Лабораторная работа

Батурин Георгий

Содержание

1 (3) Первое задание **2**

2 (3) Второе задание **3**

3 (4) Третье задание **5**

4 (5) Четвертое задание **5**

5 (3) Пятое задание **6**

6 (4) Шестое задание **6**

7 Дополнительно **7**

Аннотация

Пусть есть прибор, который в дискретные моменты времени выдаёт сигнал по закону $f(t) = sin\pi t$. Допустим, наблюдатель зарегистрировал пятьотсчётов в моменты времени $t_i = \frac{i}{4}, i = 0, 1, 2, 3, 4$. Задачей наблюдателя(который не знает закона выдачи сигнала) является получение приближённого значения функции на отрезке $[0, 1]$ в любой момент времени.

1 (3) Первое задание

Используя линейную интерполяцию, найдите значения функции в точках: $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ и сравните с реальным значением синуса в этих точках. Постройте графики синуса и ломаной, проходящей через пять заданных точек. Отметьте, насколько сильно они различаются в разных частяхграфика. Чем это обусловлено?

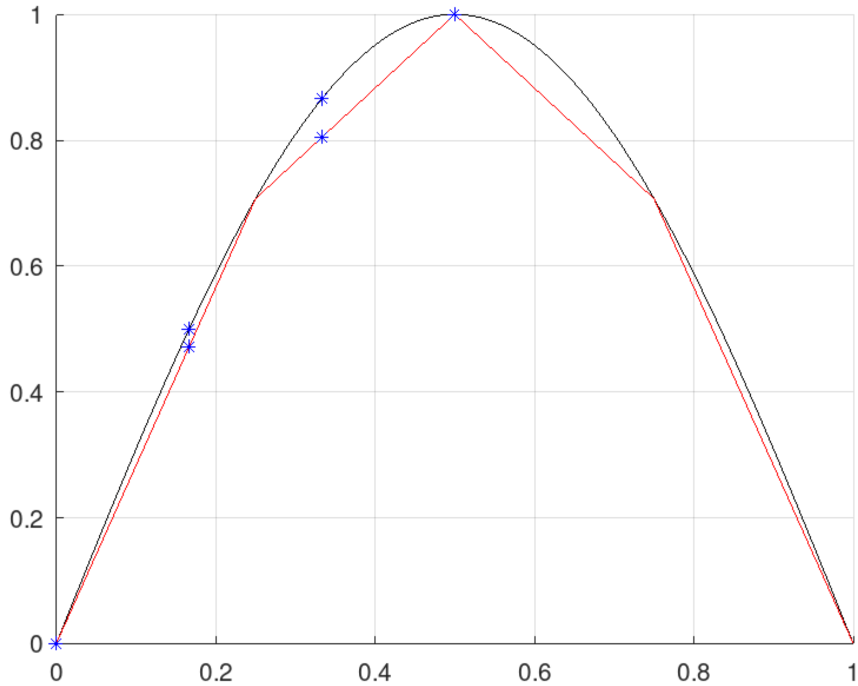
Формула линейной интерполяции:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

```
f = @(x) sin(pi * x);

i = [0 : 4];
t1 = i/4;
t2 = [0, 1/6, 1/3, 1/2];

fi = @(i,x) f(t1(i)) + (f(t1(i+1)) - f(t1(i))) / (t1(i+1)-t1(i)) * (x - t1(i));

y = [
fi(1, t2(1)), f(t2(1))
fi(1, t2(2)), f(t2(2))
fi(2, t2(3)), f(t2(3))
fi(3, t2(4)), f(t2(4))
]

hold on, grid on
x = 0:0.001:1;
plot(x,f(x),'k')
plot(t1,f(t1),'r')
plot(t2,y,'b*')
```

```
  y =

         0         0
    0.4714    0.5000
    0.8047    0.8660
    1.0000    1.0000
```

Рис. 1: График синуса и ломаной



2 (3) Второе задание

Постройте по заданным пяти точкам интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и, используя его, найдите значения функции в точках $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Сравните результаты со значениями, полученными при линейной интерполяции, и значениями синуса в этих точках. Постройте графики синуса и интерполяционного многочлена. Какую максимальную ошибку мы допускаем при аппроксимации синуса данным полиномом? Сравните экспериментальную погрешность с теоретической.

Воспользуемся формулой:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=1 j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
f = @(x) sin(pi*x);
i = [0,1,2,3,4];
t1 = i/4;
t2 = [0,1/6,1/3,1/2];
syms x
for i = 1 : length(t1)
        li = 1;
        for j = 1 : length(t1)
                if(j ~= i)
                        li = li * (x - t1(j))/(t1(i) - t1(j));
                end
        end
```

```
        Li(i) = f(t1(i)) * li;
end

pol = @(x_) eval(subs(sum(Li), x_));

pol(t2)

hold on, grid on;
rx_f = [0 : 0.001 : 1];
rx_p = [0 : 0.1 : 1];
plot(rx_f, f(rx_f), 'k', rx_p, pol(rx_p), 'r')
```

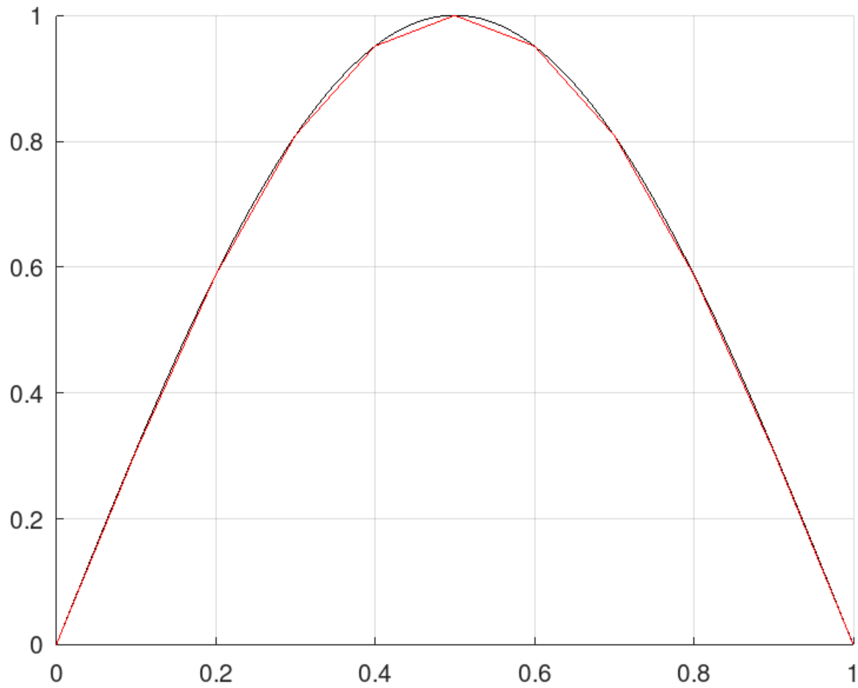
Для расчета погрешности:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{y^{(n+1)}}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

, где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_n)$

```
A = 1;
for i = 1 : length(t2)
        A = A * (x - t1(i));
end
w = @(x_) subs(A, x_);
df = @(x_) pi*cos(pi*x_);
n = length(t2);
for i = 1 : n;
        err_t(i) = abs(df(t2(i))/factorial(n+1)*w(t2(i)));

        err_e(i) = abs(f(t2(i))) - pol(t2(2));
end
err_t = eval(err_t)
err_e
```

Рис. 2: График функции (черным) и полинома (красным)



3 (4) Третье задание

В программе сделать возможность строить многочлен Лагранжа или Ньютона для произвольного набора точек $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Уже реализовано

4 (5) Четвертое задание

При вычислении многочлена стараться заменить циклы матричными операциями

```
 ...
n = length(t1);
syms x
P = [repmat(x, n, n), f(t1)'];

for i = 1 : n
  for j = 1 : n
    if (i ~= j)
      P(i, j) = (x - t1(j))/(t1(i) - t1(j));
    end
  end
end
end
pol = @(x_) eval(subs(sim(prod(P, 2))), x_)
 ...
```

5 (3) Пятое задание

Найдите значение интерполяционного полинома при $t = 2$. Почемуоно так сильно отличается от значения синуса в этой точке?

```
pol(2)
```

```
ans = 8.4710
```

```
f(2)
```

```
ans = −2.4493e−16
```

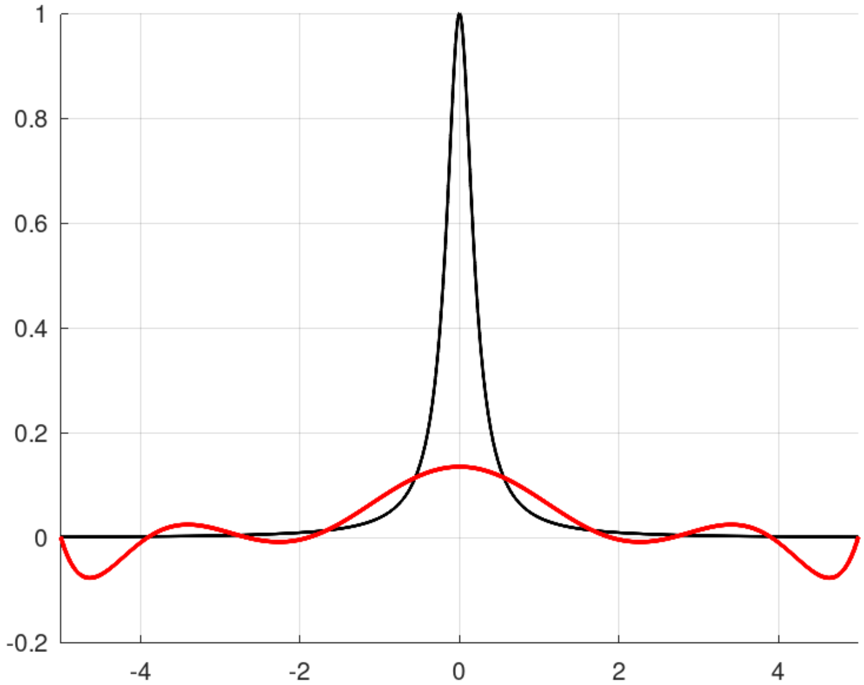
6 (4) Шестое задание

Задайте функцию Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $[-5, 5]$ в десяти равноотстоящих точках. Сравните значения функции и интерполяционного полинома при $x = 4,5$. Постройте графики функции и полинома назаданном отрезке и объясните поведение интерполяционного полинома.Посмотрите, что будет происходить при постепенном увеличении числа узлов интерполяции и подумайте, как можно избавиться от получившегося эффекта.

```
f = @(x) 1./(1+25.*x.^2);

a = 10;
t1 = linspace(−5, 5, a);

n = length(t1);
syms x
for i = 1 : n
  P = 1;
  for j = 1 : n
    if (i ~= j)
      P = P * (x−t1(j))/(t1(i)−t1(j));
    end
  end
  Li(i) = f(t1(i)) * P;
end
pol = @(x_) eval(subs(sum(Li), x_));

hold on, grid on
x = −5 : 0.01 : 5;
plot(x, f(x), 'k', x, pol(x), 'r')
delta = abs(f(4.5) − pol(4.5))
```

```
delta = 0.072465
```

Рис. 3: Функция Рунге и интерполяционный полином



7 Дополнительно

Реализация функциями Matlab
Для одномерной интерполяции в Matlab есть функция **interp1**. Изучите ее и постройте графики интерполированных функций из примеров, рассмотренных выше.

```
t_sin = [0, 1, 2, 3, 4]/4;
f_sin = sin(pi*t_sin);
x_sin = 0: 0.01 : 1;
y_sin = interp1(t_sin, f_sin, x_sin);
hold on, grid on
plot(x_sin, y_sin);
```

Рис. 4: Линейная интерполяция с помощью встроенной в Matlab функции