Лабораторная работа

Батурин Георгий

Содержание

1 (1) Первое задание

Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, …), и некоторую точку x из области определения функции. Найдите значение производной функции в выбранной точке (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью 10^{-3}, 10^{-6}. Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено.

Функция, для которой мы будем искать численное значение производной, будет $\sin x$ в точке $x = 0$:

Посчитаем прозводную для $\sin x$, в точке $x_0 = 1/2$. Для этого воспользуемся разложением в ряд тейлора в окрестности точки x_0, потом, сравнивая с этим значением, найдем производную с заданной точностью.

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;

syms x
h = 0.5;

v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h
))


for eps = [10^-3, 10^-6]
  df = 1;
  while abs(v-df) >= 10^-3
    df = (f(x0+h) - f(x0-h))/(2*h);
    h = h/2;
  end
  df
end
```

```
v = 0.841473696062592
df = 0.841470984807897
df = 0.84147347832921
```

2 (2) Второе задание

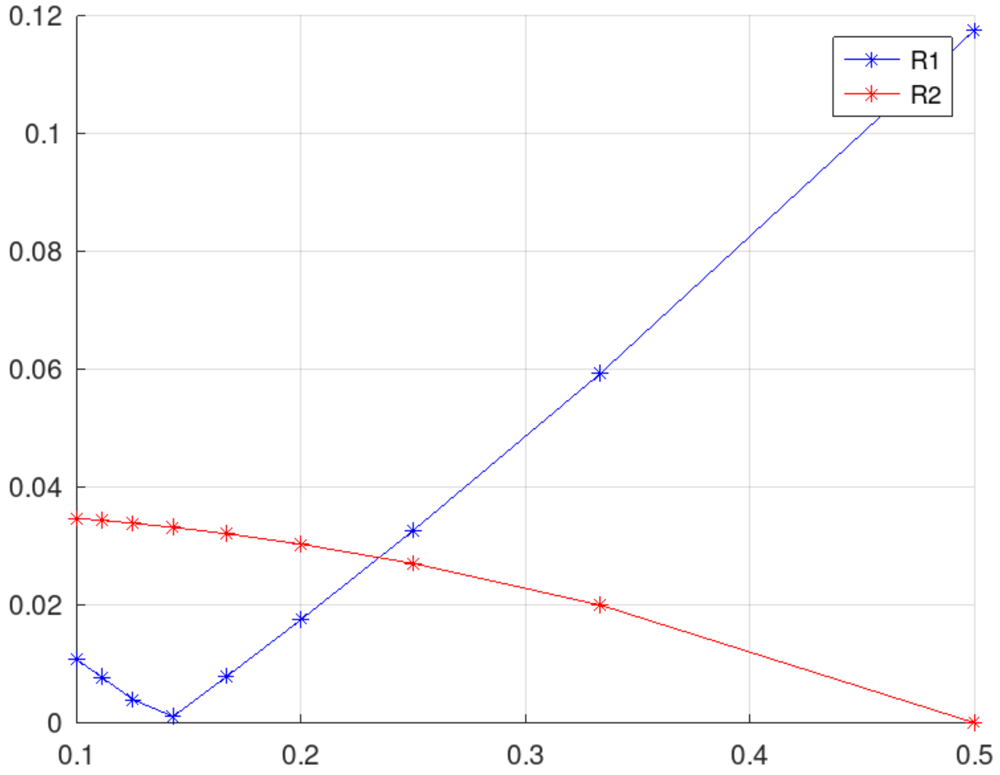
Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, …) и некоторую точку x из области определения функции. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например, $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$) для последовательности убывающих шагов (например, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом.

Сравнивать будем две формулы:$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$, с $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, в точке $x = 1/2$, для функции $\sin x$.

$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h} + O(h^1)$ – иммеет первый порядок погрешности, а $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ – второй порядок погрешности

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;
syms x;

R1 = [];
R2 = [];

h = 1/2;
v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h))
n = 10;
h = 1 ./ [2 : n];

for hi = h
  df1 = (f(x0 + hi) - f(x0))/hi;
  df2 = (f(x0 + hi) - f(x0 - hi))/(2*hi);

  R1 = [R1, abs(df1 - v)];
  R2 = [R2, abs(df2 - v)];
end

hold on, grid on;
plot(h, R1, '-*b', h, R2, '-*r')
legend('R1', 'R2')
df1, df2
first_error, second_error
```

Рис. 1:



3 (3) Третье задание

Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, …) и некоторую точку x из области определения функции. Попробуйте применить формулу $y^{'}(x) \approx \frac{y(y+h)-y(x)}{h}$ для стремящейся к нулю последовательности $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Будет ли погрешность $\epsilon = \left| y^{'}(x) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \right|$ монотонно убывать при уменьшении h? Сравните практический и теоритеческий результаты.

```
f = @(x) sin(x)
x0 = 1/2;
df = @(x) cos(x)

n = 100;
h = 1./[2 : n];
dff = (f(x0 + h) - f(x0))./h
eps = abs(df(x0) - dff)
hold on, grid on
plot([2:n], eps)
```

Рис. 2: