Лабораторная работа

Батурин Георгий

Содержание

1 (1) Первое задание

Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...), и некоторую точку x из области определения функции. Найдите значение производной функции в выбранной точке (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью 10^{-3}, 10^{-6}. Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено.

Для численного дифференцирования будем использовать формулы:

$$y' = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$O(h) = \frac{M_2 h}{2}$$
$$M_2 = \max\left|f^{n+1}(x)\right|$$

Посчитаем прозводную для $\sin x$, в точке $x = 0$:

2 (2) Второе задание

Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например, $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$) для последовательности убывающих шагов (например, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом.

Сравнивать будем две формулы:$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$, с $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, в точке $x = 0$, для функции $\sin x$

```
df1 = @(x, h) (sin(x+h) - sin(x))/h;
df2 = @(x, h) (sin(x+h) - sin(x-h))/(2*h);

x = 0;
for h = [1/2, 1/4, 1/8]
  printf("Значение производной по первой формуле,
 для h = %f: %f\n", h, df1(x, h))
end

for h = [1/2, 1/4, 1/8]
  printf("Значение производной по второй формуле,
 для h = %f: %f\n", h, df2(x, h))
end
```

```
Значение производной по первой формуле, для h = 0.500000: 0.958851
Значение производной по первой формуле, для h = 0.250000: 0.989616
Значение производной по первой формуле, для h = 0.125000: 0.997398
```

```
Значение производной по второй формуле, для  h  =  0.500000:  0.958851
Значение производной по второй формуле, для  h  =  0.250000:  0.989616
Значение производной по второй формуле, для  h  =  0.125000:  0.997398
```

3 (3) Третье задание

Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, …) и некоторую точку x из области определения функции. Попробуйте применить формулу $y'(x) \approx \frac{y(y+h)-y(x)}{h}$ для стремящейся к нулю последовательности $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Будет ли погрешность $\epsilon = \left| y'(x) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \right|$ монотонно убывать при уменьшении h? Сравните практический и теоритический результаты.

```
df = @(x, h) (sin(x+h) - sin(x))/h;

x = 0;
for h = [1/2, 1/4, 1/8, 1/16]
  dydx = df(x, h)
  epsilon = abs(cos(0) - dydx)
end
```

```
  dydx = 0.958851077208406
  epsilon = 4.114892279159399e-02

  dydx = 0.989615837018092
  epsilon = 1.038416298190825e-02

  dydx = 0.997397867081822
  epsilon = 2.602132918178457e-03

  dydx = 0.999349085478083
  epsilon = 6.509145219167900e-04
```