Большое домашнее задание 1

Батурин Георгий

Содержание

1 Первое задание

Текст задания

(а)Представить слагаемые и результат в виде нормализованного числа с плавающей точкой двойной точ-ности: $(-1)^s(2^{e-1023})(1.f)$, где $1.f$ записанов двоичном виде.(б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-1593.5859375 \cdot 2^{128} + 1619.09765625 \cdot 2^{141}$$

Решение

Для начала разберемся с первым числом $-1593.5859375 \cdot 2^{128}$:

$$-1593.5859375_{10} = 11000111001.1001011_2 = 1.10001110011001011_2 \cdot 2^{10}$$
$$-1593.5859375_{10} \cdot 2^{128} = (-1)^1(2^{1161-1023}) \cdot 1.10001110011001011$$

$s = 1$, $e = 1023 + 128 + 10 = 1161$, $f = 1000111001100101\,\underbrace{0\ldots0}_{\text{35 нулей}}$

Теперь нормализуем $1619.09765625 \cdot 2^{141}$:

$$1619.09765625_{10} = 11001010011.00011001_2 = 1.100101001100011001_2 \cdot 2^{10}$$
$$1619.09765625 \cdot 2^{141} = (-1)^0(2^{1174-1023})(1.100101001100011001)$$

$s = 0$, $e = 1023 + 141 + 10 = 1174$, $f = 100101001100011001\,\underbrace{0\ldots0}_{\text{34 нуля}}$

$$11001010011.00011001 \cdot 2^{141} - 11000111001.10001011 \cdot 2^{128} =$$
$$= 2^{141}(11001010011.00011001 - 11000111001.1001011 \cdot 2^{-13}) =$$
$$= 2^{141}(11001010011.00011001 - 0,\underbrace{0\ldots0}_{\text{12 нулей}}\underbrace{110001110010001011}_{\text{18 битов}}) =$$
$$= 2^{141}(\underbrace{11001010011.00011001}_{\text{19 битов}}\underbrace{}_{\text{5 битов}}\underbrace{}_{\text{18 битов}})$$

Получается 42 бита $\Rightarrow$ число полностью поместится, а значит никакой погрешности нет.

2 Второе задание

Текст задания

Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции(eye, repmat, flipud и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные: Целое $n \geq 20$

Надо получить:

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}\right\}\text{2n строк}$$

Решение

```
n = input();
A \[= [1 : 0.5 : n]
```

$$A = 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 3.50, 4.00, \ldots, n$$

```
A = fix(A)
```

$$A = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots, n$$

```
A = [0, A]
```

$$A = 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n$$

```
A = repmat(A, 2*n, 1);
```

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots n \end{pmatrix}\right\}\text{2n строк}$$

```
X = [0, 1]
X = repmat(X, 2*n, 1)
```

$$X = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}2n$$

```
X = repmat(X, 1, n)
```

$$X = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{\text{n столбцов}}\text{2n строк}$$

```
A = A.*X
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

3 Третье задание

Текст задания

(а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня z_i указать отрезок $[a_i, b_i]$, содержащий только один этот кореньz_i). Для *каждого* корня (б) построить итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящийся к корню и (в) указать начальное значение x_0. Указание: локализацию проводить перебором интервалов $[a_i, b_i]$ или средствами математического анализа.

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

Решение

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-89	-19	3	1	-1	21	91
$sign(f(x))$	-	-	+	+	-	+	+

Можно увидеть как $f(x)$ меняет знак при $x = -2 \to -1$ и при $x = 0 \to 1$ и $x = 1 \to 2$, то есть: $a_1 = -2, b_1 = -1; a_2 = 0, b_2 = 1; a_3 = 1, b_3 = 2$.

Найдем итерационный процесс для отрезка $[-2, -1]$:
Найдем итерационный процесс для отрезка $[0, 1]$:
Найдем итерационный процесс для отрезка $[1, 2]$:

4 Четвертое задание

Текст задания

Известно, что интервалу $[a, b]$ принадлежит *только* корень x_* уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f^{'}(x_n)$ и (б) обосновать какую из границ интервала $[a, b]$ можно принять за x_0. Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных $f^{'}(x)$ и $f^{''}(x)$ и использовать соотвествующую теорему.

$$x - \frac{e^x}{x} + \frac{3}{2} = 0, x_* \in [1,3; 1,4]$$

Решение

$$f^{'}(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$

Итерационный процесс Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = \frac{2x^2 + 2e^x + 3x}{2x} : \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2} = \frac{(2x + 2e^x + 3x)x}{2(x^2 - xe^x e^x)}$$

Теорема справедлива если на всем отрезке $[a, b]$ выполняются:
(1) $f^{'} > 0, f^{''} > 0, x_0 = b$
(2) $f^{'} < 0, f^{''} < 0, x_0 = a$

(3) $f' < 0, f'' < 0, x_0 = b$
(4) $f' > 0, f'' < 0, x_0 = a$

$$f'(x) = \frac{x^2 - xe^x + e^x}{x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$f'(x)$ — положительна, а $f''(x)$ — отрицательна на всем отрезке $[a, b] \Rightarrow$ теорема применима

$$f'(1.3) > 0$$
$$f''(1.3) < 0 \Rightarrow x_0 = 1.3$$

5 Пятое задание

Текст задания
(а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ по узлам x_i.
(б) Оценить сверху погрешность $|R_n(x)|$ приближения функции многочленом.

$$\ln(x) - \sqrt{x}, x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 5$$

Решение

x	3	4	5
$f(x)$	0.46	0.48	0.47

Найдем многочлен Лагранжа, для:

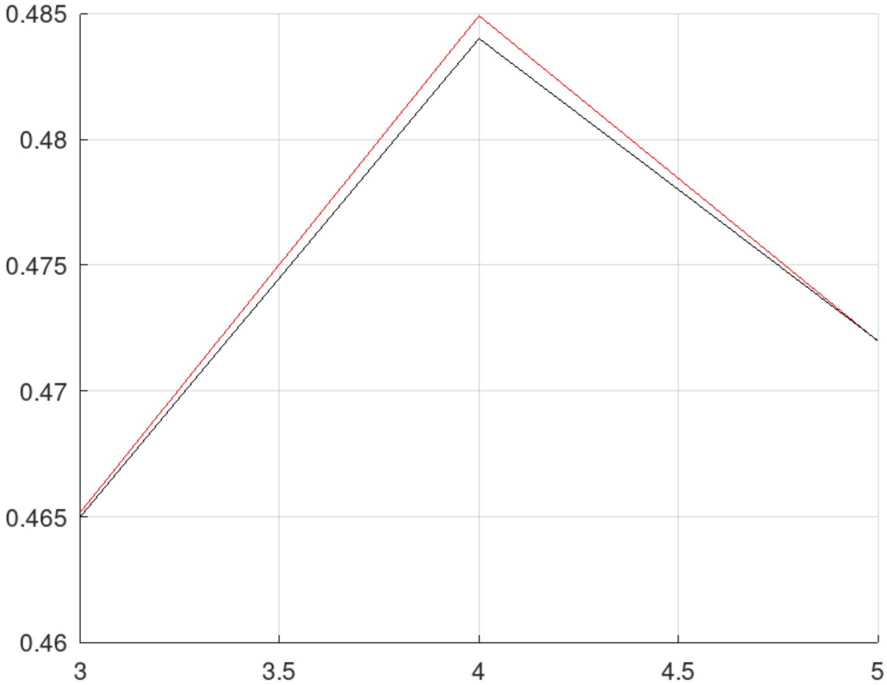
$$L(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$
$$= 0.46\frac{(x-4)(x-5)}{-1\cdot(-2)} + 0.48\frac{(x-3)(x-5)}{1\cdot(-1)} + 0.47\frac{(x-3)(x-4)}{2} =$$
$$= 0.2325(x^2 - 9x + 20) - 0.484(x^2 - 8x + 15) + 0.236(x^2 - 7x + 12) =$$
$$= -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$$

Окончальтельно получаем, что наш интерполяционный многочлен равен $L(x) = -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$. Проверим это с помощью матлаба, на рисунке 1

```
x = [3, 4, 5];
f = @(x) log(3*x) - sqrt(x); % Самафункция
L = @(x) -0.0155*x.^2 + 0.1275*x + 0.222; % полиномЛагранжа

hold on, grid on
plot(x, f(x), "r", x, L(x), "k");
```

Рис. 1: Красный график это наша функция, а черный - полином Лагранжа.



Теперь найдем погрешность $|R_2(x)|$:

$$|R_2(x)| = \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$M_3 = \max_{[a,b]}|f^{(3)}(x)|$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{8x^2\sqrt{2}}$$

Максимум $f^{(3)}(x)$ на отрезке $[3,5]$, достигается в точке 3.

$$f^{(3)}(x) = 0.05$$
$$|R_2(x)| \leq \frac{0.05}{6}(x-3)(x-4)(x-5) \leq \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{47}{120}x - \frac{1}{2}$$

6 Шестое задание

Текст задания
Заданную функцию будут интерполировать на отрезке $[a,b]$ по чебышёвским узлам с заданной точностью $|R_n(x) < \epsilon|$. Требуется (а) определить требуемое для заданной точности ϵ количество узлов (т.е. степеньинтерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси Ox (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$f(x) = x^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ с точностью $\epsilon = 10^{-3}$