2019 Summer Second Homework

郭炜

***Abstract*—**本次报告分为两部分。第一部分介绍了傅里叶变换的一些基本性质并对其进行了证明。第二部分，学习了 **IRLS** 算法的数学知识，并使用 **IRLS** 算法对图像进行了去模糊的处理。

***Index Terms*—**傅里叶变换，**IRLS** 算法，图像去模糊

I. 傅里叶变换

本节会介绍并证明傅里叶变化的一些基本性质。

$$F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1}$$

A. 基的正交性和归一性

傅里叶变换可以定义在任何正交的函数上，三角函数系是其中的特例，下面根据三角函数系来进行证明，采用的正交基如下所示：

$$\{1,cosx,sinx,cos(2x),sin(2x)\cdots\} \tag{2}$$

下面证明任意两个不同函数的乘积再区间 $[0,2\pi]$ 上的积分等于 0.

n 为整数，因此三角函数的周期为 $T=2\pi/n$。

$$\int_0^{2\pi}1*cos(nx)dx=0(n\in Z) \tag{3}$$

$$\int_0^{2\pi}1*sin(nx)dx=0(n\in Z) \tag{4}$$

$0-2\pi$ 的区间可认为是 n 个周期组成，因此积分为 0.

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}cos(nx)*cos(mx)dx\\&=\int_0^{2\pi}[cos(n+m)x+cos(n-m)x]dx\\&=0(n\in Z,m\in Z)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}sin(nx)*sin(mx)dx\\&=\int_0^{2\pi}[cos(n-m)x-cos(n+m)x]dx\\&=0(n\in Z,m\in Z)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}sin(nx)*cos(mx)dx\\&=\int_0^{2\pi}[sin(n+m)x+sin(n-m)x]dx\\&=0(n\in Z,m\in Z)\end{aligned} \tag{7}$$

因此，傅里叶变换的基具有正交性。

B. 线性性质

若信号为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$，$F[f_1(t)]=F_1(\omega),F[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则对于任意的常数 a 和 b，有 $F[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$。

傅里叶变换公式的定义以及积分具有可加性，显然，傅里叶变换具有线性性质。进一步推广可知以下公式。

$$\begin{aligned}&F[f_i(t)]=F_i(\omega),i=1,2,\cdots,n\\&F[\sum_{i=0}^{n}a_if_i(t)]=\sum_{i=0}^{n}a_iF_i(\omega)\end{aligned} \tag{8}$$

C. 尺度变换性质

$$\begin{aligned}F(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)e^{-j\omega t}dt\\&\xrightarrow{t=\frac{t'}{a}}\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{-\frac{j\omega t'}{a}}d\frac{t'}{a},a>0\\\int_{\infty}^{-\infty}f(t')e^{-\frac{j\omega t'}{a}}d\frac{t'}{a},a<0\end{cases}\\&=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}dt=\frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

D. 时域卷积定理

$$\begin{aligned}F(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt\\&\xrightarrow{t=t'+t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{-j\omega(t'+t_0)}dt'\\&=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\end{aligned} \tag{10}$$

E. 频域卷积定理

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j(\omega-\omega_0))e^{j\omega t}d\omega\\&\xrightarrow{\omega=\omega'+\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega')e^{j(\omega'+\omega_0)t}d\omega'\\&=e^{j\omega_0 t}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=e^{j\omega_0 t}f(t)\end{aligned} \tag{11}$$

F. Parseval 定理

Parseval 定理通常描述为以下形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df \tag{12}$$

其中 $X(f)=\mathcal{F}\{x(t)\}$ 为 $x(t)$ 的连续傅里叶变换，f 表示 x 的频率分量。波形 $x(t)$ 在时间域累积的总能量与该波形的傅里叶变换 $X(f)$ 在频率域累积的总能量相等。

连续傅里叶变换（CTFT）的 Parseval 定理证明如下：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}df\right]dt \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]df \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f)df \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df
\end{aligned} \tag{13}$$

II. IRLS 算法实现

IRLS 理论公式如下：

$$\left(2\lambda W X_{j-1}^{-1}+k^T k\right)x=k^T y \tag{14}$$

由于算力资源限制，略去了权重因素，简化为：

$$\left(2\lambda X_{j-1}^{-1}+k^T k\right)x=k^T y \tag{15}$$

本次算法实现选取的是一张 cifar-10 中的青蛙图像，大小为 32*32。

Fig. 1: 原始图片

为了方便操作，首先将该图像转化为单通道的灰度图像。

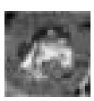

Fig. 2: 灰度图片

对于该图像，使用了 13*13 大小的模糊核，采用了 valid 模式进行卷积，得到了 20*20 大小的模糊图像。该模式保留了原始图像的中心部分。

将模糊图像拉伸为 $400*1$ 的向量来初始化 x 和 y。根据已知的模糊核与图像卷积的过程转化为矩阵相乘的形式。

$$k_{original}\otimes x_{original}=k*x \tag{16}$$

如此根据给定的模糊核以及图像得到算法实现所需的 k。

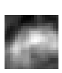

Fig. 3: 模糊图片

计算过程中，大矩阵求逆的过程对于计算资源要求较高，因此采用了共轭梯度法来进行矩阵求解，这一举措也避免了出现奇异矩阵的特殊情形，将特殊情况统一化处理了。

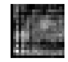

Fig. 4: 去模糊图片

采用 IRLS 算法后，对模糊图像进行去模糊处理，经过 10 次迭代后得到的清晰图像如下所示。

该模式操作起来会简化很多，但是会损失一些边缘信息，相比模糊图像，边缘及中心的图像信息变得丰富，但相比原始图像还有所不足。

References

[1] https://zh.wikipedia.org/wiki/希尔伯特空间
[2] https://zh.wikipedia.org/wiki/帕塞瓦尔定理