Лабораторная работа

Батурин Георгий

Содержание

1 (1) Первое задание

Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...), и некоторую точку x из области определения функции. Найдите значение производной функции в выбранной точке (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью 10^{-3}, 10^{-6}. Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено.

Функция, для которой мы будем искать численное значение производной, будет $\sin x$ в точке $x = 0$:

Посчитаем прозводную для $\sin x$, в точке $x_0 = 1/2$. Для этого воспользуемся разложением в ряд тейлора в окрестности точки x_0, потом, сравнивая с этим значением, найдем производную с заданной точностью.

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;

syms x
h = 0.5;

v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h
 ))


for eps = [10^-3, 10^-6]
  df = 1;
  while abs(v-df) >= 10^-3
    df = (f(x0+h) - f(x0-h))/(2*h);
    h = h/2;
  end
  df
end
```

```
v = 0.841473696062592
df = 0.841470984807897
df = 0.84147347832921
```

2 (2) Второе задание

Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например, $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$) для последовательности убывающих шагов (например, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом.

Сравнивать будем две формулы:$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$, с $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, в точке $x = 1/2$, для функции $\sin x$.

$y' \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h} + O(h^1)$ – иммеет первый порядок погрешности, а $y' \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ – второй порядок погрешности

```
f = @(x) sin(x);
x0 = 1/2;
syms x;

first_error = [];
second_error = [];

h = 1/2;
v = double(subs(taylor(f,x,x0), x0+h) - subs(taylor(f,x,x0), x0-h))

for h = [1/2, 1/4, 1/8, 1/16]
  df1 = (f(x0 + h) - f(x0))/h;
  df2 = (f(x0 + h) - f(x0 - h))/(2*h);

  first_error = [first_error , abs(df1 - v)];
  second_error = [second_error, abs(df2 - v)];
end

df1, df2
first_error, second_error
```

```
  >> second_task
  v = 0.841473696062592
  df1 = 0.862034158909074
  df2 = 0.877011330656657
  first_error =

  1.173828036552047e-01    3.262081038606723e-02    3.900178627481932
   e-03    2.056046284648216e-02

  second_error =

  2.711254695197951e-06    2.699590547503061e-02    3.382527935506685
   e-02    3.553763459406500e-02
```

3 (3) Третье задание

Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Попробуйте применить формулу $y'(x) \approx \frac{y(y+h)-y(x)}{h}$ для стремящейся к нулю последовательности $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Будет ли погрешность $\epsilon = \left| y'(x) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \right|$ монотонно убывать при уменьшении h? Сравните практический и теоритический результаты.

```
df = @(x, h) (sin(x+h) - sin(x))/h;

x = 0;
for h = [1/2, 1/4, 1/8, 1/16]
  dydx = df(x, h)
  epsilon = abs(cos(0) - dydx)
end
```

```
  dydx = 0.958851077208406
  epsilon = 4.114892279159399e-02

  dydx = 0.989615837018092
  epsilon = 1.038416298190825e-02

  dydx = 0.997397867081822
  epsilon = 2.602132918178457e-03

  dydx = 0.999349085478083
  epsilon = 6.509145219167900e-04
```