

**Příklad 1**

Uvažujme dvě absolutně spojitě nezávislé náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  se stejným rozdělením. Spočtěte a dokažte  $P(X > Y)$ .

---

Klíčovou informací je, že veličiny  $X$  a  $Y$  jsou spojitě, nezávislé a stejně rozdělené.

$$P(X > Y) = P(Y < X) = a$$

(Toto víme, protože jsou veličiny **stejně rozdělené a nezávislé.**)

Dále víme

$$P(X = Y) = 0$$

(Toto víme, protože jsou veličiny **spojité a nezávislé.**)

Platí tedy, že

$$\begin{aligned} P(X = Y) + P(X > Y) + P(Y < X) &= 1 \\ 0 + a + a &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \\ &\underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

**Příklad 2**

Vyjádřete výraz  $P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k, X_n = i) | P(X_n = i)$  pomocí přechodových pravděpodobností  $P_{i,j}$ .

---

### Příklad 3

Dokažte, že geometrické rozdělení nemá paměť.

- Nemá paměť = nezáleží na historii nějakého jevu.

Předpokládejme dobu čekání  $T \sim \text{Geom}(p)$ . Pokud jsme již čekali  $s$  jednotek času, zbývajících čas čekání  $T - s$  má opět  $\text{Geom}(p)$ , tedy stejný, jako kdybychom zatím vůbec nečekali. Snažíme se tedy dokázat

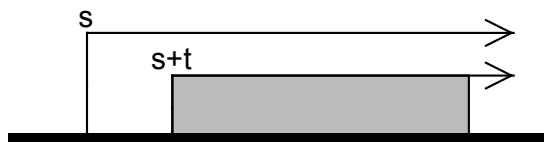
$$P(T - s > k | T > s) \stackrel{?}{=} P(T > k) \text{ pro } k, s > 0.$$

Upravme nerovnici a použijme vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost a vzorec funkce přežití geometrického rozdělení

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \\ P(T > n) &= (1-p)^n \end{aligned}$$

$$P(T - s > k | T > s) = P(T > k + s | T > s) = \frac{P(T > k + s \cap T > s)}{P(T > s)} = \dots$$

Průnik jevu v čitateli je následující:



celý výraz pokračuje vyjádřením pomocí funkce přežití:

$$\dots = \frac{P(T > k + s)}{P(T > s)} = \frac{(1-p)^{k+s}}{(1-p)^s} = \frac{\cancel{(1-p)^s} (1-p)^k}{\cancel{(1-p)^s}} = \boxed{(1-p)^k = P(T > k)}$$

Geometrické rozdělení tedy skutečně **nemá paměť**.

**Příklad 4**

Dokažte, že exponenciální rozdělení nemá paměť.

---

Struktura tohoto příkladu je stejná jako u důkazu, že geometrické rozdělení nemá paměť.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$P(X > u + t | X > u) = \frac{P(X > u + t \cap X > u)}{P(X > u)} = \frac{P(X > u + t)}{P(X > u)} = \dots$$

Funkce přežití exponenciálního rozdělení je

$$P(X > k) = e^{-\lambda k}$$

$$\dots = \frac{e^{-\lambda(u+t)}}{e^{-\lambda u}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda u}} e^{-\lambda t}}{\cancel{e^{-\lambda u}}} = \boxed{e^{-\lambda t} = P(X > t)}$$

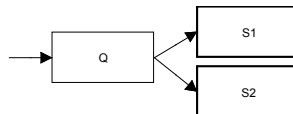
**Exponenciální rozdělení tedy skutečně nemá paměť.**

### Příklad 5

Mějme server, který dokáže zpracovat paralelně až dva požadavky. Pokud je server zahlcen, ukládají se příchozí požadavky do fronty o kapacitě 5. Zpracování požadavků probíhá náhodně a nezávisle. Střední doba zpracování požadavku na serveru je  $25ms$ .

- (A) Server zpracovává dva požadavky. Jaká je průměrná doba odbavení třetího požadavku.
- (B) Jaká je průměrná doba zpracování všech tří požadavků.
- (C) Jaká je pravděpodobnost, že třetí požadavek bude zpracován jako poslední?

Graf exponenciálních závodů:



Důležité vzorce

$$\begin{aligned} E_{\min}\{S, T\} &= \frac{1}{\lambda + \mu} \\ E_{\max}\{S, T\} &= E(S) + E(T) - E_{\min}\{S, T\} \end{aligned}$$

Za předpokladu

$$S \sim \text{Exp}(\lambda), T \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_1 \sim \text{Exp}(\lambda), E(S_1) = 25ms, \lambda = \frac{1}{E(S_1)} \rightarrow \lambda = \frac{1}{25}$$

$$S_2 \sim \text{Exp}(\mu), E(S_2) = 25ms, \mu = \frac{1}{E(S_2)} \rightarrow \mu = \frac{1}{25}$$

**A)**

$S_1$  a  $S_2$  jsou obsazené, čekáme tedy, až se jeden z nich uvolní (ten nejrychlejší).

$$E(C_A) = E_{\min}\{S_1, S_2\} + E(C) = \frac{1}{\mu + \lambda} + E(C) = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} + 25 = \dots = \underline{\underline{37,5ms}}$$

**B)**

Všechny tři požadavky budou zpracovány, když bude zpracován nejpomalejší z nich.

$$\begin{aligned} E(C_B) &= E_{\min}\{S_1, S_2\} + E_{\max}\{S_1, S_2\} = E_{\min}\{S_1, S_2\} + E(S_1) + E(S_2) - E_{\min}\{S_1, S_2\} = \\ &= E(S_1) + E(S_2) = 25 + 25 = \underline{\underline{50ms}} \end{aligned}$$

**C)**

$$\begin{aligned} P(C_L) &= P(C_L \cap A_F) + P(C_L \cap B_F) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} * \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} * \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \\ &= \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} * \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} + \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} * \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Vzorec vychází z

$$P(S < T) * P(S > T) + \dots$$

**Příklad 6**

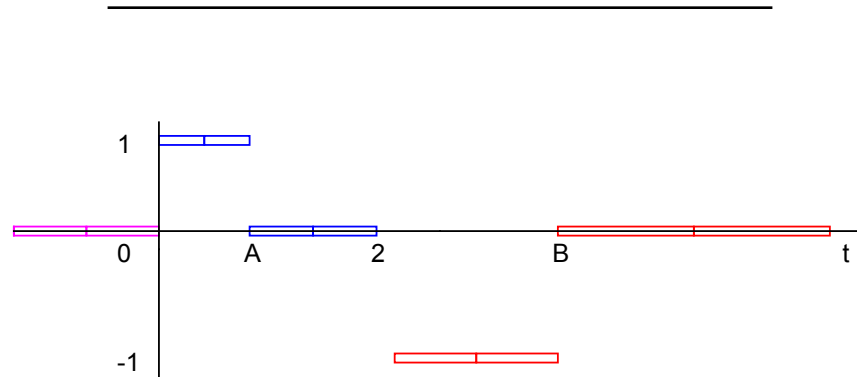
Spočtete entropii geometrického rozdělení,  $p = \frac{1}{2}$ .

### Příklad 7

Náhodný proces  $X(t)$  je definován jako:  $X(t) = 1$  pro  $0 \leq t < A$  a  $X(t) = -1$  pro  $2 \leq t \leq B$ .  $A$  je rovnoměrně rozdělená veličina na intervalu  $(0, 2)$ .  $B$  je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s intenzitou  $\lambda = 2$ .

- (A) Nakreslete graf náhodného procesu.  
 (B) Spočítejte  $E(X(t))$ .  
 (C) Určete, zda je proces  $X(t)$  stacionární ve střední hodnotě.

A)

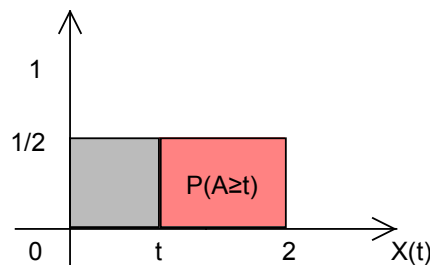


B)

Veličiny  $A$  a  $B$  jsou jinak rozdělené. Výpočet  $E(X)$  tedy rozdělíme na tři části (první interval je jen pro formálnost).

- I.  $t \leq 0$   $E(X(t)) = 0$   
 II.  $t \in (0, 2)$   $E(X(t)) = 1 * P(0 \leq t \leq A) + 0 * P(A \leq t \leq 2) = P(0 \leq t \leq A) = P(A \geq t)$   
 III.  $t \geq 2$   $E(X(t)) = (-1) * P(t \leq B) + 0 * P(t \geq B) = -P(B \geq t)$

**Interval II.**



Chceme spočítat pravděpodobnost (plocha pod křivkou), že  $P(A \geq t)$ . Jedná se o jednoduchý výpočet obsahu:

$$P(A \geq t) = (2 - t) * \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2 - t}{2}}$$

**Interval III.**

Funkce přežití exponenciálního rozdělení je

$$P(X > k) = e^{-\lambda k}$$

$$-P(B \geq t) = -(e^{-\lambda t}) [\lambda = 2] = \boxed{-e^{-2t}}$$

Celkový výsledek je tedy:

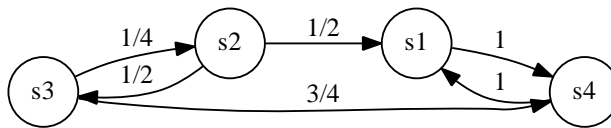
$$E(X(t)) = \underline{\underline{\frac{2 - t}{2} - e^{-2t}}}$$

C)

Střední hodnota není ustálená, závisí na čase  $t$ . Proces tedy **není stacionární ve střední hodnotě**.

### Příklad 8

U markovského řetězce



- (A) Definujte rekurentní stav.
- (B) Najděte stacionární rozdělení.
- (C) Vypište rekurentní stavy.

**A)**

Stav  $j$  se nazývá rekurentní, jestliže řetězec, který z něj vychází, se do  $j$  vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích. Tj.  $P(T_j < \infty) = 1$ .

**B)**

Sestrojme matici přechodů  $Q$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Protože je markovským řetězcem popsán jev diskrétní, platí pro stacionární rozdělení:

$$\pi : \pi * Q = \pi$$

Sestavme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_4 &= \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_2 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3 &= \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nyní vyřešme soustavu rovnic, pro tento případ použijme GEM.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \dots \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

**C)**

Rekurentní stavy jsou  $s_1$  a  $s_2$ . Přijít na to můžeme pomocí *silně souvislých komponent* z teorie grafů.

**Def.:** Pro všechny dvojice vrcholů  $u$  a  $v$  existuje cesta z  $u$  do  $v$  a zároveň z  $v$  do  $u$ .



**Příklad 9**

Tři výrobky  $A$ ,  $B$ ,  $C$  mají následující pravděpodobnosti nákupu:  $A = 0,9$ ,  $B = 0,8$  a  $C = 0,7$ . Pro jiný než oblíbený výrobek se zákazníci rozhodnou ve zbytku procent rovnoměrně mezi zbylými dvěma. Spočtete oblíbenost jednotlivých výrobků z dlouhodobého hlediska.

**Příklad 10**

Mějme zadány tabulky rozdělení  $X$  a  $Y$  a *codeword*.

$X, Y$	-12	5	$X, Y$	-12	5
-12	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-12	110	110
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	10	0

- (A) Najděte nejmenší možnou očekávanou délku kódového slova jakéhokoliv binárního kódu pro náhodný vektor  $X, Y$  s výše uvedeným rozdělením.
- (B) Dosahuje výše uvedené kódování tohoto minima? Proč?
- (C) Jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé? Proč?

**A)**

Délku kódového slova spočteme jako

$$L(C) = \mathbb{E} \ell(X) = \sum_i \ell(x_i) * \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$L(C) \geq H_D(X)$$

Tedy:

$$L(C) = \frac{1}{8} * 3 + \frac{1}{8} * 3 + \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 1 = 2$$

**B)**

Kódování je optimální tehdy, když platí  $L(C) = H(X)$ .

$$H(X, Y) = - \sum p_i \log_b p_i = - \left( \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \right) = -\frac{7}{4}$$

$L(C) \geq H(X)$  kódování tedy **není optimální** (délka slova není optimální)

**C)**

Pro nezávislost jevů obecně platí

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

V tabulce jsou uvedené sdružené pravděpodobnosti ( $P(A \cap B)$ ), spočteme tedy samostatné pravděpodobnosti a ty porovnáme s tabulkou.

$$P(X = -12) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ (součet řádku)}$$

$$P(Y = -12) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ (součet sloupce)}$$

$$P(X = -12 \wedge Y = -12) = \frac{1}{4} * \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

$$\frac{5}{32} \neq \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{z tabulky}}$$

**Veličiny jsou tedy závislé, tedy nejsou nezávislé.**