno reverzibilno razpnemo od tlaka 4×10^5 Pa na tlak 10^5 Pa. Valj je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo 311 K. Valj in bat sta zelo dobra prevodnika toplote.

(a) Določite spremembo notranje energije in entropije plina!
(b) Kolikšno delo opravi plin?
($\Delta W_n = 0$, $\Delta S = 57.5$ J/K, A = 0.185 J)

23. Tri grame enoatomnega idealnega plina adiabatno razpnemo iz začetnega stanja pri tlaku 10^5 Pa in prostornini 6 dm^3 na trikrat večjo končno prostornino. (M = 12 kg/kmol)
(a) Kolikšna je sprememba notranje energije tega plina?
(b) Kolikšna je končna temperatura?
(ΔW_n = - 467 J, T = 139 K)

24. Enoatomen plin v jeklenki s prostornino 0.25 dm^3 ima pri temperaturi 20 °C tlak 10^5 Pa. Za koliko se spremeni entropija in notranja energija plina v jeklenki, če ga segrejemo na 38 °C? (M = 28 kg/kmol) ($\Delta S = 7.6 \times 10^{-3}$ J/K, $\Delta W_n = 2.3$ J)

25. Dva litra dvoatomnega idealnega plina s temperaturo 20 °C in tlakom 10^5 Pa adiabatno stisnemo na polovično prostornino. Koliko dela pri tem opravimo? Kolikšna je sprememba notranje energije plina? (A = ΔW_n = 160 J)

26. Dva dm^3 plina pri tlaku 10^5 N/m^2 in temperaturi 20 °C adiabatno razpnemo na prostornino 5 dm^3. Kolikšna je končna temperatura in kolikšna je sprememba notranje energije? Plin je dvoatomen.

Rešitev:
Oznake: začetna prostornina $V_1 = 2$ dm^3, začetni tlak $p_1 = 10^5$ Pa, začetna temperatura $T_1 = 20^o$C, končna prostornina $V_2 = 5$ dm^3, neznana končna temperatura T_2, sprememba notranje energije ΔW_n. Ker je sprememba adiabatna velja:

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = 203\,\mathrm{K}\ \ (-70°\mathrm{C}).$$

Ker je plin dvoatomen je razmerje specifičnih toplot $\kappa = \frac{c_p}{c_v} =$

1.4. Sprememba notranje energije je enaka:

$$\Delta W_n = m \cdot c_v(T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1 M}{R T_1} \frac{5}{2} \frac{R}{M} T_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) =$$

$$= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) = -153.4 \text{ J}.$$

Notranja energija plina se je zmanjšala za 153.4 J, kolikor je plin oddal dela pri razpenjanju.

27. Tri dm^3 plina pri tlaku 10^5 $\mathrm{N/m}^2$ in temperaturi 20 ^{o}C adiabatno razpnemo na prostornino 5 dm^3. Kolikšna je končna temperatura in kolikšna je sprememba notranje energije? Plin je enoatomen.

Rešitev:
Oznake: začetni volumen V_1 =3 dm^3, začetni tlak $p_1 = 10^5$ Pa začetna temperatura $T_1 = 20^o$C, neznana končna temperatura T_2, sprememba notranje energije ΔW_n, končna prostornina V_2 = 5 dm^3. Ker je sprememba adiabatna velja:

$$T_1 V_1^{\kappa - 1} = T_2 V_2^{\kappa - 1},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} = 158.6 \text{ K} \ \ (-114.4^\circ\text{C}).$$

Ker je plin enoatomen je razmerje specifičnih toplot $\kappa = \frac{5}{3} \approx 1.67$. Sprememba notranje energije je:

$$\Delta W_n = m \cdot c_v(T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1 M}{R T_1} \frac{3}{2} \frac{R}{M} T_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} p_1 V_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) = -206.4 \text{ J}.$$

Notranja energija plina se zmanjša za 206.4 J.

28. V posodi s prostornino 3 dm^3 je zaprt plin z molekulsko maso 40 kg/kmol pri temperaturi 20 °C in tlaku 10^5 Pa. Plin izotermno razpnemo na prostornino 5 dm^3. Kolikšna je pri tem sprememba entropije in koliko toplote smo dovedli? Predpostavljamo, da je sprememba reverzibilna.

Rešitev:
Oznake: Začetna prostornina $V_1 = 3$ dm^3, temperatura T = 20°C, začetni tlak $p_1 = 10^5$ Pa, končna prostornina $V_2 =$ 5dm^3. Ker je sprememba izotermna, se notranja energija ne spremeni in je dovedena toplota Q enaka opravljenemu delu A plina.

$$A = -Q = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= -10^5 \cdot 0.003 \ln \frac{5}{3} = -153.2 \text{ J}.$$

Plin je pri razpenjanju opravil 153.2 J dela in prav toliko toplote smo dovedli. Sprememba entropije je:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{10^5 \cdot 0.003}{293} \ln \frac{5}{3} = 0.52 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Entropija plina se je povečala za 0.52 $\frac{\text{J}}{\text{K}}$.

29. V posodi s prostornino 3 dm^3 je 0.1 g helija, ki ima molekulsko maso 4 kg/kmol. Temperatura v posodi je 20 °C. Koliko dela opravimo, ko plin adiabatno razpnemo na prostornino 6 dm^3? Kolikšna je sprememba entropije? Razmerje specifičnih toplot je 5/3.

Rešitev:
Oznake: začetna prostornina $V_1 = 3$ dm^3, masa $m = 0.1$ g, začetna temperatura $T_1 = 20°C$, končna prostornina $V_2 = 6$ dm^3, razmerje specifičnih toplot $\kappa = \frac{5}{3}$, molekulska masa M = 4 kg/kmol. Ker je razpenjanje adiabatno, je sprememba

entropije enaka 0. Delo, ki ga plin opravi, pa je enako spremembi notranje energije:

$$A = mc_v(T_2 - T_1) = m\frac{3}{2}\frac{R}{M}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = -0.12 \text{ J}.$$

30. Dva dm^3 plina pri temperaturi 20 °C in tlaku 10^5 N/m^2 razpnemo adiabatno na prostornino 5 dm^3. Kolikšna je sprememba notranje energije in kolikšna je končna temperatura plina? Plin ima molekulsko maso 29 kg/kmol in razmerje specifičnih toplot 1.4.

31. Dva dm^3 plina pri temperaturi 20 °C in tlaku 10^5 N/m^2 razpnemo adiabatno na prostornino 5 dm^3. Kolikšna je sprememba notranje energije in kolikšna je končna temperatura plina? Plin ima molekulsko maso 40 kg/kmol in razmerje specifičnih toplot 1.67.

32. V posodi je $m = 10^{-4}$ kg argona z molekulsko maso $M = 40$ kg/kmol pri temperaturi $T_1 = 20$ °C in tlaku $p_1 = 5 \times 10^3$ Pa. Plin najprej adiabatno raztegnemo na dvakratno prostornino ($V_2 = 2V_1$), nato pa ga raztegnemo še izotermno tako, da ima na koncu 4 krat večjo prostornino, kot na začetku ($V_3 = 4V_1$). Kolikšna sta končna prostornina V_3 in temperatura T_3 plina? Kolikšna je celotna sprememba notranje energije ΔW_n in entropije ΔS? Predpostavljamo, da je sprememba reverzibilna. Prikažite proces na pV diagramu! Razmerje specifičnih toplot je $\kappa = 5/3$.

   Rešitev:
   Sprememba iz začetnega stanja 1 v vmesno stanje 2 je adiabatna, zato velja:

$$p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa},$$
$$T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}.$$

   Sprememba iz vmesnega stanja 2 v končno stanje 3 pa je izotermna, zato velja

$$p_2V_2 = p_3V_3, \quad T_2 = T_3.$$

Celotna sprememba notranje energije pri prehodu iz stanja 1 v stanje 3 je

$$\Delta W_n = mc_v(T_3 - T_1) = m\frac{3}{2}\frac{R}{M}T_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = -3.4 \text{ J.}$$

Notranja energija se spreminja samo pri adiabatnem raztezanju plina iz stanja 1 v stanje 2. Takrat plin oddaja delo in za toliko se mu zmanjša tudi notranja energija. Pri izotermnem raztezanju iz stanja 2 v stanje 3 pa plin sicer oddaja delo, vendar mu sproti dovedemo toliko toplote, kolikor odda dela. Zato je sprememba notranje energije enaka nič.

Entropija se spreminja med izotermnim raztezanjem iz stanja 2 v stanje 3, kajti takrat plinu dovajamo toploto. Sprememba entropije je

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{p_2V_2}{T_2}\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V} = \frac{p_2V_2}{T_2}\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) =$$

$$= \frac{p_1V_1}{T_1}\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \frac{mR}{M}\ln 2 = 0.014 \quad \text{J/K.}$$

Pri računanju smo upoštevali zveze med količinami, ki so posledica tega, da je prva sprememba adiabatna, druga pa izotermna in plinsko enačbo.

33. V posodi je helij pri tlaku 3×10^4 N/m^2 in temperaturi 30°C. Plin adiabatno stisnemo na polovico začetne prostornine. Kolikšna sta končna temperatura in tlak? Razmerje specifičnih toplot je 5/3.

34. V posodi je $m = 5$ g kisika pri temperaturi $T_1 = 20$ °C in tlaku $p_1 = 4.6 \times 10^4$ N/m^2. Plin segrejemo na $T_2 = 80$ °C tako, da ostane tlak konstanten. Kolikšna je končna prostornina V_2 plina in koliko toplote Q smo dovedli? Molekulska masa kisika je $M = 32$ kg/kmol, razmerje specifičnih toplot je $\kappa = 1.4$. Kolikšna je sprememba entropije ΔS? Predpostavljamo, da je sprememba reverzibilna.

Rešitev:
Končno prostornino plina izračunamo iz plinske enačbe:

$$p_1 V_2 = \frac{m}{M} R T_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{m R T_2}{M p_1} = 10 \ \mathrm{dm}^3.$$

Pri tem smo upoštevali, da se tlak ne spremeni $p_1 = p_2$.

Dovedena toplota je:

$$Q = m c_p (T_2 - T_1) = m \frac{7}{2} \frac{R}{M} (T_2 - T_1) = 272.8 \ \mathrm{J}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je plin dvoatomen in da je specifična toplota pri konstantnem tlaku podana z $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M}$.

Sicer pa je koristno, če si zapomnimo:

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}, \quad \kappa \equiv \frac{c_p}{c_v}.$$

Od tod hitro dobimo:

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{M}, \quad c_v = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{R}{M}.$$

Sprememba entropije pa je:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = m c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = m \frac{7}{2} \frac{R}{M} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 0.85 \ \mathrm{J/K}.$$

Entropija se seveda poveča.

35. V posodi je $V = 8$ dm^3 argona pri tlaku $p_1 = 3.4 \times 10^4$ N/m^2 in temperaturi $T_1 = 25$ °C. Plinu dovedemo $Q = 90$ Joulov toplote tako, da ostane prostornina konstantna. Kolikšna sta končni tlak p_2 in temperatura T_2 plina? Kolikšna je sprememba entropije ΔS? Predpostavljamo, da je sprememba reverzibilna. Razmerje specifičnih toplot je $\kappa = 5/3$.

Rešitev:
Za plin v začetnem stanju velja plinska enačba:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1. \tag{123}$$

Prav tako v končnem stanju:

$$p_2 V = \frac{m}{M} R T_2. \tag{124}$$

Za dovedeno toploto velja:

$$Q = m c_V (T_2 - T_1). \tag{125}$$

Ker je argon enoatomen plin, kar lahko ugotovimo iz razmerja specifičnih toplot, je

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{M}. \tag{126}$$

Iz enačb (123), (125) in (126) izrazimo končno temperaturo T_2:

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{2Q}{3p_1 V}\right) = \tag{127}$$

Nato pa iz enačb (123), (124) in (127) dobimo še končni tlak p_2:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = p_1 \left(1 + \frac{2Q}{3p_1 V}\right) = \tag{128}$$

Sprememba entropije pa je:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = m c_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} =$$

$$= \frac{3p_1 V}{2T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{3p_1 V}{2T_1} \ln\left(1 + \frac{2Q}{3p_1 V}\right) =$$

36. V posodi je 8 dm^3 helija pri tlaku 2.3×10^4 N/m^2 in temperaturi 20 °C. Plinu dovedemo 80 Joulov toplote tako, da ostane tlak konstanten. Kolikšna sta končna prostornina in temperatura plina? Kolikšna je sprememba entropije? Razmerje specifičnih toplot je 5/3.

37. Bolnik potrebuje prevoz do najbližje bolnišnice, ki bo predvidoma trajal $t = 25$ minut. Bolniku morajo dodajati 60 % ($\eta = 0.6$) kisika O_2 v vdihanem zraku. Bolnik vdihava kisik pod tlakom $p = 1$ bar, s frekvenco $\nu = 15$ vdihov/min,

povprečna prostornina vsakega vdiha pa je $V_1 = 700$ ml. Ali za prevoz tega bolnika zadostuje trilitrska jeklenka kisika pod tlakom $p_\mathrm{j} = 80$ bar? Upoštevajte, da je raztezanje kisika izotermno.

Rešitev:
Bolnik porablja kisik s prostorninskim pretokom

$$\Phi_V = \eta V_1 \nu = 0.6 \cdot 700\mathrm{ml} \cdot 15/\mathrm{min} = 6.3\mathrm{l/min},$$

prevoz pa traja 25 min, tako da med prevozom porabi

$$V = \Phi_V t = 157.5\mathrm{l}.$$

Zanima nas, kolikšna prostornina kisika je na voljo v jeklenki. Na voljo je

$$V = \frac{p_\mathrm{j} V_\mathrm{j}}{p}$$

kisika, torej

$$V = \frac{80\mathrm{bar} \cdot 3\mathrm{l}}{1\mathrm{bar}} = 240\mathrm{l}.$$

Ker je na voljo večja prostornina, kot jo bolnik porabi v 25 min, jeklenka zadostuje za predvideni čas prevoza.

38. Bolnik s kronično obstruktivno okvaro pljuč potrebuje trajno dodajanje 20 % ($\eta = 0.2$) kisika O_2. Za koliko časa zadostuje trilitrska jeklenka ($V_\mathrm{j} = 3\mathrm{l}$), če bolnik v povprečju porabi $V_1 = 0.4\mathrm{l}$ plina pri vdihu, kisik pa je v jeklenki pod tlakom $p_\mathrm{j} = 150\mathrm{bar}$? Bolnik vdihne v povprečju 20 krat v minuti pri tlaku $p = 1$ bar. Upoštevajte, da je raztezanje kisika izotermno.

Rešitev:
Prostornina kisika pri enem vdihu V_1 je

$$V_1 \eta = 0.08\mathrm{l},$$

v eni minuti pa je

$$V_{1\mathrm{min}} = 20 \cdot 0.08\mathrm{l} = 1.6\mathrm{l}.$$

Iz jeklenke lahko dobimo

$$V = \frac{p_{\mathrm{j}} V_{\mathrm{j}}}{p} = 450\mathrm{l}.$$

Jeklenka, ki drži tri litre, torej zadostuje za

$$t = \frac{V}{V_{1\mathrm{min}}} \mathrm{min} = 281\mathrm{min} \simeq 4.7\mathrm{h}.$$

39. Prostornina dihalnega balona je $V = 1\mathrm{l}$. Vsebino balona s stiskanjem izpraznimo v bolnikova pljuča v $t = 1$ s. Na balon s cevko priključimo vir čistega kisika O_2 ($\eta_{\mathrm{c}} = 1$). Prostorninski pretok kisika po cevki je $\Phi_V = 15$ l/min. Izračunajte odstotek kisika v dihalni zmesi (η), ki jo sestavljata zrak iz balona in dodani kisik pri enem vdihu. Delež kisika v zraku je $\eta_{\mathrm{z}} = 0.2$.

Rešitev:
Bolnik vdihne v 1 s 1 l dihalne zmesi, sestavljene iz zraka, ki vsebuje 20 % kisika in iz dodanega čistega kisika,

$$\eta V = \eta_{\mathrm{z}} V_{\mathrm{z}} + \eta_{\mathrm{c}} V_{\mathrm{c}},$$

kjer je V_{z} prostornina zraka v dihalnem balonu, V_{c} pa prostornina dodanega kisika. V času, v katerem se izprazni dihalni balon, priteče vanj

$$V_{\mathrm{c}} = \Phi_V \cdot t = 15\mathrm{l/min} \cdot 1\mathrm{s} = 0.25\mathrm{l}$$

čistega kisika. Prostornino kisika iz zraka dobimo tako, da od celotne prostornine dihalne zmesi odštejemo prostornino dodanega kisika,

$$V_{\mathrm{z}} = V - V_{\mathrm{c}}.$$

Delež kisika v dihalni zmesi η je tako

$$\eta = \frac{\eta_{\mathrm{z}}(V - V_{\mathrm{c}}) + \eta_{\mathrm{c}} V_{\mathrm{c}}}{V} = \frac{0.2(1 - 0.25)\mathrm{l} + 0.25\mathrm{l}}{1\mathrm{l}} = 0.4.$$

40. Stenska ura ima nihalo, sestavljeno iz zelo lahke kovinske palice na koncu katere je pritrjena majhna polna krogla. Ocenite, kolikokrat več zaniha nihalo ponoči od 19h do 7h, kot podnevi od 7h do 19h, če je razlika med povprečnima temperaturama dneva in noči 15 C. Povprečni nihajni čas nihala podnevi je 2 s, koeficient dolžinskega temperaturnega raztezka kovine, iz katere je narejena palica pa je $10 \times 10^{-6} K^{-1}$. ($\Delta N = 1.6$)

41. V posodi je kisik pri tlaku 4×10^4 N/m^2 in temperaturi 20 °C. Plin adiabatno raztegnemo na dvojno prostornino. Kolikšna sta končna temperatura in tlak plina? Razmerje specifičnih toplot je 7/5.

42. Koliko energije dobimo, če popijemo en liter hladnega vina (T = 8 °C)? Temperatura v želodcu je 38 °C, kilogram vina pa odda pri presnovi 3×10^6 J. Za specifično toploto in gostoto vina vzemite kar ustrezne vrednosti za vodo. (2.86×10^6 J)

43. V nekem meteorološkem modelu opišemo atmosfero z enačbo $p/\varrho =$ konst., kjer je p tlak in ϱ gostota zraka. Ocenite lego z_t težišča take atmosfere! Tlak pri površini zemlje je $p_0 = 10^5$ Pa, temperatura pa $T = 0$ °C, masa kilomola zraka je $M =$ 29 kg.

    Rešitev:
    Tako tlak, kot gostota zraka sta odvisna od nadmorske višine z, torej $p = p(z)$ in $\varrho = \varrho(z)$. Razmerje med njima pa je po predpostavki meteorološkega modela konstantno:

$$\frac{p(z)}{\varrho(z)} = \frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{RT}{M}.$$

    Pri tem je ϱ_0 gostota zraka tik nad morsko gladino, ocenimo pa jo lahko s pomočjo plinske enačbe:

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{RT}. \tag{129}$$

    Najprej poiščimo odvisnost tlaka od nadmorske višine $p(z)$. Če se premaknemo navzgor za dz, se tlak zmanjša za dp. Velja torej:

$$dp = -\varrho(z) g dz = -\frac{Mg}{RT} p(z) dz.$$

Pri tem smo $\varrho(z)$ zopet izrazili s tlakom $p(z)$ s pomočjo plinske enačbe. Spreminjanja težnega pospeška g z višino pa ne upoštevamo, ker bi enačbe postale preveč zapletene. Poleg tega se do višine 10 km, kjer skoraj ni več zraka, težni pospešek spremeni za manj kot 1 %. Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz,$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT} z,$$

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right). \qquad (130)$$

Od tod sledi še odvisnost gostote zraka od nadmorske višine:

$$\begin{aligned} \varrho(z) &= \frac{M}{RT} p(z) = \frac{p_0 M}{RT} \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \\ &= \varrho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right). \end{aligned} \qquad (131)$$

Težišče atmosfere izračunamo po definiciji težišča:

$$z_t = \frac{\int_0^\infty z\varrho(z) dz}{\int_0^\infty \varrho(z) dz} = \frac{\int_0^\infty z\varrho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) dz}{\int_0^\infty \varrho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) dz} = \frac{RT}{Mg} = 7978 \text{ m}.$$

44. V nekem meteorološkem modelu opišemo atmosfero z enačbo $p/\varrho =$ konst., kjer je p tlak in ϱ gostota zraka. Ocenite gostoto zraka na višini $z = 3000$ m od morske gladine, če je tlak pri morski gladini je $p_0 = 10^5$ Pa, temperatura pa $T = 20^o$ C. Masa kilomola zraka je $M = 29$ kg. Zrak obravnavamo kot idealen plin.

Rešitev:
Naloga je zelo podobna prejšnji nalogi, zato je ne bomo reševali

še enkrat od začetka. Iskano gostoto izračunamo z uporabo enačb (129) in (131):

$$\begin{aligned}\varrho(z) &= \varrho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \\ &= \frac{p_0 M}{RT} \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = 0.704\ \text{kg/m}^3.\end{aligned}$$

45. Porazdelitev velikega števila molekul idealnega plina po komponenti x hitrosti lahko opišemo z Maxwellovo porazdelitveno funkcijo:

$$f(v_x) = B \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right),$$

kjer je B konstanta, m masa ene molekule, k Boltzmannova konstanta, T absolutna temperatura in v velikost hitrosti molekule. Kolikšna je vrednost konstante B, če je plin kisik z molekulsko maso $M = 32$ kg/kmol, temperatura plina je $T = 300$ K in je v posodi $N_0 = 10^{30}$ molekul. molekul?

Rešitev:
Konstanto B določimo iz zahteve, da je integral porazdelitvene funkcije po vseh možnih vrednostih hitrosti v_x enak številu molekul v posodi:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = B \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x = B\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}.$$

Konstanta B je torej:

$$B = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = N_0 \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} = 1.43 \cdot 10^{27}\ \text{s/m}.$$

Pri tem smo v tabelah poiskali integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

46. Porazdelitev velikega števila molekul idealnega plina po velikosti hitrosti lahko opišemo z Maxwellovo porazdelitveno funkcijo:

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kjer je A konstanta, m masa ene molekule, k Boltzmannova konstanta, T absolutna temperatura in v velikost hitrosti molekule. Kolikšna je v tem modelu najverjetnejša velikost hitrosti molekule kisika O_2 ($M = 32$ kg/kmol) pri temperaturi $T = 300$ K. Kolikšna je vrednost konstante A, če je v posodi $N_0 = 10^{30}$ molekul.

Rešitev:
Najverjetnejša velikost hitrosti je tista, pri kateri ima porazdelitvena funkcija $f(v)$ maksimum. Maksimum funkcije poiščemo z odvodom:

$$\frac{df}{dv} = 2 - \frac{mv^2}{kT} = 0,$$

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2kTN_A}{M}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 394 \text{ m/s}.$$

Pri tem smo maso ene molekule plina m izrazili z molekulsko maso plina M in Avogadrovim številom N_A ter upoštevali, da je $R = kN_A$.

Vrednost konstante A določimo iz zahteve, da je integral porazdelitvene funkcije po vseh možnih vrednostih hitrosti v enak številu molekul v posodi:

$$\begin{aligned} N_0 &= \int_0^\infty f(v)dv = A\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \\ &= A\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \tag{132}$$

kjer je

$$A = N_0 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.041 \cdot 10^{25} \text{ s}^3\text{m}^{-3}.$$

Pri tem smo v tabelah poiskali integral:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}.$$

47. Porazdelitev molekul CO_2 po velikosti hitrosti v podaja Maxwell - Boltzmannova funkcija:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kjer je m masa ene molekule CO_2, k Boltzmannova konstanta, v velikost hitrosti molekule in T absolutna temperatura plina. Molekulska masa CO_2 je $M = 44$ kg/kmol. Kolikšna je najverjetnejša hitrost v_0 molekul tega plina, če je koren povprečnega kvadrata hitrosti $\sqrt{< v^2 >}$ enak 500 m/s? Kolikšna je temperatura plina?

Rešitev:
Povprečni kvadrat velikosti hitrosti je definiran kot:

$$\begin{aligned} < v^2 > &= \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \\ &= \frac{3kT}{m}. \end{aligned}$$

Pri tem smo v tabelah poiskali integral:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}.$$

Temperatura plina je torej

$$T = \frac{m < v^2 >}{3k} = \frac{M < v^2 >}{3R} = 441 \text{ K}.$$

Najverjetnejša hitrost molekule tega plina pa je:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 408 \text{ m/s}.$$

48. Porazdelitev velikega števila molekul dvoatomnega ($M = 16$ kg/kmol) idealnega plina po velikosti hitrosti opišemo z Maxwellovo porazdelitveno funkcijo:

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kjer je A konstanta, m masa ene molekule plina, k je Boltzmannova konstanta, v je velikost hitrosti molekule plina in T absolutna temperatura. Kolikšna je povprečna kinetična energija ene molekule tega plina, če je število molekul plina, ki imajo hitrosti v intervalu 249-250 m/s enako številu molekul, ki imajo hitrosti v intervalu 549-550 m/s?

Rešitev:
Ker gre za ozke hitrostne intervale, smemo nalogo reševati z uporabo diferenciala in ni potrebno brskanje po tabelah funkcije napake. Označimo srednjo hitrost v prvem hitrostnem intervalu $v_1 = 249.5$ m/s in srednjo hitrost v drugem intervalu $v_2 = 549.5$ m/s. Število molekul dN, ki imajo hitrosti v ozkem hitrostnem intervalu dv okoli srednje hitrosti v je torej približno podano z izrazom:

$$dN = f(v)dv = Av^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Iz zahteve, da mora biti število molekul v obeh hitrostnih intervalih enako, torej sledi:

$$dN_1 = dN_2,$$

$$v_1^2 \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2kT}\right) dv = v_2^2 \exp\left(-\frac{mv_2^2}{2kT}\right) dv,$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \exp\left(\frac{m}{2kT}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right), \ln\frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{4kT}\left(v_2^2 - v_1^2\right),$$

$$kT = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{4\ln\frac{v_2}{v_1}}.$$

Ker je plin dvoatomen, je povprečna kinetična energija $< W_k >$ molekul plina podana z izrazom

$$< W_k > = \frac{5}{2}kT = \frac{5M(v_2^2 - v_1^2)}{8N_A \ln \frac{v_2}{v_1}} = 5 \cdot 10^{-21}\text{J}.$$

Pri tem smo maso ene molekule plina m izrazili z molekulsko maso plina M in Avogadrovim številom N_A.

49. Delo, ki ga opravi 0.01 kg nekega enoatomnega plina pri izotermnem razširjanju na dvakratno začetno prostornino je 687 J. Kolikšen je koren povprečnega kvadrata hitrosti molekul v plinu?
$(< v^2 >)^{1/2} = 545$ m/s

50. V zmes 0.9 kg vode in 0.1 kg ledu pri 0 °C damo kilogramski kos aluminija s temperaturo 200 °C. Kolikšna je končna temperatura in kolikšna je celotna sprememba entropije? Specifična toplota vode je 4200 J/kgK, specifična toplota aluminija je 1008 J/kgK, talilna toplota ledu je 336 kJ/kg.

51. V izolirani posodi zmešamo 0.5 kg pare pri 373 K, 1 kg vode pri 293 K in 0.2 kg ledu pri 273 K. Kaj dobimo? Kolikšna je sprememba entropije? (Dobimo 0.29 kg pare pri 373 K in 1.41 kg vode pri 373 K, $\Delta S = 244$ J/K)

52. Vztrajnik z vztrajnostnim momentom 10 kgm^2 se v začetku vrti s kotno hitrostjo 100 rad/s. Nenadoma nanj pritisnemo z železno zavoro, da se v kratkem času ustavi. Za koliko stopinj se pri tem segreje železna zavora z maso 1.2 kg in specifično toploto 450 J/kgK, če se vztrajnik nič ne segreje?

53. Soba ima obliko kocke z notranjim robom 2 m. Strop in tla ne prevajajo toplote, vse štiri stene pa so v stiku z okolico temperature 10 °C. Najmanj kolikšno moč ima električni grelec v sobi, če je stacionarna temperatura v sobi 20 °C? Stranske stene sobe so narejene iz opečnatega zidu debeline 10 cm in toplotne prevodnosti 0.7 W/(Km), ki je prekrit s slojem stiropora debeline 2 cm in toplotne prevodnosti 0.04 W/(Km). (249 W)

54. Opečnati zid debeline 20 cm in toplotne prevodnosti 0.7 W/(mK) je prekrit s slojem stiropora debeline 2 cm in toplotne prevodnosti 0.04 W/(Km). Kolikšna je temperatura na stikališču obeh plasti, če je temperatura v sobi 20 °C, zunanja temperatura pa je 0 °C? (286 K)

55. Ocenite kako debelo odejo s toplotno prevodnostjo 1.8×10^{-2} J/(msK) smemo zaviti ponesrečenca v gorah, ki ima temperaturo 37 °C, da se ne bo pregrel. Temperatura okolice je 10 °C. Telesna površina ponesrečenca je 1.8 m^2, vpliv potenja zanemarimo. Telo oddaja vsako sekundo 40 J toplote. (2.2 cm)

56. Baraka ima stranske stene s skupno površino 24 m^2, ki so debele 2 cm in imajo toplotno prevodnost 0.02 W/mK. Streha barake ima površino 9 m^2, debela je 3 cm in ima toplotno prevodnost 0.01 W/mK, tla barake pa so zelo dobro toplotno izolirana. V baraki je peč z močjo 15 kW. Kolikšna je lahko največ temperatura znotraj barake, če je zunaj temperatura +2 °C?

57. Okrogel stolp ima notranji polmer $r_1 = 1.5$ m, višino $h = 5$ m in steno debelo $d = 1.3$ m. Toplotna prevodnost stene je $\lambda = 2$ W/mK, tla in strop stolpa pa sta zelo dobro toplotno izolirana. V stolpu je peč z močjo $P = 1800$ W. Kolikšna je lahko največ temperatura (T_1) v stolpu, če je zunaj temperatura T_2 = -3 °C?

    Rešitev:
    V ravnovesnem stanju, ko se v stolpu vzpostavi končna temperatura T_1, vsa toplotna moč, ki jo peč oddaja, odteče skozi steno stolpa v obliki toplotnega toka. Velja torej:

$$P = -\lambda S \frac{dT}{dr}.$$

    Pri tem je S površina stene stolpa,

$$S = 2\pi r h.$$

Iz teh dveh enačb dobimo:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi\lambda h}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r},$$

$$T_1 = T_2 + \frac{P}{2\pi\lambda h}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 18.9\ ^o\mathrm{C}.$$

Pri tem je $r_2 = r_1 + d = 2.8$ m zunanji polmer stene stolpa.

58. Posoda v obliki krogle ima notranji polmer $r_1 = 10$ cm in steno debelo $d = 8$ cm. Napolnimo jo z vodo, ki ima temperaturo $T_1 = 95$ °C. Kolikšna je temperatura (T_3) vode v posodi po $t = 223$ s, če je zunaj temperatura $T_2 = 5$ °C? Toplotna prevodnost stene posode je $\lambda = 5$ W/mK, specifična toplota vode je $c_p = 4200$ J/kgK, gostota vode pa $\varrho = 1$ g/cm^3.

Rešitev:
Voda v posodi se ohlaja, zato se ji temperatura $T(t)$ s časom znižuje. Toplota, ki jo voda odda, odteče skozi steno posode v obliki toplotnega toka P. Tudi ta toplotni tok je odvisen od časa ($P = P(t)$), saj se temperaturna razlika med vodo in okolico posode $T(t) - T_2$, ki toplotni tok poganja, prav tako zmanjšuje. Velja torej:

$$P = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr}.$$

Pri tem je $4\pi r^2$ površina stene skozi katero odteka toplotni tok. Od tod sledi:

$$dT = -\frac{P}{4\pi\lambda}\frac{dr}{r^2},$$

$$\int_{T(t)}^{T_2} dT = -\frac{P(t)}{4\pi\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2},$$

$$T_2 - T(t) = \frac{P(t)}{4\pi\lambda}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right). \tag{133}$$

Pri tem je r_2 zunanji polmer posode $r_2 = r_1 + d = 18$ cm. Ker voda oddaja toplotni tok $P(t)$ se ji znižuje temperatura. Velja:

$$P(t) = -mc_p\frac{dT}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho c_p\frac{dT}{dt}.$$

Maso vode v posodi m smo izrazili z gostoto vode ϱ in prostornino posode $V = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. Dobimo torej:

$$T_2 - T(t) = \frac{\varrho r_1^2 c_p}{3\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2} \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Ločimo spremenljivki temperaturo T in čas t ter integriramo:

$$\int_0^t dt = \frac{\varrho r_1^2 c_p}{3\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T_2 - T},$$

$$t = -\frac{\varrho c_p r_1^2 (r_2 - r_1)}{3\lambda r_2} \ln\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right), \qquad (134)$$

$$T_3 = T_2 + (T_1 - T_2)\exp\left(-\frac{3\lambda r_2 t}{\varrho c_p r_1^2 (r_2 - r_1)}\right) = 80.2^o\text{C}.$$

59. Posoda, ki ima obliko krogle ima polmer $r_1 = 15$ cm, obložena pa je z $d = 8$ cm debelo plastjo izolatorja, ki ima toplotno prevodnost $\lambda = 0.1$ W/mK. V posodi je voda, ki ima temperaturo $T_1 = 95$ °C, okolica posode pa ima temperaturo $T_2 = 3$ °C. Kolikšen toplotni tok (P_0) teče skozi izolator v začetku? Po kolikšnem času (t) se temperatura vode v posodi zniža na T_3 = 70 °C? Specifična toplota vode je $c_p = 4200$ J/kgK, gostota vode pa $\varrho = 1$ g/cm^3.

Rešitev:
Naloga je zelo podobna prejšnji nalogi, zato ne bomo še enkrat ponavljali celotne rešitve. Toplotni tok v začetku P_0, uganemo iz enačbe (133):

$$P_0 = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)} = 50 \text{ W}.$$

Pri tem je $r_2 = r_1 + d = 23$ cm. Čas, ki je potreben, da se temperatura vode v posodi zniža na 70 ^{o}C pa sledi iz enačbe (134):

$$t = -\frac{\varrho c_p r_1^2 (r_2 - r_1)}{3\lambda r_2} \ln\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right) = 34743 \text{ s}.$$

60. Zaradi slabe izolacije priteče v hladilnik skozi stene vsako uro 1.8×10^6 J toplote ($P_0 = 500$ W). Koliko moči (P) troši hladilnik, če želimo, da je v njem temperatura ves čas konstantna? Temperatura v hladilniku je T_1 = -23 °C, temperatura okolice pa je T_2 = 27 °C.

Rešitev:
Če želimo odčrpati toploto Q iz hladnejšega toplotnega rezervarja s temperaturo T_2 v toplejši toplotni rezervar s temperaturo T_2, $T_2 > T_1$, moramo dovesti delo A. Pri idealnem hladilniku velja:

$$A = Q\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right). \tag{135}$$

Razmerje med dovedenim delom in odčrpano toploto

$$\eta = \frac{A}{Q} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right), \tag{136}$$

ima v različnih knjigah različna imena. Pogosto sta v rabi izraza učinkovistost hladilnika in izkoristek hladilnika. Razmerje η pove, koliko J dela moramo dovesti, da lahko odčrpamo 1 J toplote.

Pri toplotnem stroju definiramo podobno količino, ki je razmerje med opravljenim delom stroja stroju dovedeno toploto. Temu pravimo izkoristek toplotnega stroja in je vedno manjši od 1. Izkoristek hladilnika definiran z enačbo (136) pa je lahko tudi večji od 1, kar se ne sklada s klasičnim razumevanjem pojma izkoristek. Zato se nekateri pri hladilniku izogibajo izrazu izkoristek in raje uporabljajo izraz učinkovitost ali učinek hladilnika. Iz enačbe (136) pa se hitro vidi tudi tole. Učinkovitost hladilnika η je tem večja, čim večja je temperaturna razlika med toplotnima rezervarjema. To pomeni, da je pri večji temperaturni razliki potrebno dovesti več dela za odčrpanje 1 J toplote, kar je nekoliko v nasprotju s klasičnim pomenom pojma učinkovitost. Zato nekateri za činkovitost hladilnika raje definirajo obratno vrednost izraza (136). Obratna vrednost $1/\eta$ pove koliko J toplote lahko odčrpamo z 1 J dovedenega dela. Ta vrednost pa se zmanjša, če se poveča temperaturna razlika med rezervarjema, kar je bolj v skladu s klasičnim razumevanjem pojma učinkovitost.

Enačbo (135) enkrat odvajamo po času in dobimo

$$P = P_0\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 100\ \mathrm{W}.$$

Pri tem je $P = \frac{dA}{dt}$ moč, ki jo porablja hladilnik, $P_0 = \frac{dQ}{dt}$ pa toplotni tok, ki ga hladilnik odvaja iz hladnejšega toplotnega rezervarja, to je iz svoje notranjosti. V enačbe moramo seveda vstavljati absolutno temperaturo.

61. Vodo mase $m = 6$ kg in temperature $T_3 = 24$ °C damo v hladilnik. Okolica hladilnika ima temperaturo $T_2 = 26$ °C. Koliko dela A moramo dovesti hladilniku, da ohladi vodo na temperaturo $T_1 = 0$ °C? Specifična toplota vode je $c_p = 4200$ J/kgK. Predpostavite, da gre za idealni hladilnik!

Rešitev:
Najprej poglejmo grobo oceno. Če želimo 6 kg vode ohladiti od 24 °C na 0 °C, mora hladilnik odčrpati toploto

$$Q = mc_p(T_3 - T_1) = 604800\ \mathrm{J}.$$

Delo, ki ga je hladilniku potrebno dovesti, da bo to lahko opravil pa je

$$A = Q\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = mc_p(T_3 - T_1)\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 57600\ \mathrm{J}.$$

Pri zgornji oceni nismo upoštevali, da se temperatura vode v T notranjosti hladilnika spreminja od $T_3 = 24$ °C na začetku hlajenja do $T_1 = 0$ °C in da se zato tudi učinkovitost hladilnika $\eta = (\frac{T_2}{T} - 1)$ spreminja. Če dovedemo majhno količino dela dA, odčrpamo toploto dQ, temperatura vode v hladilniku pa se zniža za dT. Velja torej:

$$dA = dQ\left(\frac{T_2}{T} - 1\right) = -mc_p dT\left(\frac{T_2}{T} - 1\right),$$

$$A = -mc_p \left[T_2 \int_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T} - \int_{T_3}^{T_1} dT \right],$$

$$A = -mc_p \left[T_2 \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right) - (T_1 - T_3) \right] = 30085 \text{ J}.$$

Malo se ustavimo pri dobljenem rezultatu. Drugi člen, $mc_p(T_3 - T_1)$, je enak odvedeni toploti. Delo, ki ga moramo dovesti hladilniku, da to toploto odčrpa pa je manjše, ker je učinkovitost hladilnika ves čas manjša od 1, za kar poskrbi prvi člen, torej $mc_p T_2 \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$.

62. Iz vode s temperaturo 10 °C želimo dobiti led s temperaturo 0 °C. Razmerje med delom, ki ga dovedemo hladilniku in toploto, ki jo hladilnik odčrpa iz hladnejšega toplotnega rezervoarja, je 0.1. Najmanj koliko dela je potrebno dovesti za pridobitev 1 kg ledu? Specifična toplota vode je 4200 J/KgK, talilna toplota ledu je 336 kJ/kg. (41.8×10^3 J)

63. V hladilnik postavimo $m = 0.4$ kg vode s temperaturo $T_1 = 0$ °C. V kolikšnem času se ta voda spremeni v led, če ima motor hladilnika moč $P = 40$ W, okolica hladilnika pa temperaturo $T_2 = 25$ °C? Predpostavite, da gre za idealni Carnotov hladilnik! Talilna toplota ledu je $q_t = 336$ kJ/kg.

Rešitev:
Da se bo voda spremenila v led, mora hladilnik odčrpati toploto $Q = mq_t = 134.4$ kJ. Za to pa mu je potrebno dovesti delo A:

$$A = Q \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = mq_t \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

To enačbo enkrat odvajamo po času in dobimo

$$P = P_0 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Pri tem je $P = \frac{dA}{dt}$ moč, ki jo porablja hladilnik, $P_0 = \frac{dQ}{dt}$ pa toplotni tok, ki ga hladilnik odvaja. Ta toplotni tok je:

$$P_0 = \frac{P}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)}.$$

Čas t, ki je potreben, da odčrpamo toploto Q pa je:

$$t = \frac{Q}{P_0} = \frac{mq_t\,(T_2 - T_1)}{PT_1} = 308\ \text{s}.$$

64. V hladilnik, ki ima motor z močjo $P = 20$ W postavimo lonec s $m = 5$ kg vode, ki ima temperaturo $T_3 = 24\ ^\circ$C. Po kolikšnem času t se temperatura vode zniža na $T_1 = 3\ ^\circ$C. Temperatura okolice hladilnika je ves čas $T_2 = 27\ ^\circ$C. Predpostavite, da gre za idealni Carnotov hladilnik in da skozi stene hladilnika od zunaj ne vdira noben toplotni tok! Specifična toplota vode je $c_p = 4200$ J/kgK.

Rešitev:
Delo A, ki ga moramo dovesti hladilniku, da odčrpa toploto Q iz hladnejšega rezervarja s temperaturo T v toplejši rezervar s temperaturo T_2 je podano z izrazom:

$$A = Q\left(\frac{T_2}{T} - 1\right).$$

Ker se med ohlajanjem vode temperatura T znižuje, se učinkovitost hladilnika spreminja. Ko hladilniku dovedemo delo dA, hladilnik odčrpa toploto dQ, temperatura vode pa se zniža za dT. Velja:

$$dA = -mc_p dT\left(\frac{T_2}{T} - 1\right).$$

To enačbo enkrat odvajamo po času in dobimo:

$$P = -mc_p\frac{dT}{dt}\left(\frac{T_2}{T} - 1\right).$$

Pri tem je $P = \frac{dA}{dt}$ moč hladilnikovega motorja. Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\int_0^t dt = -\frac{mc_p}{P}\int_{T_3}^{T_1}\left(\frac{T_2}{T} - 1\right)dT,$$

$$t = -\frac{mc_p}{P}\left[T_2\ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) - (T_1 - T_3)\right] = 1050\ \text{s}.$$

65. Hladilnik ima stene s skupno površino $S = 10$ m^2. Stene so obdane s $a = 5$ cm debelo plastjo izolatorja, ki ima toplotno prevodnost $\lambda = 0.1$ W/mK. Motor hladilnika ima moč $P = 30$ W. Kolikšna je lahko najnižja temperatura T_1 v hladilniku, če je zunaj temperatura +25 °C? Predpostavite, da gre za idealni Carnotov hladilnik!

Rešitev:
Najprej zapišemo zvezo med delom, ki ga dovedemo hladilniku, odčrpano toploto in temperaturama obeh toplotnih rezervarjev:

$$A = Q\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

To enačbo enkrat odvajamo po času in dobimo:

$$P = P_0\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Pri tem je $P = \frac{dA}{dt}$ moč, ki jo porablja hladilnik, $P_0 = \frac{dQ}{dt}$ pa toplotni tok, ki ga hladilnik odvaja. Ta toplotni tok je torej:

$$P_0 = \frac{P}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)}$$

in mora biti enak toplotnemu toku P_v, ki vdira skozi stene hladilnika, zaradi slabe izolacije:

$$P_v = \frac{\lambda S(T_2 - T_1)}{a}.$$

Izenačimo $P_0 = P_v$ in dobimo kvadratno enačbo za temperaturo T_1:

$$\frac{\lambda S}{a}T_1^2 - T_1\left(\frac{2\lambda S T_2}{a} + P\right) + \frac{\lambda S T_2^2}{a} = 0.$$

Rešitvi sta:

$$T_1 = \frac{P + \frac{2\lambda S T_2}{a} \pm \sqrt{P\left(P + \frac{4\lambda S T_2 P}{a}\right)}}{\frac{2\lambda S}{a}}.$$

Pravo rešitev da negativni znak; $T_1 = 277.6\ ^o$K, oziroma 4.6 ^{o}C.

66. Idealni toplotni stroj deluje med toplotnima rezervoarjema s temperaturama $T_2 = 397$ °C in $T_1 = -3$ °C. Kolikšno delo A lahko v idealnem primeru odda ta stroj, če prejme od prvega rezervoarja $Q_2 = 100$ kJ toplote?

Rešitev:
Toplotni stroj prejema toploto Q_2 iz toplejšega toplotnega rezervaja s temperaturo T_2. Po drugem zakonu termodinamike noben toplotni stroj ne more vse dovedene toplote oddati v obliki dela. Del dovedene toplote odda kot delo A, del pa odda kot toploto Q_1 v hladnejši toplotni rezervar s temperaturo T_1, $T_2 > T_1$. Pri tem velja:

$$Q_2 = A + Q_1.$$

Izkoristek toplotnega stroja je definiran kot razmerje med oddanim delom in dovedeno toploto. Za idealni toplotni stroj (to je stroj, ki opravlja Carnotovo krožno spremembo z nekim plinom) velja:

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right). \qquad (137)$$

Izkoristek toplotnega stroja je vedno manjši od 1. Vsak drug toplotni stroj, ki namesto Carnotove opravlja kakšno drugo krožno spremembo ima drugačen (manjši) izkoristek, kot je podan z enačbo (137). Ne glede na vrsto krožne spremembe, ki jo opravlja toplotni stroj pa je izkoristek vedno definiran kot:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\text{opravljeno delo stroja}}{\text{dovedena toplota}} = \\ &= \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}. \end{aligned} \qquad (138)$$

Bralec naj pazi na to, da ne bo prišlo do napak, ker za izkoristek toplotnega stroja (137) in za učinkovitost hladilnika

(136) uporabljamo isto oznako η. Gre namreč za dve različni količini.

V našem primeru je torej delo, ki ga stroj odda lahko največ:

$$A = Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 59700 \text{ J}.$$

67. Idealni toplotni stroj deluje med toplotnima rezevoarjema, ki imata temperaturi 500 °C in 15 °C. Stroj opravi 8000 J dela. Koliko toplote je prejel iz toplejšega rezervoarja?

68. Nek toplotni stroj opravlja naslednjo krožno spremembo z dvoatomnim plinom ($\kappa = 1.4$). Iz začetnega stanja 1 plin najprej preide v prvo vmesno stanje 2 tako, da se adiabatno razpne na petkratno začetno prostornino ($V_2 = 5V_1$). Nato preide v naslednje vmesno stanje 3 tako, da se ohlaja pri konstantni prostornini ($V_3 = V_2$) tlak pa se mu zmanjša. Potem preide v naslednje vmesno stanje 4 z adiabatnim stiskanjem nazaj na začetno prostornino ($V_4 = V_1$). Na koncu pa plinu dovedemo pri konstantni prostornini toliko toplote, da tlak narase nazaj na začetni tlak p_1 in temperatura nazaj na začetno temperaturo T_1. Kolikšen je izkoristek tega toplotnega stroja? (Opisani krožni proces se imenuje Ottov krožni proces, opisani toplotni stroj pa je bencinski motor. Razmerje med prostorninama V_2/V_1 se imenuje kompresijsko razmerje.)

Rešitev:
Ker je prehod iz stanja 1 v stanje 2 adiabaten, velja:

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}, \quad T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}. \tag{139}$$

Podobno velja tudi za stanji 3 in 4:

$$p_4 V_1^{\kappa} = p_3 V_2^{\kappa}, \quad T_4 V_1^{\kappa-1} = T_3 V_2^{\kappa-1}. \tag{140}$$

Velja pa še $V_1 = V_4$, $V_2 = V_3$, $V_2 = 5V_1$. Dovedena toplota Q_2 pri prehodu iz stanja 4 nazaj v stanje 1 je

$$Q_2 = mc_v(T_1 - T_4). \tag{141}$$

Odvedena toplota Q_1 pri prehodu iz stanja 2 v stanje 3 je

$$Q_2 = mc_v(T_2 - T_3). \tag{142}$$

Izkoristek toplotnega stroja pa je potem (138):

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1 - \frac{T_3}{T_2}}{1 - \frac{T_4}{T_1}} = \\ &= 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1} = 0.48\end{aligned}$$

Izkoristek je torej 48 %. Razmerja temperatur smo izrazili z razmerji prostornin z upoštevanjem enačb (139) in (140).

69. Izračunajte izkoristek toplotnega stroja, ki z idealnim dvoatomnim plinom ponavlja naslednjo krožno spremembo. Iz začetnega stanja plin najprej izotermno ($T_2 = T_1$) razpnemo na 7 kratno začetno prostornino ($V_2 = 7V_1$). Nato plin pri konstantni prostornini ($V_3 = V_2$) ohladimo na polovično temperaturo ($T_3 = T_2/2$). Potem plin izotermno ($T_4 = T_3$) stisnemo nazaj na začetno prostornino ($V_4 = V_1$). Nazadnje plin pri konstantni prostornini segrejemo nazaj na začetno temperaturo T_1.

Rešitev:
Najprej poglejmo, koliko toplote stroju dovedemo in koliko toplote stroj odda. Stroju dovajamo toploto pri prehodu iz stanja 1 v stanje 2, to je med izotermnim raztezanjem plina. Dovedena toplota Q_{12} je enaka delu, ki ga plin opravi med raztezanjem:

$$Q_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln 7.$$

Toploto dovajamo tudi pri prehodu iz stanja 4 v stanje 1. Dovedena toplota Q_{41} je

$$Q_{41} = mc_v(T_1 - T_4) = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right) = \frac{5}{4} p_1 V_1.$$

Pri tem smo maso plina m izrazili iz plinske enačbe. Ker je plin dvoatomen, je $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$. Upoštevali pa smo že tudi podana razmerja med prostorninama V_1 in V_2 ter temperaturama T_1 in T_4.

Toploto odvajamo pri prehodu iz stanja 2 v stanje 3. Odvedena toplota Q_{23} je po absolutni vrednosti enaka

$$Q_{23} = mc_v(T_2 - T_3) = \frac{5}{2}p_2V_2\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) = \frac{5}{4}p_2V_2 = \frac{5}{4}p_1V_1.$$

Toploto odvajamo tudi pri prehodu iz stanja 3 v stanje 4, to je pri izotermnem stiskanju plina. Odvedena toplota Q_{34} je po absolutni vrednsoti enaka:

$$Q_{34} = p_4V_4 \ln\frac{V_4}{V_3} = p_4V_1 \ln 7.$$

Izkoristek η toplotnega stroja je potem:

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \frac{Q_{\text{odvedena}}}{Q_{\text{dovedena}}} = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{12} + Q_{41}} = \\
&= 1 - \frac{5p_1V_1 + 4p_4V_1 \ln 7}{4p_1V_1 \ln 7 + 5p_1V_1} = \\
&= \frac{\ln 7\left(1 - \frac{p_4}{p_1}\right)}{\ln 7 + \frac{5}{4}} = \frac{2\ln 7}{4\ln 7 + 5} = 0.30.
\end{aligned}$$

Izkoristek toplotnega stroja je torej 30 %. Upoštevali smo, da je razmerje tlakov je enako razmerju temperatur, kar sledi iz plinske enačbe in dejstva, da sta prostornini V_1 in V_4 enaki.

70. Izračunajte izkoristek toplotnega stroja, ki z idealnim dvoatomnim plinom ponavlja naslednjo krožno spremembo. Iz začetnega stanja plin najprej pri konstantnem tlaku ($p_2 = p_1$) razpnemo na 5 kratno začetno prostornino ($V_2 = 5V_1$). Nato plin pri konstantni prostornini ($V_3 = V_2$) ohladimo tako, da se tlak zmanjša na polovico ($p_3 = p_2/2$). Potem plin pri konstantnem tlaku ($p_4 = p_3$) ohladimo tako, da se skrči nazaj na

začetno prostornino ($V_4 = V_1$). Nazadnje plin pri konstantni prostornini segrejemo tako, da se tlak poveča nazaj na začetno vrednost p_1.

Rešitev:
Najprej poglejmo, koliko toplote stroju dovedemo in koliko toplote stroj odda. Stroju dovajamo toploto pri prehodu iz stanja 1 v stanje 2, in pri prehodu iz stanja 4 v stanje 1, stroj pa toploto oddaja pri prehodih iz 2 v 3 in iz 3 v 4. Dovedena toplota je torej:

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}p_1V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right),$$

$$Q_{41} = mc_v(T_1 - T_4) = \frac{5}{2}p_4V_4\left(\frac{T_1}{T_4} - 1\right) = \frac{5}{2}p_3V_1\left(\frac{T_1}{T_4} - 1\right).$$

Odvedena toplota pa je po absolutni vrednosti:

$$Q_{23} = mc_v(T_2 - T_3) = \frac{5}{2}p_2V_2\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) = \frac{5}{2}p_1V_2\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right).$$

$$Q_{34} = mc_p(T_3 - T_4) = \frac{7}{2}p_3V_3\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right) = \frac{7}{2}p_3V_2\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right).$$

Izkoristek η toplotnega stroja je potem:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{odvedena}}}{Q_{\text{dovedena}}} = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{12} + Q_{41}} =$$

$$= 1 - \frac{5p_1V_2\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) + 7p_3V_2\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right)}{7p_1V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + 5p_3V_1\left(\frac{T_1}{T_4} - 1\right)} =$$

$$= 1 - \frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{5\left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) + 7\frac{p_3}{p_1}\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right)}{7\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) + 5\frac{p_3}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_4} - 1\right)} = 0.13.$$

Izkoristek je torej 13 %. Pri računih smo upoštevali, da je plin dvoatomen in je torej $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M}$ in $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$. Maso plina in razmerja med temperaturami smo izrazili s pomočjo plinske enačbe.

10 Literatura

Pri sestavi nalog smo nekatere naloge povzeli ali priredili iz naslednjih fizikalnih učbenikov ali zbirk fizikalnih problemov:

1. Strnad J. (2002) Fizika (1. del), Mehanika, Toplota, DMFA Slovenije, Ljubljana
2. Strnad J. (1995) Fizika (2. del), Elektrika, Optika, DMFA Slovenije, Ljubljana
3. Strnad J. (2002) Fizika (3.del), Posebna teorija relativnosti, Kvantna fizika, Atomi, DMFA Slovenije, Ljubljana
4. Gros M., Hribar M., Kodre A., Strnad J. (1973) Naloge iz fizike, FNT, Univerza v Ljubljani, Ljubljana
5. Halliday D., Resnick R. (1977) Physics, Parts I and II Combined, J. Wiley & Sons, New York
6. Kladnik R. (1969) Osnove fizike (1. del), DZS Slovenije, Ljubljana
7. Kladnik R. (1971) Osnove fizike (2. del), DZS Slovenije, Ljubljana
8. Babić E., Krsnik R., Očko M. (1990) Zbirka riješenih zadataka iz fizike, Školska knjiga, Zagreb
9. Detoni S., Korbar R., Skubic T. (1974) Naloge iz fizike, DZS Slovenije, Ljubljana
10. Lopac V., Kulišić P., Volovšek V., Dananić V. (1992) Riješeni zadaci iz elektromagnetskih pojava in strukture tvari, Školska knjiga, Zagreb
11. Todorovič M.S., Jovičić O., Jovičić J. (1988) Zbirka ispitnih zadataka iz fizike, Gradževinska knjiga, Beograd
12. Kulišić P., Bistričić L., Horvat D., Narančić Z., Petković T., Pevec D. (1990), Školska knjiga, Zagreb

13. Girt E., Knežević G., Bikić S., Baltić R., Girt E., Pušić Marijanović R. (1991), Svjetlost, Sarajevo

14. Young, D.H., Freedman, A.R. (1996), University Physics, Vol.2, Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

15. Hecht E. (1975), Theory and Problems of Optics, Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York

16. Sena L.A. (1988), A Collection of Questions and Problems in Physics, Mir Publishers Moscow, Moscow

17. Kladnik R., Šolinc H. Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami 1, DZS, Ljubljana (1996)

18. Kladnik R., Šolinc H. Zbirka fizikalnih problemov z rešitvami 2, Državna založba Slovenije, Ljubljana (1984)

Fizikalne konstante

Ime	Simbol	Vrednost
Gravitacijska konstanta	G	6.67259×10^{-11} $\mathrm{Nm^2/kg^2}$
Avogadrovo število	N_A	6.022×10^{23} $\mathrm{mol^{-1}}$
Plinska konstanta	R	8.314510 J/(mol K)
Osnovni naboj	e_0	1.602177×10^{-19} As
Influenčna konstanta	ε_0	8.8542×10^{-12} As/Vm
Indukcijska konstanta	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am
Stefanova konstanta	σ	5.6705×10^{-8} $\mathrm{W/m^2K^4}$
Boltzmannova konstanta	k	1.380657×10^{-23} J/K
Planckova konstanta	h	$6.6260754 \times 10^{-34}$ Js
Hitrost svetlobe	c_0	2.99792×10^{8} m/s
Masa elektrona	m_e	9.10939×10^{-31} kg
Masa protona	m_p	1.67262×10^{-27} kg
Masa nevtrona	m_n	1.67492×10^{-27} kg