1. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$(2+i)z + 2\bar{z} = 1 + i.$$

$$(2+i)(x+iy) + 2(x-iy) = 1+i$$

$$2x + \cancel{2iy} + ix - y + 2x - \cancel{2iy} = 1 + i$$

$$(4x - y) + ix = 1+i$$

$$ix = 1i \Rightarrow \boxed{x=1} \rightarrow 4x - y = 1$$

$$4 - y = 1$$

$$\boxed{y=3}$$

$$\boxed{z = 1+3i}$$

b) (13 točk) Poišči vsa kompleksna števila w, ki rešijo enačbo

$$w^3 = z - 2i$$

in jih nariši v kompleksni ravnini.

$z = 1+3i$

$$w^3 = 1+3i-2i$$

$$w^3 = 1+i \qquad |z-2i| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

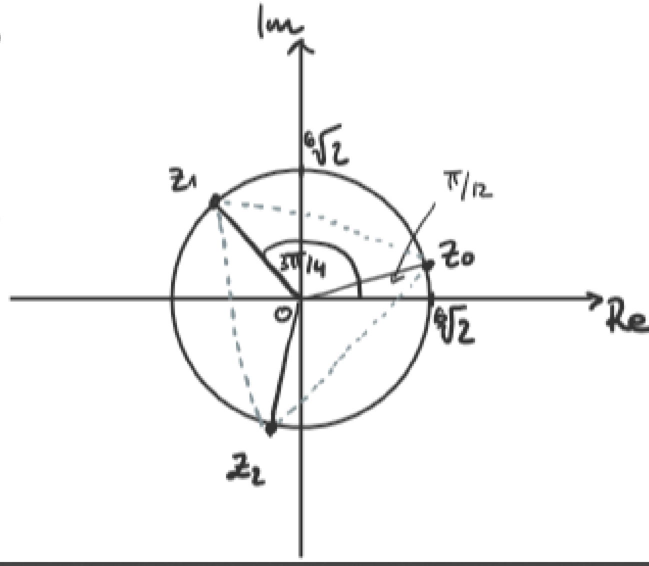
$$w^3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$w = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}} \qquad k = 0,1,2$$

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}$$



2. naloga (25 točk)

Podano imamo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s predpisom

$$a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+1}\right)^n.$$

a) (12 točk) Izračunaj limito zaporedja a_n.

neformalno

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+1}\ \frac{/\cdot\frac{1}{n}}{/\cdot\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{n+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) =$$

$$= \underline{\underline{e^{-1}}}$$

b) (13 točk) Ali je katera izmed vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ ali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ konvergentna?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+1}\right)^n$$

če $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \underline{\underline{e}}$

Ker so členi naraščajoči, vrsta ni konv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$$

<u>korenski kriterij:</u>

$$c_n = \sqrt[n]{a_n^n} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

ker $c < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ <u>konvergira</u>

3. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & ; \quad x > 0 \\ ax + b & ; \quad -4 < x \le 0 \\ \sqrt{-x} - 5 & ; \quad x \le -4 \end{cases}$$

a) (10 točk) Kakšni naj bosta konstanti a in b, da bo funkcija f zvezna na vsej realni osi?

da bo v 0 zvezna, da bo v −4

$\boxed{f(0) = b}$

$$b = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(ax)\cdot a}{x\cdot a}$$

$\downarrow$ 1

$\boxed{b = a}$

$f(-4) = \sqrt{4} - 5 = \underline{\underline{-3}}$

$$-3 = \lim_{x\to -4^+} ax + b =$$

$-3 = -4a + b$

$-3 = -3a$

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = 1}$

b) (5 točk) Izračunaj $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\underset{\downarrow \infty}{x}} = \underline{\underline{0}}$$

c) (5 točk) Ali je funkcija f injektivna? Odgovor utemelji!

Ni injektivna, ker na intervalu $x \in (0, +\infty)$ ni injektivna zaradi perioda $\sin x$; oz. ni inj. na $[-\infty, 0]$; ker je $\sqrt{-x} - 5$ padajoča na D_f in $x+1$ naraščajoča na D_f.

d) (5 točk) Skiciraj graf funkcije f.