1. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$\mathrm{Re}(z^2) + i \cdot \mathrm{Im}(\overline{z} \cdot (1+2i)) = -3.$$

$$\mathrm{Re}(x^2+2ixy-y^2) + i\,\mathrm{Im}((x-iy)(1+2i)) = -3$$

$$x^2 - y^2 + i(2x - y) = -3$$

$$x^2 - y^2 + i(2x-y) = -3$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \text{in} \quad 2x - y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x^2 - (2x)^2 = -3$$

$$-3x^2 = -3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2 \rightarrow z_1 = 1+2i$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -2 \rightarrow z_2 = -1-2i$$

b) (13 točk) Naj bo z rešitev iz točke a) z lastnostjo $\mathrm{Im}(z) > 0$. Poišči vsa kompleksna števila w, ki rešijo enačbo

$$w^3 = z + i - 1$$

in jih nariši v kompleksni ravnini.

$$Z = 1+2i$$

$$|z| = 3$$

$$w^3 = \cancel{1}+2i+i-\cancel{1} = 3i$$

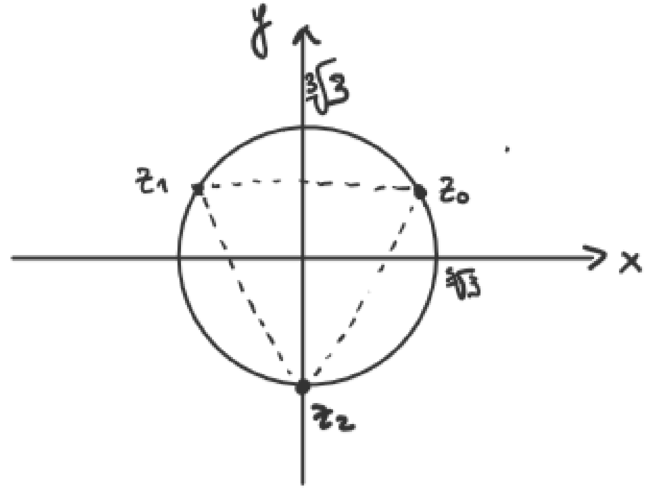
$$w^3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}$$

$$\underline{\underline{w_0 = \sqrt[3]{3}\, e^{\frac{\pi}{6}}}}$$

$$\underline{\underline{w_1}} = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}}}$$

$$\underline{\underline{w_2}} = \sqrt[3]{3}\, e^{\frac{9\pi}{6}} = \sqrt[3]{3}\, e^{\frac{3\pi}{2}} = \underline{\underline{-i\sqrt[3]{3}}}$$



2. naloga (25 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{5}{6-a_n}.$$

$a_0 = 4$ $\quad a_2 = \frac{10}{7} \doteq 1,\ldots$

$a_1 = 2,5$

a) **(20 točk)** Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

$a_{n+1} \leq a_n$

1. baza: $n = 0$

$\frac{5}{2} \leq 4$ ✓

2. I.P.: $a_n \leq a_{n-1}$

3. Hočemo dokazati: $a_{n+1} \leq a_n$

$a_n \leq a_{n-1} \quad /\cdot(-1)$

$-a_n \geq -a_{n-1} \quad /+6$

$6 - a_n \geq 6 - a_{n-1} \quad /^{-1}$

$\frac{1}{6-a_n} \leq \frac{1}{6-a_{n-1}} \quad /\cdot 5$

$\frac{5}{6-a_n} \leq \frac{5}{6-a_{n-1}}$

Je padajoče

$\boxed{a_{n+1} \leq a_n}$

navzdol omejeno:

$a_n \geq m$ za neki $m \in \mathbb{R}$

$m = 1$

1. Baza: $n = 0$

$a_0 \geq 1 \quad 4 \geq 1$

2. I.P.: $a_n \geq 1$

3. Hočemo pokazati $a_{n+1} \geq 1$

$a_n \geq 1 \quad /\cdot(-1)$

$-a_n \leq -1 \quad /+6$

$6 - a_n \leq 5 \quad /^{-1}$

$\frac{1}{6-a_n} \geq \frac{1}{5} \quad /\cdot 5$

$\frac{5}{6-a_n} \geq 1 \Rightarrow \boxed{a_{n+1} \geq 1}$

Dokazano

b) **(5 točk)** Izračunaj limito zaporedja a_n.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

kandidati:

$a = \frac{5}{6-a}$

$a^2 - 6a + 5 = 0$

$(a-5)(a-1) = 0$

$a_1 = 5 \quad // \ a_0 < 5$

$\boxed{a_2 = 1}$ $\quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}}$

3. naloga (25 točk)

a) **(12 točk)** Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ je vrsta

$$\sum_{n=1} 2^n(1-x)^n$$

konvergentna? Za takšne vrednosti vrsto tudi seštej.

kor. krit.

$$C_n = \sqrt[n]{2^n (1-x)^n} = 2(1-x)$$

ko $2(1-x) < 1$ konv. $\Rightarrow 2-2x < 1$

$$-2x < -1$$

$\boxed{x > \frac{1}{2}}$ da konv.

$$\sum_{n=1} 2^n(1-x)^n = 2(1-x) + 4(1-x)^2 + \ldots \longrightarrow \text{geom. vrsta} \quad q = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2\,\cancel{(1-x)^n} \cdot (1-x)}{\cancel{2^n \cdot (1-x)^n}}$$

$$\underline{\underline{q = 2(1-x)}}$$

$$\sum_{n=1} 2^n(1-x)^n = \frac{2(1-x)}{1-2(1-x)} = \frac{2-2x}{1-2+2x} = \boxed{\frac{2-2x}{2x-1}}$$

$$\boxed{x \neq \frac{1}{2}}$$

b) **(13 točk)** Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ je vrsta

$$\sum_{n=1} n^2(1-x)^n$$

~~absolutno konvergentna?~~ Za katere vrednosti x je alternirajoča? ~~Ali je za kakšno vrednost x pogojno konvergentna?~~

$$(1-x) < 0$$

$$\boxed{x > 1}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \arctan(\log(x)).$$

a) (5 točk) Določi definicijsko območje D_f funkcije f. Ali je f monotona? Ali ima kakšno ničlo?

$$\underbrace{D_{\arctan x} = \mathbb{R} \qquad D_{f_{\log x}} = \mathbb{R}^+}_{} \qquad \underline{\underline{D_f = \mathbb{R}^+}}$$

Je monotona (ker je naraščajoča)

Ničla je $x=1$ $(\log 1 = 0)$

b) (5 točk) Ali je f injektivna? Če je injektivna, izračunaj inverz f^{-1}. Če ni, smiselno skrči definicijsko območje, da bo možno definirati inverz.

Je inj zaradi lastnosti log

$x = \arctan(\log(y))$

$\tan x = \log y \Rightarrow \boxed{y = e^{\tan x}}$

c) (5 točk) Skiciraj funkcijo f in njen inverz f^{-1}. (Lahko v isti koordinatni sistem, lahko pa vsak graf v svojega. Poskrbi, da bo jasno označeno, kateri je kateri.)

<u>ne da se mi</u>

Definirajmo še funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{2x}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ f(x), & x > 0, \end{cases}$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti, f pa funkcija, ki je definirana zgoraj.

d) (10 točk) Določi vrednosti a in b, da bo funkcija g zvezna.

$$b = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \overbrace{\arctan(\underbrace{\log(x)}_{-\infty})}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{\boxed{b = -\frac{\pi}{2}}} \qquad -\frac{\pi}{2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax) \cdot a}{a \cdot 2x} = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = -\pi}$$