

Содержание

1	(1) Первое задание	2
2	(2) Второе задание	3
3	(3) Третье задание	3

1 (1) Первое задание

Задайте функцию $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке равен $\frac{1}{4}$. Напишите программу, вычисляющую значение интеграла по формулам трапеций и Симпсона. Какую максимальную теоретическую ошибку мы при этом допускаем? Найдите реальное значение погрешности (абсолютное значение разности между теоретическим и аналитическим решением). Почему при вычислении интеграла по формуле Симпсона от данной функции ошибка равна нулю? Какие бы получились значения погрешностей для квадратичной и линейной функций (предположите и проведите численный эксперимент для $f_2(x) = x^2$, $f_1(x) = \frac{x}{2}$ на отрезке $[0, 1]$).

Формула трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

Погрешность для нее:

$$\frac{h^2(b-a)}{12} M_2, \text{ где } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$

Погрешность для неё:

$$|\Psi| \leq \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4, \text{ где } M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Функция для расчета по формуле трапеции:

```
function I = trapeze(f, x, h)
    I = 0;
    for i = 2 : length(x)
        I = I + (h/2)*(f(x(i)) + f(x(i-1)));
    end
end
```

Функция для расчета по формуле Симпсона:

```
function I = simpson(f, x, h)
    I = 0;
    for i = 2 : length(x)
        I = I + (h/6)*(f(x(i-1)) + 4*f(x(i-h/2)) + f(x(i)));
    end
end
```

Решение задачи:

```
f = @(x) x.^3; % Функция
a = 0; b = 1; % Границы
x = linspace(0, 1, 10); % Промежуток
h = x(2) - x(1); % Шаг разбиения
re = 1/4;
M2_f = 6; % max abs(f''(x)), [x(i-1), x(i)]
```

```

simpson(f, x, h)
trapeze(f, x, h)
teor_eps_trapeze = M2_f * (b - a) * h^2/12
eps_simpson = abs(simpson(f, x, h) - re)
eps_trapeze = abs(trapeze(f, x, h) - re)

% Погрешности:
Q = @(x)x.^2;
L = @(x)x/2;
disp('Ошибка для квадратичной функции: ')
abs(simpson(Q, x, h) - 1/3)
disp('Ошибка для линейной функции: ')
abs(simpson(L, x, h) - 1/4)

```

Значение интеграла по формуле Симпсона: $I = 0.2500$

Значение интеграла по формуле трапеций: $I = 0.2531$

Теоретическая ошибка по формуле Симпсона: 0

Теоретическая ошибка по формуле трапеций: $teor_eps_trapeze = 6.1728e - 03$

Реальная ошибка по формуле Симпсона: 0

Реальная ошибка по формуле трапеций: $eps_trapeze = 3.0864e - 03$

Ошибка для квадратичной функции:

$ans = 5.5511e - 17$

Ошибка для линейной функции:

$ans = 2.7756e - 17$

Погрешность при вычислении методом Симпсона кубической функции равно нулю, так как формула Симпсона для всех многочленов третьей степени не имеет погрешности. Связано это с тем, что формула основана на интерполяционном многочлене Лагранжа второй степени с тремя узлами интерполяции.

2 (2) Второе задание

Используя соотношение $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(1)$ найдите значение числа π с точностью 10^{-6} . В данном задании в процессе вычислений нельзя использовать встроенную константу **pi** для определения величины шага. Из каких соображений выбирался шаг для получения указанной точности?

3 (3) Третье задание

Реализовать предыдущее задание, определяя точность методом Рунге. При численном вычислении интегралов последовательно с шагами h и $\frac{h}{4}$ можно сократить число арифметических операций. Заметим, что приближенное значение интеграла $I_{\frac{h}{2}}$ есть сумма, часть слагаемых которой возможно уже участвовало при вычислении I_h . Поэтому можно получить $I_{\frac{h}{2}}$ используя числовое значение I_h . то позволяет избежать повторного суммирования части слагаемых.