

# Лабораторная работа

Батурин Георгий

## Содержание

1	(1) Первое задание	2
2	(2) Второе задание	2
3	(3) Третье задание	4

## 1 (1) Первое задание

Выберите некоторую функцию (например,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\exp x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\ln x$ , ...), и некоторую точку  $x$  из области определения функции. Найдите значение производной функции в выбранной точке (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью  $10^{-3}$ ,  $10^{-6}$ . Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено.

Функция, для которой мы будем искать численное значение производной, будет  $\sin x$  в точке  $x = 0$ :

Посчитаем производную для  $\sin x$ , в точке  $x_0 = 1/2$ . Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ , потом, сравнивая с этим значением, найдем производную с заданной точностью.

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;

syms x
h = 0.5;

v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h))

for eps = [10^-3, 10^-6]
    df = 1;
    while abs(v-df) >= 10^-3
        df = (f(x0+h) - f(x0-h))/(2*h);
        h = h/2;
    end
    df
end
```

```
v = 0.841473696062592
df = 0.841470984807897
df = 0.84147347832921
```

## 2 (2) Второе задание

Выберите некоторую функцию (например,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\exp x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\ln x$ , ...) и некоторую точку  $x$  из области определения функции. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например,  $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$  и  $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ ) для последовательности убывающих шагов (например,  $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом.

Сравнивать будем две формулы:  $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$  и  $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ , с  $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ , в точке  $x = 1/2$ , для функции  $\sin x$ .

$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h} + O(h^1)$  – имеет первый порядок погрешности, а  $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$  – второй порядок погрешности

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;
syms x;

R1 = [];
R2 = [];

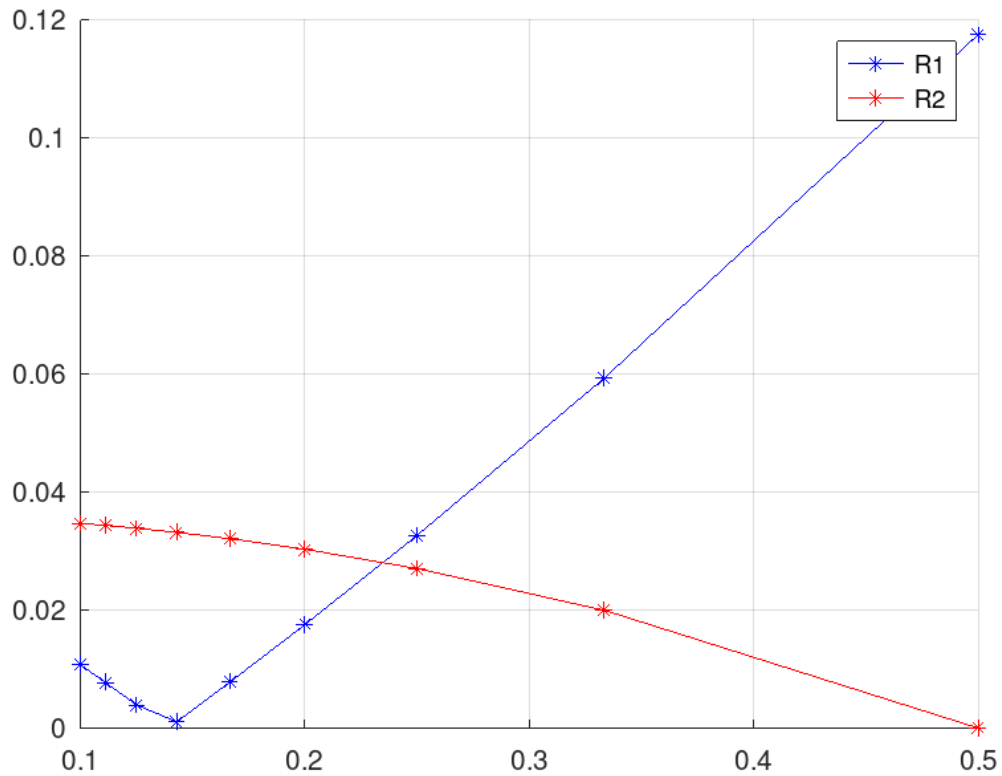
h = 1/2;
v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h))
n = 10;
h = 1 ./ [2 : n];

for hi = h
    df1 = (f(x0 + hi) - f(x0))/hi;
    df2 = (f(x0 + hi) - f(x0 - hi))/(2*hi);

    R1 = [R1, abs(df1 - v)];
    R2 = [R2, abs(df2 - v)];
end

hold on, grid on;
plot(h, R1, '-*b', h, R2, '-*r')
legend('R1', 'R2')
df1, df2
first_error, second_error
```

Рис. 1:



### 3 (3) Третье задание

Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите некоторую функцию (например,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\exp x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\ln x$ , ...) и некоторую точку  $x$  из области определения функции. Попробуйте применить формулу  $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$  для стремящейся к нулю последовательности  $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ . Будет ли погрешность  $\epsilon = \left| y'(x) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \right|$  монотонно убывать при уменьшении  $h$ ? Сравните практический и теоретический результаты.