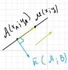


$\overline{AM} \perp \bar{n} \Rightarrow \overline{AM}\cdot\bar{n} = 0$

$A(x-x_A) + B(y-y_A) = 0$

ур-е прямой, прох. через заданную (·) $A(x_A;y_A)$ и $\perp \bar{n}(A;B)$

$$Ax + By \underbrace{- Ax_A - By_A}_{C} = 0$$

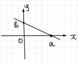
общее ур-е прямой: $Ax + By + C = 0$ $\quad \perp \bar{n}(A;B)$ $\quad |:(-C)$

обозн. $-\frac{C}{A} = a$; $-\frac{C}{B} = b$

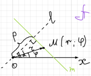
$Ax + By = -C \quad |:(-C)$

$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$

ур-е прямой „в отрезках на осях" $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



Полярное ур-е прямой



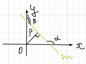
$\text{пр}_l\, \overline{OM} = p = |\overline{OM}| \cos(\alpha - \varphi)$

$$\boxed{p = r\cos(\varphi - \alpha)}$$

Нормальное ур-е прямой

$p = r\cos(\varphi - \alpha) = \underbrace{r\cos\varphi}_{x}\cos\alpha + \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\sin\alpha$

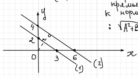
$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$$



(1) $2x + 3y - 6 = 0$ $\quad \perp \bar{n}(2;3)$ $\quad$ (1) ∥ (2)

(2) $2x + 3y - 12 = 0$ $\quad \perp \bar{n}(2;3)$

Привести ур-я прямых (1) и (2) к нормальному виду: $:\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$



(1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

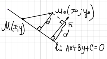
(2) $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

(1) $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$

(2) $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{12}{\sqrt{13}}$

$d = ((1);(2)) = \frac{12}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

Расстояние (·) от прямой



$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\overline{MM_0}| = \left|\frac{\overline{MM_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \left|\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| =$

$\overline{MM_0}(x_0-x;\ y_0-y)$ $\quad \bar{n}(A;B)$

$= \left|\frac{Ax_0 + By_0 \overbrace{- Ax - By}^{C}}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \boxed{\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = d}$

Соотношение между прямыми на пл-ти

(1) $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1}$ $\quad \parallel \bar{p}_1(a_1;b_1)$

(2) $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2}$ $\quad \parallel \bar{p}_2(a_2;b_2)$

(1) ∥ (2) $\to \bar{p}_1 \parallel \bar{p}_2$ $\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(1) ⊥ (2) $\Rightarrow \bar{p}_1 \perp \bar{p}_2 \Rightarrow \bar{p}_1\cdot\bar{p}_2 = 0$

$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$$

$\varphi = (\widehat{(1),(2)}) = (\widehat{\bar{p}_1,\bar{p}_2})$ $\quad \cos\varphi = \frac{\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2}{|\bar{p}_1|\cdot|\bar{p}_2|} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

(1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $\quad \perp \bar{n}_1(A_1;B_1)$

(2) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $\quad \perp \bar{n}_2(A_2;B_2)$

(1) ∥ (2) $\Rightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$ $\quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

(1) ⊥ (2) $\Rightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

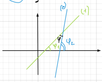
$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} =$

(1) $y = k_1x + b_1$ $\quad k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$

(2) $y = k_2x + b_2$ $\quad k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$

(1) ∥ (2): $k_1 = k_2$

(1) ⊥ (2): $k_1 = -\frac{1}{k_2}$



$\varphi_2 = \varphi + \varphi_1$ $\quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\overset{k_2}{\operatorname{tg}\varphi_2} - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 - \operatorname{tg}\varphi_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_2\cdot k_1}$

если $\varphi = 90°$ $\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = -\operatorname{ctg}\varphi_2$

Линии, поверхности и их порядок

Опр. Алгебраической поверхностью наз-ся мн-во (...), которое в какой-либо декарт. сист. к-т может быть задано ур-ем:

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1} + \ldots + A_sx^{k_s}y^{l_s}z^{m_s} = 0$$

$k_i;\ l_j;\ m_q$ $\quad \forall i,j,q \in \mathbb{Z}_+ = \{0\}\cup\mathbb{N}$

степенью ур-я наз-ся наибольшее из сумм $k_i + l_i + m_i$ $\quad i = \overline{1,s}$ или порядком алгебраической поверхности

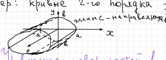
Алгебраической линией наз-ся мн-во (...) плоскости —"—

$$A_1x^{k_1}y^{l_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2} + \ldots + A_sx^{k_s}y^{l_s} = 0$$

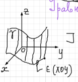
Пример: кривые 2-го порядка → эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

→ гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

→ парабола $x^2 = 2py$



Уравнение поверхностей в пространстве, не содержащих одной из координат.



$\exists\ M_0(x_0;y_0;z_0) \in$ поверхности γ

$\forall$ (·) $M(x_0;y_0;z) \in \gamma$

Опр. поверхность, кот. состоит прямых линий ∥ заданному направлению, называется **цилиндрической**, а ∥-е прямые — её **образующие**

Линию l, лежащую на поверхности γ и пересекающей все образующие называют — **направляющей**

Однородные уравнения. Конусы

Опр. ф-я $F(x;y;z)$ наз-ся однородной степени S если $\forall$ тройки $(x;y;z) \in \underset{\text{обл. опр-я}}{\mathcal{D}}(F)$ и $\forall\lambda$

$$F(\lambda x;\lambda y;\lambda z) = \lambda^s F(x;y;z)$$

$\forall$ поверхность: $F(x;y;z) = 0$ где F – однородная ф-я

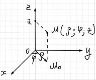
если (·) $M \in$ поверхности $\quad \forall\lambda$ (·) $P(\lambda x;\lambda y;\lambda z) \in$ пов-ти

радиус-векторы $\overline{OM} \parallel \overline{OP} \Rightarrow P \in (OM)$

Опр. Поверхность, состоящая из прямых линий, проходящих через одну (·) наз-ся **Конической** (или конусом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

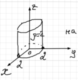
Цилиндрические координаты



$0 \le \varphi < 360°$

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$

Пример

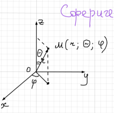


на пл-ти (xOy) – окр-ть $x^2 + y^2 = 2^2$

поверхность $x^2 + y^2 = 4$ – цилиндр ∥ (Oz)

в цилиндрических к-х будет иметь ур-е $\rho = 2$

Сферические координаты



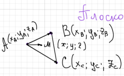
$\begin{cases} x = r\sin\Theta\cos\varphi \\ y = r\sin\Theta\sin\varphi \\ z = r\cos\Theta \end{cases}$ $\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \Theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$

$0° \le \Theta \le 180°$ зенит (полярный угол)

$0 < \varphi \le 360°$ азимут

связь с цилиндрическими к-ми: $\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \Theta = \operatorname{arctg}\frac{\rho}{z} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$

Плоскость в пространстве



$M \in$ пл. (ABC) $\quad$ ур-е пл-ти (ABC)

$\overline{AM}(x-x_A;\ y-y_A;\ z-z_A) \in (ABC)$

$\overline{AB}(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A) \in (ABC)$

$\overline{AC}(x_C-x_A;\ y_C-y_A;\ z_C-z_A) \in (ABC)$

компланарны!

$(\overline{AM}\times\overline{AB})\cdot\overline{AC} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

ур-е пл-ти (ABC) проходящей через 3 точки

$A\cdot(x-x_A) + B\cdot(y-y_A) + C\cdot(z-z_A) = 0$

ур-е пл-ти, прох. через (·) $A(x_A;y_A;z_A)$ и $\perp \bar{n}(A;B;C)$

$\bar{n}(A;B;C)\cdot\overline{AM} = 0$

$\bar{n} \perp \overline{AM}$