Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

Содержание

1 Девятое задание

Текст задания
Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

$$\text{ф-ла } y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2);\text{функ. } y(x) = cosx \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, 4\right];\ \text{погр. } \delta = 10^{-8}$$

Решение
Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью δ. В действительности компьютер вычислит:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(\widetilde{y_0} - 2\widetilde{y_1} + \widetilde{y_2})$$

, где $\widetilde{y_0} = y_0 + \delta_0; \widetilde{y_1} = y_1 + \delta_1; \widetilde{y_2} = y_2 + \delta_2$

Рассмотрим погрешность:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| y_0'' - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| = \\
&= \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left(\frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq \\
&\leq \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \right| \leq \\
&\leq \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right|
\end{aligned}$$

Для оценки разности

$$\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| \tag{1}$$

разложим y_1 и y_2 в ряд Тейлорав окрестности x_0 до h^3

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y'''(\xi_1)}{6} \tag{2}$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y'''(\xi_2)}{6} \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$\begin{aligned}
&\left| y_0'' - \frac{y_0 - 2y_0 - 2hy_0' - h^2 y_0'' - \frac{h^3 y'''(\xi_1)}{3} + y_0 + 2hy_0' + 2h^2 y_0'' + \frac{h^3 y'''(\xi_2)}{3}}{h^2} \right| = \\
&= \left| y_0'' - \frac{h^2 y_0'' + h^3 y'''(\xi)}{h^2} \right| = \\
&= \left| y_0'' - y_0'' + hy'''(\xi) \right| = \\
&= \left| hy'''(\xi) \right|
\end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta \le \left|hy'''(\xi)\right| + \left|\frac{4\delta}{h^2}\right| \le hM_3 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h)$ Минимизируем ошибку $\Phi(h)$:

$$h_{\text{опт}}\Phi'(h) = M_3 - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \Rightarrow h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{M_3}}$$

Найдем $M_3 = \max_{[\frac{\pi}{4};\pi]}|y'''(x)|$. Так как $y'''(x) = \sin(x) \Rightarrow M_3 = 1$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-8}}{1}} 2 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-2.7}$$

2 Десятое задание

Текст задания

Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1, а затем с шагом h_2. Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинногозначения интеграла I.

$$I = \int_1^3 \sin x \,\text{sh}\, x dx; S(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(\text{ф-ла левых прямоуг.}); h_1 = \frac{2}{4}, h_2 = \frac{2}{12}$$

Решение

Для $h_1 = \frac{2}{4}$:

```
f = @(x) sin(x).*sinh(x);
disp('x_i:')
h = 2/4;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x))
```

```
x_i:
x =

1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000

S = 5.7227
```

Для $h_2 = \frac{2}{12}$:

```
f = @(x) sin(x).*sinh(x);
disp('x_i:')
h = 2/12;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x))
```

```
x_i:
x =
```

```
   1.0000    1.1667    1.3333    1.5000    1.6667    1.8333
    2.0000    2.1667    2.3333    2.5000    2.6667    2.8333
    3.0000

  S = 5.5135
```

Найдем погрешность:

$$I \approx S\left(\frac{2}{4}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2$$

$$S\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{c}{4} \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + \frac{c}{36}$$

$$\frac{c}{4} - \frac{c}{36} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{2c}{9} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$c = \frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2}$$

$$\epsilon = I - S\left(\frac{2}{12}\right) = c \cdot h_2^2 = \left|\frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2 \cdot 36}\right| = \left|\frac{\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{8}\right| = \left|\frac{5.5135 - 5.7227}{8}\right| \approx 0.026$$