

# Большое домашнее задание 1

Батурин Георгий

## Содержание

1	Первое задание	2
2	Второе задание	2
3	Третье задание	4
4	Четвертое задание	5
5	Пятое задание	6
6	Шестое задание	7
7	Седьмое задание	8

# 1 Первое задание

## Текст задания

(а) Представить слагаемые и результат в виде нормализованного числа с плавающей точкой двойной точности:  $(-1)^s(2^{e-1023})(1.f)$ , где  $1.f$  записанов двоичном виде. (б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-1593.5859375 \cdot 2^{128} + 1619.09765625 \cdot 2^{141}$$

## Решение

Для начала разберемся с первым числом  $-1593.5859375 \cdot 2^{128}$ :

$$\begin{aligned} -1593.5859375_{10} &= 11000111001.1001011_2 = 1.10001110011001011_2 \cdot 2^{10} \\ -1593.5859375_{10} \cdot 2^{128} &= (-1)^1(2^{1161-1023}) \cdot 1.10001110011001011 \end{aligned}$$

$$s = 1, e = 1023 + 128 + 10 = 1161, f = 1000111001100101 \underbrace{0 \dots 0}_{35 \text{ нулей}}$$

Теперь нормализуем  $1619.09765625 \cdot 2^{141}$ :

$$\begin{aligned} 1619.09765625_{10} &= 11001010011.00011001_2 = 1.100101001100011001_2 \cdot 2^{10} \\ 1619.09765625 \cdot 2^{141} &= (-1)^0(2^{1174-1023})(1.100101001100011001) \end{aligned}$$

$$s = 0, e = 1023 + 141 + 10 = 1174, f = 100101001100011001 \underbrace{0 \dots 0}_{34 \text{ нуля}}$$

$$\begin{aligned} 11001010011.00011001 \cdot 2^{141} - 11000111001.10001011 \cdot 2^{128} &= \\ &= 2^{141}(11001010011.00011001 - 11000111001.1001011 \cdot 2^{-13}) = \\ &= 2^{141}(11001010011.00011001 - \underbrace{0,0 \dots 0}_{12 \text{ нулей}} \underbrace{110001110010001011}_{18 \text{ битов}}) = \\ &= 2^{141}(\underbrace{11001010011.00011001}_{19 \text{ битов}} \underbrace{5 \text{ битов}} \underbrace{18 \text{ битов}}) \end{aligned}$$

Получается 42 бита  $\Rightarrow$  число полностью поместится, а значит никакой погрешности нет.

# 2 Второе задание

## Текст задания

Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции (eye, repmat, flipud и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные: Целое  $n \geq 20$

Надо получить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \} 2n \text{ строк}$$

## Решение

```
n = input();
A \=[ 1 : 0.5 : n]
```

$$A = 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 3.50, 4.00, \dots, n$$

```
A = fix(A)
```

$$A = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots, n$$

```
A = [0, A]
```

$$A = 0, 1, 1, 2, 2, \dots, n$$

```
A = repmat(A, 2*n, 1);
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \} 2n \text{ строк}$$

```
X = [0, 1]
X = repmat(X, 2*n, 1)
```

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \} 2n$$

```
X = repmat(X, 1, n)
```

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \} 2n \text{ строк}$$

```
A = A.*X
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

### 3 Третье задание

#### Текст задания

(а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня  $z_i$  указать отрезок  $[a_i, b_i]$ , содержащий только один этот корень  $z_i$ ). Для каждого корня (б) построить итерационный процесс  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , сходящийся к корню и (в) указать начальное значение  $x_0$ . Указание: локализацию проводить перебором интервалов  $[a_i, b_i]$  или средствами математического анализа.

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

#### Решение

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-89	-19	3	1	-1	21	91
$sign(f(x))$	-	-	+	+	-	+	+

Можно увидеть как  $f(x)$  меняет знак при  $x = -2 \rightarrow -1$  и при  $x = 0 \rightarrow 1$  и  $x = 1 \rightarrow 2$ , то есть:  $a_1 = -2, b_1 = -1; a_2 = 0, b_2 = 1; a_3 = 1, b_3 = 2$ .

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[-2, -1]$ :

Воспользуемся методом Ньютона:

Для этого найдем производную:  $f'(x) = 12x^2 - 6$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{4x_n^3 - 6x_n + 1}{12x_n - 6} = \frac{-4x_n^3 + 12x_n^2 - 1}{12x_n - 6}$$

Так как  $f' < 0$  и  $f'' < 0$  на промежутке  $[-2, 1]$ , то  $x_0 = -1$ .

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[0, 1]$ :

По методу Ньютона  $x_0$  для этого отрезка  $x_0 = 1$

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[1, 2]$ :

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

$$x^3 = \frac{6x - 1}{4}$$

$$\varphi(x) = x = \left( \frac{6x - 1}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{(6x - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$|\varphi'(x)| < 1$$

$$\left| \frac{3\sqrt{2}}{(6x - 1)^{\frac{2}{3}}} \right| < 1$$

Решение этого неравенства:  $(0.4, \infty) (\supseteq [1, 2])$

$$x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2}}{(6x-1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$x_0 \in [1, 2]$$
$$x_0 = 2$$

## 4 Четвертое задание

### Текст задания

Известно, что интервалу  $[a, b]$  принадлежит *только* корень  $x_*$  уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  и (б) обосновать какую из границ интервала  $[a, b]$  можно принять за  $x_0$ . Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных  $f'(x)$  и  $f''(x)$  и использовать соответствующую теорему.

$$x - \frac{e^x}{x} + \frac{3}{2} = 0, x_* \in [1, 3; 1, 4]$$

### Решение

$$f'(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$

Итерационный процесс Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(2x + 2e^x + 3x)x}{2(x^2 - xe^x + e^x)}$$

Теорема справедлива если на всем отрезке  $[a, b]$  выполняются:

- (1)  $f' > 0, f'' > 0, x_0 = b$
- (2)  $f' < 0, f'' < 0, x_0 = a$
- (3)  $f' < 0, f'' < 0, x_0 = b$
- (4)  $f' > 0, f'' < 0, x_0 = a$

$$f'(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$f'(x)$  — положительна, а  $f''(x)$  — отрицательна на всем отрезке  $[a, b] \Rightarrow$  теорема применима

$$f'(1.3) > 0$$
$$f''(1.3) < 0 \Rightarrow x_0 = 1.3$$

## 5 Пятое задание

### Текст задания

- (а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $f(x)$  по узлам  $x_i$ .  
(б) Оценить сверху погрешность  $|R_n(x)|$  приближения функции многочленом.

$$\ln(x) - \sqrt{x}, x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 5$$

### Решение

$x$	3	4	5
$f(x)$	0.46	0.48	0.47

Найдем многочлен Лагранжа, для:

$$\begin{aligned} L(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 0.46 \frac{(x-4)(x-5)}{-1 \cdot (-2)} + 0.48 \frac{(x-3)(x-5)}{1 \cdot (-1)} + 0.47 \frac{(x-3)(x-4)}{2} = \\ &= 0.2325(x^2 - 9x + 20) - 0.484(x^2 - 8x + 15) + 0.236(x^2 - 7x + 12) = \\ &= -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222 \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что наш интерполяционный многочлен равен  $L(x) = -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$ . Проверим это с помощью матлаба, на рисунке 1

```
x = [3, 4, 5];  
f = @(x) log(3*x) - sqrt(x); % Сама функция  
L = @(x) -0.0155*x.^2 + 0.1275*x + 0.222; % полином Лагранжа  
  
hold on, grid on  
plot(x, f(x), "r", x, L(x), "k");
```

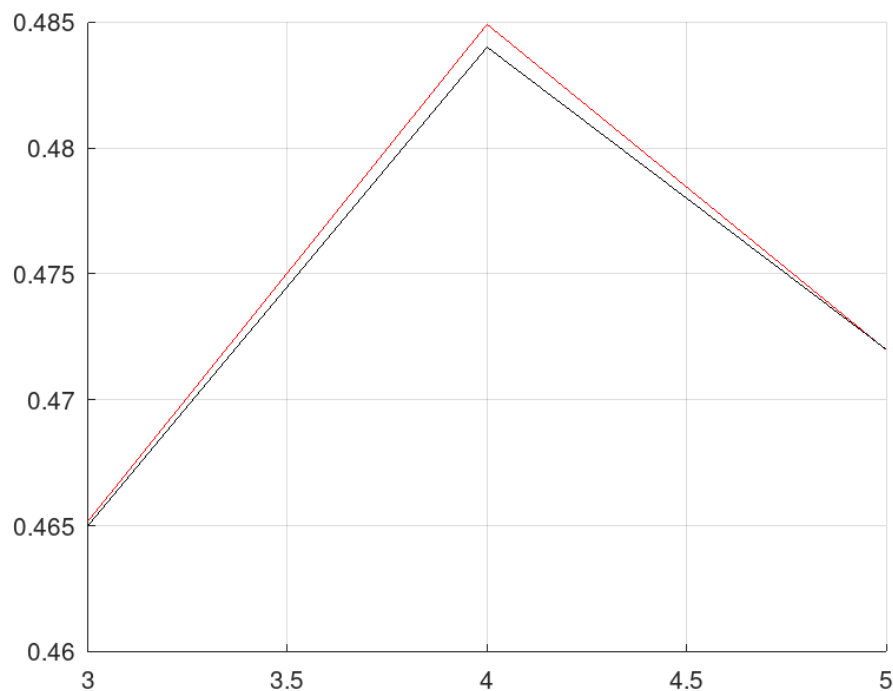
Теперь найдем погрешность  $|R_2(x)|$ :

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \frac{f^{(3)}(x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ |R_2(x)| &\leq \frac{M_3}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ M_3 &= \max_{[a,b]} |f^{(3)}(x)| \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} - \frac{3}{8x^{5/2}} \end{aligned}$$

Максимум  $f^{(3)}(x)$  на отрезке  $[3, 5]$ , достигается в точке 3.

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= 0.05 \\ |R_2(x)| &\leq \frac{0.05}{6} (x-3)(x-4)(x-5) \leq \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{47}{120}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Рис. 1: Красный график это наша функция, а черный - полином Лагранжа.



## 6 Шестое задание

### Текст задания

Заданную функцию будут интерполировать на отрезке  $[a, b]$  по чебышёвским узлам с заданной точностью  $|R_n(x)| < \epsilon$ . Требуется (а) определить требуемое для заданной точности  $\epsilon$  количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси  $Ox$  (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = x^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right), \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \text{ с точностью } \epsilon = 10^{-3}$$

### Решение

$$f'''(x) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Сначала найдем кол-во узлов для  $\epsilon = 10^{-3}$

Для  $n = 2$ :

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot 2^{-5}, \text{ где } M_3 = \max_{\left[\pi, \frac{\pi}{4}\right]} |f'''(x)|$$

$$M_3 = \max_{\left[\pi, \frac{\pi}{4}\right]} |f'''(x)| \approx 0.1155$$

$$|R_2(x)| = \frac{0.1155}{6} \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)^3 \approx 7.9 \cdot 10^{-4} = 0.00079 < 0.001 (10^{-3})$$

Степень интерполяции равна двум, значит кол-во узлов равно трем. Теперь требуется вычислить значение узлов и отметить их на действительной оси  $Ox$

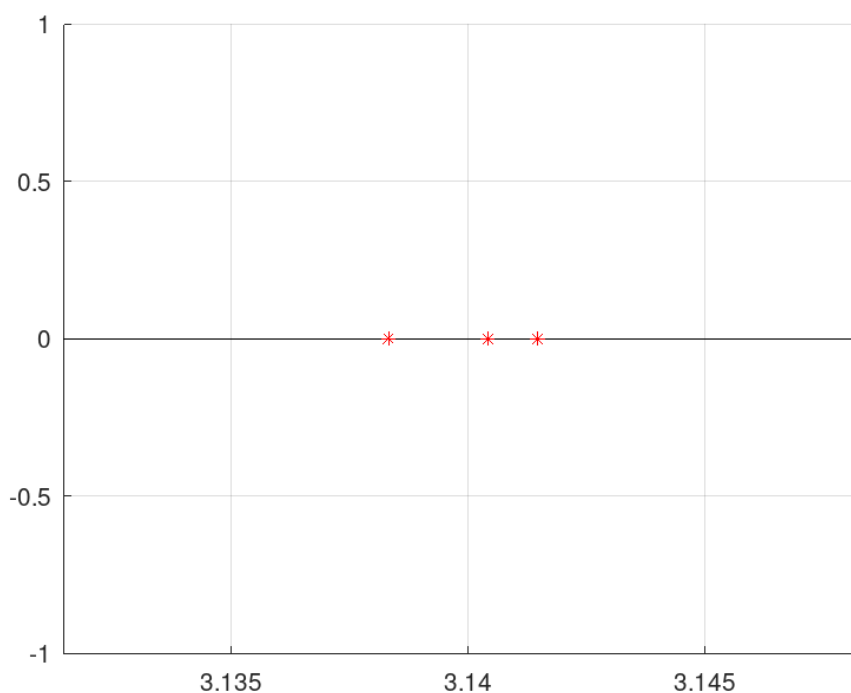
$$x_k = \pi \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

```
n = 3;  
k = [1 : n];  
xk = pi * cosd(pi * (2*k-1)/(2*n))  
hold on, grid on  
xlim([xk(1) - 0.01, xk(3) + 0.01])  
line([xk(1) - 0.02, xk(3) + 0.02], [0, 0], 'color', 'k')  
plot(xk, 0, 'r*')
```

xk =

3.1413    3.1413    3.1389

Рис. 2: Чебышевские узлы на оси  $Ox$



## 7 Седьмое задание

### Текст задания

Данные некоторого физического эксперимента представлены в таблице. Характер зависимости  $y(x)$  заранее точно неизвестен. Есть предположения, что зависимость может быть линейной, квадратичной или кубической. (а) Методом среднеквадратического приближения построить три типа приближения  $y(x)$  (т.е. аппроксимирующие многочлены первой, второй и третьей степеней). (б) Для каждого аппроксимирующего мно-



гочлена вычислить среднеквадратическое отклонение  $\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y(x_i) - y_i)^2}$ . (в) Выбрать минимальное с.к.о. и указать соответствующий ему тип зависимости (линейная, квадратичная или кубическая), т.е. наиболее вероятный в проведенном эксперименте.

$x$	2	3	4	5	6
$f(x)$	17.2	45.5	96.5	175.8	288.9

### Решение

Для аппроксимирующего многочлена первой степени воспользуемся такой матрицей:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];

s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2)
b = [sum(y); sum(y*x')]

a = s\b
y2 = a(1) + a(2)*x
hold on; grid on;
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfacecolor', 'none');
plot(x, y2, 'color', 'g');
legend('Тест', 'Аппроксимирующая прямая')
```

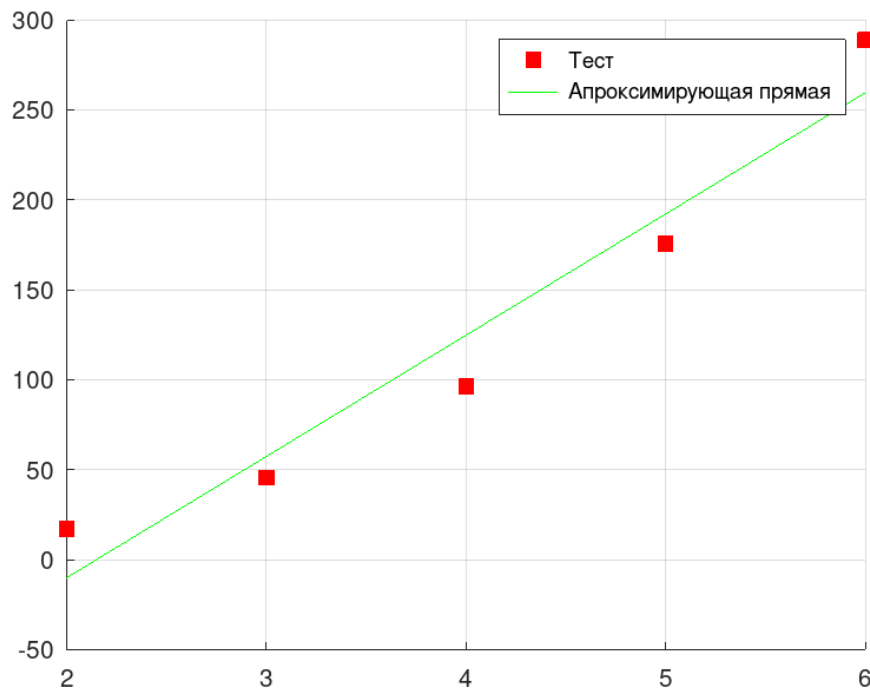
```
s =
5    20
20    90

b =
623.90
3169.30

a =
-144.700
67.370

y2 =
-9.9600    57.4100    124.7800    192.1500    259.5200
```

Рис. 3: Точки из эксперимента и аппроксимирующая прямая (1-ой степени)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (y(x) - y_i)^2}{n + 1}} \approx 21.64$$

Для аппроксимирующей второй степени:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];

s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2);

s(3, 1) = sum(x.^2);
s(3, 2) = sum(x.^3);
s(1, 3) = s(3, 1);
s(2, 3) = s(3, 2);
s(3, 3) = sum(x.^4)

b = [sum(y); sum(y*x'); sum(y*x'.^2)]
```

```
a = s\b
```

```
y2 = a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2
```

```
hold on; grid on;
```

```
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfacecolor', 'none');
```

```
plot(x, y2, 'color', 'g');
```

```
legend('Тест', 'Аппроксимирующая прямая')
```

```
s =
```

5	20	90
20	90	440
90	440	2274

```
b =
```

```
6.2390e+02  
3.1693e+03  
1.6818e+04
```

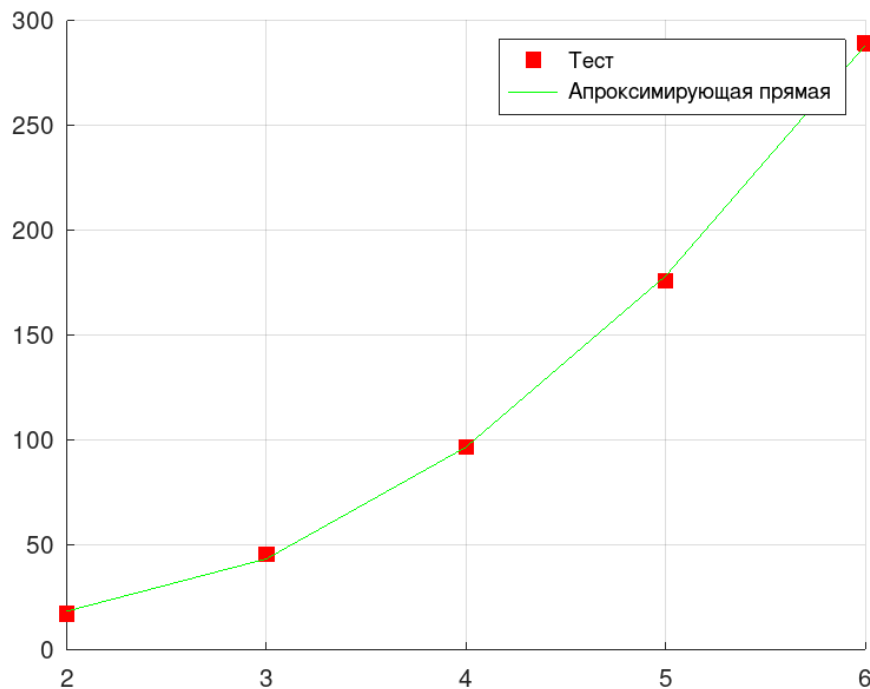
```
a =
```

```
53.200  
-45.716  
14.136
```

```
y2 =
```

18.311	43.274	96.509	178.014	287.791
--------	--------	--------	---------	---------

Рис. 4: Точки из эксперимента и аппроксимирующая прямая (2-ой степени)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta \approx 1.4$$

Для аппроксимирующей третьей степени:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];
```

```
s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2);
```

```
s(3, 1) = sum(x.^2);
s(3, 2) = sum(x.^3);
s(1, 3) = s(3, 1);
s(2, 3) = s(3, 2);
s(3, 3) = sum(x.^4);
```

```
s(4, 1) = sum(x.^3);
```

```

s(1, 4) = s(4, 1);
s(4, 2) = sum(x.^4);
s(2, 4) = s(4, 2);
s(4, 3) = sum(x.^5);
s(3, 4) = s(4, 3);
s(4, 4) = sum(x.^6)

b = [sum(y); sum(y*x'); sum(y*x'.^2); sum(y*x'.^3)]
a = s\b

y2 = a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2 + a(4)*x.^3
hold on; grid on;
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfacecolor', 'r');
plot(x, y2, 'color', 'g');
legend('Тест', 'Апроксимирующая прямая')

```

```

s =

5      20      90      440
20      90      440      2274
90      440      2274      12200
440      2274      12200      67170

b =

6.2390e+02
3.1693e+03
1.6818e+04
9.1920e+04

a =

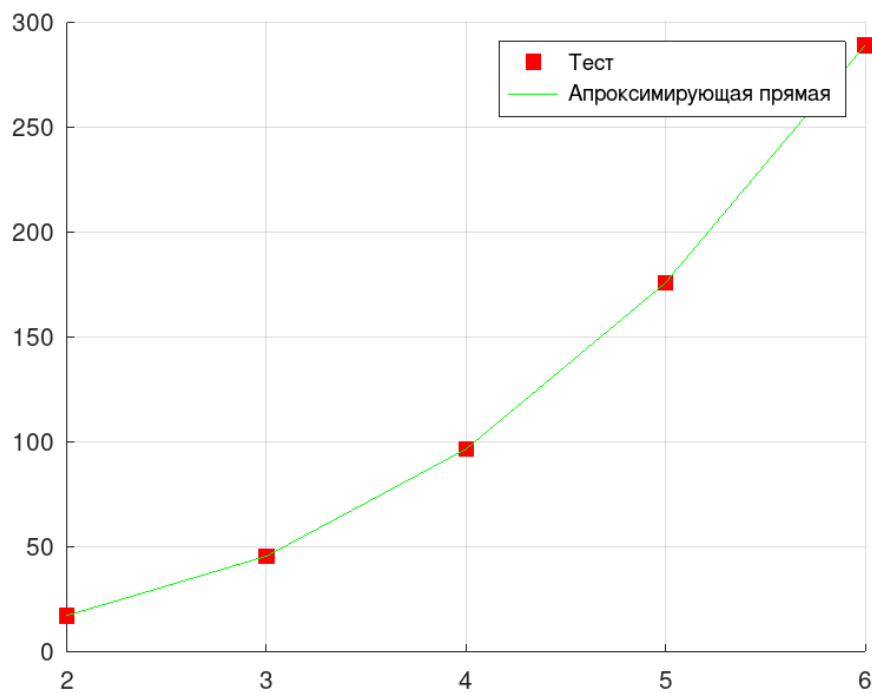
6.5800
-4.4607
3.0357
0.9250

y2 =

17.201    45.494    96.509    175.794    288.901

```

Рис. 5: Точки из эксперимента и аппроксимирующая прямая (3-ая степень)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta \approx 0.812$$