

# Přehled témat ke zkoušce z Úvodu do lineární algebry a diskrétní matematiky, zimní semestr 2022/2023

- **Zobrazení:** Základní pojmy spojené se zobrazením: jednoznačnost, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, vzor prvku a podmnožiny oboru hodnot. Inverzní zobrazení, prosté zobrazení. Skládání zobrazení, identita, .
- **Vektorový prostor:** Definice, vlastnosti operací. Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech.
- **Lineární kombinace vektorů:** Definice, lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti. Změny v množině vektorů, které zachovávají lineární obal. Gaussova eliminační metoda.
- **Soustavy lineárních rovnic:** Prostor lineárních rovnic o více neznámých, soustavy se stejnou množinou řešení, řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace a zdůvodnění funkčnosti metody.
- **Lineární závislost vektorů:** Různé definice lineární nezávislosti. Baze vektorového prostoru. Dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v bazi, izomorfismus konečněrozměrného prostoru s  $\mathcal{T}^n$ . Souřadnice vektoru v různých bazích.
- **Číselné matice a operace s nimi:** Násobení matice vektorem, násobení matic. Matice přechodu. Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě. Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou. Lineární kombinace matic. Transpozice matice. Vztahy mezi různými maticovými operacemi. Blokové matice a výpočty s nimi.
- **Lineární zobrazení na vektorových prostorech:** Definice lineárního zobrazení, aditivní a homogenní zobrazení. Přípustné operace s lineárními zobrazeními. Jádro lineárního zobrazení, vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot.
- **Frobeniova věta (pro obecná lineární zobrazení):** Množina vektorů daného vektoru při lineárním zobrazení. Postup hledání neznámého vektoru při známém obrazu. Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.
- **Maticová reprezentace lineárního zobrazení:** Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vektoru. Konstrukce maticové reprezentace. Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních. Změna matice při změně bazí ve výchozím a cílovém prostoru.
- **Lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe:** Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení, vlastnosti vlastních vektorů. Hlavní vektory. Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorech.
- **Skládání lineárního endomorfismu se sebou samotným:** Mocniny a mohočleny z lineárních endomorfismů. Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu.
- **Determinant:** Možné definice a metody jeho výpočtu.

- **Skalární součin:** Definice, vlastnosti. Norma vektoru a její vlastnosti. Skalární součiny na různých vektorových prostorech. Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bazi.
- **Úhel vektorů a ortogonalita:** Schwartzova nerovnost, úhel mezi vektory, speciálně kolmost dvou vektorů. Ortogonální množiny a jejich vlastnosti. Gramův-Schmidtův algoritmus.
- **Optimální aproximace:** Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, konstrukce, výpočet odchylky. Použití: metodanejmších čtverců, Fourierovy řady.
- **Výpočetní náročnost operací s maticemi:** Počty operací nutné k násobení matice vektorem, násobení matic, použití Gaussovy eliminační metody a Gaussovy-Jordanovy eliminace. Strassenův algoritmus.
- **Matematická indukce:** princip, použití.
- **Základní pravidla kombinatoriky:** pravidlo součtu, součinu, princip inkluze a exkluze. Dirichletův princip.
- **Kombinatorické výpočty:** Variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním. Kombinatorické identity, Pascalův trojúhelník. Binomická věta. Zobecněná kombinační čísla, Newtonův vzorec.
- **Číselné posloupnosti:** Prostor číselných posloupností. Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností. Rekurentně definované posloupnosti. Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice. Počáteční podmínky. Lineární rekurentní vztahy konečného řádu.
- **Řešení lineárních rekurentních vztahů:** Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty. Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu. Vlastní čísla a vlastní a hlavní vektory posunutí posloupnosti, reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel. Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami.
- **Rovinné grafy:** základní pojmy, incidence, matice sousednosti. Skóre grafu, Havlův algoritmus. Souvislost grafů – sled, tah, cesta. Speciální typy grafů. Eulerovské a hamiltonovské grafy.
- **Ohodnocené grafy:** Optimalizační algoritmy – minimální kostra, nejkratší cesta.

Zkouška je písemná a ústní.

Při zkoušce je nutno mít u sebe průkaz totožnosti s fotografií (nejlépe studentský průkaz)

**Písemná část** obsahuje čtyři úlohy, každá je hodnocena 0–3 body, k úspěšnému absolvování je potřeba získat aspoň 6 bodů. Čas na vypracování je 90 minut. Jsou povoleny psací a rýsovací potřeby a kalkulačka (doporučují se vlastní), zakázána jsou všechna zařízení umožňující kontakt s vnějším prostorem.

**Ústní část** se koná v případě úspěšného zvládnutí písemné části. Skládá se zpravidla ze tří otázek, je nutno prokázat základní orientaci ve všech tématech. V případě neúspěchu se opakuje i písemná část.