Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Diskretne strukture UNI: teoretični izpit

30. avgust 2021

Čas pisanja: 45 minut. Dovoljena je uporaba smiselno omejene količine papirnih zapiskov. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. Vse tri naloge so enakovredne. **Vse odgovore dobro utemelji!**

Možnih je 100 točk. Ker je 100 točk težko enakomerno razdeliti na 3 enake dele, je popolna rešitev naloge vredna 33 točk, študent pa dobi še eno dodatno točko.

Rešitve niso enolične. Marsikatera naloga zahteva študentovo izbiro. Zato tudi predstavljene rešitve niso edine možne.

Samo pravilni odgovor da/ne seveda ni dovolj. Za dosego polnega števila točk je potrebna utemeljitev.

1. naloga

a) Kaj je potenčna množica množice A?

b) Ali je $\mathcal{P}(A \times B)$ enako $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}B$?

c) Ali je $\mathcal{P}(A \cap B)$ enako $\mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$?

d) Ali je $\mathcal{P}(A \cup B)$ enako $\mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B$?

e) Paroma disjunktne množice A, B in C imajo vsaka po štiri elemente. Kolikšna je največja in najmanjša možna moč množice $(A \cup B) \setminus C$? definicija

f) Kakšno je v tem primeru najmanjše možno število elementov $\mathcal{P}(A \cup B)$?

g) Za relacijo R v množici A pravimo, da je *intranzitivna*, če za vse $a, b, c \in A$ velja implikacija

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow \neg aRc.$$

Opiši kako neprazno intranzitivno relacijo v množici črk slovenske abecede.

h) Ali je vsaka simetrična in tranzitivna relacija tudi refleksivna?

1 točka

a) Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}(A)$, je množica vseh podmnožic množice A.

b) Ne. Na desni imamo kartezični produkt. Če je $A = B = \{0,1\}$, potem $\{(0,0),(0,1),(1,0)\} \subseteq A \times B$ (oz $\in \mathcal{P}(A \times B)$), toda ta množica ni kartezični produkt podmnožice A in podmnožice B. 5 točk

c) Da. Vsaka podmnožica preseka $A \cap B$ (tj. element $\mathcal{P}(A \cap B)$) je vsebovana tako v A, kot v B. Zato pripada $\mathcal{P}A \cap \mathcal{P}(B)$. In obratno. 5 točk

d) Ne. Denimo, da $A = \{a\}$ in $B = \{b\}$. Potem $\{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, toda $\{a,b\}$ ni niti podmnožica A niti podmnožica B. 5 točk

e) Če so A, B, C paroma disjunktne, potem je $|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| = |A| + |B| = 4 + 4 = 8$. Vedno. 4 točke

f) Število elementov v potenčni množici je 2-na-moč-argumenta.
$|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^8 = 256$ 4 točke

g) Zgledov je veliko. Tipičen zgled intranzitivne relacije je "neposredni naslednik". 5 točk
Tj. b je neposredni naslednik a,
c je neposredni naslednik b,
toda (skoraj po definiciji)
c ni neposredni naslednik a

h) Morda koga preseneti tole.
Sklep velja samo, če je definicijsko območje relacije cela množica A. Ne. Denimo prazna relacija.

$aRb \Rightarrow bRa$. Tj. če aRb, potem po simetriji velja bRa, po tranzitivnosti pa aRa. Težava je v definicijskem območju. 4 točke

2. naloga

h) nadaljevanje. Kandidati so liha števila z veliko čim manjšimi prafaktorji.

Izkaže se, da je $105 = 3\cdot 5\cdot 7$ dovolj

$$\varphi(105) = 105\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} = 105\cdot\frac{48}{105} < 105\cdot\frac{1}{2}$$

5 točk

a) Poišči dve tromestni števili a in b, ki nista tuji.

b) Poišči tudi tromestno število c, ki je tuje tako a kot b.

c) Z v označimo vsoto števk tvoje vpisne številke. Ali sta v in c tuji števili?

d) Ali obstaja desna stran d, za katero diofantska enačba

$$(a+b)\cdot x + c\cdot y = d$$

ni rešljiva?

e) Kaj je Eulerjeva funkcija φ?

f) Za neko število n velja, da je število njegovih pozitivnih deliteljev enako $n+1-\varphi(n)$. Kaj lahko poveš o takšnem številu n?

g) Kaj lahko poveš o parnosti $\varphi(m)$ glede na parnost argumenta m?

h) Ali obstaja liho število ℓ, za katerega je $\varphi(\ell) < \ell/2$?

Naloge a), b), c) se najlaže lotimo v nasprotnem vrstnem redu.

c) Denimo, da je $v = 21$ (tako zgleda izpitna naloga, ki jo imam pred sabo). Če za c izberem (denimo) 105 $(=5\cdot 21)$, potem v in c nista tuji števili. 4 točke

b) Zdaj lahko za a in b izberemo 104 in 106 (ki sta, ker se od 105 razlikujeta za 1, zagotovo tuji 105). 4 točke

a) Ker sta 104 in 106 sodi števili, nista tuji. 4 točke

d) Odgovor je odvisen od tvoje izbire. V tem primeru opazujemo DE

$$210\cdot x + 105\cdot y = d$$

5 točk

Ta gotovo ni rešljiva za vse d. $\gcd(210,105)=105$, zato noben $d\in\{1,\dots,104\}$ ni desna stran, pri kateri bi bila zgornja LDE rešljiva.

e) $\varphi(n)$ je število števil na celoštevilskem intervalu $[1,\dots,n]$, ki so tuja n. 1 točka

f) Če je n praštevilo, potem je $\varphi(n) = n-1$ in n ima natanko dva pozitivna delitelja. Torej, zveza velja za praštevila.

Za sestavljena števila zveza tipično ne velja. Če je p praštevilski delitelj števila n, potem opazimo števila $p, 2p, 3p, \dots, \frac{n}{p}\cdot p$. Če je n dovolj velik, potem vsaj eno od teh števil ne deli n (in ni tuje n), pa zveza ne velja.

to je dovolj

5 točk

Dovolj velik? 4 je v resnici edino sest. število, ki ustreza.

g) $\varphi(m)$ je tipično sodo (kateri faktorji nastopajo v formuli za izračun φ?), edini izjemi sta 1 in 2, $\varphi(1)=\varphi(2)=1$. 5 točk

h) Da. Če so p_1, p_2, p_3, p_4 vsi različni prafaktorji števila n, potem je

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\left(1-\frac{1}{p_4}\right)$$

3. naloga

a) Zapiši neničelno števko s, ki se *ne* pojavi v tvoji vpisni številki.

b) Poišči permutacijo α s ciklično strukturo $[1,3,3,5]$, za katero velja $\alpha(1) = s$.

c) Poišči permutacijo β, za katero je $\alpha * \beta \neq \beta * \alpha$.

d) Poišči permutacijo $\gamma \neq \alpha$, za katero je $\alpha * \gamma = \gamma * \alpha$.

e) Določi ciklične strukture permutacij α^2, α^3 in α^4.

f) Kakšen je red permutacije α?

g) Poišči vse eksponente $n \in \{2020, \ldots, 2025\}$, za katere je rešljiva enačba $\pi^n = \alpha$.

h) Ali obstaja permutacija ψ, katere red je manjši kot vsota dolžin njenih disjunktnih ciklov? Utemelji.

a) Denimo $s = 7$ — 1 točka

b) $\alpha = (1\ 7\ 2)(3\ 4\ 5)(6)(8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ — 4 točke

c) Možnosti je precej. Ponavadi je najlažje izbrati kar transpozicijo, ki "zagradi" dva cikla permutacije α. Denimo

$\beta = (1\ 6)$ — 4 točke

$\alpha * \beta = (6\ 1\ 7 \ldots$

$\beta * \alpha = (6\ 7\ 2 \ldots$

d) Spet je veliko možnosti. Če se hočemo izogniti id, je denimo $\gamma = \alpha^2$ dobra rešitev, saj

$\gamma * \alpha = \alpha^2 * \alpha = \alpha^3$

$\alpha * \gamma = \alpha * \alpha^2 = \alpha^3$ — 4 točke

e) Ni potrebno izračunati permutacij $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$

α^2 ima c. strukturo $[1,3,3,5]$

α^3 ima c. strukturo $[1,1,1,1,1,1,1,5]$ — 4 točke

α^4 ima c. strukturo $[1,3,3,5]$

f) Red permutacije α je 15 ($\operatorname{lcm}(1,3,3,5)$) — 4 točke

g) Težave so lahko v primerih, ko 3 ali 5 delita eksponent n.

$n = 2020, 2025$ ni rešljiva, 5 cikel (ki mora biti prisoten v α) razpade

$n = 2021, 2023, 2024$ je rešljiva, dopustna c.s za α je $[1,3,3,5]$ saj je eksponent tuj 3 in 5

$n = 2022$ ni rešljiva, saj tako 3 cikel kot 6 cikel (saj eden od njiju je prisoten v α) razpadeta

8 točk

h) Da. Če ima permutacija veliko ciklov iste dolžine, potem taki dodatni cikli ne vplivajo na red. Identiteta je gotovo dober (čeprav trivialen) zgled, tudi $(1\,2)(3\,4)$ — 4 točke