LinAlgDat - Projekt B

Søren Hougaard Mulvad
rbn601 - Hold 5

14. maj 2018

1 Opgave 1

Betragt den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ givet ved

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

- *Bestem den matrix* $\mathbf{A}$ *som opfylder* $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *for alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$*:*

  $$\text{Da} \;\; T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

  er matricen $\mathbf{A}$ givet ved

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Bestem en basis for ran* T *(billedet af* T*):*

  For at bestemme en basis for ran T bringer vi først $\mathbf{A}$ på $rref$:

  $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4]{\substack{2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & -20 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ \frac{1}{20}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{11\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ 2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rref(\mathbf{A})$$

Fra $rref(\mathbf{A})$ aflæses, at der er pivot 1-taller i søjle 1, 2 og 3. Dette sammenholdes med den oprindelige matrix $\mathbf{A}$.

Vi konkluderer derfor, at

$$\text{En basis for ran } T \text{ er } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestem en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ *som ikke tilhører ran* T:

En vektor, der ikke tilhører ran T kunne f.eks. være $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da vi ville ende med et ligningssystem uden løsning. Det ville se således ud på totalmatrixform:

$$(rref(\mathbf{A}) \mid \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Er T *surjektiv?*

Det fremgår af $rref(\mathbf{A})$, at $\operatorname{ran} T = \operatorname{col} \mathbf{A}$ har dimension 3, så T er *ikke* surjektiv (der gælder altså ikke, at $\operatorname{ran} T = \mathbb{R}^4$).

- *Bestem en basis for* $\ker T$ *(kernen af* T*):*

  Idet $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ gælder $\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A}$. Ovenfor bestemte vi, at

$$rref(\mathbf{A}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Fra den reducerede rækkeecholonform aflæses, at ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har samtlige løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

  Vi konkluderer derfor, at

$$\text{En basis for } \ker T = \operatorname{null} \mathbf{A} \text{ er } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  Bestem to forskellige vektorer $\mathbf{x}_1$ *og* $\mathbf{x}_2$ *i* $\mathbb{R}^4$ *som opfylder* $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} = T(\mathbf{x}_2)$*:*

  Jeg finder to forskellige vektorer $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ ved at sætte t i mine ovenfor samtlige fundne løsninger til ligningssystemet til henholdsvis $t = 0$ og $t = 1$, hvorved vi får de to vektorer

$$\mathbf{x}_1 = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Er T *injektiv?*

  Det fremgår ovenfor, at $\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$. Derfor er T *ikke* injektiv.

- *Bestem en vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *i* $\mathbb{R}^4$ *som opfylder* $(T \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$*:*

  Først udregnes matrixproduktet $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}$, der opfylder at $(T \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 0 \\ 13 & 2 & 32 & 0 \\ 9 & 6 & 36 & 0 \\ -3 & -2 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

For at bestemme vektor $\mathbf{x}$ skal vi finde en løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 0 \\ 13 & 2 & 32 & 0 \\ 9 & 6 & 36 & 0 \\ -3 & -2 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationer bestemmer vi $rref(\mathbf{C})$:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 0 \\ 13 & 2 & 32 & 0 \\ 9 & 6 & 36 & 0 \\ -3 & -2 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{r} -\frac{1}{3}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\frac{13}{7}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -\frac{9}{7}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & \frac{40}{7} & \frac{120}{7} & 0 \\ 0 & \frac{60}{7} & \frac{180}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{r} \frac{7}{20}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{7}{20}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{r} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ \frac{1}{7}\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fra den reducerede rækkeechelonform aflæses, at der er følgende vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^4$ som opfylder $(T \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $x_3 = t \in \mathbb{R}$ og $x_4 = s \in \mathbb{R}$.

2 Opgave 2

Betragt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Det oplyses, at $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ og $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ begge er baser for det samme underrum.

- *Bestem basisskift-matricen* $\mathbf{P}_{\beta \leftarrow C}$ *(fra* C *til* β*):*

  Basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\beta \leftarrow C}$ fra $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ til $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er givet ved

$$\mathbf{P}_{\beta \leftarrow C} = ([\mathbf{v}_1]_\beta \mid [\mathbf{v}_2]_\beta \mid [\mathbf{v}_3]_\beta).$$

  For at bestemme koordinaterne $[\mathbf{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ til vektoren $\mathbf{v}_1$ i basen β skal vi løse ligningen:

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 \ \text{ dvs. } \ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

  Det samme gælder for de to resterende vektorer, og man kan dermed med fordel løse alle ligner på én gang ved ar skrive totalmatricen $(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3|\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ op og bringe den på $rref$:

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3|\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\\ -\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ud fra det kan vi se, at

$$[\mathbf{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}_2]_\beta = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}_3]_\beta = \begin{bmatrix} 6\\ 3\\ 1 \end{bmatrix}$$

Hermed har vi altså fundet, at

$$\mathbf{P}_{\beta\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Bestem basisskift-matricen* $\mathbf{P}_{C\leftarrow\beta}$ *(fra* β *til* C*):*

  Samme metode og argumenter som ovenfor anvendes, og vi bringer derfor totalmatricen $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3)$ på $rref$:

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\\ -2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & -7 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4\\ \mathbf{r}_1\leftrightarrow\mathbf{r}_3\\ -\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ -\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\begin{array}{r}-7\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\\ \frac{1}{2}\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|rrr}1&0&0&1&-2&0\\0&1&0&-3&7&-3\\0&0&1&1&-2&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ud fra det kan vi se, at

$$[\mathbf{u}_1]_C=\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix},\quad [\mathbf{u}_2]_C=\begin{bmatrix}-2\\7\\-2\end{bmatrix},\quad [\mathbf{u}_3]_C=\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix}$$

Hermed har vi altså fundet, at

$$\mathbf{P}_{C\leftarrow\beta}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&7&-3\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

- Lad λ være et (ukendt) tal og betragt vektoren $\mathbf{x}=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\lambda\mathbf{u}_3$. *Bestem tal a, b og c (udtrykt ved λ) således at $a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_3=\mathbf{x}$:*

  Først opskrives vektor $\mathbf{x}$ som summen af dens individuelle stykker

$$\mathbf{x}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda+2\\-\lambda\\1\\\lambda+1\end{pmatrix}$$

  Vi ved, at

$$a\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}5\\-1\\3\\4\end{pmatrix}=\mathbf{x}$$

  Totalmatrixen $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{x})$ opskrives og bringes på $rref$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&2&5&-\lambda+2\\2&0&-1&-\lambda\\1&1&3&1\\-1&1&4&\lambda+1\end{array}\right)\xrightarrow[]{\begin{array}{r}-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\\ -2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4\end{array}}\left(\begin{array}{rrr|r}0&0&-1&-\lambda\\0&-2&-7&-\lambda-2\\1&1&3&1\\0&2&7&\lambda+2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 \\ -\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 2 & 7 & \lambda + 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & 2 & 7 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{-7\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3\lambda + 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Heraf ser vi, at

$$a = 0, \qquad b = -3\lambda + 1, \qquad c = \lambda$$

3 Opgave 3

- *Bestem en* 4 x 4 *matrix* **F** *som opfylder*

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Vi ser, at efter et tryk på $\uparrow$ har centrum C^F nu koordinater i rumskibets spids S inden tryk. Derfor ved vi, at $(c_1^F, c_2^F) = (s_1, s_2)$.

For at beregne hvad koordinaterne for S^F er studerer vi figurerne på opgavearket. Vi kan se, at rumskibets spids hver gang naturligvis inden tryk starter i spids S, men at det herefter parallelforskydes med vektoren $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$.

Derfor er koordinaterne til S^F givet ved

$$S^F = S + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Vi bruger nu alt denne information til at opskrive matricen $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Gør rede for, at der gælder formlerne*

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbf{L}_\theta$ *og* $\mathbf{R}_\theta$ *er følgende* 4 x 4 *matricer:*

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Lad $\theta = 20^\circ$ og antag, at rumskibet er i sin startposition, dvs. $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$.

  Bestem positionen af rumskibets centrum og spids efter følgende tastekombination, hvor der læses fra venstre mod højre:

$$\leftarrow \; \uparrow \; \leftarrow \; \uparrow \; \rightarrow \; \rightarrow$$

For at beregne dette, skal man beregne matrixproduktet af de matricer, der svarer til tastetrykkene.

På opgavearket står, at man gerne må benytte CAS. Jeg har valgt at bruge Maple, hvor jeg først har kørt $with(LinearAlgebra)$- og $with(Gym)$-pakken (for at tillade henholdsvis matrixmultiplikation og udregning af sinus og cosinus med grader), derefter defineret min matricer $\mathbf{F}, \mathbf{L}_\theta, \mathbf{R}_\theta$ og min vektor for startpositionen, som jeg har kaldt $\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Herefter har jeg brugt "dot"-multiplikation i Maple (hvor man bare skriver et punktum "." mellem hver matrix for at multiplicere dem). Således bliver min multiplikation udtrykt på følgende måde, og resultatet er her afrundet til nærmeste 2 decimaler:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta.\mathbf{R}_\theta.\mathbf{F}.\mathbf{L}_\theta.\mathbf{F}.\mathbf{L}_\theta.\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} -0.98 \\ 1.70 \\ -0.98 \\ 2.70 \end{pmatrix}$$

Altså har rumskibet centrum C i $(c_1, c_2) = (-0.98, 1.70)$ og spidsen S har koordinaterne $(s_1, s_2) = (-0.98, 2.70)$ efter disse tastetryk.

4 Opgave 4 - Programmering i C#

Se den C#-fil, der er vedlagt ved upload af opgaven.