Большое домашнее задание 1

Батурин Георгий

Содержание

1 Первое задание

Текст задания

(а)Представить слагаемые и результат в виде нормализованного числа с плавающей точкой двойной точности: $(-1)^s(2^{e-1023})(1.f)$, где $1.f$ записанов двоичном виде.(б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-1593.5859375 \cdot 2^{128} + 1619.09765625 \cdot 2^{141}$$

Решение

Для начала разберемся с первым числом $-1593.5859375 \cdot 2^{128}$:

$$-1593.5859375_{10} = 11000111001.1001011_2 = 1.10001110011001011_2 \cdot 2^{10}$$
$$-1593.5859375_{10} \cdot 2^{128} = (-1)^1(2^{1161-1023}) \cdot 1.10001110011001011$$

$s = 1$, $e = 1023 + 128 + 10 = 1161$, $f = 10001110011001011\underbrace{0\ldots0_{\text{35 нулей}}}$

Теперь нормализуем $1619.09765625 \cdot 2^{141}$:

$$1619.09765625_{10} = 11001010011.00011001_2 = 1.1001010011000110012 \cdot 2^{10}$$
$$1619.09765625 \cdot 2^{141} = (-1)^0(2^{1174-1023})(1.100101001100011001)$$

$s = 0$, $e = 1023 + 141 + 10 = 1174$, $f = 100101001100011001\underbrace{0\ldots0_{\text{34 нуля}}}$

$$11001010011.00011001 \cdot 2^{141} - 11000111001.10001011 \cdot 2^{128} =$$
$$= 2^{141}(11001010011.00011001 - 11000111001.1001011 \cdot 2^{-13}) =$$
$$= 2^{141}(11001010011.00011001 - 0,\underbrace{0\ldots0_{\text{12 нулей}}}\underbrace{110001110010001011_{\text{18 битов}}}) =$$
$$= 2^{141}(\underbrace{11001010011.00011001_{\text{19 битов}}}\underbrace{\text{5 битов}}\underbrace{\text{18 битов}})$$

Получается 42 бита $\Rightarrow$ число полностью поместится, а значит никакой погрешности нет.

2 Второе задание

Текст задания

Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции(eye, repmat, flipud и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные: Целое $n \geq 20$

Надо получить:

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}\right\}\text{2n строк}$$

Решение

```
n = input();
A \[= [1 : 0.5 : n]
```

$$A = 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 3.50, 4.00, \ldots, n$$

```
A = fix(A)
```

$$A = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots, n$$

```
A = [0, A]
```

$$A = 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n$$

```
A = repmat(A, 2*n, 1);
```

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n & \end{pmatrix}\right\}\text{2n строк}$$

```
X = [0, 1]
X = repmat(X, 2*n, 1)
```

$$X = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}2n$$

```
X = repmat(X, 1, n)
```

$$X = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{\text{n столбцов}}\text{2n строк}$$

```
A = A.*X
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

3 Третье задание

Текст задания

(а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня z_i указать отрезок $[a_i, b_i]$, содержащий только один этот кореньz_i). Для *каждого* корня (б) построить итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящийся к корню и (в) указать начальное значение x_0. Указание: локализацию проводить перебором интервалов $[a_i, b_i]$ или средствами математического анализа.

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

Решение

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-89	-19	3	1	-1	21	91
$sign(f(x))$	-	-	+	+	-	+	+

Можно увидеть как $f(x)$ меняет знак при $x = -2 \to -1$ и при $x = 0 \to 1$ и $x = 1 \to 2$, то есть: $a_1 = -2, b_1 = -1; a_2 = 0, b_2 = 1; a_3 = 1, b_3 = 2$.

Найдем итерационный процесс для отрезка $[-2, -1]$:
Воспользуемся методом Ньютона:
Для этого найдем производную: $f^{'}(x) = 12x^2 - 6$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f^{'}(x)} = x_n - \frac{4x_n^3 - 6x_n + 1}{12x_n - 6} = \frac{-4x_n^3 + 12x_n^2 - 1}{12x_n - 6}$$

Так как $f^{'} < 0$ и $f^{''} < 0$ на промежутке $[-2, 1]$, то $x_0 = -1$.

Найдем итерационный процесс для отрезка $[0, 1]$:
По методу Ньютона x_0 для этого отрезка $x_0 = 1$
Найдем итерационный процесс для отрезка $[1, 2]$:

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$
$$x^3 = \frac{6x - 1}{4}$$
$$\varphi(x) = x = \left(\frac{6x - 1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\varphi^{'}(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{(6x - 1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$|\varphi^{'}(x)| < 1$$
$$|\frac{3\sqrt{2}}{(6x - 1)^{\frac{2}{3}}}| < 1$$

Решение этого неревенства: $(0.4, \infty)$ $(\supseteq [1, 2])$

$$x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2}}{(6x-1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$x_0 \in [1, 2]$$
$$x_0 = 2$$

4 Четвертое задание

Текст задания
Известно, что интервалу $[a, b]$ принадлежит *только* корень x_* уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f^{'}(x_n)$ и (б) обосновать какую из границ интервала $[a, b]$ можно принять за x_0. Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных $f^{'}(x)$ и $f^{''}(x)$ и использовать соотвествующую теорему.

$$x - \frac{e^x}{x} + \frac{3}{2} = 0, x_* \in [1,3; 1,4]$$

Решение

$$f^{'}(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$

Итерационный процесс Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = \frac{(2x + 2e^x + 3x)x}{2(x^2 - xe^x + e^x)}$$

Теорема справедлива если на всем отрезке $[a, b]$ выполняются:
(1) $f^{'} > 0, f^{''} > 0, x_0 = b$
(2) $f^{'} < 0, f^{''} < 0, x_0 = a$
(3) $f^{'} < 0, f^{''} < 0, x_0 = b$
(4) $f^{'} > 0, f^{''} < 0, x_0 = a$

$$f^{'}(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$
$$f^{''}(x) = -\frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$f^{'}(x)$ — положительна, а $f^{''}(x)$ — отрицательна на всем отрезке $[a, b]$ $\Rightarrow$ теорема применима

$$f^{'}(1.3) > 0$$
$$f^{''}(1.3) < 0 \Rightarrow x_0 = 1.3$$

5 Пятое задание

Текст задания
(а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ по узлам x_i.
(б) Оценить сверху погрешность $|R_n(x)|$ приближения функции многочленом.

$$\ln(x) - \sqrt{x}, x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 5$$

Решение

x	3	4	5
$f(x)$	0.46	0.48	0.47

Найдем многочлен Лагранжа, для:

$$L(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0.46\frac{(x-4)(x-5)}{-1\cdot(-2)} + 0.48\frac{(x-3)(x-5)}{1\cdot(-1)} + 0.47\frac{(x-3)(x-4)}{2} =$$

$$= 0.2325(x^2-9x+20) - 0.484(x^2-8x+15) + 0.236(x^2-7x+12) =$$

$$= -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$$

Окончальтельно получаем, что наш интерполяционный многочлен равен $L(x) = -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$. Проверим это с помощью матлаба, на рисунке 1

```
x = [3, 4, 5];
f = @(x) log(3*x) - sqrt(x); % Сама функция
L = @(x) -0.0155*x.^2 + 0.1275*x + 0.222; % полином Лагранжа

hold on, grid on
plot(x, f(x), "r", x, L(x), "k");
```

Теперь найдем погрешность $|R_2(x)|$:

$$|R_2(x)| = \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$M_3 = \max_{[a,b]}|f^{(3)}(x)|$$

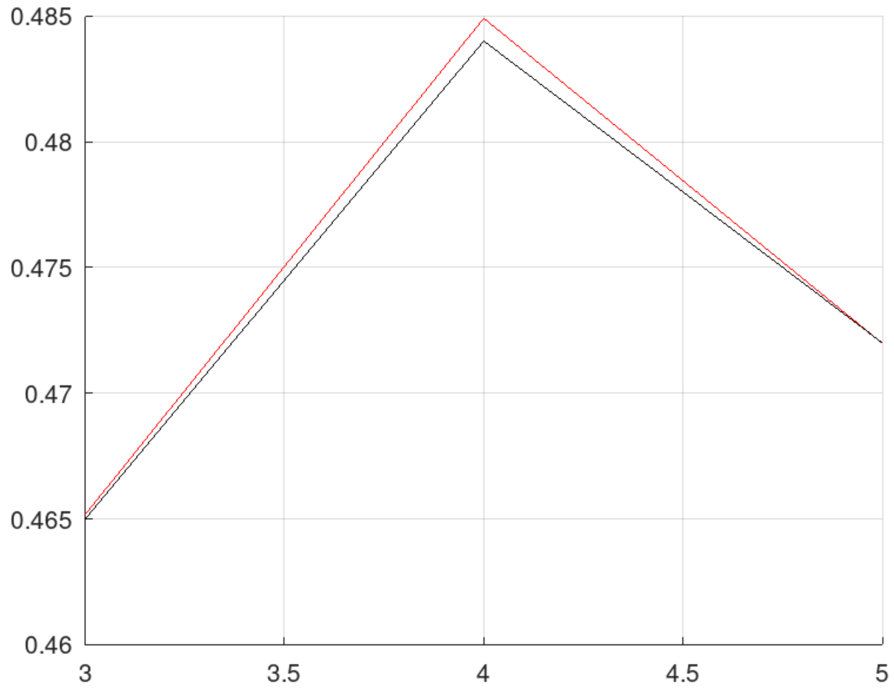
$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{8x^{5/2}}$$

Максимум $f^{(3)}(x)$ на отрезке $[3,5]$, достигается в точке 3.

$$f^{(3)}(x) = 0.05$$

$$|R_2(x)| \le \frac{0.05}{6}(x-3)(x-4)(x-5) \le \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{47}{120}x - \frac{1}{2}$$

Рис. 1: Красный график это наша функция, а черный - полином Лагранжа.



6 Шестое задание

Текст задания

Заданную функцию будут интерполировать на отрезке $[a, b]$ по чебышёвским узлам с заданной точностью $|R_n(x) < \epsilon|$. Требуется (а) определить требуемое для заданной точности ϵ количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси Ox (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = x^2 - \text{sin}\left(\frac{x}{2}\right), \text{на отрезке} \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \text{с точностью} \epsilon = 10^{-3}$$

Решение

$$f'''(x) = \frac{1}{8}\text{cos}(\frac{x}{2})$$

Сначала найдем кол-во узлов для $\epsilon = 10^{-3}$

Для $n = 2$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \left(\pi - \frac{pi}{4}\right)^3 \cdot 2^{-5}, \text{где} M_3 = \max_{[\pi, \frac{\pi}{4}]} |f'''(x)|$$

$$M_3 = \max_{[\pi, \frac{\pi}{4}]} |f'''(x)| \approx 0.1155$$

$$|R_2(x)| = \frac{0.1155}{6} \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx 7.9 \cdot 10^{-4} = 0.00079 < 0.001(10^{-3})$$

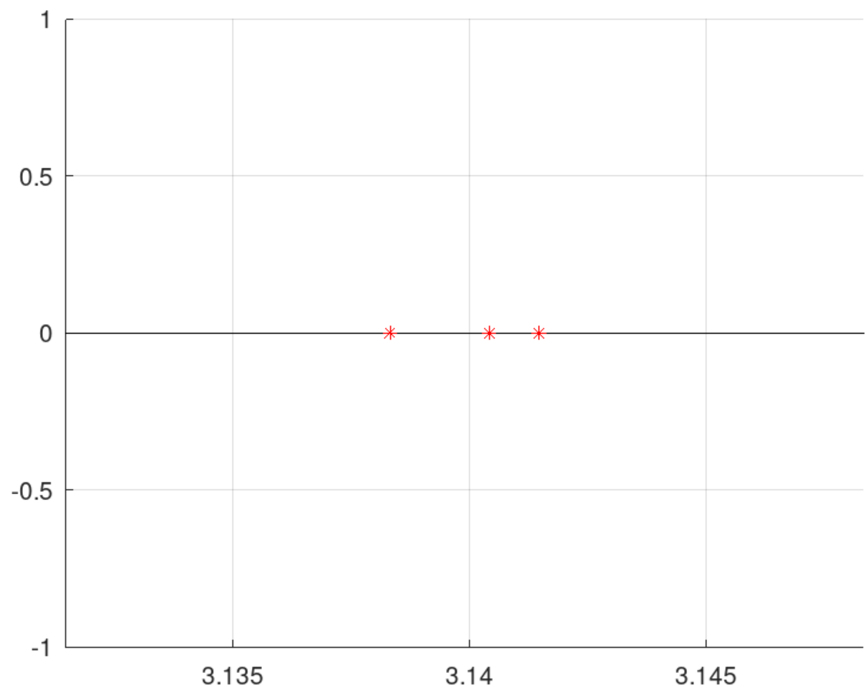
Степень интерполяции равна двум, значит кол-во узлов равно трем. Теперь требуется вычислить значение узлов и отметить их на действительной оси Ox

$$x_k = \pi \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

```
n = 3;
k = [1 : n];
xk = pi * cosd(pi * (2*k-1)/(2*n))
hold on, grid on
xlim([xk(1) - 0.01, xk(3) + 0.01])
line([xk(1) - 0.02, xk(3) + 0.02], [0, 0], 'color', 'k')
plot(xk, 0, 'r*')
```

```
xk =

 3.1413    3.1413    3.1389
```

Рис. 2: Чебышевские узлы на оси Ox



7 Седьмое задание

Текст задания

Данные некоторого физического эксперимента представлены в таблице. Характер зависимости $y(x)$ заранее точно неизвестен. Есть предположения, что зависимость может быть линейной, квадратичной или кубической. (а) Методом среднеквадратического приближения построить три типа приближения $y(x)$ (т.е. аппроксимирующие многочлены первой, второй и третьей степеней). (б) Для каждого аппроксимирующего многочлена вычислить среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y(x_i)-y_i)^2}$. (в) Выбрать минимальное с.к.о. и указать соответствующий ему тип зависимости (линейная, квадратичная или кубическая), т.е. наиболеевероятный в проведённом эксперименте.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	17.2	45.5	96.5	175.8	288.9

Решение

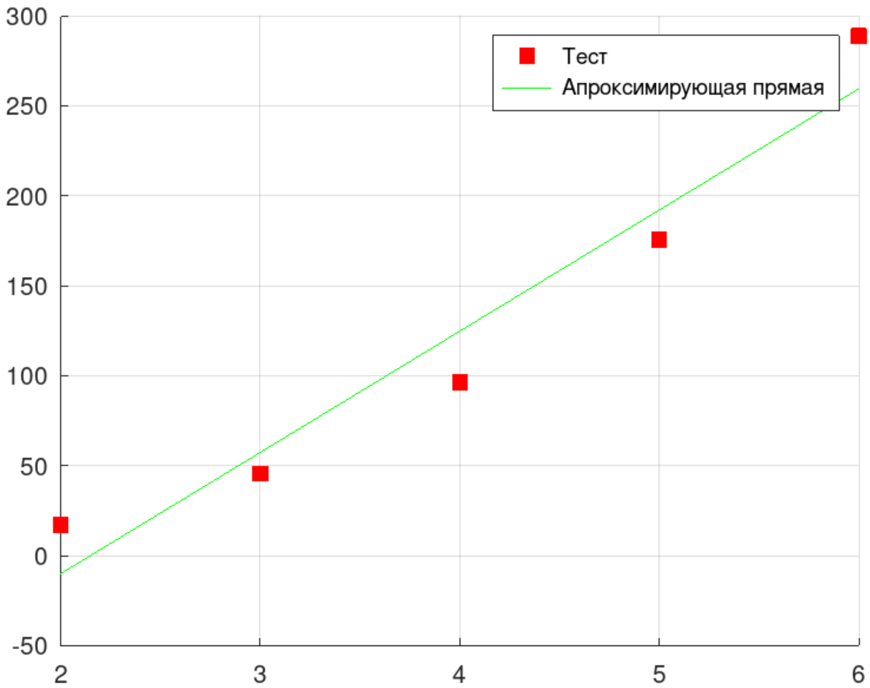
Для апроксемирующего многочлена первой степени воспользуемся такой матрицей:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_u & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];

s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2)
b = [sum(y); sum(y*x')]

a = s\b
y2 = a(1) + a(2)*x
hold on; grid on;
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfac
plot(x, y2, 'color', 'g');
legend('Тест', 'Апроксимирующая прямая')
```

```
s =

5     20
20     90

b =

623.90
3169.30

a =

-144.700
67.370

y2 =

-9.9600     57.4100     124.7800     192.1500     259.5200
```

Рис. 3: Точки из экспиремента и апроксимирующая прямая (1-ой степени)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (y(x) - y_i)^2}{n+1}} \approx 21.64$$

Для апрокcмирующей второй степени:

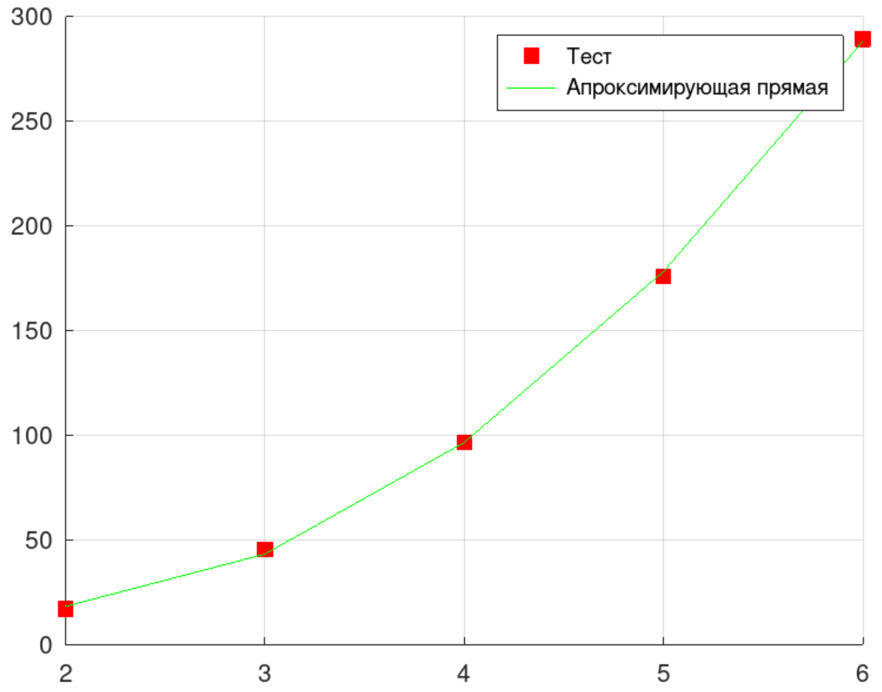
$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];

s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2);

s(3, 1) = sum(x.^2);
s(3, 2) = sum(x.^3);
s(1, 3) = s(3, 1);
s(2, 3) = s(3, 2);
s(3, 3) = sum(x.^4)

b = [sum(y); sum(y*x'); sum(y*x'.^2)]
```

```
a = s\b

y2 = a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2
hold on; grid on;
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfac
plot(x, y2, 'color', 'g');
legend('Тест', 'Апроксимирующая прямая')
```

```
s =

5      20      90
20      90     440
90     440    2274

b =

6.2390e+02
3.1693e+03
1.6818e+04

a =

53.200
-45.716
14.136

y2 =

18.311     43.274     96.509    178.014    287.791
```

Рис. 4: Точки из экспиремента и апроксимирующая прямая (2-ой степени)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta \approx 1.4$$

Для апроксимирующей третей степени:

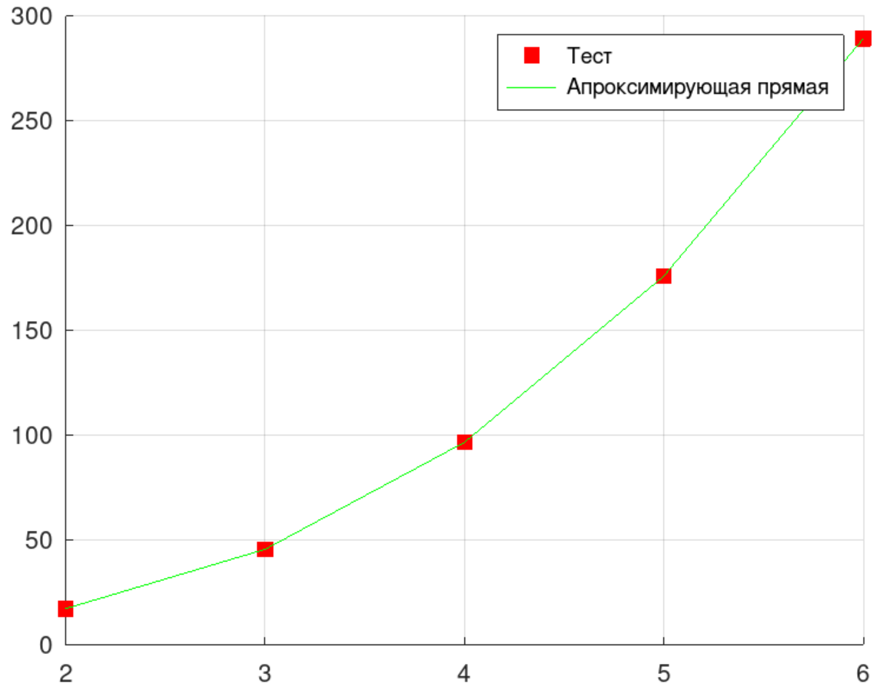
$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 y_i \end{pmatrix}$$

```
n = 5; %Кол-во измерений
x = [2 : 6];
y = [17.2, 45.5, 96.5, 175.8, 288.9];

s(1,1) = n;
s(2, 1) = sum(x);
s(1, 2) = s(2, 1);
s(2, 2) = sum(x.^2);

s(3, 1) = sum(x.^2);
s(3, 2) = sum(x.^3);
s(1, 3) = s(3, 1);
s(2, 3) = s(3, 2);
s(3, 3) = sum(x.^4);

s(4, 1) = sum(x.^3);
```

```
s(1, 4) = s(4, 1);
s(4, 2) = sum(x.^4);
s(2, 4) = s(4, 2);
s(4, 3) = sum(x.^5);
s(3, 4) = s(4, 3);
s(4, 4) = sum(x.^6)

b = [sum(y); sum(y*x'); sum(y*x'.^2); sum(y*x'.^3)]
a = s\b

y2 = a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2 + a(4)*x.^3
hold on; grid on;
plot(x, y, 'linestyle', 'none', 'marker', 's', 'color', 'r', 'markerfac
plot(x, y2, 'color', 'g');
legend('Тест', 'Апроксимирующая прямая')
```

```
s =

5       20       90       440
20       90      440      2274
90      440     2274     12200
440     2274    12200     67170

b =

6.2390e+02
3.1693e+03
1.6818e+04
9.1920e+04

a =

6.5800
-4.4607
3.0357
0.9250

y2 =

17.201     45.494     96.509     175.794     288.901
```

Рис. 5: Точки из экспиремента и апроксимирующая прямая (3-ая степень)



Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta \approx 0.812$$

Таким образом минимальное с.к.о. $\delta \approx 0.812$, соотвествующий ему тип кубический