

# Большое домашнее задание 1

Батурин Георгий

## Оглавление

1	Первое задание	2
2	Второе задание	2
3	Третье задание	4
4	Четвертое задание	4
5	Пятое задание	4
6	Шестое задание	6

# 1 Первое задание

## Текст задания

(а) Представить слагаемые и результат в виде нормализованного числа с плавающей точкой двойной точности:  $(-1)^s(2^{e-1023})(1.f)$ , где  $1.f$  записан в двоичном виде. (б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-1593.5859375 \cdot 2^{128} + 1619.09765625 \cdot 2^{141}$$

## Решение

Для начала разберемся с первым числом  $-1593.5859375 \cdot 2^{128}$ :

$$\begin{aligned} -1593.5859375_{10} &= 11000111001.1001011_2 = 1.10001110011001011_2 \cdot 2^{10} \\ -1593.5859375_{10} \cdot 2^{128} &= (-1)^1(2^{1161-1023}) \cdot 1.10001110011001011 \end{aligned}$$

$$s = 1, e = 1023 + 128 + 10 = 1161, f = 1000111001100101 \underbrace{0 \dots 0}_{35 \text{ нулей}}$$

Теперь нормализуем  $1619.09765625 \cdot 2^{141}$ :

$$\begin{aligned} 1619.09765625_{10} &= 11001010011.00011001_2 = 1.100101001100011001_2 \cdot 2^{10} \\ 1619.09765625 \cdot 2^{141} &= (-1)^0(2^{1174-1023})(1.100101001100011001) \end{aligned}$$

$$s = 0, e = 1023 + 141 + 10 = 1174, f = 100101001100011001 \underbrace{0 \dots 0}_{34 \text{ нуля}}$$

$$\begin{aligned} 11001010011.00011001 \cdot 2^{141} - 11000111001.1001011 \cdot 2^{128} &= \\ &= 2^{141}(11001010011.00011001 - 11000111001.1001011 \cdot 2^{-13}) = \\ &= 2^{141}(11001010011.00011001 - \underbrace{0,0 \dots 0}_{12 \text{ нулей}} \underbrace{110001110010001011}_{18 \text{ битов}}) = \\ &= 2^{141}(\underbrace{11001010011.00011001}_{19 \text{ битов}} \underbrace{5 \text{ битов}} \underbrace{18 \text{ битов}}) \end{aligned}$$

Получается 42 бита  $\Rightarrow$  число полностью поместится, а значит никакой погрешности нет.

# 2 Второе задание

## Текст задания

Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции (eye, repmat, flipud и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные: Целое  $n \geq 20$

Надо получить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \} 2n \text{ строк}$$

## Решение

```
n = input();
A \=[ 1 : 0.5 : n]
```

$$A = 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 3.50, 4.00, \dots, n$$

```
A = fix(A)
```

$$A = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots, n$$

```
A = [0, A]
```

$$A = 0, 1, 1, 2, 2, \dots, n$$

```
A = repmat(A, 2*n, 1);
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \} 2n \text{ строк}$$

```
X = [0, 1]
X = repmat(X, 2*n, 1)
```

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \} 2n$$

```
X = repmat(X, 1, n)
```

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \} 2n \text{ строк}$$

```
A = A.*X
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

### 3 Третье задание

#### Текст задания

(а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня  $z_i$  указать отрезок  $[a_i, b_i]$ , содержащий только один этот корень  $z_i$ ). Для каждого корня (б) построить итерационный процесс  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , сходящийся к корню и (в) указать начальное значение  $x_0$ . Указание: локализацию проводить перебором интервалов  $[a_i, b_i]$  или средствами математического анализа.

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

#### Решение

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-89	-19	3	1	-1	21	91
$\text{sign}(f(x))$	-	-	+	+	-	+	+

Можно увидеть как  $f(x)$  меняет знак при  $x = -2 \rightarrow -1$  и при  $x = 0 \rightarrow 1$  и  $x = 1 \rightarrow 2$ , то есть:  $a_1 = -2, b_1 = -1; a_2 = 0, b_2 = 1; a_3 = 1, b_3 = 2$ .

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[a_1, b_1]$ , то есть для  $[-2, -1]$ :

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[0, 1]$ :

Найдем итерационный процесс для отрезка  $[1, 2]$ :

### 4 Четвертое задание

#### Текст задания

Известно, что интервалу  $[a, b]$  принадлежит *только* корень  $x_*$  уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  и (б) обосновать какую из границ интервала  $[a, b]$  можно принять за  $x_0$ . Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных  $f'(x)$  и  $f''(x)$  и использовать соответствующую теорему.

$$x - \frac{e^x}{x} + \frac{3}{2} = 0, x_* \in [1, 3; 1, 4]$$

#### Решение

### 5 Пятое задание

#### Текст задания

(а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $f(x)$  по узлам  $x_i$ . (б) Оценить сверху погрешность  $|R_n(x)|$  приближения функции многочленом.

$$\ln(x) - \sqrt{x}, x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 5$$

## Решение

$x$	3	4	5
$f(x)$	0.46	0.48	0.47

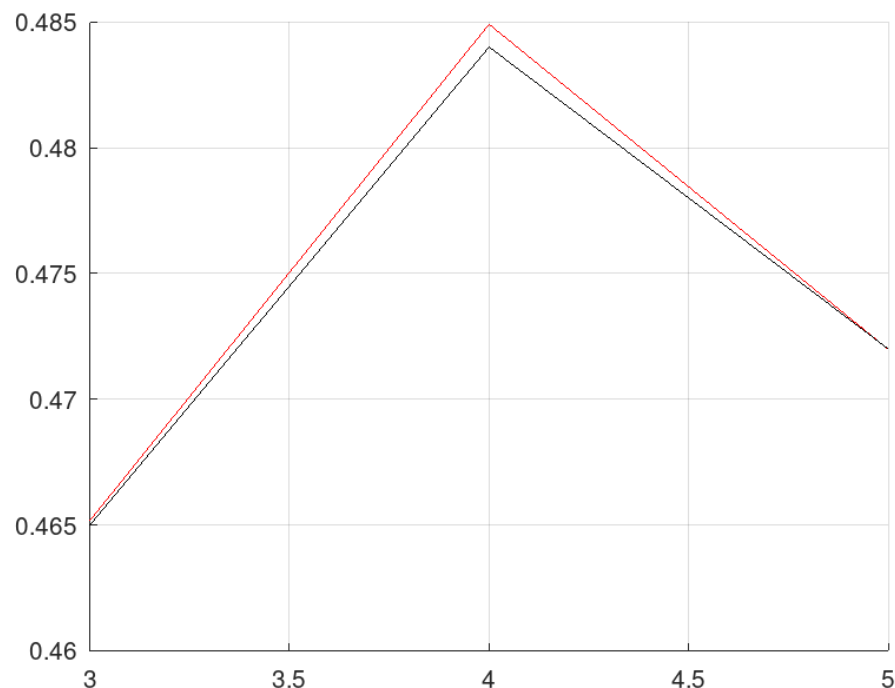
Найдем многочлен Лагранжа, дл:

$$\begin{aligned} L(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 0.46 \frac{(x-4)(x-5)}{-1 \cdot (-2)} + 0.48 \frac{(x-3)(x-5)}{1 \cdot (-1)} + 0.47 \frac{(x-3)(x-4)}{2} = \\ &= 0.2325(x^2 - 9x + 20) - 0.484(x^2 - 8x + 15) + 0.236(x^2 - 7x + 12) = \\ &= -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222 \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что наш интерполяционный многочлен равен  $L(x) = -0.0155x^2 + 0.1275x + 0.222$ . Проверим это с помощью матлаба:

```
x = [3, 4, 5];  
f = @(x) log(3*x) - sqrt(x); % Самафункция  
L = @(x) -0.0155*x.^2 + 0.1275*x + 0.222; % полиномЛагранжа  
  
hold on, grid on  
plot(x, f(x), "r", x, L(x), "k");
```

Figure 1: Красный график это наша функция, а черный - полином Лагранжа.



Теперь найдем погрешность  $|R_2(x)|$ :

$$|R_2(x)| = \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$M_3 = \max_{[a,b]} |f^{(3)}(x)|$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{8x^2\sqrt{2}}$$

Максимум  $f^{(3)}(x)$  на отрезке  $[3, 5]$ , достигается в точке 3.

$$f^{(3)}(x) = 0.05$$

$$|R_2(x)| \leq \frac{0.05}{6}(x-3)(x-4)(x-5) \leq \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{47}{120}x - \frac{1}{2}$$

## 6 Шестое задание

### Текст задания

Заданную функцию будут интерполировать на отрезке  $[a, b]$  по чебышёвским узлам с заданной точностью  $|R_n(x)| < \epsilon$ . Требуется (а) определить требуемое для заданной точности  $\epsilon$  количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси  $Ox$  (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = x^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right), \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \text{ с точностью } \epsilon = 10^{-3}$$