Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

Содержание

1 Девятое задание

Текст задания
Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

ф-ла $y_0^{''} = \dfrac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2);$ функ. $y(x) = cosx$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}, 4\right]$; погр. $\delta = 10^{-8}$

Решение
Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью δ. В действительности компьютер вычислит:

$$y_0^{''} = \frac{1}{h^2}(\widetilde{y_0} - 2\widetilde{y_1} + \widetilde{y_2})$$

, где $\widetilde{y_0} = y_0 + \delta_0; \widetilde{y_1} = y_1 + \delta_1; \widetilde{y_2} = y_2 + \delta_2$

Рассмотри погрешность:

$$\Delta = \left| y_0^{''} - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| =$$

$$= \left| \left(y_0^{''} - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left(\frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \left(y_0^{''} - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \right| \leq$$

$$\leq \left| \left(y_0^{''} - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right|$$

Для оценки разности

$$\left| \left(y_0^{''} - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| \tag{1}$$

разложим y_1 и y_2 в ряд Тейлорав окрестности x_0 до h^3

$$y_1 = y_0 + hy_0^{'} + \frac{h^2 y_0^{''}}{2} + \frac{h^3 y^{'''}(\xi_1)}{6} \tag{2}$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0^{'} + \frac{h^2 y_0^{''}}{2} + \frac{8h^3 y^{'''}(\xi_2)}{6} \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$\left| y_0^{''} - \frac{y_0 - 2y_0 - 2hy_0^{'} - h^2 y_0^{''} - \frac{h^3 y^{'''}(\xi_1)}{3} + y_0 + 2hy_0^{'} + 2h^2 y_0^{''} + \frac{h^3 y^{'''}(\xi_2)}{3}}{h^2} \right| =$$

$$= \left| y_0^{''} - \frac{h^2 y_0^{''} + h^3 y^{'''}(\xi)}{h^2} \right| =$$

$$= \left| y_0^{''} - y_0^{''} + hy^{'''}(\xi) \right| =$$

$$= \left| hy^{'''}(\xi) \right|$$

Таким образом, $\Delta \leq \left|hy^{'''}(\xi)\right| + \left|\frac{4\delta}{h^2}\right| \leq hM_3 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h)$ Минимизируем ошибку $\Phi(h)$:

$$h_{\text{опт}}\Phi^{'}(h) = M_3 - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \Rightarrow h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{M_3}}$$

Найдем $M_3 = \max_{\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]} |y^{'''}(x)|$. Так как $y^{'''}(x) = \sin(x) \Rightarrow M_3 = 1$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-8}}{1}} 2 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-2.7}$$