

# Statistika pro informatiku

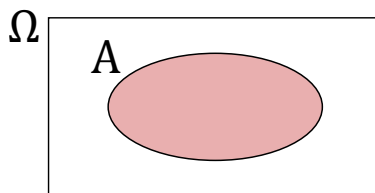
Souhrn látky

červen 2014

# 1 Základy statistiky a pravděpodobnosti

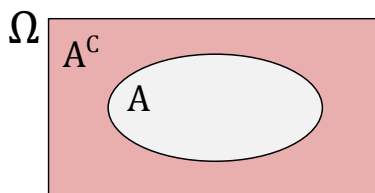
## 1.1 Pravděpodobnost jevu a jeho doplňku

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{size}(A)}{\text{size}(\Omega)}$$



Obrázek 1: Vennův diagram základní pravděpodobnosti jevu

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

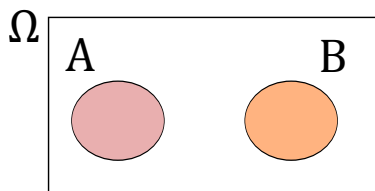


Obrázek 2: Vennův diagram doplňku jevu

## 1.2 Sjednocení jevů

Pro disjunktní jevy platí

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

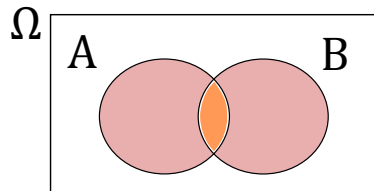


Obrázek 3: Dva disjunktní jevy

Jinak obecně platí (pro nedisjunktní jevy):

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Oblast průniku by byla započítána dvakrát, proto je potřeba ji odečíst.



Obrázek 4: Sjednocení nedisjunktních jevů

### 1.3 Průnik jevů

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C \dots) &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(C|A \cap B) \dots \\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C \dots) &= \mathbb{P}(A|B \cap C) \mathbb{P}(B|C) \mathbb{P}(C)\end{aligned}$$

Obecně zapsáno:

$$\mathbb{P}(\text{intersection}) = \mathbb{P}(\text{event}|\text{condition}) * \mathbb{P}(\text{condition})$$

### 1.4 Nezávislost jevů

U nezávislých jevů platí

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B|A) &= \mathbb{P}(B),\end{aligned}$$

a proto tedy:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)}.$$

Pokud jsou dva jevy  $X$  a  $Y$  **spojité a nezávislé**, pak

$$\mathbb{P}(X = Y) = 0.$$

Pokud jsou dva jevy  $X$  a  $Y$  **stejně rozdělené a nezávislé**, pak

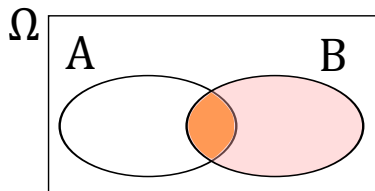
$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X).$$

## 1.5 Podmíněná pravděpodobnost

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \mathbb{P}(B) \neq 0$$

„Pravděpodobnost jevu  $A$  za podmínky, že jsme v  $B$  a že jev  $B$  nastal.“

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A)$$



Obrázek 5: Podmíněná pravděpodobnost

## 1.6 Pravděpodobnostní míra

Pravděpodobnostní míra  $Q$ :

$$Q(A) = P(A|C)$$

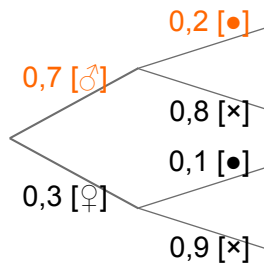
Platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(A) \leq 1 \\ Q(A) &= 1 \\ Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i), \text{ pokud jsou } A_i \text{ disjunktní jevy} \end{aligned}$$

## 1.7 Bayessova věta

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(\sigma \cap \bullet) = \mathbb{P}(\bullet|\sigma) * \mathbb{P}(\sigma) = \mathbb{P}(\sigma) * \mathbb{P}(\bullet|\sigma) = 0,7 * 0,2 = \underline{\underline{0,14}}$$



Obrázek 6: Bayessova věta pomocí stromu

## 1.8 Shrnutí

Jev	Sjednocení ( $\cup$ )	Průnik ( $\cap$ )
Disjunktní jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$
Nedisjunktní jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
Závislé jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A B) * \mathbb{P}(B)$
Nezávislé jevy	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$

Tabulka 1: Shrnutí operací nad různými jevy

## 2 Vlastnosti

### 2.1 Střední hodnota $\mathbb{E}X$

Pro diskrétní veličiny

$$\mathbb{E}X = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i * \mathbb{P}(X = x_i)$$

Pro spojitě veličiny

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_x(x) dx$$

( $P$  a  $f$  jsou funkce hustoty.)

Pro libovolné náhodné veličiny platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + Y) &= a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ (linearita)} \\ \mathbb{E}(X \pm Y) &= \mathbb{E}(X) \pm \mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(\max\{X, Y\}) + \mathbb{E}(\min\{X, Y\}) \\ \mathbb{E}X^2 &= \sum_i p_i x_i^2 \text{ (pro diskrétní jevy)} \\ \mathbb{E}(\max\{X, Y\}) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(\min\{X, Y\}) \\ \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \text{ (platí jen pro nezávislé jevy)} \end{aligned}$$

### 2.2 Rozptyl

Pro diskrétní náhodnou veličinu jej můžeme definovat vztahem:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E(X)]^2$$

Pro spojitou náhodnou veličinu definujeme rozptyl vztahem:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f(x) dx - [E(X)]^2$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 \\ \operatorname{var}(X) &= \operatorname{cov}(X, X) \\ \operatorname{var}(aX) &= a^2 \operatorname{var}(X) \\ \operatorname{var}(X + a) &= \operatorname{var}(X) \\ \operatorname{var}(X \pm Y) &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

### 2.3 Distribuční funkce

- Funkce je zprava spojitá.

Distribuční funkce pro diskrétní veličiny

$$F = \mathbb{P}(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_x(x_i)$$

Distribuční funkce pro spojité veličiny

$$F = \mathbb{P}(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

( $X$  je náhodná veličina,  $x_i$  je číslo)

### 2.4 Hustota

Funkce hustoty pro diskrétní veličiny

$$p(X) = \mathbb{P}(X = x)$$

Funkce hustoty pro spojité veličiny

$$f(x) = F'_x(x)$$

### 2.5 Kovariance

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Platí, že pokud

$$\operatorname{cov}(X, Y) = 0$$

pak

$$E(XY) = E(X) * E(Y)$$

a  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé.

### 2.6 Korelační koeficient

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)} * \sqrt{\operatorname{var}(Y)}}$$

### 3 Rozdělení pravděpodobnosti

Distribuční funkce ( $F$ )	$X \leq k$
Hustota	$X = k$
Funkce přežití	$X > k$

Tabulka 2: Funkce a nerovnosti

#### 3.1 Diskrétní (nespojité) rozdělení

Diskrétní veličiny mohou nabývat pouze spočetného počtu hodnot (i nekonečného).

Rozdělení	Funkce hustoty	Distribuční funkce ( $F$ )	$\mathbb{E}X$	$varX$
<b>Bernoulliho</b> , $X \sim Be(p)$	$\mathbb{P}(0) = 1 - p, \mathbb{P}(1) = p$	$\times$	$p$	$p(1 - p)$
<b>Binomické</b> , $X \sim Bi(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$I_{1-p}(n - k, 1 + k)$	$\mathbb{E}X = n * p$	$varX = np(1 - p)$
<b>Geometrické</b> , $X \sim geom(p)$	$(1 - p)^{k-1} * p$	$\mathbb{P}(T \leq n) = 1 - (1 - p)^n$ $\mathbb{P}(T > n) = (1 - p)^n$	$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$	$varX = \frac{1-p}{p^2}$
<b>Poissonovo</b> , $X \sim Pois(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$Q(\lfloor k + 1 \rfloor, \lambda)$	$\lambda$	$\lambda$

Obrázek 7: Diskrétní rozdělení

#### 3.2 Spojité rozdělení

Spojité náhodné veličiny nabývají na rozdíl od diskretních veličin nějakého intervalu.

Rozdělení	Funkce hustoty	Distribuční funkce ( $F$ )	$\mathbb{E}X$	$varX$
<b>Rovnoměrné</b> , $X \sim Unif(a, b)$	$\frac{1}{b-a}; x \in [a, b]$	$F(X) \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b \\ 1 & \text{pro } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<b>Exponenciální</b> , $X \sim Exp(n, p)$	$\lambda e^{-\lambda x}; x \in [0, +\infty)$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
<b>Normální (Gaussovo)</b> , $X \sim Geom(p)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\times$	$\mu$	$\sigma^2$

Obrázek 8: Spojité rozdělení

### 4 Entropie

Entropie diskretní veličiny

$$H_b(X) = - \sum_{\text{all } i} p_i \log_b p_i$$

Entropie spojité veličiny

$$H_b(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_b f(x) dx$$

( $b$  je základ abecedy pro kódová slova, nejčastěji používáme binární abecedu, tedy  $b = 2$ )

Aditivita entropie

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ H(X, Y) &= H(X) + H(Y) \text{ (speciálně jen pro nezávislé náhodné veličiny)} \end{aligned}$$

#### 4.1 Sdružená entropie

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j}$$

(sdružená hustota  $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = Y_j)$ )

#### 4.2 Podmíněná entropie

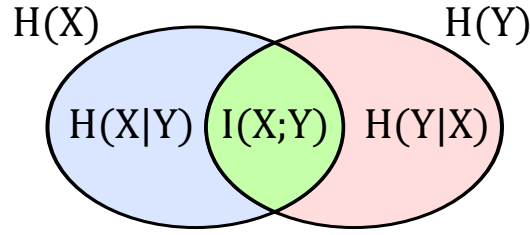
$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p(y_j|x_i) \\ H(X|Y) &= H(X, Y) - H(Y) \\ \mathbb{P}(x_i|y_j) &= \frac{\mathbb{P}(x_i, y_j)}{\mathbb{P}(y_j)} \quad \begin{array}{l} \text{sdružená hustota} \\ \text{marginální hustota} \end{array} \\ \mathbb{P}(X, Y) &= \mathbb{P}(X|Y) * \mathbb{P}(Y) \end{aligned}$$

#### 4.3 Vzájemná informace

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ I(X; Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ I(X; Y) &= I(Y; X) \\ I(X; X) &= H(X) \end{aligned}$$

$$I(X, Y) = \sum_{i,j} p_{i,j} \log \frac{p_{i,j}}{p_i * p_j} = \dots = H(X) - H(X|Y)$$





Obrázek 9: Vzájemná informace a entropie (tedy  $H(X, Y)$ )

#### 4.4 Kódování

Střední délka kódového slova

$$\begin{aligned} L(C) &= \mathbb{E}\ell(X) = \sum_i \ell(x_i) * \mathbb{P}(X = x_i) \\ L(C) &\geq H_D(X) \end{aligned}$$

**Kódování je optimální**, pokud se střední délka kódového slova a entropie rovnají ( $L(C) = H_D(X)$ ).

### 5 Náhodné procesy

Značení procesu

$$X(t, \omega) = X_t = X(t)$$

Střední hodnota

$$\begin{aligned} \eta_x(t) &= \mathbb{E}X(t) = \int x(t) * f_{X_t}(x) dx \\ \mathbb{E}X(t) &= \sum x_i(t) \mathbb{P}(X_t = x_i(t)) \end{aligned}$$

Pokud je střední hodnota **nezávislá** na  $t$ , **je proces stacionární** v průměru. Tedy

$$\eta(t) = \eta_x \forall t$$

Střední hodnota integrálu

$$\mathbb{E} \int_a^b X(t) dt = \int_a^b \mathbb{E}X(t) dt$$

Autokorelační funkce

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left[ X(t_1) * \overline{X(t_2)} \right] \text{ v } \mathbb{C} \\ &= \mathbb{E} [X(t_1) * X(t_2)] = \sum_i x_i(t) * P(X(t_1) * X(t_2) = x_i(t)) \text{ v } \mathbb{R} \end{aligned}$$

V ukázkovém příkladu se autokorelační funkce spočítala pomocí následujícího „triku“ ( $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2$ )

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1) * X(t_2)] = 0 * \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 0) + 1 * \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X(t_1) * X(t_2) = 1) = \mathbb{P}(X(t_1) = 1, X(t_2) = 1) = \\ &= \boxed{\mathbb{P}(t_1 \leq A, t_2 \leq A) = \mathbb{P}(A \geq t_1, t_2 \geq A) = P(A \geq t_2)} \end{aligned}$$

## 5.1 Exponenciální závody

Spojité, bez paměti (memoryless), bez intenzit.

$$S \sim \text{Exp}(\lambda), T \sim \text{Exp}(\mu)$$

(Náhodné veličiny  $S$  a  $T$  jsou náhodně rozdělené.)

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\lambda}, \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mu}$$

$$\mathbb{E}_{\max}\{S, T\} = \mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}_{\min}\{S, T\}$$

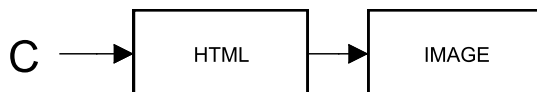
$$\mathbb{E}_{\min}\{S, T\} = \frac{1}{\lambda + \mu}$$

$$\mathbb{P}(T < S) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\mathbb{P}(S < T) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

### 5.1.1 Grafická reprezentace

Často pomocí následujícího diagramu (příklad):



Obrázek 10: Diagram exponenciálních závodů

## 6 Markovovy řetězce

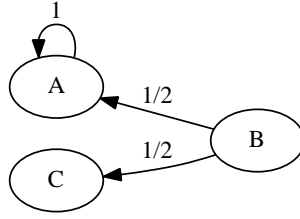
Matice přechodů

$$\mathbb{P}_{i,j} = p(i, j) = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = p_{i,j}$$

Řetězec zapisujeme

- diagramem,
- maticí přechodů.

## 6.1 Absorbující Markovův řetězec



Obrázek 11: Absorbující Markovův řetězec obsahuje rekurentní stavy

$$P = \left( \begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

( $P$  je fundamentální matice,  $Q$  – tranzientní stavy,  $R$  – rekurentní stavy,  $1$  – jednotková matice)  
 Předpokládaný počet průchodů v tranzientním ( $Q$ ) stavu vypočítáme pomocí matice  $N$ :

$$N = (1 - Q)^{-1}$$

Počet průchodů po určitém čase spočteme jako

$$N = (1 - Q^n)^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \text{adj} A$$

Adjungovaná matice je matice subdeterminantů vynásobená maticí znamének:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

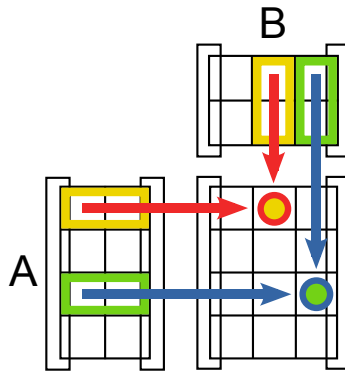
$N_{i,j} = \mathbb{E}$  (počet průchodů stavem  $j$  | začínáme ve stavu  $i$ ), zároveň součet řádku je střední doba absorpce, pokud začínáme v určitém stavu.

Pravděpodobnost, že spadneme do rekurentního stavu stavu „ $j$ “, začínáme-li v „ $i$ “ je

$$B_{i,j} = \mathbb{P}(i|j)$$

Matici  $B$  vypočítáme jako

$$B = N * R$$



Obrázek 12: Násobení matic

## 6.2 Stacionární distribuce

Po čase se některé Markovovy řetězce ustálí v nějakém stavu.

**Rovnovážná distribuce**

- **Diskrétní:**  $\pi : \pi * Q = \pi$
- **Spojité:**  $\pi : \pi * Q = 0$  (Zadáno pomocí intenzit  $\lambda$ )

U obou platí

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1$$

Detailní rovnováha

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i, j$$

## 7 Systémy hromadné obsluhy

Tři modely:

- $M/M/1$
- $M/M/m$
- $M/G/\infty$

Míra vytížení:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{\mu} \\ \mu &= \frac{1}{T} \\ \lambda &= \text{intenzita příchodů} \\ \mu &= \text{intenzita obsluhy} \end{aligned}$$

(musí být  $< 1$ , aby systém pracoval)

Little's law (střední počet požadavků v systému):

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=0}^{\infty} n * \pi_n \\ N &= \underbrace{N_Q}_{\text{Fronta}} + \underbrace{N_S}_{\text{Obsluha}} \\ N_S &= \lambda * T_S \end{aligned}$$

Průměrný čas ve frontě/systému:

$$\begin{aligned} N &= \lambda * T \\ T &= T_Q + T_S \\ (T - \text{průměrný čas v systému}) \end{aligned}$$

## 8 Statistika

$$\bar{X} = \frac{\sum}{N}$$

### 8.1 Konfidenční intervaly

$\sigma^2$  známe:

$$\mu \in \left( \bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$\sigma^2$  neznáme:

$$\mu \in \left( \bar{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2|n|-1}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2|n|-1}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right)$$

$|n - 1$  je stupeň volnosti studentova rozdělení

### 8.2 Testování hypotéz

Testovací statistika, **neznáme**  $\sigma$ :

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Testovací statistika, **známe**  $\sigma$ :

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

## 9 Ostatní

### 9.1 Řady

Výpočet řad

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \frac{1}{1-r} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^n &= \frac{r}{(1-r)^2}\end{aligned}$$

Součet nekonečné geometrické řady:

$$S_n = \frac{a_0}{1-q} \text{ pro } |q| < 1$$

( $a_0$  – první prvek,  $q$  – kvocient)

### 9.2 Logaritmy

$$\begin{aligned}\log_a (x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\ \log_a x^r &= r \cdot \log_a x \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0\end{aligned}$$