6. 1. 2020

Grafi

- urejen par točk

$G = (V, E)$

- vozlišča (V)
- povezave (E)

Stopnja točke - število povezav, ki imajo točko za krajišče

n - št. vozlišč
m - št. povezav

Vsak graf ima sodo mnogo točk lihe stopnje

Izomorfizem grafov

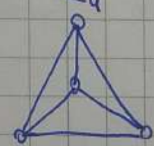
Grafa sta izomorfna, če imata isto št. točk, št. povezav, stopnje točk...

Preslikava $f: V(G_1) \to V(G_2)$ je

- bijektivna
- ohranja sosednost in nesosednost

$G_1 \cong G_2$ - grafa sta izomorfna

Polni grafi



Graf je poln, če sta vsaki njegovi točki sosedni.

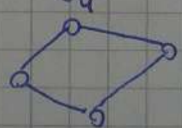
Označimo ga s K_n.

Prazni grafi

Graf je prazen, če nobene točke niso sosednje.

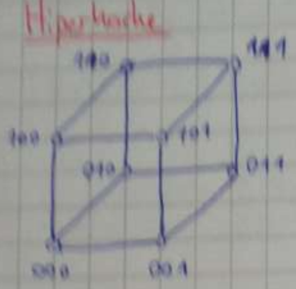
Označimo ga s K_n.

Cikli



Cikel na $n \geq 3$ točkah označimo s C_n.

Hiperkocke



Podgrafi

G_1 je podgraf G_2, če

- $V(G_1) \subseteq V(G_2)$
- $E(G_1) \subseteq E(G_2)$

Podgraf dobimo tako, da odstranimo točke in/ali povezave.

Vpet pograf ima odstranjene samo povezave.

Induciran podgraf ima odstranjene samo točke.

Sprehodi

Sprehod S v grafu $G=(V,E)$ je zaporedje točk, v katerem sta zaporedni točki sprehoda sosedi v grafu.

v_0 - začetek sprehoda

v_n - konec sprehoda

$u - v$: sprehod z začetkom v u in koncem v v.

Sprehod je pot, če nobeni dve točki sprehoda nista isti.

Sprehod je obhod, če je začetna točka ista kot končna.

Sprehod je cikel, če so vse točke sprehoda različne, je dolžine vsaj 3 in je začetna točka ista kot končna.

Stik dveh sprehodov opiše povezave med sprehodoma.
Sprehoda lahko staknemo, če ima eden konec v začetni točki drugega.

S^R je obratni sprehod, če mu zamenjamo vrstni red točk.

Povezanost grafov

Graf je povezan če za vsaki dve točki grafa obstaja $u-v$ sprehod.

P je ekvivalenčna relacija v $V(G)$, ki graf razdeli na ekvivalenčne razrede.

Grafom $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ pravimo povezane komponente.

Razdalja v povezanem grafu

Razdalja med točkama u in v v grafu G ($dist(u,v)$) je dolžina najkrajše $u-v$ poti v G.

Za tri točke na grafu velja trikotniška neenakost: razdalja med dvema točkama je krajša kot med vsotama drugih dveh točk.

$$dist(u,w) \leq dist(u,v) + dist(v,w)$$

Dvodelni grafi

Graf je dvodelen, če lahko točke grafa pobarvamo z dvema barvama tako, da ima vsaka povezava krajišči različnih barv.

Dvodelni:
- hiperkocke
- sodi cikli
- drevesa

Utemeljiš: pobarvaš z 2 barvama

Niso dvodelni:
- cikli z lihim št. točk (lihi cikli)

Utemeljiš: Najdeš cikel lihe dolžine

Eulerjev izrek

Graf je Eulerjev, ko je G povezan in so vsa njegova vozlišča sodih stopenj.

Enostaven sprehod pomeni, da vsako povezavo obiščemo samo enkrat.

Dokaz izreka (O je najdaljši enostaven sprehod v G)

1) O je obhod ... če ni obhod se konča v točki X, ki ni začetek. Potem je vsaj ena povezava v X črna, zato lahko sprehod podaljšamo.

2) Če gre O skozi Y, so vse povezave, ki se dotikajo Y, rdeče.

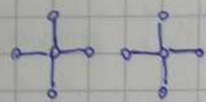
3) Vse točke se dotikajo rdeče povezave ... protislovje z dejstvom, da obstaja točka, ki ni rdeče barve.

Drevesa in gozdovi

Drevo je povezan graf brez ciklov.

Gozd je graf brez ciklov.

Drevo



Gozd

Prerezne točke

v je prerezna točka grafa G, če ima G - v več povezanih komponent kot G.

v je prerezna povezava grafa G, če ima

13. 1. 2020

Drevesa in gozdovi

Drevo je graf brez ciklov (povezan).

Gozd je graf brez ciklov.

Grafi P_n in $K_{1,n}$ so drevesa

Prerezna točka v je tista, kjer ima $G - v$ strogo več povezanih komponent kot G.

Prerezna povezava e je tista, ki ne leži na nobenem ciklu oz. kjer ima $G - e$ strogo več povezanih komponent kot G.

Lastnosti dreves

T – drevo z n točkami in m povezavami.

$m = n - 1$ (št. točk je za ena večje kot št. povezav)

- vsaka povezava v T je prerezna } drugače bi imeli
- za poljubni točki obstaja samo ena pot } cikle
- Če v T dodamo eno povezavo, dobimo en cikel

Vpeto drevo

H je vpeto drevo v G, če je:
- H vpet podgraf v G in
- H drevo

Dokaz: G je povezan, če ima vsaj eno vpeto drevo

($\Leftarrow$) T je vpeto v G

$\forall x,y \in V(G) \ldots \exists$ $x-y$ pot v G

že v drevesu T obstaja enolično določena pot $x-y$.

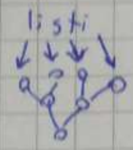
($\Rightarrow$) $\underbrace{G = G_0, G_1, \ldots, G_T}_{\text{povezani (odstranjujemo samo neprerezne povezave)}}$ G_i iz G_{i-1} z odstranjevanjem ene neprerezne povezave

povezan

brez cikla (ker smo vse neprerezne povezave odstranili)

Lahko tudi začnemo brez povezav in dodajamo tiste, ki ne bodo naredile ciklov. (hitreje kot odstranjevanje)

Listi



- točke stopnje ena

$v_1, v_2, \dots, v_n$ $\quad \underbrace{1 \le deg(v_1) \le deg(v_2) \le \dots \le deg(v_n)}_{\text{max ena stopnje 1}}$ stopnje

$$1 \le \underbrace{deg(v_1)}_{\le 1} \le \underbrace{deg(v_2) \le \dots \le deg(v_n)}_{\le 2},$$

$$\underline{\underline{2n-1}} = 1 + 2(n-1) \le \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2 \cdot E(T) = \underline{\underline{2n-2}}$$

protislovje

↓

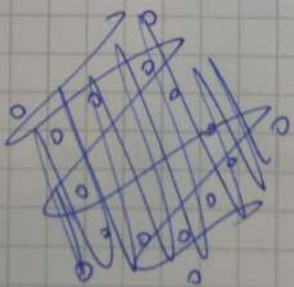
Dokaz, da če je G povezan in je $|V(G)| \ge 2$, potem ima G vsaj dve točki, ki nista prerezni.

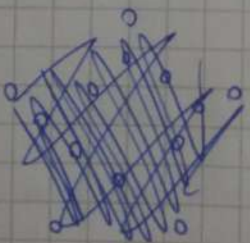
Hamiltonovi grafi

Cikel v grafu je Hamiltonov, če vsebuje vse točke grafa.

- skozi vsako točko gre samo ~~vsaj~~ enkrat (ne rabi čez vse povezave)

Graf je Hamiltonov, če vsebuje vsaj en Hamiltonov cikel.





Ali je graf Hamiltonov?

1) DA
   - narišeš ga

2) NE
   - težko dokazat
   - za vsako permutacijo dokažeš da ni

Zadostni pogoji

G je povezan graf:

Če obstaja podmnožica točk $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$ za katero velja, da ima $G - S$ vsaj $k+1$ povezanih komponent.

Potem graf ni Hamiltonov.

Št. komponent v Hamiltonovem grafu ne sme naraščat hitreje, kot je št. odstranjenih točk.

št. odstr. točk	št. komponent
0	≤ 1
1	≤ 1
2	≤ 2
3	≤ 3
4	≤ 4
5	≤ 5
6	≤ 6
⋮	⋮

Če graf ustreza pogoju še ne pomeni, da je nujno Hamiltonov.

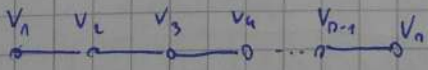
Če pobarvaš graf z dvema barvama in je enih točk več kot drugih, potem graf ni Hamiltonov.

Diracov zadostni pogoj

Če sta u in v nesosedi v Grafu in je $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$, potem je $G + uv$ Hamiltonov, ko je G Hamiltonov.

~~Dokaz~~

~~Naj [illegible] G [illegible] Hamiltonov, G+uv pa graf [illegible]~~



Če dodamo povezavo med v_1 in v_n, dobimo Hamiltonov graf.

$I = \{i;\ v_1 \sim v_i\} \subseteq \{2, \dots, n\}$

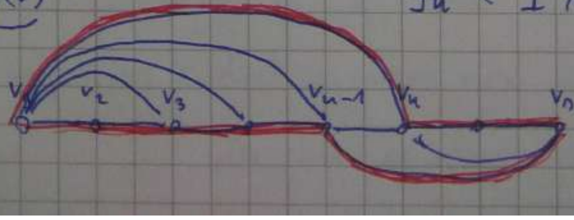
$J = \{j+1;\ v_n \sim v_j\} \subseteq \{2, \dots, n\}$

$|I \cup J| = \underbrace{\underbrace{|I|}_{\deg(u)} + \underbrace{|J|}_{\deg(v)}}_{\geq n} - \underbrace{|I \cap J|}_{\geq 1} \leq n - 1$

$|I \cap J| \neq \emptyset$

$\exists k \in I \cap J$

$\boxed{\text{Če za vsako točko } v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2}, \text{ potem je graf Hamiltonov}}$ ← vsaj 3 točke



Barvanje grafov

k-barvanje grafa G je preslikava $c: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$, za katero velja, $\underbrace{\text{da je } c(u) \neq c(v) \text{ za vsako povezavo } uv \in E(G).}_{\text{nobeni sosednji točki ne smeta imeti iste barve}}$

Kromatično število grafa (χ_G) je najmanjše število barv, ki ga rabimo za barvanje grafa.

$\chi_G \leq |V(G)|$

$\chi_G \leq 1$, če ni povezav v G

$\chi(K_n) = n$; $\chi(\bar{K}_n) = 1$; $\chi(K_{n,m}) = 2$

$\chi(T) = 2$, če je T drevo z vsaj dvema [redacted] točkama

$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{če } n \text{ sod} \\ 3, & \text{če } n \text{ lih} \end{cases}$; $\chi(Q) = 2$, če $d \geq 1$

Dokaz

1) DA – najdeš en primer

2) NE – poiskati vse možnosti

Brooksov izrek

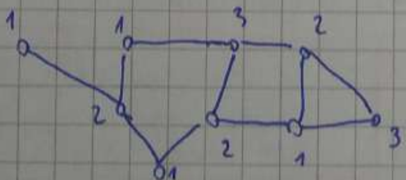
Če graf ni lih cikel ali pa poln graf, potem je

$\chi(G) \leq \Delta(G)$

Požrešno barvanje (greedy)

Če sortiramo točke po vrsti $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, vsako točko pobarvamo z najmanjšo barvo, ki je še ne uporabljajo njene sosede.

$\boxed{\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1}$



Včasih deluje, velikokrat ne.

Največje število barv je $\Delta(G)+1$.

Boljši način je prvo barvanje točk z največjimi stopnjami.

$\omega(G)$ – velikost največjega podgrafa

$\Delta(G)$ – največja stopnja točke; $\delta(G)$ – najmanjša stopnja točke