Лабораторная работа №7

Батурин Георгий

Оглавление

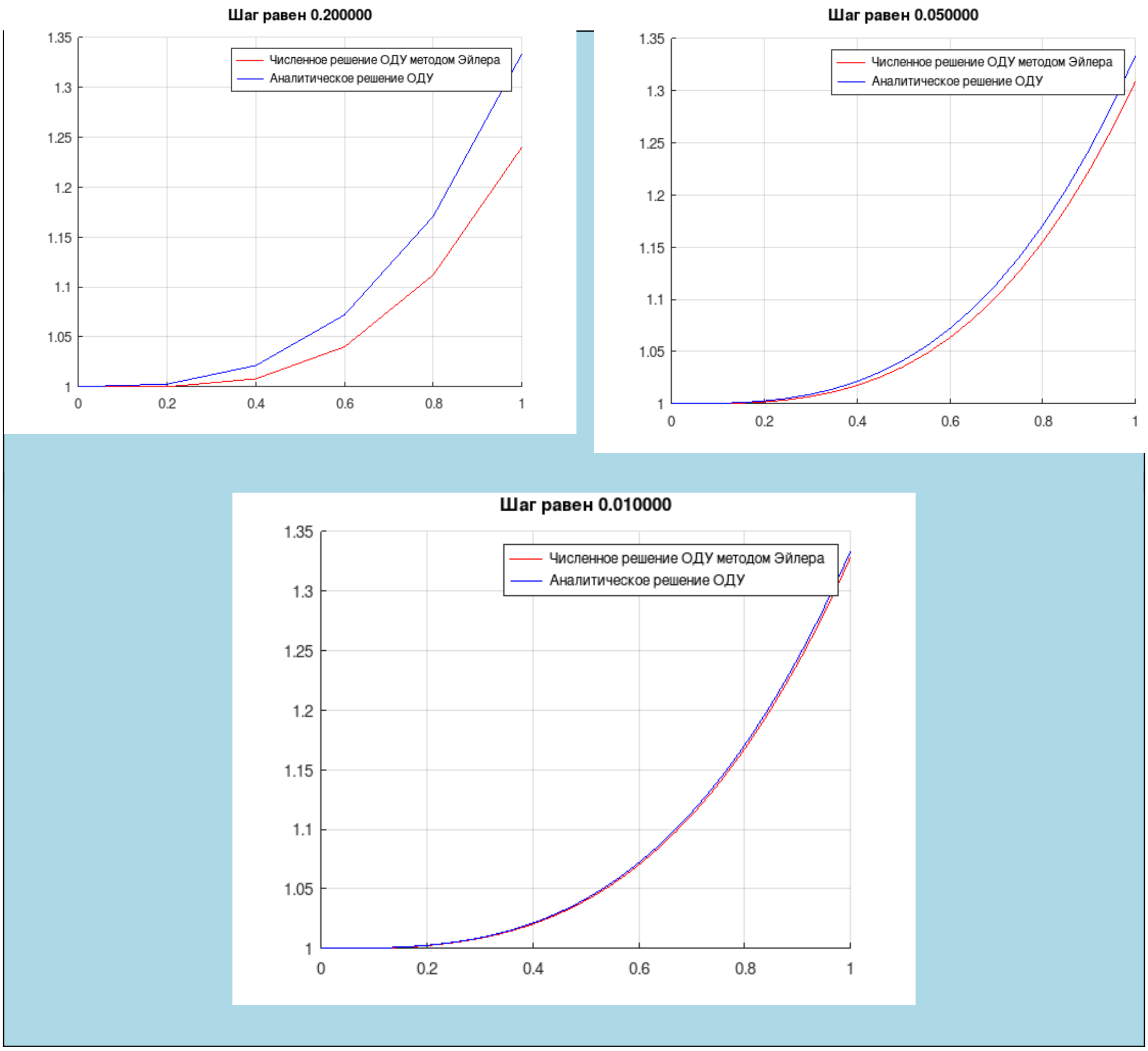
Задание 1

① Найдите численное решение следующего ОДУ методом Эйлера (на равномерной сетке) и сравните его с аналитическим:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Зная, что $y(x0)$= η, численное решение ОДУ методом Эйлера будет иметь вид: $y_{i+1} = y_i + h_i f_i, i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

```
for h = [1/5, 1/20, 1/100] % шаг
    x = 0 : h : 1; % промежуток, на котором будет искаться решение
    n = length(x);
    y = zeros(1, n);
    y(1) = 1;

    % Метод Эйлера
    for i = 1 : n - 1
        y(i + 1) = y(i) + h*x(i)^2;
    end

    % Построение графиков
    figure()
    hold on, grid on;
    plot(x, y, 'r')
    plot(x, arrayfun(@(x) x.^3/3+1, x), 'b')
    title(sprintf('Шаг равен %f', h));
    legend('Численное решение ОДУ методом Эйлера', 'Аналитическое решение ОДУ')
end
```



Можно увидеть, что погрешность метода Эйлера напрямую зависит от шага. И при достаточном малом шаге дает очень высокое приближение к аналитическому решению.

Задание 2

② MATLAB имеет множество функций для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Солверы `ode23` и `ode45` основаны на формулах Рунге-Кутты 2,3 и 4,5 порядков соответственно. Разберем пример их использования на примере задачи о колебаниях под воздействием внешней силы:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = \sin t, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Сводим к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -2y_2 - 10y_1 + \sin t, \\ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

```
function test ode:
Y0 = [1;0]; % вектор начальных условий
[T Y] = ode45('oscil',[0 15],Y0); % получение решения
                                  % на отрезке 0<t<15
function F=oscil(t,y)             % составляем функцию
F=[y(2); -2*y(2)-10*y(1)+sin(t)]; % из правых частей
```

вектор `Y(:,1)` содержит решение исходного уравнения,
вектор `Y(:,2)` содержит производную решения уравнения.

```
function F = oscil(t,y)
    F = [y(2);-2*y(2)-10*y(1)+sin(t)] ;
end

function res = test_ode()
    Y0 = [1;0];
    [T,Y] = ode45(@oscil,[0 15] ,Y0 );
    res = [T,Y];
end
```

```
arr=test_ode();
```

```
>> (arr(:,1))  – вывод аргумента t

ans =

        0
   0.0681
   0.1703
   0.3236
   0.5535
   0.8081
   1.0576
   1.3069
   1.5633
   1.8035
   2.0660
   2.3207
   2.6103
   2.9057
   3.1926
   3.4777
   3.7055
   3.9196
   4.1609
   4.4556
   4.7584
   5.0518
   5.3124
   5.5810
   5.9082
   6.3142
   6.7605
   7.2205
```

```
    7.5653
    7.9034
    8.1550
    8.4017
    8.6771
    8.9919
    9.3451
    9.7486
   10.1631
   10.5775
   10.9381
   11.2560
   11.5286
   11.8052
   12.1183
   12.4684
   12.8664
   13.2829
   13.7018
   14.0648
   14.3845
   14.6595
   14.9347
   15.0000
```

>> arr(:,2) - вывод функции y(t).

>> arr(:,3) - функция производной от y(t) - y’(t).

Задание 3

② Постройте графики координаты $y_1(t)$ и скорости $y_2(t)$. Воспользовавшись знаниями теории обыкновенных дифференциальный уравнений можно получить аналитическое решение:

$$y = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \frac{1}{85}(9 \sin t - 2 \cos t),$$

где для данной задачи Коши $C_1 = \frac{87}{85}$, $C_2 = \frac{26}{85}$. Постройте график аналитического решения и сравните с численным, полученным при помощи `ode23` и `ode45`.

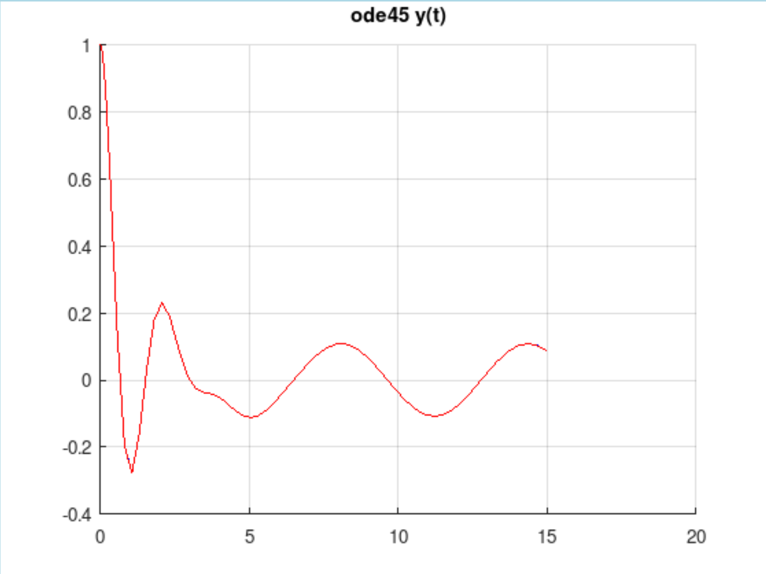
```
arr = test_ode(); %Применяем вышенаписанную функцию.
[T,Y] = ode23(@oscil,[0 15],[1;0]); %Находим решения по Рунге-Кутту 2,3 порядка.
arr_23 = [T Y]; %Заносим полученные данные в отдельный массив.
y = @(t) exp(-t).*((87/85)*cos(3*t)+(26/85)*sin(3*t))...
+(9*sin(t)-2*cos(t))/85; %Функция зависимости координаты от t.

%Так как мы знаем, что скорость - это производная координаты по времени, то
%для нахождения функции зависимости скорости от t, необходимо взять
%производную от функции зависимости координаты от t:

dy = @(t) (9*cos(t))/85 + (2*sin(t))/85 - exp(-t).*((87*cos(3*t))/85 +...
(26*sin(3*t))/85) + exp(-t).*((78*cos(3*t))/85 - (261*sin(3*t))/85);
disp('Отклонение ode45 y:')
max(abs(arr(:,2)-y(arr(:,1))))
disp('Отклонение ode45 dy/dt:')
max(abs(arr(:,3)-dy(arr(:,1))))
disp('Отклонение ode23 y:')
max(abs(arr_23(:,2)-y(arr_23(:,1))))
disp('Отклонение ode23 dy/dt:')
```

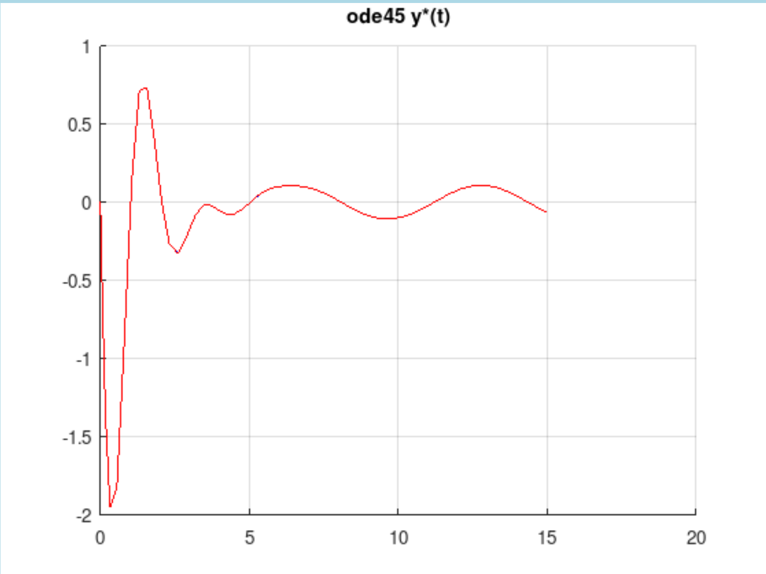
```
max(abs(arr_23(:,3)-dy(arr_23(:,1))))


%Построим соответствующие графики:
figure(1)
hold on,grid on
plot(arr(:,1),arr(:,2),'b')
plot(arr(:,1),y(arr(:,1)),'r')
title('ode45 y(t)')


figure(2)
hold on,grid on
plot(arr(:,1),arr(:,3),'b')
plot(arr(:,1),dy(arr(:,1)),'r')
title('ode45 y*(t)')
figure(3)
hold on,grid on
plot(arr_23(:,1),arr_23(:,2),'b')
plot(arr_23(:,1),y(arr_23(:,1)),'r')
title('ode23 y(t)')


figure(4)
hold on,grid on
plot(arr_23(:,1),arr_23(:,3),'b')
plot(arr_23(:,1),dy(arr_23(:,1)),'r')
title('ode23 y*(t)')
```

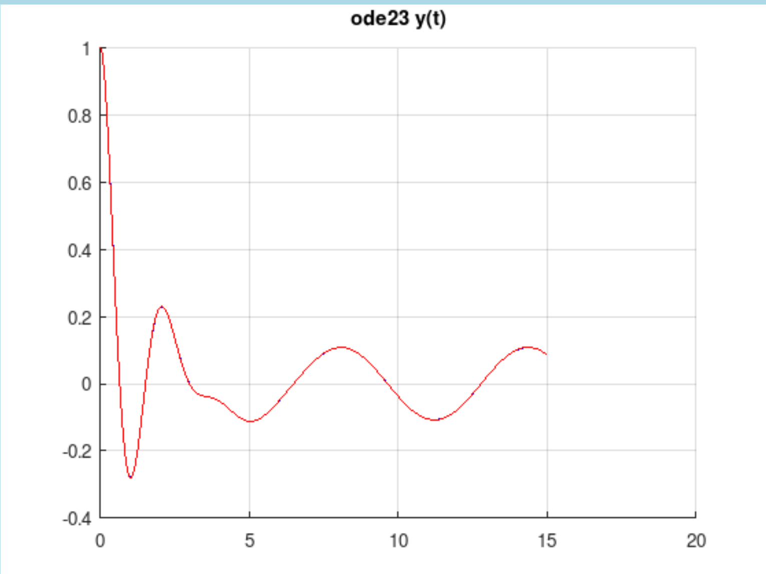
```
Отклонение ode45 y:
ans = 1.0722e-04
Отклонение ode45 dy/dt:
ans = 3.8463e-04
Отклонение ode23 y:
ans = 6.6908e-04
```

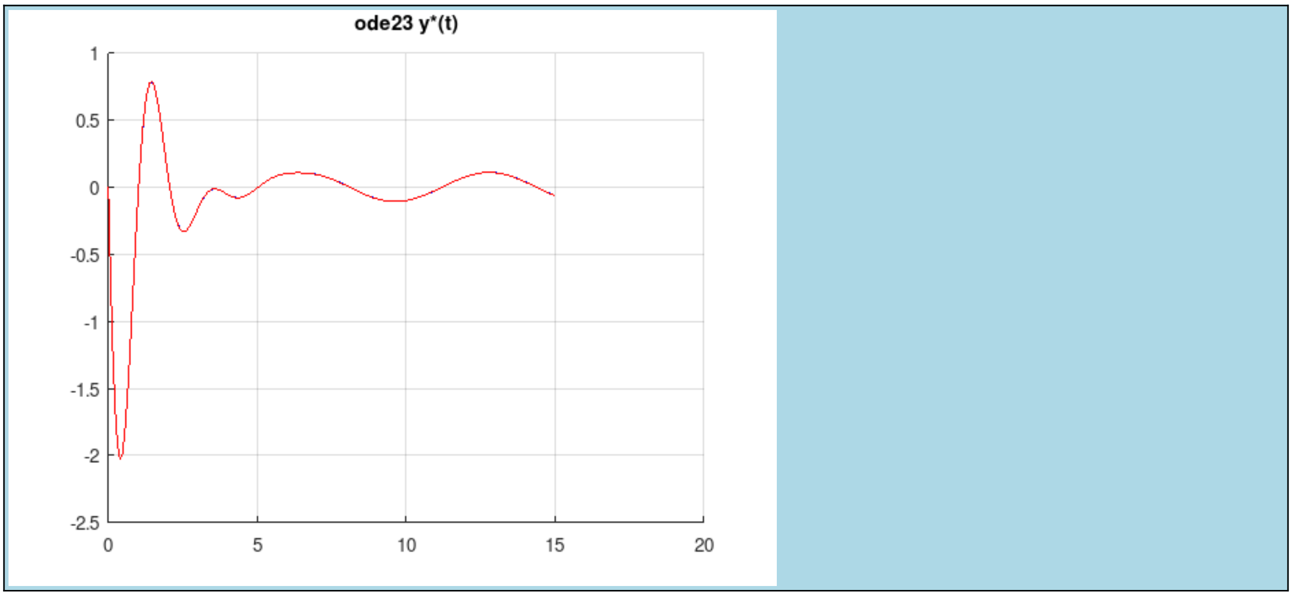
Отклонение ode23 dy/dt:

ans = 2.0266e-03









Видно, что метод Рунге-Кнута 4,5 порядка (ode45) имеет большую точность, чем метод 2,3 порядка точности. То есть, по максимальным отклонениям видно, что от аналитического решения меньше отклоняется то, что было решено через ode45.