

# Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

## Содержание

1	Девятое задание	2
2	Десятое задание	3
3	Одиннадцатое задание	4
4	Двенадцатое задание	4
5	Тринадцатое задание	5
6	Четырнадцатое задание	6
7	Пятнадцатое задание	6
8	Шестнадцатое задание	6

# 1 Девятое задание

## Текст задания

Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция  $y(x)$  (данные в таблице могут содержать погрешность не более  $\delta$ ). Определить оптимальное значение шага  $h_{\text{опт}}$ , когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

$$\text{ф-ла } y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2); \text{ функ. } y(x) = \cos x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, 4\right]; \text{ погр. } \delta = 10^{-8}$$

## Решение

Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью  $\delta$ . В действительности компьютер вычислит:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \\ , \text{ где } \tilde{y}_0 = y_0 + \delta_0; \tilde{y}_1 = y_1 + \delta_1; \tilde{y}_2 = y_2 + \delta_2$$

Рассмотрим погрешность:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| y_0'' - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| = \\ &= \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left( \frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right| \end{aligned}$$

Для оценки разности

$$\left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| \quad (1)$$

разложим  $y_1$  и  $y_2$  в ряд Тейлора в окрестности  $x_0$  до  $h^3$

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y_0'''(\xi_1)}{6} \quad (2)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y_0'''(\xi_2)}{6} \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$\begin{aligned} &\left| y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right| = \left| y_0'' - \frac{y_0 - 2(y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y_0'''(\xi_1)}{6}) + (y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y_0'''(\xi_2)}{6})}{h^2} \right| = \\ &= \left| y_0'' - \frac{h^2 y_0'' + h^3 y_0'''(\xi)}{h^2} \right| = \\ &= \left| y_0'' - y_0'' + hy_0'''(\xi) \right| = \\ &= \left| hy_0'''(\xi) \right| \end{aligned}$$

Таким образом,  $\Delta \leq |hy'''(\xi)| + \left|\frac{4\delta}{h^2}\right| \leq hM_3 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h)$  Минимизируем ошибку  $\Phi(h)$ :

$$h_{\text{опт}} \Phi'(h) = M_3 - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \Rightarrow h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{M_3}}$$

Найдем  $M_3 = \max_{[\frac{\pi}{4}, \pi]} |y'''(x)|$ . Так как  $y'''(x) = \sin(x) \Rightarrow M_3 = 1$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-8}}{1}} = 2 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-2.7}$$

## 2 Десятое задание

### Текст задания

Получить (письменно) приближённое значение интеграла  $I$  по квадратурной формуле  $S(h)$  сначала с шагом  $h_1$ , а затем с шагом  $h_2$ . Используя метод Рунге, указать насколько значение  $S(h_2)$  отличается от истинного значения интеграла  $I$ .

$$I = \int_1^3 \sin x \operatorname{sh} x dx; S(h) = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \text{ (ф-ла левых прямоуг.)}; h_1 = \frac{2}{4}, h_2 = \frac{2}{12}$$

### Решение

Для  $h_1 = \frac{2}{4}$ :

```
f = @(x) sin(x) .* sinh(x);
disp('x_i: ')
h = 2/4;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x) (1:end-1))
```

```
x_i:
x =
    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000

S = 5.0158
```

Для  $h_2 = \frac{2}{12}$ :

```
f = @(x) sin(x) .* sinh(x);
disp('x_i: ')
h = 2/12;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x) (1:end-1))
```

```
x_i:
x =
```

1.0000	1.1667	1.3333	1.5000	1.6667	1.8333
2.0000	2.1667	2.3333	2.5000	2.6667	2.8333
3.0000					

$S = 5.2779$

Найдем погрешность:

$$I \approx S\left(\frac{2}{4}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2$$

$$S\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{c}{4} \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + \frac{c}{36}$$

$$\frac{c}{4} - \frac{c}{36} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{2c}{9} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$c = \frac{9(S(\frac{2}{12}) - S(\frac{2}{4}))}{2}$$

$$\epsilon = I - S\left(\frac{2}{12}\right) = c \cdot h_2^2 = \left| \frac{9(S(\frac{2}{12}) - S(\frac{2}{4}))}{2 \cdot 36} \right| = \left| \frac{(S(\frac{2}{12}) - S(\frac{2}{4}))}{8} \right| = \left| \frac{5.2779 - 5.0158}{8} \right| \approx 0.033$$

### 3 Одиннадцатое задание

#### Текст задание

Предложить способ вычисления несобственного интеграла на компьютере. Указание: использовать один из методов, рассмотренных на лекции или семинаре.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \sin x}{(x-1)^2} dx$$

### 4 Двенадцатое задание

#### Текст задания

Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм:  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ .

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 9 \\ 6 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

#### Решение

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_i \sum_i |x_i|, \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\max_i \sum_i \lambda_i(A^T A)}$$

```

A = [-9, -2, 5; 2, -5, 9; 6, -7, -10]; % Матрица

A_1 = max(sum(abs(A)))

B = A'*A
lambdas = eig(B) % Находим собственные значения

A_2 = sqrt(max(lambdas))

```

```

A_1 = 24
B =
    121    -34    -87
   -34     78     15
   -87     15    206

lambdas =
    48.929
    90.646
   265.425

A_2 = 16.292

```

Получаем, что  $\|x\|_1 = 25$ ;  $\|x\|_2 = 16.292$

## 5 Тринадцатое задание

### Текст задания

Правая часть СЛАУ  $Ax = f$  содержит погрешность, норма которой равна  $\|\delta f\|_\infty$ . Оценить относительную погрешность нормы решения  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ . Указание: воспользоваться оценкой  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu(A) \frac{\|\delta f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ .

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 7 \\ -2 & -8 & -6 \\ -5 & 2 & 9 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -5.3 \\ 7.2 \\ -3.4 \end{pmatrix}, \|\delta f\|_\infty = 0.6$$

### Решение

```

A = [-9, 5, 7; -2, -8, -6; -5, 2, 9];
f = [-5.3; 7.2; -3.4];
delta_f = 0.6;

A_inf = max(sum(abs(A), 2))

A_inv_inf = max(sum(abs(inv(A)), 2))

muA = A_inf * A_inv_inf

```

```
f_inf = max(f)
```

```
answer = muA * delta_f / f_inf
```

```
A_inf = 21
```

```
A_inv_inf = 0.3432
```

```
muA = 7.2076
```

```
f_inf = 7.2000
```

```
answer = 0.6006
```

Получаем, что  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 0.6006$

## 6 Четырнадцатое задание

### Текст задания

Для задачи построить разностную схему с заданным порядком аппроксимации.

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3y' = \operatorname{sh} x, \\ y(1) = 1, y'(3) = 2, \end{cases} \quad \text{желаемый порядок аппроксимации } p = 2.$$

## 7 Пятнадцатое задание

### Текст задания

Для решения (начальной или краевой) задачи, где  $x \in [0, 2]$ , предложена разностная схема. Определить, аппроксимирует ли разностная схема задачу. Если аппроксимация имеет место, найти её порядок. Указание: использовать разложение в ряд Тейлора.

$$\begin{cases} y'' - y = 2 \\ y(0) = 2, y' = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i = 2 \\ y_0 = 2, \frac{y_1 - y_0}{h} = 3 \end{cases}$$

## 8 Шестнадцатое задание

### Текст задания

Проверить выполнимость достаточных условий применимости метода прогонки для решения СЛАУ  $Ax = f$ . Если эти условия выполняются, решить систему методом прогонки (вычислять можно на компьютере, но в решении указать значения всех прогоночных коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$ ).

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### Решение

Достаточное условие применимости метода прогонки – выполнение диагонального преобладания:

$$|a_{[i][i]}| \geq |a_{[i][i-1]}| + |a_{[i][i+1]}|, \text{ хотя бы одно неравенство строгое}$$

```

A = [-12, 5, 0, 0, 0;...
      6, 10, 1, 0, 0; ...
      0, 6, -10, 2, 0; ...
      0, 0, -4, -7, 1; ...
      0, 0, 0, 3, 8];
f = [1, -3, 5, 7, -3]';
n = length(A);

% Проверяем диагональное преобладание
% Если условие не будет выполнено, то возникнет ошибка
for i = 2 : n-1
    if (abs(A(i, i)) < abs(A(i, i-1)) + abs(A(i, i + 1)))
        error("Не выполнено достаточное условие");
    end
end

if (abs(A(1, 1)) < abs(A(1, 2)) && abs(A(n, n)) < abs(A(n, n-1)))
    error("Не выполнено достаточное условие");
end

% Прогоночные коэффициенты
alfa(1) = -A(1, 2)/A(1, 1);
beta(1) = f(1)/A(1,1);
for i = 2 : n-1
    alfa(i) = -A(i, i+1)/(A(i, i) + A(i, i-1)*alfa(i-1));
    beta(i) = (f(i)-A(i, i-1)*beta(i-1))/(A(i, i) + A(i, i-1)*alfa(i-1));
end
beta(n) = (f(n) - A(n, n-1) * beta(n-1))/(A(n, n) + A(n, n-1) * alfa(n-1));

% Корни
x(n) = beta(n);
for i = n-1 : -1 : 1
    x(i) = alfa(i) * x(i+1) + beta(i);
end

x
alfa, beta

```

```

x =
-0.1430  -0.1433  -0.7091  -0.6154  -0.1442

alfa =
0.416667  -0.080000  0.190840  0.128810

beta =
-0.083333  -0.200000  -0.591603  -0.596853  -0.144214

```

Проверка:

```
>> A \ f
ans =
-0.1430
-0.1433
-0.7091
-0.6154
-0.1442
```

Решения совпали.