МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Факультет космических исследований

Курсовая работа "Оптимальное управление ориентацией космического аппарата с использованием кватернионной алгебры"

Работу выполнил:
студент группы 401
очной формы обучения
факультета космических исследований
Мартыненко Д.Ю.

Научный руководитель:
к.ф.м.н.
доцент кафедры
математического моделирования
в космических исследованиях
Самыловский И.А.

Москва 2024

Содержание

Введение

Управление ориентацией космических аппаратов является одной из ключевых задач современной космической техники. Точность и эффективность маневрирования напрямую влияют на успешность выполнения целевых программ, таких как научные исследования, навигация, наблюдение Земли и другие.

Кватернионная алгебра предоставляет мощный математический аппарат для описания и управления вращениями в трехмерном пространстве. Именно на ее основе мы будем выполнять моделирование в ходе данной работы. Ее главное преимущество в том, что из-за своих особенностей она обеспечивают более компактное и вычислительно эффективное представление ориентации.

Цель работы Цель данной работы состоит в выполнении задачи оптимального управления трехмерной ориентацией космического аппарата, используя кватернионную алгебру и оптимизационные методы. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Дать определения кватернионам, теоретически расписать необходимый нам инструментарий.
2. Дать определение оптимального движения математически.
3. Разработать модель вращения космического аппарата с использованием кватернионов для описания ориентации в трехмерном пространстве.
4. Провести моделирование стабилизации космического аппарата с целью подтверждения эффективности предлагаемых методов.

Актуальность работы Как отмечалось в начале, точность и эффективность маневрирования космического аппарата напрямую влияют на успешность выполнения целевых программ, таких как научные исследования, навигация, наблюдение Земли и другие, поэтому задача оптимального управления является одной из важнейшей в космических миссиях.

Теоретические основы кватернионной алгебры и задачи оптимального управления

1.1. Введение в кватернионную алгебру

1.1.1. История и развитие кватернионов

Кватернионы были впервые введены в 1843 году ирландским математиком Уильямом Роуэном Гамильтоном в попытке обобщить комплексные числа для трёхмерного пространства. Они представляют собой расширение комплексных чисел и обеспечивают удобный метод для описания поворотов и ориентаций в трёхмерном пространстве.

1.1.2. Определение кватерниона

Кватернион q является четырёхмерным числом, которое можно представить в виде:

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \tag{1}$$

где q_0 — скалярная часть, а q_1, q_2, q_3 — компоненты векторов, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — мнимые единицы, удовлетворяющие следующим соотношениям Гамильтона:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \tag{2}$$

Кватернион также можно представить как пару, состоящую из скалярной и векторной частей:

$$q = [q_0, \mathbf{q}], \tag{3}$$

где $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}$ — векторная часть.

1.1.3. Операции над кватернионами

Сложение и вычитание кватернионов выполняется поэлементно:

$$q + p = [q_0 + p_0,\ \mathbf{q} + \mathbf{p}]. \tag{4}$$

Умножение кватернионов определяется как:

$$q \cdot p = [q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p},\ q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}], \tag{5}$$

где $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ — скалярное произведение, $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ — векторное произведение.

Модуль кватерниона определяется как:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{6}$$

Сопряжённый кватернион:

$$q^* = [q_0, -\mathbf{q}]. \tag{7}$$

Обратный кватернион (для ненулевого q):

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} \tag{8}$$

1.2. Кватернион и повороты в пространстве

Представление вращения с помощью кватерниона

Вращение на угол θ вокруг единичной оси $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ можно представить кватернионом:

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}).$$

Векторная часть хранит информацию об оси вращения и величине поворота, а скалярная часть — о величине поворота.

Чтобы повернуть вектор $\mathbf{v} \in R^3$, мы используем операцию:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}\ \mathbf{v}\ \mathbf{q}^{-1},$$

где:

- $\mathbf{v}$ рассматривается как кватернион с нулевой скалярной частью: $\mathbf{v} = 0 + v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$. $\mathbf{q}^{-1}$ — обратный кватернион, для единичных кватернионов он равен сопряженному: $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$

Таким образом, поворот реализуется посредством кватернионного умножения.

1.3. Традиционные методы описания ориентации

Ориентация твёрдого тела в трёхмерном пространстве может быть описана различными способами:

- **Углы Эйлера**: последовательность трёх поворотов вокруг осей координат.
- **Матрицы поворота**: ортогональные матрицы размером 3×3 со свойством $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Требуют хранения девяти элементов и сложных вычислений.

1.4 Преимущества кватернионов

Использование кватернионов для описания ориентации имеет ряд преимуществ:

- **Компактность**: требуют хранения всего четырёх параметров.
- **Эффективность вычислений**: умножение кватернионов менее вычислительно затратно, чем умножение матриц.

1.5. Постановка задачи оптимизации

Для начала стоит определить, что нам нужно оптимизировать. В данной работе предлагается рассматривать следующий функционал:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \left(\|U_k\|^2 + \|q_k - q_{target}\|^2 \right), \tag{9}$$

где q_{target} — целевая ориентация. Параметры U_k представляют управляющие моменты в момент времени k, а q_k — ориентация в момент времени k.

Задача состоит в том, чтобы найти такие управляющие моменты $\tau(t)$, которые минимизируют данный функционал

1.6. Ограничения

Управляющие моменты τ ограничены условиями:

$$-\tau_{max} \leq \tau(t) \leq \tau_{max}. \tag{10}$$

1.6. Непосредственно алгоритм оптимизации

Будем решать задачу численно, с использованием пакета `CasADi` с решателем IPOPT. Это позволит нам определить последовательность управляющих моментов, эффективно стабилизирующих ориентацию аппарата на протяжении рассматриваемого периода времени.

Моделирование математической модели

2.1. Среда моделирования

Выполнять моделирование будем на языке программирования Python 3.9.0 Будем использовать среду Visual Studio Code. Весь использованный код можно найти здесь: `https://github.com/Snackkie/spacecraft_stabilisation`

Комментарии к коду

Импорт библиотек Данный код использует следующие библиотеки:

- `numpy` для работы с массивами и линейной алгеброй.
- `casadi` для формулировки и решения задачи оптимизации.
- `matplotlib` и `mpl_toolkits.mplot3d` для визуализации траектории движения в трехмерном пространстве.

Заданные параметры

- `I` и `I_inv`: тензор инерции и обратный к нему, представляющие инерционные характеристики космического аппарата.
- `dt`, `N`, `torque_bound`: шаг по времени, количество временных шагов и пределы для управляющего момента.
- `target_orientation`: целевая ориентация аппарата в виде кватернионов.
- Начальные условия `q0`, `w0`: начальная ориентация и угловая скорость аппарата.

Функция `dynamics` Определяет динамику вращения аппарата, используя уравнения движения и трансформации для кватернионов.

Создание задачи оптимизации с помощью `casadi`**:** В ходе данной задачи мы хотим оптимизировать следующий функционал стоимости:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \left(\|\tau_k\|^2 + \|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{target}\|^2 \right) + \|\mathbf{q}_N - \mathbf{q}_{target}\|^2,$$

где:

- τ_k — управляющий момент в момент времени k, - $\mathbf{q}_k$ — ориентация космического аппарата в момент времени k (представленная кватернионом), - $\mathbf{q}_{target}$ — целевая ориентация (заданный кватернион), - N — количество дискретных шагов по времени.

Решение задачи Используется IPOPT для решения задачи оптимизации, минимизация функционала с учетом заданных ограничений.

Функция `quaternion_to_rotation_matrix` Преобразование кватерниона в матрицу поворота, используется для визуализации ориентации аппарата.

Создание траектории и куба для визуализации Определяем точки кубов (основного и маленького) для визуального представления аппарата и целевого куба. Кроме того, будем отслеживать траектории движения центра масс большого куба и траекторию движения одного из вершин малого. В начальный момент они должны меняться друг относительно друга, но в определенный момент космический аппарат должен будет стабилизироваться, и направления движения центра большого куба и вершины малого должны будут стать сонаправленными.

Анимация

- `fig` и `ax`: Создание фигуры и подграфика с трехмерной визуализацией.
- Функция `update_frame`: Обновляет положение космического аппарата и малых кубов для каждого кадра анимации, с использованием предварительно вычисленных траекторий.
- `FuncAnimation`: Используется для создания анимации, с обновлениями каждые 100 миллисекунд для каждого временного шага.
- `draw_cube`: Помещает выполненную из вершин 3D-модель на поверхность, описывая грани обьекта.

2.3. Анализ результата выполнения программы

В ходе выполнения программы мы видим, как тело, изначально имеющее ненулевую угловую скорость, постепенно стабилизируется. Это можно наблюдать как по траекториям большого и малого тел, так и по углу между их векторами скорости

Заключение

В ходе данной научно-исследовательской работы мы:

- Определили цели работы
- Дали необходимые теоретические определения необходимых нам математических инструментов
- Смоделировали среду в программе и на практике показали возможности математических инструментов, которые мы описали ранее

Возможные улучшения/использование дополнительных методов:
В данной задаче возможно использование методов глубокого обучения, которые могут позволить нам решить данную задачу оптимизации с использованием нейросетей. Планируем продолжить заниматься работой в этом направлении

Список литературы

Hamilton, W. R. (1844). *On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra*. Philosophical Magazine, 25(3), 489–495.

Н.И. Амелькин (1999). *Динамика твердого тела*. МФТИ.

Joel A E Andersson and Joris Gillis and Greg Horn and James B Rawlings and Moritz Diehl. *Software framework for nonlinear optimization and optimal control*. Mathematical Programming Computation, 11(1), 1-36

Приложение

Ссылка на репозиторий: `https://github.com/Snackkie/spacecraft_stabilisation`

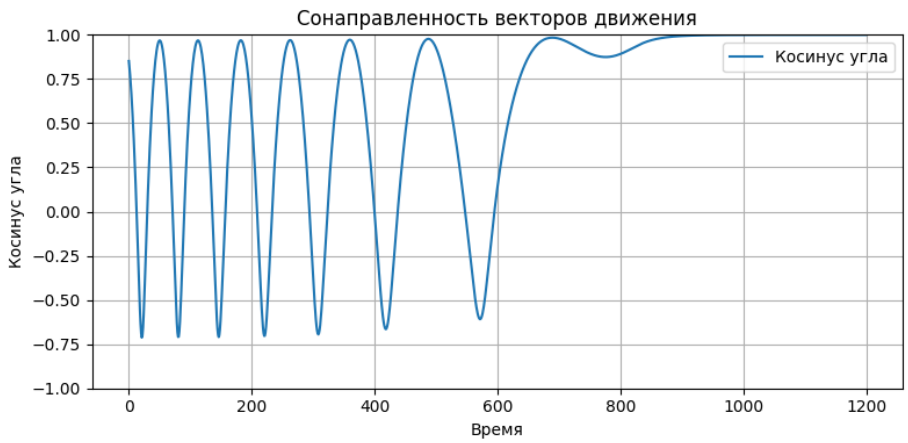
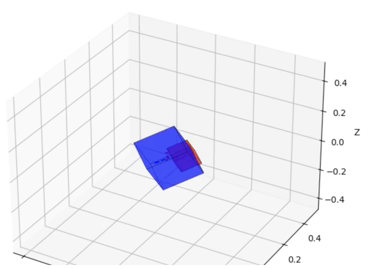
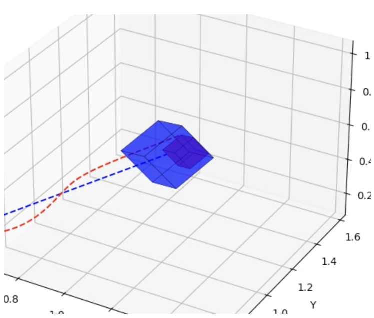


График косинуса угла между центром массы большого тела и одного из углов малого тела в зависимости от времени



Смоделированные тела в начале движения



Смоделированные тела в конце движения