

Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

Содержание

1	Девятое задание	2
2	Десятое задание	3
3	Одиннадцатое задание	4
4	Двенадцатое задание	4

1 Девятое задание

Текст задания

Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

$$\text{ф-ла } y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2); \text{ функ. } y(x) = \cos x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, 4\right]; \text{ погр. } \delta = 10^{-8}$$

Решение

Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью δ . В действительности компьютер вычислит:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \\ , \text{ где } \tilde{y}_0 = y_0 + \delta_0; \tilde{y}_1 = y_1 + \delta_1; \tilde{y}_2 = y_2 + \delta_2$$

Рассмотрим погрешность:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| y_0'' - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| = \\ &= \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left(\frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right| \end{aligned}$$

Для оценки разности

$$\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| \quad (1)$$

разложим y_1 и y_2 в ряд Тейлора в окрестности x_0 до h^3

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y_0'''}{6}(\xi_1) \quad (2)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y_0'''}{6}(\xi_2) \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$\begin{aligned} &\left| y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right| = \left| y_0'' - \frac{y_0 - 2(y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y_0'''}{6}(\xi_1)) + (y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y_0'''}{6}(\xi_2))}{h^2} \right| = \\ &= \left| y_0'' - \frac{h^2 y_0'' + h^3 y_0'''(\xi)}{h^2} \right| = \\ &= \left| y_0'' - y_0'' + hy_0'''(\xi) \right| = \\ &= \left| hy_0'''(\xi) \right| \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta \leq |hy'''(\xi)| + \left|\frac{4\delta}{h^2}\right| \leq hM_3 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h)$ Минимизируем ошибку $\Phi(h)$:

$$h_{\text{опт}} \Phi'(h) = M_3 - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \Rightarrow h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{M_3}}$$

Найдем $M_3 = \max_{[\frac{\pi}{4}, \pi]} |y'''(x)|$. Так как $y'''(x) = \sin(x) \Rightarrow M_3 = 1$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-8}}{1}} = 2 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-2.7}$$

2 Десятое задание

Текст задания

Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1 , а затем с шагом h_2 . Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинного значения интеграла I .

$$I = \int_1^3 \sin x \operatorname{sh} x dx; S(h) = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \text{ (ф-ла левых прямоуг.)}; h_1 = \frac{2}{4}, h_2 = \frac{2}{12}$$

Решение

Для $h_1 = \frac{2}{4}$:

```
f = @(x) sin(x) .* sinh(x);
disp('x_i: ')
h = 2/4;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x))
```

```
x_i:
x =

1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000

S = 5.7227
```

Для $h_2 = \frac{2}{12}$:

```
f = @(x) sin(x) .* sinh(x);
disp('x_i: ')
h = 2/12;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x))
```

```
x_i:
x =
```

1.0000	1.1667	1.3333	1.5000	1.6667	1.8333
2.0000	2.1667	2.3333	2.5000	2.6667	2.8333
3.0000					

$S = 5.5135$

Найдем погрешность:

$$I \approx S\left(\frac{2}{4}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2$$

$$S\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{c}{4} \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + \frac{c}{36}$$

$$\frac{c}{4} - \frac{c}{36} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{2c}{9} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$c = \frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2}$$

$$\epsilon = I - S\left(\frac{2}{12}\right) = c \cdot h_2^2 = \left| \frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2 \cdot 36} \right| = \left| \frac{\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{8} \right| = \left| \frac{5.5135 - 5.7227}{8} \right| \approx 0.026$$

3 Одиннадцатое задание

Текст задание

Предложить способ вычисления несобственного интеграла на компьютере. Указание: использовать один из методов, рассмотренных на лекции или семинаре.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \sin x}{(x-1)^2} dx$$

4 Двенадцатое задание

Текст задания

Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 9 \\ 6 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_i \sum_i |x_i|, \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\max_i \sum_i \lambda_i(A^T A)}$$

```
A = [-9, -2, 5; 2, -5, 9; 6, -7, -10]; % Матрица
```

```
A_1 = sum(abs(A))
```

```
B = A'*A
```

```
lambdas = eig(B) % Находим собственные значения
```

```
A_2 = sqrt(max(lambdas))
```