

# Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

## Содержание

1 Девятое задание

2

# 1 Девятое задание

## Текст задания

Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция  $y(x)$  (данные в таблице могут содержать погрешность не более  $\delta$ ). Определить оптимальное значение шага  $h_{\text{опт}}$ , когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

$$\text{ф-ла } y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2); \text{ функ. } y(x) = \cos x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, 4\right]; \text{ погр. } \delta = 10^{-8}$$

## Решение

Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью  $\delta$ . В действительности компьютер вычислит:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \\ , \text{ где } \tilde{y}_0 = y_0 + \delta_0; \tilde{y}_1 = y_1 + \delta_1; \tilde{y}_2 = y_2 + \delta_2$$

Рассмотри погрешность:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| y_0'' - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| = \\ &= \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left( \frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \left( y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right| \end{aligned}$$