Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Diskretne strukture UNI: 1. računski izpit

24. januar 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dan je sklep

$$A, r \vee s \Rightarrow q \wedge r, \neg t \wedge r \Rightarrow p \models \neg t \Rightarrow p \wedge q.$$

a) Ali je sklep s predpostavko $A \equiv t \vee r \vee s$ pravilen? *Če je pravilen, zapiši dokaz tega sklepa, če ni pravilen, poišči protiprimer.*

1.	$t \vee r \vee s$	pred.
2.	$r \vee s \Rightarrow q \wedge r$	pred.
3.	$\neg t \wedge r \Rightarrow p$	pred
4.1.	$\neg t$	pred PS.
4.2.	$r \vee s$	DS(1, 4.1)
4.3.	$q \wedge r$	MP(4.2, 2)
4.4.	r	Po (4.3)
4.5.	$\neg t \wedge r$	Zd(4.1, 4.4)
4.6.	p	MP(4.5, 3)
4.7.	q	Po (4.3)
4.8.	$p \wedge q$	Zd(4.6, 4.7)
4.	$\neg t \Rightarrow p \wedge q$	PS(4.1, 4.8)

Sklep je pravilen.

b) Ali je sklep s predpostavko $A \equiv \neg s \Rightarrow r \wedge t$ pravilen? *Če je pravilen, zapiši dokaz tega sklepa, če ni pravilen, poišči protiprimer.*

1.	$\neg s \Rightarrow r \wedge t$	pred.
2.	$r \vee s \Rightarrow q \wedge r$	pred.
3.	$\neg t \wedge r \Rightarrow p$	pred
4.1.	$\neg t$	pred PS.
4.2.	$\neg t \vee \neg r$	Pd(4.1, $\neg r$)
4.3.	$\neg(t \wedge r)$	$\sim$ (4.2)
4.4.	s	MT (4.3, 1)
4.5.	$r \vee s$	Pd(4.4, r)
4.6.	$q \wedge r$	MP(4.5, 2)
4.7.	r	Po (4.6)
4.8.	$\neg t \wedge r$	Zd(4.1, 4.7)
4.9.	p	MP(4.8, 3)
4.10.	q	Po (4.6)
4.11.	$p \wedge q$	Zd(4.9, 4.10)
4.	$\neg t \Rightarrow p \wedge q$	PS(4.1, 4.11)

Od tu naprej ponovimo zgornji dokaz (od 4.4...).

Sklep je pravilen.

2. naloga (25 točk)

Preslikavo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiramo z $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, za $|k| \geq 2$ pa z opisom

$$f(k) = \text{alternirajoča vsota eksponentov praštevil v praštevilskem razcepu } k.$$

(Pozitivne praštevilske faktorje v razcepu $k = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$ uredimo od najmanjšega do največjega.) Tako je na primer $f(2 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11) = 1 - 5 + 2 - 1 = -3$, $f(-2^4 \cdot 5^2) = 4 - 2 = 2$ in $f(-3^2 \cdot 11^3) = 2 - 3 = -1$.

a) (4 točke) Izračunaj $f(2023)$.

$2023 = 7 \cdot 17^2$, torej $f(2023) = 7 \cdot 17^2 = 1 - 2 = -1.$

b) (3 točke) Ali je f injektivna?

$f(2 \cdot 3) = 0$ in $f(3 \cdot 5) = 0$, torej f ni injektivna.

c) (8 točk) Ali je f surjektivna?

Za $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \geqslant 0$ velja $f(2^{\ell+1} \cdot 3) = \ell + 1 - 1 = \ell$

in $f(2 \cdot 3^{\ell+1}) = 1 - (\ell+1) = -\ell$.

V $\mathbb{Z}_f$ torej dobimo vsa cela števila in f je surjektivna.

d) (10 točk) Utemelji, da ima za vsak $\ell \in \mathbb{Z}$ enačba $f(k) = \ell$ neskončno mnogo rešitev k.

- Če je $\ell \geq 0$ je $f(2^{\ell+m} \cdot 3^m) = \ell + m - m = \ell$ za vse $m \geqslant 1$, s tem pa je opisanih neskončno mnogo rešitev $k_m = 2^{\ell+m} 3^m$ te enačbe.
- Če je $\ell \leqslant -1$, se znajdemo podobno:

$f(2^m 3^{m-\ell}) = m - (m - \ell) = \ell$ za vse $m \geqslant 1$,

tj. $k_m = 2^m 3^{m-\ell}$ je neskončen nabor rešitev enačbe $f(k) = \ell$.

3. naloga (25 točk)

Števila v šestnajstiškem zapisu običajno zapišemo s predpono 0x, ki ji sledijo števke, ki jih označimo z 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Tako je npr. $0xD8 = 13 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 216$.

Za dvomestno število h v šestnajstiškem zapisu velja naslednje: Ko h prištejemo dvakratnik vsote njegovih števk, dobimo 0xD8. Za katero število h gre?

a) (5 točk) Recimo, da ima h šestnajstiški števki x in y. Zapiši linearno diofantsko enačbo, ki izraža $h + 2(x + y) = 0xD8$.

$h = 16x + y$, torej $16x + y + 2(x+y) = 216$

oz. $18x + 3y = 216$.

b) (10 točk) Poišči splošno rešitev te linearne diofantske enačbe.

$18x + 3y = 216 \quad /:3$

$6x + y = 72$,

torej $y = 72 - 6x$

in $(x,y) = (x, 72-6x)$ za $x \in \mathbb{Z}$

je splošna rešitev.

ali

$18 = 18 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

$3 = 18 \cdot 0 + 3 \cdot 1$ 18 : 3 = 6 ost. 0

$0 = 18 \cdot 1 + 3 \cdot (-6)$

$\cdot 72$: $216 = 18 \cdot 0 + 3 \cdot 72$

$\cdot k$: $0 = 18 \cdot k + 3 \cdot (-6k)$

$216 = 18 \cdot k + 3 \cdot (72 - 6k)$,

torej $(x_k, y_k) = (k, 72-6k)$, $k \in \mathbb{Z}$

je splošna rešitev.

c) (10 točk) Poišča vsa, v šestnajstiškem zapisu, dvomestna števila h, za katera je zgornja vsota enaka 0xD8. (Odgovor zapiši v šestnajstiškem zapisu.)

Da bosta x in y števki, mora veljati $0 \leq x \leq 15$ in $0 \leq y \leq 15$.

Torej $y \geq 0 \ldots 72 - 6x \geq 0 \ldots 6x \leq 72 \ldots x \leq 12$

in $y \leq 15 \ldots 72 - 6x \leq 15 \ldots 6x \geq 57 \ldots x \geq \frac{57}{6} \ldots x \geq 10$ } ustreza tudi

Dobimo:

$x = 10, y = 12 \ldots$ **0xAC**

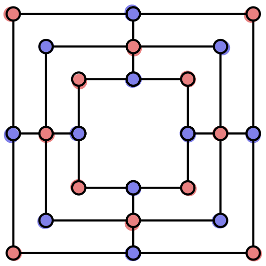
$x = 11, y = 6 \ldots$ **0xB6**

$x = 12, y = 0 \ldots$ **0xC0**

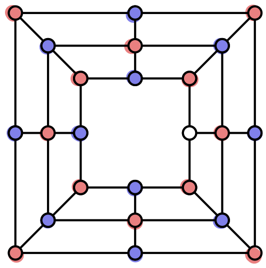
To so dvomestna šestnajstiška števila, ki ustrezajo pogoju iz naloge.

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Določi kromatični števili grafov G_1 in G_2. *Odgovor natančno utemelji!*



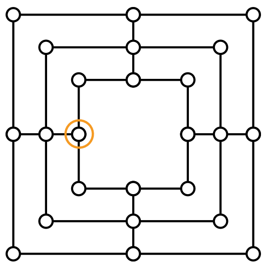
G_1



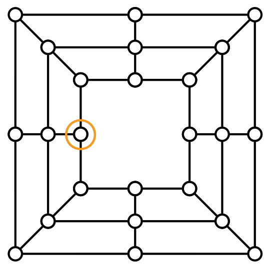
G_2

Ker imata oba grafa povezave je $\chi(G_1) \geq 2$ in $\chi(G_2) \geq 2$. Ker nam je oba grafa uspelo pobarvati z 2 barvama, je: $\chi(G_1) = 2$ in $\chi(G_2) = 2$.

b) (5 točk) Ali sta grafa G_1 in G_2 Eulerjeva? *Odgovor natančno utemelji!*



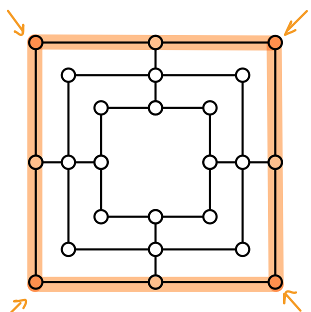
G_1



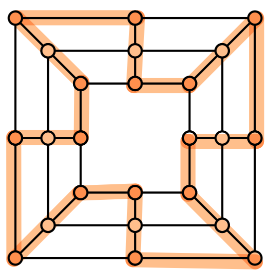
G_2

Obkroženi točki sta lihe stopnje, torej G_1 in G_2 nista Eulerjeva.

c) (10 točk) Ali sta grafa G_1 in G_2 Hamiltonova? *Odgovor natančno utemelji!*



G_1



G_2

Povezave iz označenih točk stopnje 2 v G_1 tvorijo cikel v G_1 (ki ni Hamiltonov). Ker so na vsakem H.c. tudi točke stopnje 2, G_1 ni Hamiltonov.

G_2 je Hamiltonov, Hamiltonov cikel je označen.