Příklad 1
Uvažujme dvě absolutně spojité nezávislé náhodné veličiny X a Y se stejným rozdělením. Spočtěte a dokažte $P(X > Y)$.

Klíčovou informací je, že veličiny X a Y jsou spojité, nezávislé a stejně rozdělené.

$$P(X > Y) = P(Y < X) = a$$

(Toto víme, protože jsou veličiny **stejně rozdělené a nezávislé.**)

Dále víme

$$P(X = Y) = 0$$

(Toto víme, protože jsou veličiny **spojité a nezávislé.**)

Platí tedy, že

$$\begin{aligned} P(X = Y) + P(X > Y) + P(Y < X) &= 1 \\ 0 + a + a &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Příklad 2

Vyjádřete výraz $P\left(X_{n+2}=j,\, X_{n+1}=k,\, X_{n}=i\right)|P\left(X_{n}=i\right)$ pomocí přechodových pravděpodobností $P_{i,j}$.

Příklad 3
Dokažte, že geometrické rozdělení nemá paměť.

- Nemá paměť = nezáleží na historii nějakého jevu.

Předpokládejme dobu čekání $T \sim \text{Geom}(p)$. Pokud jsme již čekali s jednotek času, zbývající čas čekání $T - s$ má opět $\text{Geom}(p)$, tedy stejný, jako kdybychom zatím vůbec nečekali. Snažíme se tedy dokázat

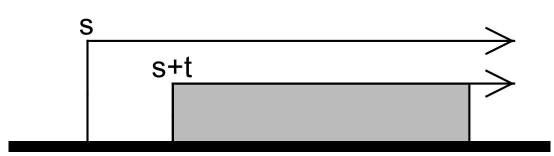
$$P(T - s > k | T > s) \stackrel{?}{=} P(T > k) \text{ pro } k,\ s > 0.$$

Upravme nerovnici a použijme vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost a vzorec funkce přežití geometrického rozdělení

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0 \\ P(T > n) &= (1-p)^n \end{aligned}$$

$$P(T - s > k | T > s) = P(T > k + s | T > S) = \frac{P(T > k + s \cap T > s)}{P(T > s)} = \cdots$$

Průnik jevu v čitateli je následující:



celý výraz pokračuje vyjádřením pomocí funkce přežití:

$$\cdots = \frac{P(T > k + s)}{P(T > s)} = \frac{(1-p)^{k+s}}{(1-p)^s} = \frac{\cancel{(1-p)^s}(1-p)^k}{\cancel{(1-p)^s}} = \boxed{(1-p)^k = P(T > k)}$$

Geometrické rozdělení tedy skutečně **nemá paměť**.

Příklad 4
Dokažte, že exponenciální rozdělení nemá paměť.

Struktura tohoto příkladu je stejná jako u důkazu, že geometrické rozdělení nemá paměť.

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

$$P(X > u + t | X > u) = \frac{P(X > u + t \cap X > u)}{P(X > u)} = \frac{P(X > u + t)}{P(X > u)} = \cdots$$

Funkce přežití exponenciálního rozdělení je

$$P(X > k) = e^{-\lambda x}$$

$$\cdots = \frac{e^{-\lambda(u+t)}}{e^{-\lambda u}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda u}} e^{-\lambda t}}{\cancel{e^{-\lambda u}}} = \boxed{e^{-\lambda t} = P(X > t)}$$

Exponenciální rozdělení tedy skutečně nemá paměť.

Příklad 5

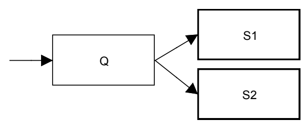
Mějme server, který dokáže zpracovat paralelně až dva požadavky. Pokud je server zahlcen, ukládají se příchozí požadavky do fronty o kapacitě 5. Zpracování požadavků probíhá náhodně a nezávisle. Střední doba zpracování požadavku na serveru je $25ms$.

(A) Server zpracovává dva požadavky. Jaká je průměrná doba odbavení třetího požadavku.

(B) Jaká je průměrná doba zpracování všech tří požadavků.

(C) Jaká je pravděpodobnost, že třetí požadavek bude zpracován jako poslední?

Graf exponenciálních závodů:



Důležité vzorce

$$\begin{aligned} Emin\left\{S,T\right\} &= \frac{1}{\lambda+\mu} \\ Emax\left\{S,T\right\} &= E\left(S\right)+E\left(T\right)-Emin\left\{S,T\right\} \end{aligned}$$

Za předpokladu

$$S\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right),\, T\sim \mathrm{Exp}\left(\mu\right)$$

$$S_1\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right),\, E\left(S_1\right)=25ms,\, \lambda=\frac{1}{E\left(S_1\right)}\rightarrow\lambda=\frac{1}{25}$$

$$S_2\sim \mathrm{Exp}\left(\mu\right),\, E\left(S_2\right)=25ms,\, \mu=\frac{1}{E\left(S_2\right)}\rightarrow\mu=\frac{1}{25}$$

A)

S_1a S_2 jsou obsazené, čekáme tedy, až se jeden z nich uvolní (ten nejrychlejší).

$$E(C_A)=Emin\left\{S_1,S_2\right\}+E\left(C\right)=\frac{1}{\mu+\lambda}+E\left(C\right)=\frac{1}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}+25=\ldots=\underline{\underline{37,5ms}}$$

B)

Všechny tři požadavky budou zpracovány, když bude zpracován nejpomalejší z nich.

$$\begin{aligned} E\left(C_B\right) &= Emin\left\{S_1,S_2\right\}+Emax\left\{S_1,S_2\right\}=Emin\left\{S_1,S_2\right\}+E\left(S_1\right)+E\left(S_2\right)-Emin\left\{S_1,S_2\right\}= \\ &= E\left(S_1\right)+E\left(S_2\right)=25+25=\underline{\underline{50ms}} \end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned} P\left(C_L\right) &= P\left(C_L\cap A_F\right)+P\left(C_L\cap B_F\right)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}*\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}*\frac{\lambda}{\mu+\lambda}= \\ &= \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}*\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}+\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}*\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}=\cdots=\underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Vzorec vychází z

$$P\left(S<T\right)*P\left(S>T\right)+\ldots$$

Příklad 6
Spočtěte entropii geometrického rozdělení, $p = \frac{1}{2}$.

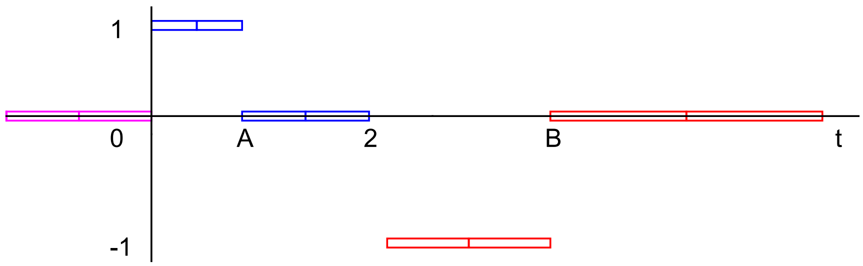
Příklad 7
Náhodný proces $X(t)$ je definován jako: $X(t) = 1$ pro $0 \leq t < A$ a $X(t) = -1$ pro $2 \leq t \leq B$. A je rovnoměrně rozdělená veličina na intervalu $(0, 2)$. B je náhodná veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\lambda = 2$.

(A) Nakreslete graf náhodného procesu.

(B) Spočtěte $E(X(t))$.

(C) Určete, zda je proces $X(t)$ stacionární ve střední hodnotě.

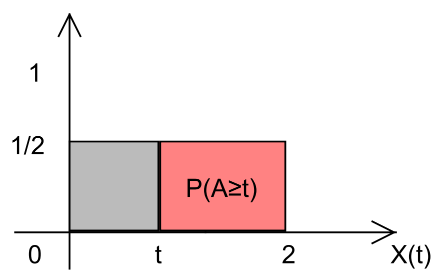
A)



B)
Veličiny A a B jsou jinak rozdělené. Výpočet $E(X)$ tedy rozdělíme na tři části (první interval je jen pro formálnost).

$$
\begin{array}{rcl}
\text{I.} & t \leq 0 & E(X(t)) = 0 \\
\text{II.} & t \in (0,2) & E(X(t)) = 1 * P(0 \leq t \leq A) + \cancel{0 * P(A \leq t \leq 2)} = P(0 \leq t \leq A) = P(A \geq t) \\
\text{III.} & t \geq 2 & E(X(t)) = (-1) * P(t \leq B) + \cancel{0 * P(t \geq B)} = -P(B \geq t)
\end{array}
$$

Interval II.



Chceme spočítat pravděpodobnost (plocha pod křivkou), že $P(A \geq t)$. Jedná se o jednoduchý výpočet obsahu:

$$P(A \geq t) = (2 - t) * \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2-t}{2}}$$

Interval III.
Funkce přežití exponenciálního rozdělení je

$$P(X > k) = e^{-\lambda k}$$

$$-P(B \geq t) = -\left(e^{-\lambda t}\right)[\lambda = 2] = \boxed{-e^{-2t}}$$

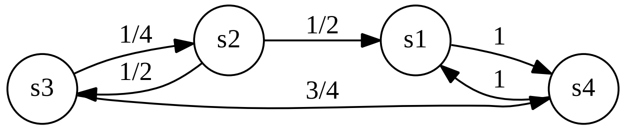
Celkový výsledek je tedy:

$$E(X(t)) = \underline{\underline{\frac{2-t}{2} - e^{-2t}}}$$

C)
Střední hodnota není ustálená, závisí na čase t. Proces tedy **není stacionární ve střední hodnotě.**

Příklad 8

U markovského řetězce



(A) Definujte rekurentní stav.

(B) Najděte stacionární rozdělení.

(C) Vypište rekurentní stavy.

A)

Stav j se nazývá rekurentní, jestliže řetězec, který z něj vychází. se do j vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích. Tj. $P(T_j < \infty) = 1$.

B)

Sestrojme matici přechodů Q

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Protože je markovským řetězcem popsán jev diskrétní, platí pro stacionární rozdělení:

$$\pi : \pi * Q = \pi$$

Sestavme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_4 &= \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_2 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3 &= \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nyní vyřešme soustavu rovnic, pro tento případ použijme GEM.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \cdots \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

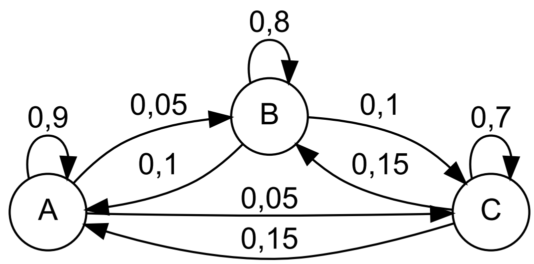
C)

Rekurentní stavy jsou s_1a s_2. Přijít na to můžeme pomocí *silně souvislých komponent* z teorie grafů.

Def.: Pro všechny dvojice vrcholů u a v existuje cesta z u do v a zároveň z v do u.

Příklad 9

Tři výrobky A, B, C mají následující pravděpodobnosti nákupu: $A = 0,9$, $B = 0,8$ a $C = 0,7$. Pro jiný než oblíbený výrobek se zákazníci rozhodnou ve zbytku procent rovnoměrně mezi zbylýma dvěma. Spočtěte oblíbenost jednotlivých výrobků z dlouhodobého hlediska.



Sestavme matici přechodů Q:

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \end{array}$$

Pro stacionární rozdělení (*tedy oblíbenost z dlouhodobého hlediska*) platí:

$$\pi * Q = \pi \qquad (1)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1 \qquad (2)$$

Sestavme rovnice pro výpočet stacionárního rozdělení (po sloupcích):

$$\begin{aligned} \frac{9}{10}\pi_1 + \frac{1}{20}\pi_2 + \frac{1}{20}\pi_3 &= \pi_1 \\ \frac{1}{10}\pi_1 + \frac{8}{10}\pi_2 + \frac{1}{10}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{3}{20}\pi_1 + \frac{3}{20}\pi_2 + \frac{7}{10}\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Soustavu upravíme pro použití v GEM:

$$\begin{aligned} -2\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 - 4\pi_2 + 3\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + 2\pi_2 - 6\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

A vyřešíme (nesmíme zapomenout počítat s pravou stranou matice a s rovnicí $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -33 & -6 \\ 0 & 0 & 33 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\pi = \left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)}$$

Příklad 10
Mějme zadány tabulky rozdělení X a Y a *codeword.*

X,Y	-12	5
-12	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X,Y	-12	5
-12	110	110
5	10	0

(A) Najděte nejmenší možnou očekávanou délku kódového slova jakéhokoliv binárního kódu pro náhodný vektor X, Y s výše uvedeným rozdělením.

(B) Dosahuje výše uvedené kódování tohoto minima? Proč?

(C) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé? Proč?

A)
Délku kódového slova spočteme jako

$$\begin{aligned} L(C) &= \mathbb{E}\ell(X) = \sum_i \ell(x_i) * \mathbb{P}(X = x_i) \\ L(C) &\geq H_D(X) \end{aligned}$$

Tedy:

$$L(C) = \frac{1}{8} * 3 + \frac{1}{8} * 3 + \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 1 = \underline{\underline{2}}$$

B)
Kódování je optimální tehdy, když platí $L(C) = H(X)$.

$$H(X,Y) = -\sum p_i \log_b p_i = -\left(\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{4}$$

$L(C) \geq H(X)$ kódování tedy **není optimální** (délka slova není optimální)
C)
Pro nezávislost jevů obecně platí

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

V tabulce jsou uvedené sdružené pravděpodobnosti ($P(A \cap B)$), spočteme tedy samostatné pravděpodobnosti a ty porovnáme s tabulkou.

$$\begin{aligned} P(X = -12) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ (součet řádku)} \\ P(Y = -12) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ (součet sloupce)} \\ P(X = -12 \wedge Y = -12) &= \frac{1}{4} * \frac{5}{8} = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

$$\frac{5}{32} \neq \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{z tabulky}}$$

Veličiny jsou tedy závislé, tedy nejsou nezávislé.

Příklad 11

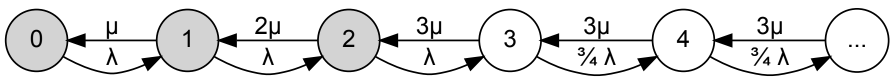
Systém serverů přijímá požadavky s intenzitou $\lambda = 20$ požadavků za sekundu. V systému jsou 3 servery, jeden požadavek se zpracovává $E(T) = 50ms$. Pokud jsou servery vytížené, s pravděpodobností $P = 25\%$ jsou požadavky zahozeny, jinak se ukládají do fronty.

(A) Nakreslete diagram systému.

(B) Nalezněte stacionární rozdělení.

(C) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě není žádný požadavek?

A)



B)

Řešení tohoto příkladu má **tři fáze:** I. rekurentní předpis, II. explicitní předpis a III. obecný předpis.

$$E(T) = \frac{1}{\mu} \to 50 = \frac{1}{\mu} \to \mu = \frac{1}{50} \text{ požadavků na ms}$$

μ musíme převést na stejné jednotky jako λ. $\frac{1}{50} * 1000 \to \boxed{\mu = 20}$ požadavků za s.

Stacionární rozdělení nalezneme pomocí *detailní rovnováhy* (řetězec je typu „*birth-and-death*“).

I. rekurentní předpis:

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda\pi_0 & = & \mu\pi_1 & \to & \pi_1 & = & \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\lambda\pi_1 & = & 2\mu\pi_2 & \to & \pi_2 & = & \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 \\
\lambda\pi_2 & = & 3\mu\pi_3 & \to & \pi_3 & = & \frac{\lambda}{3\mu}\pi_2 \\
\frac{3}{4}\lambda\pi_3 & = & 3\mu\pi_4 & \to & \pi_4 & = & \frac{\lambda}{4\mu}\pi_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \to & \pi_{n+1} & = & \frac{\lambda}{4\mu}\pi_n \quad \text{pro } \forall n \geq 3
\end{array}$$

Pomocí zpětného dosazování (π_0) vytvoříme **II. explicitní předpis:**

$$\begin{array}{ccc}
\pi_0 & = & \pi_0 \\
\pi_1 & = & \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\pi_2 & = & \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0 \\
\pi_3 & = & \boxed{\dfrac{\lambda^3}{6\mu^3}\pi_0} \\
\pi_4 & = & \dfrac{\lambda^3}{24\mu^4}\pi_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Ve stavu π_3 dojde k ustálení systému a graf bude vypadat až do ∞ stejně. Vyjádříme tedy obecně π_n (**III. obecný předpis**):

$$\pi_n = \pi_3 * \left(\frac{\frac{3}{4}\lambda}{3\mu}\right)^{n-3} = \left(\frac{\lambda^3}{6\mu^3} * \pi_0\right) * \left(\frac{\frac{3}{4}\lambda}{3\mu}\right)^{n-3} = \boxed{\frac{\lambda^3}{6\mu^3} * \pi_0 * \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{n-3}} \text{ pro } n \geq 3$$

Dále musí platit, že $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$ nebo-li $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$, tedy

$$\pi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{\lambda^3}{6\mu^3} * \pi_0 * \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{n-3}\right] = \pi_0 * \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{\lambda^3}{6\mu^3} * \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{n-3}\right]}_{S}\right) = 1$$

$$S = \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{\lambda^3}{6\mu^3} * \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{n-3}\right][\lambda = \mu = 20] = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cancel{20^3}}{6 * \cancel{20^3}} * \left(\frac{\cancel{20}}{4 * \cancel{20}}\right)^{n-3} = \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} = \ldots$$

Součet nekonečné geometrické řady spočteme jako $S_g = \frac{a_0}{1-q}$ pro $|q| < 1$, tedy:

$$\ldots = \frac{1}{6} * \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \ldots = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\pi_0 * \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9}\right) = 1 \Rightarrow \pi_0 = \underline{\underline{\frac{18}{49}}}$$

Výsledné stacionární rozdělení je

$$\pi = \left(\pi_0,\, \pi_0,\, \frac{1}{2}\pi_0,\, \frac{1}{6}\pi_0,\, \frac{1}{24}\pi_0, \ldots\right) = \boxed{\left(\frac{18}{49}, \frac{18}{49}, \frac{9}{49}, \frac{3}{49}, \frac{3}{196}, \ldots\right)}$$

C)

Fronta je prázdná tehdy, pokud se v systému nachází 0, 1, 2 nebo 3 požadavky.

$$P\left(X\left(t\right) \leq 3\right) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{18}{49} + \frac{18}{49} + \frac{9}{49} + \frac{3}{49} = \underline{\underline{\frac{48}{49}}}$$