Большое домашнее задание №2

Батурин Георгий

Содержание

1 Девятое задание

Текст задания

Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования еще себя не проявляет.

ф-ла $y_0'' = \dfrac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$; функ. $y(x) = cosx$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}, 4\right]$; погр. $\delta = 10^{-8}$

Решение

Из-за округления чисел в мантиссе любые вычисления на компьютере ограничены машинной точностью δ. В действительности компьютер вычислит:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(\widetilde{y_0} - 2\widetilde{y_1} + \widetilde{y_2})$$

, где $\widetilde{y_0} = y_0 + \delta_0; \widetilde{y_1} = y_1 + \delta_1; \widetilde{y_2} = y_2 + \delta_2$

Рассмотрим погрешность:

$$\begin{aligned}
\Delta = &\left| y_0'' - \frac{y_0 + \delta_0 - 2y_1 - 2\delta_1 + y_2 + \delta_2}{h^2} \right| = \\
= &\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left(\frac{\delta_0}{h^2} - \frac{2\delta_1}{h^2} + \frac{\delta_2}{h^2} \right) \right| \leq \\
\leq &\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_2}{h^2} \right| \right| \leq \\
\leq &\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| + \left| \frac{4\delta}{h^2} \right|
\end{aligned}$$

Для оценки разности

$$\left| \left(y_0'' - \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right) \right| \tag{1}$$

разложим y_1 и y_2 в ряд Тейлорав окрестности x_0 до h^3

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{h^3 y'''(\xi_1)}{6} \tag{2}$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{h^2 y_0''}{2} + \frac{8h^3 y'''(\xi_2)}{6} \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$\left| y_0'' - \frac{y_0 - 2y_0 - 2hy_0' - h^2 y_0'' - \frac{h^3 y'''(\xi_1)}{3} + y_0 + 2hy_0' + 2h^2 y_0'' + \frac{h^3 y'''(\xi_2)}{3}}{h^2} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| y_0'' - \frac{h^2 y_0'' + h^3 y'''(\xi)}{h^2} \right| = \\
&= \left| y_0'' - y_0'' + hy'''(\xi) \right| = \\
&= \left| hy'''(\xi) \right|
\end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta \leq \left|hy'''(\xi)\right| + \left|\frac{4\delta}{h^2}\right| \leq hM_3 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h)$ Минимизируем ошибку $\Phi(h)$:

$$h_{\text{опт}}\Phi'(h) = M_3 - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \Rightarrow h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{M_3}}$$

Найдем $M_3 = \max_{[\frac{\pi}{4};\pi]} |y'''(x)|$. Так как $y'''(x) = \sin(x) \Rightarrow M_3 = 1$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-8}}{1}} 2 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-2.7}$$

2 Десятое задание

Текст задания

Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1, а затем с шагом h_2. Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинногозначения интеграла I.

$$I = \int_1^3 \sin x \operatorname{sh} x dx; S(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(\text{ф-ла левых прямоуг.}); h_1 = \frac{2}{4}, h_2 = \frac{2}{12}$$

Решение

Для $h_1 = \frac{2}{4}$:

```
f = @(x) sin(x).*sinh(x);
disp('x_i:')
h = 2/4;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x)(1:end-1))
```

```
x_i:
x =
   1.0000     1.5000     2.0000     2.5000     3.0000

S = 5.0158
```

Для $h_2 = \frac{2}{12}$:

```
f = @(x) sin(x).*sinh(x);
disp('x_i:')
h = 2/12;
a = 1; b = 3;
x = a : h : b
S = h * sum(f(x)(1:end-1))
```

```
x_i:
x =
```

```
 1.0000      1.1667      1.3333      1.5000      1.6667      1.8333
  2.0000      2.1667      2.3333      2.5000      2.6667      2.8333
  3.0000

S = 5.2779
```

Найдем погрешность:

$$I \approx S\left(\frac{2}{4}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + c \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2$$

$$S\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{c}{4} \approx S\left(\frac{2}{12}\right) + \frac{c}{36}$$

$$\frac{c}{4} - \frac{c}{36} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{2c}{9} = S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$c = \frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2}$$

$$\epsilon = I - S\left(\frac{2}{12}\right) = c \cdot h_2^2 = \left|\frac{9\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{2 \cdot 36}\right| = \left|\frac{\left(S\left(\frac{2}{12}\right) - S\left(\frac{2}{4}\right)\right)}{8}\right| = \left|\frac{5.2779 - 5.0158}{8}\right| \approx 0.033$$

3 Двенадцатое задание

Текст задания

Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i|, ||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 9 \\ 6 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

Решение

$$||\mathbf{x}||_1 = \max \sum_i |x_i|, ||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\max \sum_i \lambda_i(A^T A)}$$

```
A = [-9, -2, 5; 2, -5, 9; 6, -7, -10]; % Матрица

A_1 = max(sum(abs(A)))

B = A'*A
lambdas = eig(B) % Находим собственные значения

A_2 = sqrt(max(lambdas))
```

```
A_1 = 24
B =
   121    -34    -87
   -34     78     15
   -87     15    206

lambdas =
   48.929
   90.646
   265.425

A_2 = 16.292
```

Получаем, что $||\mathbf{x}||_1 = 25; ||\mathbf{x}||_2 = 16.292$

4 Тринадцатое задание

Текст задания

Правая часть СЛАУ $A_{\mathbf{x}} = f$ содержит погрешность, норма которой равна $||\delta f||_\infty$. Оценить относительную погрешность нормы решения $\frac{||\delta \mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$. Указание: воспользоваться оценкой $\frac{||\delta \mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \leq \mu(A)\frac{||\delta \mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty}$.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 7 \\ -2 & -8 & -6 \\ -5 & 2 & 9 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -5.3 \\ 7.2 \\ -3.4 \end{pmatrix}, ||\delta \mathbf{f}||_\infty = 0.6$$

Решение

```
A = [-9, 5, 7; -2, -8, -6; -5, 2, 9];
f = [-5.3; 7.2; -3.4];
delta_f = 0.6;

A_inf = max(sum(abs(A), 2))

A_inv_inf = max(sum(abs(inv(A)), 2))

muA = A_inf * A_inv_inf


f_inf = max(f)

answer = muA * delta_f/f_inf
```

```
A_inf = 21
A_inv_inf = 0.3432
muA = 7.2076
f_inf = 7.2000
answer = 0.6006
```

Получаем, что $\frac{||\delta \mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \approx 0.6006$

5 Шестнадцатое задание

Текст задания

Проверить выполнимость достаточных условий применимости метода прогонки для решени СЛАУ $Ax = f$. Если эти условия выполняются, решить систему методом прогонки (вычислять можно на компьютере, но в решении указать значения всех прогоночных коэффициентов α_i, β_i).

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Решение

Достаточное условие применимости метода прогонки – выполнение диагонального преобладания:

$$|a_{[i][i]}| \geq |a_{[i][i-1]}| + |a_{[i][i+1]}|,\text{ хотя бы одно неравенство строгое}$$

```
A = [-12, 5, 0, 0, 0;...
     6, 10, 1, 0, 0; ...
     0, 6, -10, 2, 0; ...
     0, 0, -4, -7, 1; ...
     0, 0, 0, 3, 8];
f = [1, -3, 5, 7, -3]';
n = length(A);

% Проверяем диагональное преобладание
% Если условие не будет выполнено, то возникнет ошибка
for i = 2 : n-1
  if (abs(A(i, i)) < abs(A(i, i-1)) + abs(A(i, i + 1)))
    error("Не выполнено достаточное условие");
  end
end

if (abs(A(1, 1)) < abs(A(1, 2)) && abs(A(n, n)) < abs(A(n, n-1)))
  error("Не выполнено достаточное условие");
end

% Прогоночные коэффициенты
alfa(1) = -A(1, 2)/A(1, 1);
beta(1) = f(1)/A(1,1);
for i = 2 : n-1
  alfa(i) = -A(i, i+1)/(A(i, i) + A(i, i-1)*alfa(i-1));
  beta(i) = (f(i)-A(i, i-1)*beta(i-1))/(A(i, i) + A(i, i-1)*alfa(
  i-1));
```

```
  end
  beta(n) = (f(n) - A(n, n-1) * beta(n-1))/(A(n, n) + A(n, n-1) *
   alfa(n-1));


  % Корни
  x(n) = beta(n);
  for i = n-1 : -1 : 1
    x(i) = alfa(i) * x(i+1) + beta(i);
  end

  x
  alfa, beta
```

```
  x =
  -0.1430   -0.1433   -0.7091   -0.6154   -0.1442

alfa =
    0.416667   -0.080000    0.190840    0.128810

beta =
  -0.083333   -0.200000   -0.591603   -0.596853   -0.144214
```

Проверка:

```
  >> A\f
ans =
  -0.1430
  -0.1433
  -0.7091
  -0.6154
  -0.1442
```

Решения совпали.