torek, 16. julij 2024

Naloga 1. Določi vsa realna števila α, za katera za vsako naravno število n velja, da je celo število

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

večkratnik števila n. (Opomba: $\lfloor z\rfloor$ označuje največje celo število, ki je manjše ali enako z. Na primer, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ in $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Naloga 2. Določi vse pare (a, b) naravnih števil, za katere obstajata naravni števili g in N, tako da velja

$$D(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

za vsa naravna števila $n \geqslant N$. (Opomba: izraz $D(x, y)$ označuje največji skupni delitelj celih števil x in y.)

Naloga 3. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ neskončno zaporedje naravnih števil in naj bo N naravno število. Denimo, da za vsak $n > N$ velja, da je a_n število, kolikokrat se število a_{n-1} pojavi med števili $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dokaži, da je vsaj eno od zaporedij $a_1, a_3, a_5, \ldots$ in $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sčasoma periodično.

(Neskončno zaporedje $b_1, b_2, b_3, \ldots$ je *sčasoma periodično*, če obstajata taki naravni števili p in M, da je $b_{m+p} = b_m$ za vse $m \geqslant M$.)

sreda, 17. julij 2024

Naloga 4. Naj bo ABC trikotnik, za katerega velja $|AB| < |AC| < |BC|$. Naj bo I središče včrtane krožnice ω trikotnika ABC. Naj bo X taka točka na premici BC, ki je različna od C, da je premica skozi X vzporedna premici AC in tangentna na ω. Podobno, naj bo Y taka točka na premici BC, ki je različna od B, da je premica skozi Y vzporedna premici AB in tangentna na ω. Naj premica AI očrtano krožnico trikotnika ABC ponovno seka v točki $P \neq A$. Naj bo K razpolovišče daljice AC in L razpolovišče daljice AB. Dokaži, da je $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Naloga 5. Polž Turbo igra igro na plošči z 2024 vrsticami in 2023 stolpci. Na 2022 poljih plošče so skrite pošasti. Na začetku polž Turbo ne ve za nobeno od pošati, na katerem polju se nahaja, ve pa, da je v vsaki vrstici, razen v prvi in zadnji, natanko ena pošast in da je v vsakem stolpcu največ ena pošast. Polž Turbo se trudi v več poskusih priti od prve vrstice do zadnje vrstice. Pri vsakem poskusu začne na kateremkoli polju v prvi vrstici, za katerega se odloči, nato pa se premika s polja, na katerem se nahaja, na katerokoli sosednje polje, s katerim ima to polje skupno stranico. (Lahko se vrne tudi na polje, ki ga je že obiskal.) Če pride na polje, na katerem je pošast, se njegov poskus konča in je transportiran v prvo vrstico, da začne nov poskus. Pošasti se ne premikajo, polž Turbo pa si za vsako od polj, ki ga je obiskal, zapomni, ali je na polju pošast ali ne. Če polž Turbo pride na katerokoli polje v zadnji vrstici, se njegov poskus konča in igra je končana. Določi najmanjšo vrednost števila n, za katero ima polž Turbo strategijo, ki zagotavlja, da bo prišel do zadnje vrstice v n poskusih ali manj, ne glede na to, kje se pošasti nahajajo.

Naloga 6. Naj bo $\mathbb{Q}$ množica racionalnih števil. Funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ je *aquaesulis* funkcija, če velja naslednje: za vsaka $x, y \in \mathbb{Q}$ je

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ali} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokaži, da obstaja tako celo število c, da za katerokoli aquaesulis funkcijo f obstaja največ c različnih racionalnih števil oblike $f(r)+f(-r)$ za neko racionalno število r, in poišči najmanjšo možno vrednost števila c.