Содержание

1 (1) Первое задание

Задайте функцию $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке равен $\frac{1}{4}$. Напишите программу, вычисляющую значение интеграла по формулам трапеций и Симпсона. Какую максимальную теоретическую ошибку мы при этом допускаем? Найдите реальные значение погрешности (абсолютное значение разности между теоретическим и аналитическим решением). Почему при вычислении интеграла по формуле Симпсона от данной функции ошибка равна нулю? Какие бы получились значения погрешностей для квадратичнойи линейной функций (предположите и проведите численный эксперимент для $f_2(x) = x^2$, $f_1(x) = \frac{x}{2}$ на отрезке $[0, 1]$).

Формула трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

Погрешность для нее:

$$\frac{h^2(b-a)}{12}M_2, \text{ где } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$

Погрешность для неё:

$$|\Psi| \leq \frac{h^2(b-a)}{2880}M_4, \text{ где } M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Функция для расчета по формуле трапеции:

```
function I = trapeze(f, x, h)
  I = 0;
  for i = 2 : length(x)
      I = I + (h/2)*(f(x(i)) + f(x(i-1)));
  end
end
```

Функция для расчета по формуле Симпсона:

```
function I = simpson(f, x, h)
  I = 0;
  for i = 2 : length(x)
  I = I+(h/6)*(f(x(i-1))+4*f(x(i)-h/2)+f(x(i)));
  end
end
```

Решение задачи:

```
f = @(x) x.^3; % Функция
a = 0; b = 1; % Границы
x = linspace(0, 1, 10); % Промежуток
h = x(2) - x(1); % Шаг разбиения
re = 1/4;
M2_f = 6; %max abs(f''(x)), [x(i-1),x(i)]
```

```
simpson(f, x, h)
trapeze(f, x, h)
teor_eps_trapeze = M2_f * (b - a) * h^2/12
eps_simpson = abs(simpson(f, x, h) - re)
eps_trapeze = abs(trapeze(f, x, h) - re)

% Погрешности:
Q = @(x)x.^2;
L = @(x)x/2;
disp('Ошибка для квадратичной функции:')
abs(simpson(Q, x, h) - 1/3)
disp('Ошибка для линейной функции:')
abs(simpson(L, x, h) - 1/4)
```

Значение интеграла по формуле Симпсона: $I = 0.2500$
Значение интеграла по формуле трапеций: $I = 0.2531$
Теоретическая ошибка по формуле Симпсона: 0
Теоретическая ошибка по формуле трапеций: $teor\_eps\_trapeze = 6.1728e - 03$
Реальная ошибка по формуле Симпсона: 0
Реальная ошибка по формуле трапеций: $eps\_trapeze = 3.0864e - 03$
Ошибка для квадратичной функции:
$ans = 5.5511e - 17$
Ошибка для линейной функции:
$ans = 2.7756e - 17$

Погрешность при вычислении методом Симпсона кубической функции равно нулю, так как формула Симпсона для всех многочленов третей степени не имеет погрешности. Связано это с тем, что формула основана на интерполяционном многочлене Лагранжа второй степени с тремя узлами интерполяции.

2 (2) Второе задание

Используя соотношение $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(1)$ найдите значение числа π с точностью 10^{-6}. В данном задании в процессе вычислений нельзя ис-пользовать встроенную константу **pi** для определения величины шага. Изкаких соображений выбирался шаг для получения указанной точности?

Выразим h из формул теоретических погрешностей погрешностей. Для трапеции:

$$\epsilon = \frac{h^2(b-a)}{12}M \Rightarrow h = \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)M}}$$

Для формулы Симпсона:

$$\epsilon = \frac{h^4(b-a)}{2880}M \Rightarrow h = \sqrt[4]{\frac{2880\epsilon}{(b-a)M}}$$

```
f = @(x) 1/(1 + x.^2); % интегрируемая функция
eps = 10^-6; % Погрешность
```

```
a = 0; b = 1; % границы интегрирования

x = a : 0.01 : b;
d2f = 2.*(4.*x.^2-x.^2-1)./((x.^2+1).^3); % 2-ая производная

d4f=(24.*(16.*x.^4-12.*(x.^2).*(x.^2+1)+(x.^2+1).^2))./(x.^2+1)
 .^5;%4 производная

M2 = max(d2f);
M4 = max(d4f);

h_simpson = (2880*eps/((b - a) * M4))^(1/4); % шаг для симпсона
h_approx_s = 0.1;
x_S = 0 : 0.1 : 1;

h_trapeze = sqrt((12*eps)/((b - a) * M2));
h_approx_t = 0.01;
x_T = 0 : 0.001 : 1;

pi_s = 4*simpson(f, x_S, h_approx_s)
pi_t = 4*trapeze(f, x_T, h_approx_t)

printf('Шаг по формуле Симпсона: hS = %f, \n', h_simpson);
printf('Шаг по формуле трапеций: hT = %f, \n', h_trapeze);
printf('PI по формуле Симпсона: PI_S = %f, \n', pi_s);
printf('PI по формуле трапеций: PI_T = %f, \n', pi_t);
```

Шаг по формуле Симпсона: hS = 0.104664,
Шаг по формуле трапеций: hT = 0.004899,
PI по формуле Симпсона: $PI\_S = 3.141593$,
PI по формуле трапеций: $PI\_T = 31.415925$,

3 (3) Третье задание

Реализовать предыдущее задание, определяя точность методом Рунге. При численном вычислении интегралов последовательно с шагами h и $\frac{h}{4}$ можно сократить число арифметических операций. Заметим, что приближенное значение интеграла $I_{\frac{h}{2}}$ есть сумма, часть слагаемых которойвозможно уже участвовало при вычислении I_h. Поэтому можно получить $I_{\frac{h}{2}}$ используя числовое значение I_h. то позволяет избежать повторногосуммирования части слагаемых.