Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Diskretne strukture UNI: izredni teoretični izpit

2. julij 2021

Čas pisanja: 45 minut. Dovoljena je uporaba smiselno omejene količine papirnih zapiskov. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. Vse tri naloge so enakovredne. **Vse odgovore dobro utemelji!**

Možnih je 100 točk. Ker je 100 točk težko enakomerno razdeliti na 3 enake dele, je popolna rešitev naloge vredna 33 točk, študent pa dobi še eno dodatno točko.

Rešitve niso enolične. Marsikatera naloga zahteva študentovo izbiro. Zato tudi predstavljene rešitve niso edine možne.

1. naloga

a) Zapiši izjavni izraz I, ki uporabi vsaj dva različna dvomestna izjavna veznika.

b) Zapiši konstrukcijsko drevo izjavnega izraza I.

c) Zapiši pravilnostno tabelo izjavnega izraza I.

d) Kateri od izrazov $I \Rightarrow I$, $I \Leftrightarrow I$, $I \vee \neg I$ imajo v pravilostni tabeli največje število enic?

e) Ali je $I \models \neg I$ pravilen sklep? Utemelji.

f) Ali je $I, \neg I \models I \veebar \neg I$ pravilen sklep? Utemelji.

g) Množico izjavnih veznikov, uporabljenih v I, označimo z M. Ali je M poln nabor izjavnih veznikov?

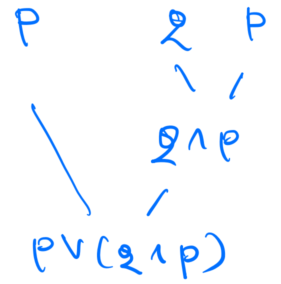
h) Če je M poln nabor, poišči kakšno *maksimalno* podmnožico veznikov $N \subseteq M$, ki ni poln nabor. Če M ni poln nabor, poišči kakšno *minimalno* množico veznikov P, za katero je $M \cup P$ poln nabor.

a) $p \vee (q \wedge p)$

4 točke

V b) in c) želimo konstrukcijsko drevo in pravilnostno tabelo. Zato bi moje imeli čim krajši izraz, samo toliko ne želimo veliko spremenljivk

b)



4 točke

c)

p	q	p	$\vee$	$(q \wedge p)$
0	0	0		0
0	1	0		0
1	0	1		0
1	1	1		1

4 točke

Tole je enako kot p. Ostri pogled pove, da je izbrani izraz najti v absorpciji.

d) $p \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow p$, $p \vee \neg p$ so tavtologije

Zato imajo vsi izrazi $I \Rightarrow I$, $I \Leftrightarrow I$, $I \vee \neg I$ v pravilnostni tabeli same (štiri) enice.

4 točke

e) Ne, pri izbiri $p \sim q \sim 1$ je predpostavka I pravilna, zaključek pa napačen.

4 točke

Mimogrede, sklep $I \models \neg I$ je pravilen npr. $I \sim 0$.

f) Da. Predpostavki sta protislovni, ni protiprimera.

4 točke

Če želimo dokaz pravilnosti, ga najlaže poiščemo s protislovjem.

g) $\{\vee, \wedge\}$ ni poln nabor veznikov, saj ohranja (denimo) 0.

4 točke

h) Dodati je potrebno vsaj en veznik, denimo negacijo.

$P = \{\neg\}$

5 točke

2. naloga

a) Kdaj pravimo, da je ena množica vsebovana v drugi?

b) Izberi paroma nedisjunktne, neprazne in različne množice A, B, C, ki so vsebovane v $\{1, \ldots, 10\}$ in imajo vsaka po največ 5 elementov.

c) Ali je $A \subseteq B \cup C$?

d) Poišči vse rešitve enačbe $B + X = C$.

e) Opiši/določi relacijo R na množici A, ki je tranzitivna in antisimetrična ter ni enaka relaciji identitete.

f) Določi relacijo R^{-1}.

g) Ali je $R^* = R$? Zakaj, zakaj ne?

h) Ali je R relacija delne urejenosti?

a) $A \subseteq B$ ko je vsak element množice A tudi element množice B

4 točke

b) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{1,3,5,7\}$, denimo,

4 točke

c) Ne, saj $2 \in A$, toda $2 \notin B \cup C$

4 točke

d) $B + X = C$

4 točke

$B + B + X = B + C$

$X = B + C = \{1, 4, 6, 7\}$

Za R proglasimo relacijo "manjše ali enako"

e) Najbolj enostaven zgled je relacija $\leq$ (na $\{1,2,3,4\}$) 4 točke

f) V tem primeru je relacija R^{-1} enaka relaciji $\geq$ (na $\{1,2,3,4\}$)

4 točke

g) Ker je R tranzitivna in refleksivna, je $R^* = R$

4 točke

h) Da, R je "znana" delna (celo linearna) urejenost.

5 točk

Pri kaki drugi izbiri relacije R (denimo "strogo manjše"), lahko dobimo tudi drugačen odgovor.

3. naloga

a) Zapiši neničelno števko s, ki se *ne* pojavi v tvoji vpisni številki.

b) Poišči permutacijo α s ciklično strukturo $[1,3,3,5]$, za katero velja $\alpha(1) = s$.

c) Poišči permutacijo β, za katero je $\alpha * \beta \neq \beta * \alpha$.

d) Poišči permutacijo $\gamma \neq \alpha$, za katero je $\alpha * \gamma = \gamma * \alpha$.

e) Določi ciklične strukture permutacij α^2, α^3 in α^4.

f) Kakšen je red permutacije α?

g) Poišči vse eksponente $n \in \{2020, \dots, 2025\}$, za katere je rešljiva enačba $\pi^n = \alpha$.

h) Ali obstaja permutacija ψ, katere red je manjši kot vsota dolžin njenih disjunktnih ciklov? Utemelji.

a) Denimo $s = 7$ — 1 točka

b) $\alpha = (1\ 7\ 2)(3\ 4\ 5)(6)(8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ — 4 točke

c) Možnosti je precej. Morda je najlažje izbrati kar transpozicijo, ki "zagrabi" dva cikla permutacije α. Denimo

$\beta = (1\ 6)$ — 4 točke

$\alpha * \beta = (6\ 1\ 7\ \ldots$

$\beta * \alpha = (6\ 7\ 2\ \ldots$

d) Spet je veliko možnosti. Če se hočemo izogniti id, je denimo $\gamma = \alpha^2$ dobra rešitev, saj

$\gamma * \alpha = \alpha^2 * \alpha = \alpha^3$ — 4 točke

$\alpha * \gamma = \alpha * \alpha^2 = \alpha^3$

e) Ni potrebno izračunati permutacij $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$

α^2 ima c. strukturo $[1,3,3,5]$

α^3 ima c. strukturo $[1,1,1,1,1,1,1,5]$ — 4 točke

α^4 ima c. strukturo $[1,3,3,5]$

f) Red permutacije α je 15 $(\mathrm{lcm}(1,3,3,5))$ — 4 točke

g) Težave so lahko v primerih, ko 3 ali 5 delita eksponent n.

$n = 2020, 2025$ ni rešljiva, 5 cikel (ki mora biti prisoten v α) razpade

$n = 2021, 2023, 2024$ je rešljiva, dopustna c.s za α je $[1,3,3,5]$ saj je eksponent tuj 3 oz. 5

$n = 2022$ ni rešljiva, saj tako 3 cikel kot 6 cikel (vsaj eden od njiju je prisoten v α) razpadeta

8 točk

h) Da. Če ima permutacija veliko ciklov iste dolžine, potem taki dodatni cikli ne vplivajo na red. Identiteta je gotovo dober (čeprav trivialen) zgled, tudi $(1 2)(3 4)$

4 točke