Statistika pro informatiku

Souhrn látky

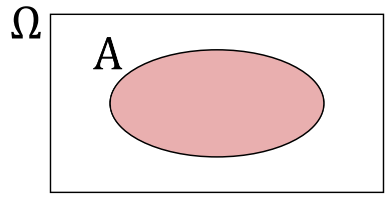
únor 2014

Obsah

1 Základy statistiky a pravděpodobnosti

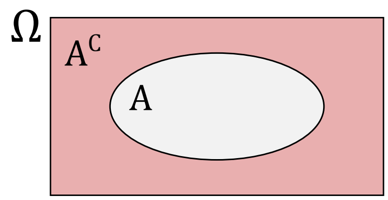
1.1 Pravděpodobnost jevu a jeho doplňku

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{size\left(A\right)}{size\left(\Omega\right)}$$



Obrázek 1: Vennův diagram základní pravděpodobnosti jevu

$$\mathbb{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$$

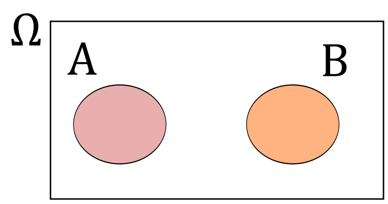


Obrázek 2: Vennův diagram doplňku jevu

1.2 Sjednocení jevů

Pro disjunktní jevy platí

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right).$$

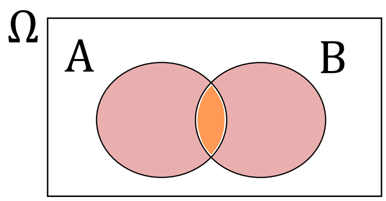


Obrázek 3: Dva disjunktní jevy

Jinak obecně platí (pro nedisjunktní jevy):

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Oblast průniku by byla započítána dvakrát, proto je potřeba ji odečíst.



Obrázek 4: Sjednocení nedisjunktních jevů

1.3 Průnik jevů

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) \\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C \ldots) &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(C|A \cap B)\ldots
\end{aligned}$$

Obecně zapsáno:

$$\mathbb{P}(\text{intersection}) = \mathbb{P}(\text{event}|\text{condition}) * \mathbb{P}(\text{condition})$$

1.4 Nezávislost jevů

U nezávislých jevů platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &= \mathbb{P}(A) \\
\mathbb{P}(B|A) &= \mathbb{P}(B),
\end{aligned}$$

a proto tedy:

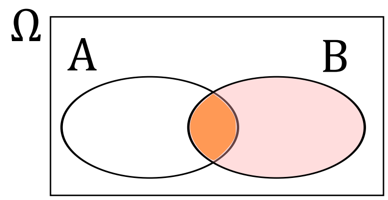
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)}.$$

1.5 Podmíněná pravděpodobnost

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \mathbb{P}(B) \neq 0$$

„Pravděpodobnost jevu A za podmínky, že jsme v B a že jev B nastal.“

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A)$$

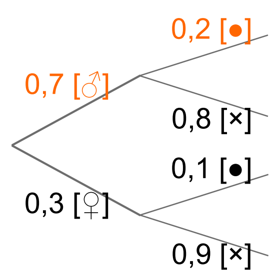


Obrázek 5: Podmíněná pravděpodobnost

1.6 Bayessova věta

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(♂ \cap \bullet) = \mathbb{P}(\bullet|♂) * \mathbb{P}(♂) = \mathbb{P}(♂) * \mathbb{P}(\bullet|♂) = 0,7 * 0,2 = \underline{\underline{0,14}}$$



Obrázek 6: Bayessova věta pomocí stromu

1.7 Shrnutí

Jev	**Sjednocení** ($\cup$)	**Průnik** ($\cap$)
Disjunktní jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$
Nedisjunktní jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
Závislé jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)$
Nezávislé jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$

Tabulka 1: Shrnutí operací nad různými jevy

2 Vlastnosti

2.1 Střední hodnota $\mathbb{E}X$

Pro diskrétní veličiny

$$\mathbb{E}X = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i * \mathbb{P}(X = x_i)$$

Pro spojité veličiny

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_x(x)\,\mathrm{d}x$$

(P a f jsou funkce hustoty.)

Pro libovolné náhodné veličiny platí:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+Y) &= a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ (linearita)} \\
\mathbb{E}(X \pm Y) &= \mathbb{E}(X) \pm \mathbb{E}(Y) \\
\mathbb{E}(X+Y) &= \mathbb{E}(max\{X, Y\}) + \mathbb{E}(min\{X, Y\}) \\
\mathbb{E}X^2 &= \sum_i p_i x_i^2 \text{ (pro diskrétní jevy)} \\
\mathbb{E}(\max\{X, Y\}) &= \mathbb{E}(X) + E(Y) - \mathbb{E}(\min\{X, Y\}) \\
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \text{ (platí jen pro nezávislé jevy)}
\end{aligned}$$

2.2 Rozptyl

Pro diskrétní náhodnou veličinu jej můžeme definovat vztahem:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$$

Pro spojitou náhodnou veličinu definujeme rozptyl vztahem:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f(x)\,\mathrm{d}x - [E(X)]^2$$

Dále platí:

$$\begin{aligned}
var(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
var(X) &= cov(X, X) \\
var(aX) &= a^2 var(X) \\
var(X+a) &= var(X) \\
var(X \pm Y) &= var(X) + var(Y) \pm 2cov(X, Y)
\end{aligned}$$

2.3 Distribuční funkce

- Funkce je zprava spojitá.

Distribuční funkce pro diskrétní veličiny

$$F = \mathbb{P}(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_x(x_i)$$

Distribuční funkce pro spojité veličiny

$$F = \mathbb{P}(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\, \mathrm{d}u \;\forall x \in \mathbb{R}$$

(X je náhodná veličina, x_i je číslo)

2.4 Hustota

Funkce hustoty pro diskrétní veličiny

$$p(X) = \mathbb{P}(X = x)$$

Funkce hustoty pro spojité veličiny

$$f(x) = F_x'(x)$$

2.5 Kovariance

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Platí, že pokud

$$cov(X, Y) = 0$$

pak

$$E(XY) = E(X) * E(Y)$$

a X a Y jsou nezávislé.

2.6 Korelační koeficient

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)} * \sqrt{var(Y)}}$$

3 Rozdělení pravděpodobnosti

Distribuční funkce	$X \leq k$
Hustota	$X = k$
Funkce přežití	$X > k$

Tabulka 2: Funkce

3.1 Diskrétní (nespojité) rozdělení

Diskrétní veličiny mohou nabývat pouze spočetného počtu hodnot (i nekonečného).

Rozdělení	Funkce hustoty	Distribuční funkce	$\mathbb{E}X$	$varX$
Bernoulliho, $X \sim Be(p)$	$\mathbb{P}(0) = 1-p$, $\mathbb{P}(1) = p$	$\times$	p	$p(1-p)$
Binomické, $X \sim Bi(n,\ p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$I_{1-p}(n-k,\ 1+k)$	$\mathbb{E}X = n * p$	$varX = np(1-p)$
Geometrické, $X \sim geom(p)$	$(1-p)^{k-1} * p$	$\mathbb{P}(T \leq n) = 1-(1-p)^n$ $\mathbb{P}(T > n) = (1-p)^n$	$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$	$varX = \frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo, $X \sim Pois(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$Q(\lfloor k+1 \rfloor,\ \lambda)$	λ	λ

Obrázek 7: Diskrétní rozdělení

3.2 Spojité rozdělení

Spojité náhodné veličiny nabývají na rozdíl od diskrétních veličin nějakého intervalu.

Rozdělení	Funkce hustoty	Distribuční funkce	$\mathbb{E}X$	$varX$
Rovnoměrné, $X \sim unif(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$; $x \in [a,b]$	$\times$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální, $X \sim Bi(n,\ p)$	$\lambda e^{-\lambda x}$; $x \in [0,+\infty)$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normální (Gaussovo), $X \sim geom(p)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\times$	μ	σ^2

Obrázek 8: Spojité rozdělení

4 Entropie

Entropie diskrétní veličiny

$$\boxed{H_b(X) = -\sum p_i \log_b p_i}$$

Entropie spojité veličiny

$$\boxed{H_b(X) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

(b je základ abecedy pro kódová slova, nejčastěji používáme binární abecedu, tedy $b = 2$)

Aditivita entropie

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ H(X,Y) &= H(X) + H(Y) \text{ (speciálně jen pro nezávislé náhodné veličiny)} \end{aligned}$$

4.1 Sdružená entropie

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j}$$

(sdružená hustota $p_{i,j} = P(X = x_i,\ Y = Y_j)$)

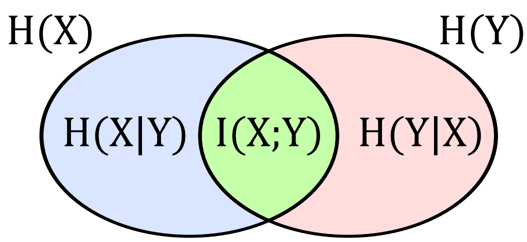
4.2 Podmíněná entropie

$$
\begin{aligned}
H\left(X|Y\right) &= -\sum_{i,j} p\left(x_i, y_i\right) \log p\left(y_j|x_i\right) \\
\mathbb{P}\left(x_i|y_j\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(x_i,\, y_j\right)}{\mathbb{P}\left(y_i\right)} \quad \begin{array}{l}\text{sdružená hustota} \\ \text{marginální hustota}\end{array} \\
\mathbb{P}\left(X,\, Y\right) &= \mathbb{P}\left(X|Y\right) * \mathbb{P}\left(Y\right)
\end{aligned}
$$

4.3 Vzájemná informace

$$
\begin{aligned}
I\left(X;\, Y\right) &= H\left(X\right) - H\left(X|Y\right) \\
I\left(X;\, Y\right) &= H\left(Y\right) - H\left(Y|X\right) \\
I\left(X;\, Y\right) &= H\left(X\right) + H\left(Y\right) - H\left(X,\, Y\right) \\
I\left(X;\, Y\right) &= I\left(Y;\, X\right) \\
I\left(X;\, X\right) &= H\left(X\right)
\end{aligned}
$$

$$
I\left(X,\, Y\right) = \sum_{i,\, j} p_{i,j} \log \frac{p_{i,j}}{p_i * p_j} = \ldots = H\left(X\right) - H\left(X|Y\right)
$$



Obrázek 9: Vzájemná informace a entropie (tedy $H\left(X,\, Y\right)$)

4.4 Kódování

Střední délka kódového slova

$$
L\left(C\right) = \mathbb{E}\ell\left(X\right) = \sum_i \ell\left(x_i\right) * \mathbb{P}\left(X = x_i\right)
$$

Kódování je optimální, pokud je entropie menší než střední délka kódového slova.

4.5 Logaritmus

$$\begin{aligned}
\log_a (x_1 * x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\
\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\
\log_a x^r &= r * \log_a x \\
\log_a a &= 1 \\
\log_a 1 &= 0
\end{aligned}$$

5 Náhodné procesy

Značení procesu

$$X(t,\ \omega) = X_t = X(t)$$

Střední hodnota

$$\begin{aligned}
\eta_x(t) &= \mathbb{E}X(t) = \int x(t) * f_{X_t}(x)\,\mathrm{d}x \\
& \mathbb{E}X(t) = \sum x_i(t)\,\mathbb{P}(X_t = x_i(t))
\end{aligned}$$

Pokud je střední hodnota **nezávislá** na t, **je proces stacionární** v průměru. Tedy

$$\eta(t) = \eta_x\ \forall t$$

Střední hodnota integrálu

$$\mathbb{E}\int_a^b X(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbb{E}X(t)\,\mathrm{d}t$$

Autokorelační funkce

$$\begin{aligned}
R_{xx}(t_1,\ t_2) &= \mathbb{E}\left[X(t_1) * \overline{X(t_2)}\right] \text{ v } \mathbb{C} \\
&= \mathbb{E}[X(t_1) * X(t_2)] = \sum_i x_i(t) * P(X(t_1) * X(t_2) = x_i(t)) \text{ v } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

V ukázkovém příkladu se autokorelační funkce spočítala pomocí následujícího „triku“ ($0 \le t_1 \le t_2 \le 2$)

$$\begin{aligned}
R_x(t_1,\, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1) * X(t_2)] = 0 * \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 0) + 1 * \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 1) \\
&= \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 1) = \mathbb{P}(X(t_1) = 1,\, X(t_2) = 1) = \\
&= \boxed{\mathbb{P}(t_1 \le A,\, t_2 \le A) = \mathbb{P}(A \ge t_1,\, t_2 \ge A) = P(A \ge t_2)}
\end{aligned}$$

6 Markovovy řetězce

Matice přechodů

$$\mathbb{P}_{i,j} = p(i,\, j) = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = p_{i,j}$$

Řetězec zapisujeme

- diagramem,
- maticí přechodů.

6.1 Stacionární distribuce

- Po čase se některé Markovovy řetězce ustálí v nějakém stavu.
- Rovnovážná distribuce

$$\pi : \pi = \pi * \mathbb{P}$$

- Detailní rovnováha

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \, \forall i,\, j$$

7 Systémy hromadné obsluhy

Modely:

- $M/M/1$
- $M/M/m$
- $M/G/\infty$

Míra vytížení:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

(musí být < 1, aby systém pracoval)

Little's law (průměrný počet zákazníků ve frontě):

$$N = \lambda * T$$

8 Ostatní

8.1 Řady

Výpočet řad

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \frac{1}{1-r} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n * r^n &= \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

Nekonečná řada:

$$\frac{a_1}{1-q}$$

(a_1 – počátek, q – kvocient)