Задание 1

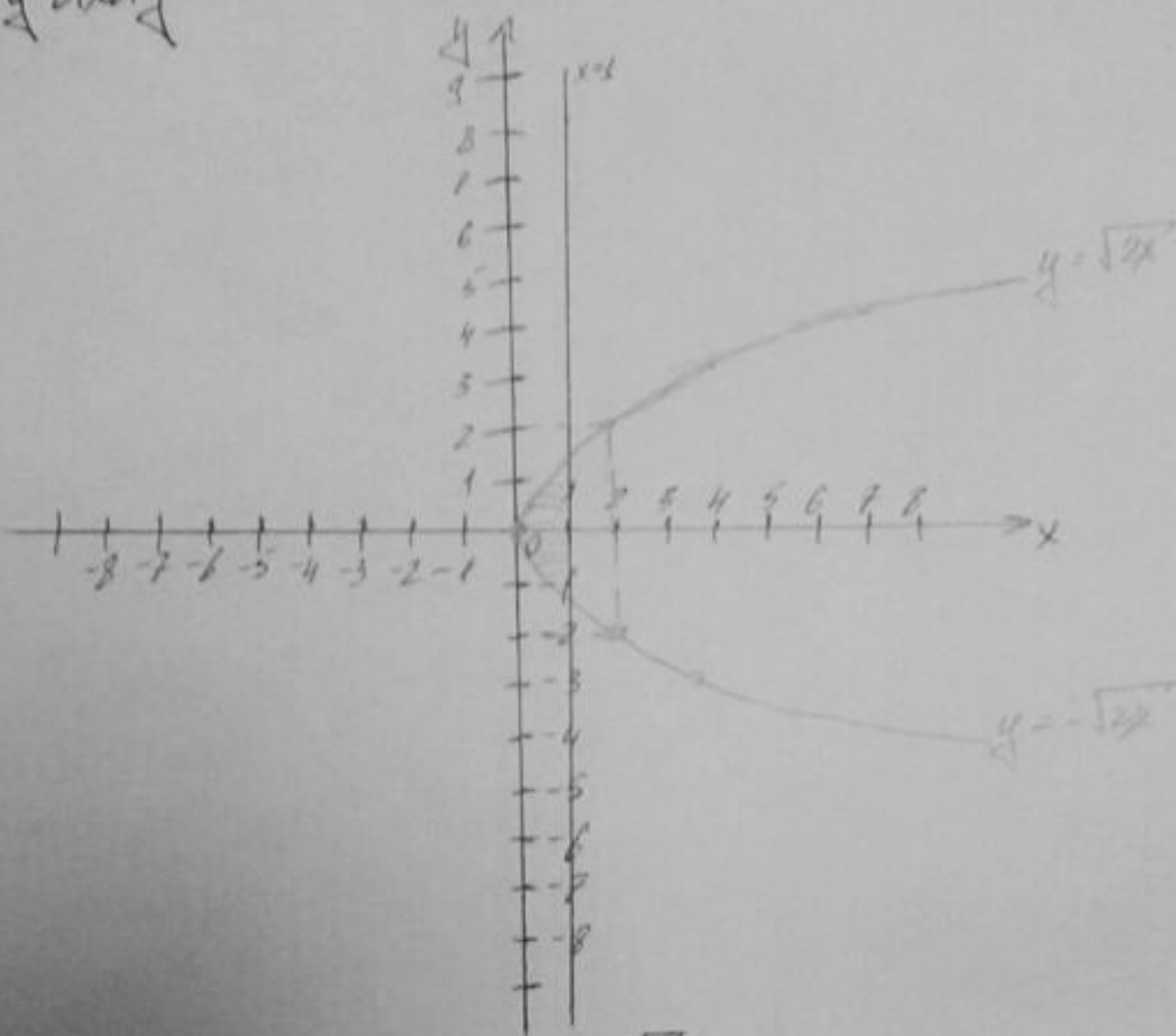
1) Найти двойной интеграл по области R, огранич. кривыми $y^2=2x$ и $x=1$

Построим гр. ф-ций

$y^2=2x$, $x\ge0$

$y=\pm\sqrt{2x}$

$$\iint_R xy^2\,dxdy$$



$x\in[0;1]$

$y\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, т.к. при $x=1$ $y=\pm\sqrt{2}$

$$\iint_R xy^2\,dxdy=\int_0^1\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}xy^2\,dxdy=\int_0^1 x\,dx\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}y^2\,dy=$$

$$=\int_0^1 x\,dx\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-\sqrt2}^{\sqrt2}=\int_0^1 x\,dx\cdot\frac{1}{3}\left(2\sqrt2-(-2\sqrt2)\right)=\int_0^1 x\,dx\cdot\frac{4\sqrt2}{3}=\frac{4\sqrt2}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{4\sqrt2}{6}(1-0)=\frac{2\sqrt2}{3}$$

Ответ: $\iint_R xy^2\,dxdy$, огранич. кривыми $y^2=2x$ и $x=1$ равен $\frac{2\sqrt2}{3}$.

Задание 2

а) $P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$; $P(1) = 0$

$M = \{P_4(x) \mid P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$

Для M должны быть определены операции сложения и умножения на число. Проверим их:

1. пусть $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, т.е. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, т.е. $A(x) \in M$
$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$, т.е. $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$, т.е. $B(x) \in M$

проверим, что $A(x) + B(x) \in M$

$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4$
$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 + b_4 = 0$ - очевидно, $\Rightarrow$

$A(x) + B(x) \in M$

2. пусть $\alpha \in R$, $A(x) \in M$, тогда $\alpha A(x) \in M$ проверим

$\alpha A(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \alpha a_3x^3 + \alpha a_4x^4$
$\alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 + \alpha a_4 = 0$, т.к. $\alpha(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0$ для $\forall \alpha$

Следовательно, для м-ва M определены операции сложения и умнож.
Для того, чтобы мн-во M являлось лин. пр-вом над R необходимо выполнение акс. 1-8 из определения линейного пр-ва.

1. $A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$
$A(x) + B(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 +$
$+ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = B(x) + A(x)$ $(a_i, b_i \in R, i = \overline{1,4})$ - верно

2. $(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$
$(A(x) + B(x)) + C(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4 + c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 =$
$= a_0 + b_0 + a_1x + b_1x + a_2x^2 + b_2x^2 + a_3x^3 + b_3x^3 + a_4x^4 + b_4x^4 + c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 =$
$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + (b_3 + c_3)x^3 + (b_4 + c_4)x^4 =$
$= A(x) + (B(x) + C(x))$ - верно

$\theta(x)$ - нулевой многочлен, т.е. $A(x) + \theta(x) = A(x)$, $\theta(x) \in M$

пусть $\theta(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$, ~~тогда~~ $\theta(1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$, $\Rightarrow \theta(x) \in M$

$A(x) + \theta(x) = (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + (a_3 + 0)x^3 + (a_4 + 0)x^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = A(x)$ верно

покажем, что $\forall A(x) \in M$ $\exists -A(x) \in M$, т.е. $A(x) + (-A(x)) = \theta(x)$

пусть $-A(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4$; ~~тогда~~ $-a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0$, т.к. $-(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0$

$A(x) + (-A(x)) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 =$
$= \theta(x)$ - верно и $-A(x) \in M$

продолжение

5. $\alpha(\beta A(x)) = (\alpha\beta)A(x)$, $\forall \alpha, \beta \in R$ и $\forall A(x) \in M$.

$\alpha(\beta A(x)) = \alpha(\beta a_0 + \beta a_1 x + \beta a_2 x^2 + \beta a_3 x^3 + \beta a_4 x^4) = \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1 x + \alpha\beta a_2 x^2 + \alpha\beta a_3 x^3 + \alpha\beta a_4 x^4 =$

$= \alpha\beta(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) = (\alpha\beta)A(x)$ - верно

6. $(\alpha+\beta)A(x) = \alpha A(x) + \beta A(x)$, $\forall \alpha, \beta \in R$ и $A(x) \in M$

$(\alpha+\beta)A(x) = (\alpha+\beta)\cdot(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3 + \alpha a_4 x^4 + \beta a_0 + \beta a_1 x +$

$+ \beta a_2 x^2 + \beta a_3 x^3 + \beta a_4 x^4 = \alpha A(x) + \beta A(x)$ - верно

7. $\alpha(A(x) + B(x)) = \alpha A(x) + \alpha B(x)$, $\forall \alpha \in R$ и $\forall A(x), B(x) \in M$.

$\alpha(A(x) + B(x)) = \alpha((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3 + (a_4+b_4)x^4) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3 +$

$+ \alpha a_4 x^4 + \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \alpha b_2 x^2 + \alpha b_3 x^3 + \alpha b_4 x^4 = \alpha A(x) + \alpha B(x)$ - верно

8. $1 \cdot A(x) = A(x)$

$1 \cdot A(x) = 1 \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) = a_0 + a_1(x) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = A(x)$ - верно.

Таким образом, выполняются все 8 условий, => мн-во M является линейным пространством над R.

Найдем базис и размерность:

Т.к. $\alpha = 1$ - корень, то по Th Безу многочлен $P_4(x)$ делится на $(x-1)$, =>

$P_4(x) = P_3(x)\cdot(x-1) = (x-1)\cdot(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_0(x-1) + a_1 x(x-1) + a_2 x^2(x-1) + a_3 x^3(x-1)$ (*)

здесь a_0, a_1, a_2, a_3 - отличны от a_1, a_2, a_3, a_0 из предыдущих вычислений

из ф-лы (*) следует, что $\forall$ многочлен из данн. мн-ва явл. эл-том линейной оболочки: $L\{(x-1), x(x-1), x^2(x-1), x^3(x-1)\}$

Проверим линейную независимость этих многочленов:

$P_4(x) \equiv \Theta(x)$, => $a_0(x-1) + a_1 x(x-1) + a_2 x^2(x-1) + a_3 x^3(x-1) = 0$

$a_0 x - a_0 + a_1 x^2 - a_1 x + a_2 x^3 - a_2 x^2 + a_3 x^4 - a_3 x^3 = 0$

$a_3 x^4 + (a_2 - a_3)x^3 + (a_1 - a_2)x^2 + (a_0 - a_1)x - a_0 = 0$

2 многочлена равны тогда и только тогда, когда у них равны коэффициенты при одинаковых степенях, =>

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \\ -a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} (**)$$

(**) - говорит о том, что многочлены $(x-1), x(x-1), x^2(x-1), x^3(x-1)$ - линейно независимы.

Ответ: мн-во многочленов степени меньшей 5, равные нулю в единице явл. линейным пр-вом над R с базисом $\{(x-1), x(x-1), x^2(x-1), x^3(x-1)\}$ и размерностью $\dim M = 4$.

Задание 2.

б) $P_4(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$, $P(1)=5$

$M=\{P_4(x) \mid P_4(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4,\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=5\}$

Для M должны быть определены операции сложения и умножения на число. Проверим их.

1. пусть $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$, т.е. $(*)$ $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=5$, т.е. $A(x)\in M$

$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$, т.е. $b_0+b_1+b_2+b_3+b_4=5$ $(**)$ т.е. $B(x)\in M$

проверим, что $A(x)+B(x)\in M$:

$A(x)+B(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+(a_4+b_4)x^4$

$A(1)+B(1)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)=5$ – для того, чтобы $A(x)+B(x)\in M$

$\Downarrow$

$$\underbrace{a_0+a_1+a_2+a_3+a_4}_{=5 \text{ из } (*)}+\underbrace{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4}_{=5 \text{ из } (**)}=5$$

$\Rightarrow$ $5+5=5$
$10=5$ – неверно!

Таким образом, $A(x)+B(x)\notin M$.

Ответ: мн-во многочленов степени меньшей 5, равные 5 в единице не является линейным пр-вом.

$\cancel{0=(1-\frac{1}{4})\cdot a_3\cdot(1-\frac{1}{5})^2\cdot a_2\cdot(1-\frac{1}{2})^4 \cdot (1-1)^5\, 0}$