Advanced Programming & Maths

Tuur Vanhoutte

12 februari 2021

Inhoudsopgave

1 Basisfuncties in de wiskunde **1**
1.1 Functies . . . 1
1.2 Veelterm en veeltermfuncties . . . 2
1.3 Bijzondere veeltermfuncties . . . 2
1.3.1 Constante functie . . . 3
1.3.2 Lineaire functie . . . 3
1.3.3 Tweedegraadsfunctie . . . 3
1.3.4 Derdegraadsfunctie . . . 5
1.3.5 Exponentiële functie . . . 5

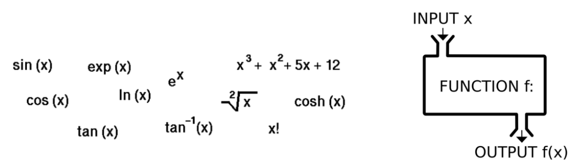
2 Exponentiële verbanden in data **6**
2.1 Lineaire groei . . . 6
2.2 Exponentiële groei . . . 7
2.3 Van groeipercentage naar groeifactor . . . 7
2.3.1 Percentage naar factor . . . 7
2.3.2 Factor naar percentage . . . 8
2.4 Voorbeeld . . . 8
2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename . . . 9
2.5.1 Oefening: Combinatie van groeifactoren? . . . 9

3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning **10**
3.1 Logistische groei . . . 10
3.1.1 Voorbeeld . . . 10
3.1.2 De groei . . . 10
3.1.3 Functievoorschrift . . . 10
3.1.4 Voorbeeld . . . 11
3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie . . . 11
3.2 Regression analysis . . . 12
3.2.1 Lineair regressiemodel . . . 12
3.2.2 Logistisch regressiemodel . . . 13
3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel . . . 14
3.2.4 Meerdere inputfactoren . . . 14
3.3 Softmax functie . . . 14
3.3.1 Kansen . . . 15
3.3.2 Model . . . 15
3.3.3 Wiskundig . . . 16
3.4 Logistic regression cost function . . . 16
3.4.1 Success meten . . . 16

1 Basisfuncties in de wiskunde

1.1 Functies

Definitie 1.1 (Reële functie) *Een reële functie is een relatie in $\mathbb{R}$ waarbij elke waarde x hoogstens één beeldwaarde $f(x)$ heeft*



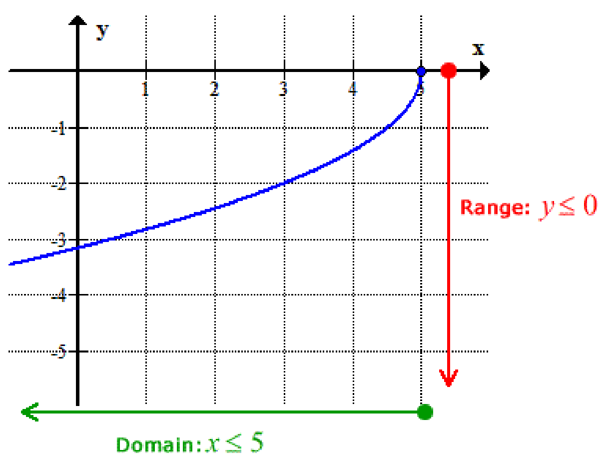
Figuur 1: Voorbeelden reële functies

Definitie 1.2 *Voor elke functie geldt: er bestaat een ...*

(i) *... domein van de functie (domain)*

(ii) *... beeld van de functie (range)*

(iii) *... functievoorschrift van de functie*

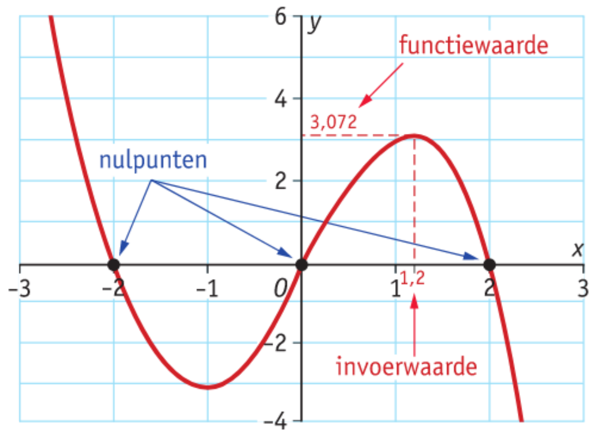


Figuur 2: Domein, bereik, functievoorschrift

$f : \textbf{domein} \to \textbf{bereik} : x \to y = f(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to y = x^3 - 4x$

Definitie 1.3 *Elke functie kan nulpunten hebben.*



Figuur 3: $y = -x^3 + 4x$

Verloop van een functie wordt via een tekenschema verduidelijkt:

x		-2		0		2	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Figuur 4: Tekenschema

1.2 Veelterm en veeltermfuncties

Definitie 1.4 (Veelterm)

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$(a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

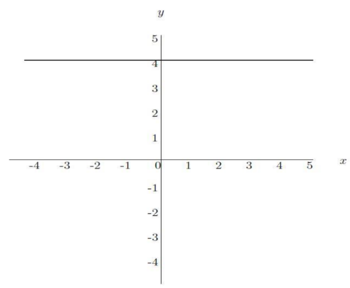
Definitie 1.5 (Veeltermfunctie)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$Graad\ van\ veelterm = n\ als\ a_n \neq 0 \tag{2}$$

1.3 Bijzondere veeltermfuncties

- Constante functie: $f(x) = 4$
- Lineaire functie: $f(x) = 4$
- Tweedegraadsfunctie: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- Derdegraadsfunctie: $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- Exponentiële functie: $f(x) = 2^x$
- Logaritmische functie: $(fx) = log_2(x)$

1.3.1 Constante functie



Figuur 5: $y = 4$

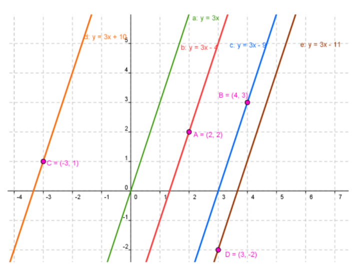
1.3.2 Lineaire functie

Definitie 1.6 (Lineaire functie)

$$f(x) = ax + b \tag{3}$$

Voorbeeld: $f(x) = 3x + 6$

- Betekenis van a: de richtingscoëfficiënt (rico)
- Betekenis van b: het snijpunt met de y-as
- Nulpunt: $f(x) = 0$
  $\Leftrightarrow 3x + 6 = 0$
  $\Leftrightarrow 3x = -6$
  $\Leftrightarrow x = -2$



Figuur 6: Meerdere evenwijdige lineaire functies

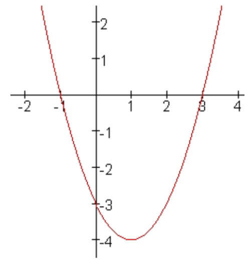
Evenwijdige rechten als: als $a_1 = a_2$

Loodrechte rechten als: als $a_1 \cdot a_2 = -1$

1.3.3 Tweedegraadsfunctie

Definitie 1.7

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c, \\ (a \neq 0) \end{aligned} \tag{4}$$



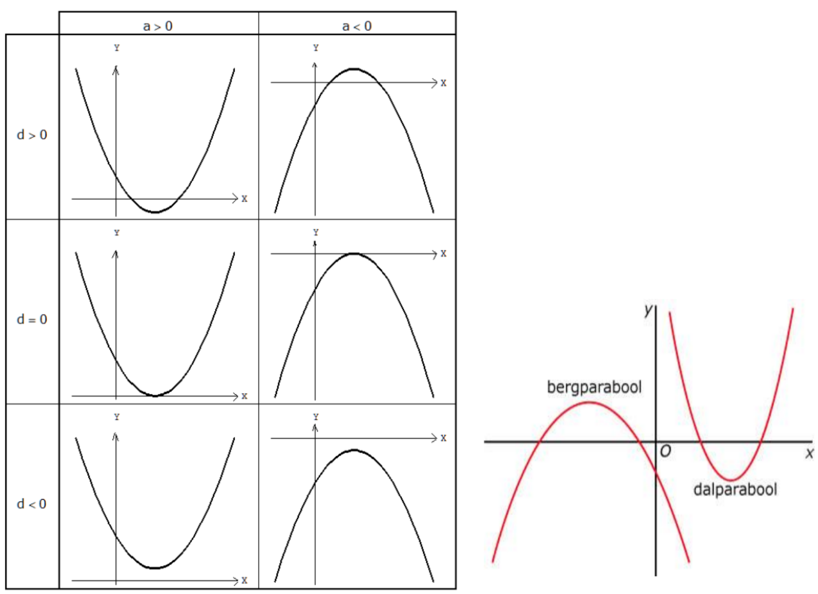
Figuur 7: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- Betekenis van a: positief $\Rightarrow$ dalparabool, negatief $\Rightarrow$ bergparabool
- Nulpunten: via de discriminant berekenen:

Definitie 1.8 (Discriminant) *Bij een tweedegraadsvergelijking is de discriminant:*

$$D = b^2 - 4ac \tag{5}$$

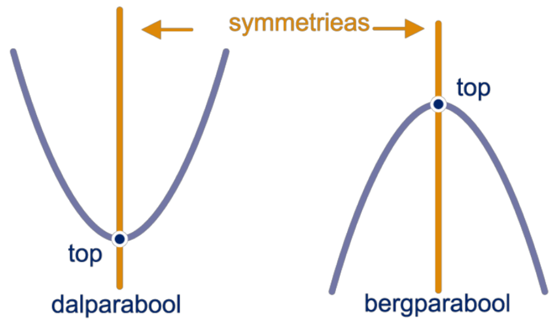
- Geval 1: $D > 0 \Rightarrow$ de functie heeft 2 nulpunten
- Geval 2: $D = 0 \Rightarrow$ de functie heeft 1 nulpunt
- Geval 3: $D < 0 \Rightarrow$ de functie heeft géén nulpunten



Figuur 8: De discriminant toont de nulpunten

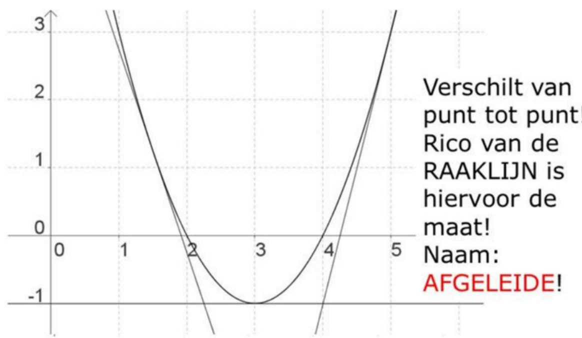
Nulpunten berekenen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{6}$$



Figuur 9: Symmetrieas: $x = \frac{-b}{2a}$

Voorbeeld:



Figuur 10: $y = x^2 - 6x + 8$

1.3.4 Derdegraadsfunctie

Definitie 1.9 (Derdegraadsfunctie)

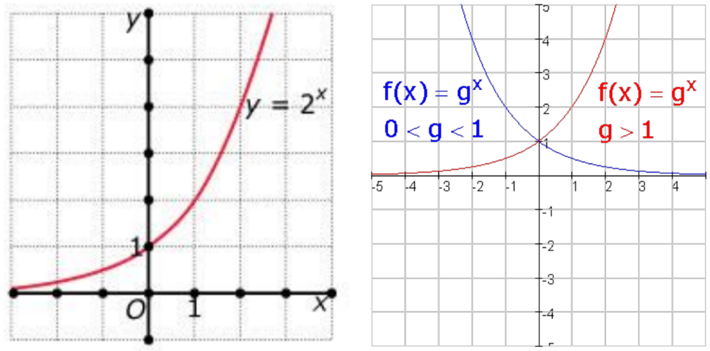
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0) \tag{7}$$

1.3.5 Exponentiële functie

Definitie 1.10 (Exponentiële functie)

$$f(x) = a^{g(x)} \tag{8}$$

Met grondtal $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$



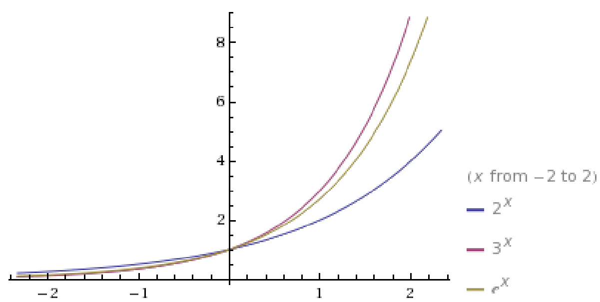
Figuur 11

- Betekenis van a: groeifactor
- Wanneer stijgend?
- Wanneer dalend?
- Nulpunten:
- Vaststelling beeld functie

Definitie 1.11 (Constante van Euler)

$$e \approx 2.718281828\ldots \tag{9}$$

$f(x) = e^x$ is een bijzondere exponentiële functie



Figuur 12: Verschil tussen 2^x, 3^x en e^x

2 Exponentiële verbanden in data

2.1 Lineaire groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt hetzelfde getal **opgeteld**
- Grafiek is een rechte
- Algemene formule (N = aantal, t = tijd, b: beginhoeveelheid):

$$N = a \cdot t + b \tag{10}$$

t	0	1	2	3	4	5
N	750	780	810	840	870	900
	+30	+30	+30	+30	+30	

Figuur 13: Lineaire groei

2.2 Exponentiële groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal **vermenigvuldigd**
- Grafiek is een exponentiële functie
- **Algemene formule:**

$$N = b \cdot g^t \tag{11}$$

t	0	1	2	3	4
N	1280	1600	2000	2500	3125
	x1,25	x1,25	x1,25	x1,25	

Figuur 14: Exponentiële groei

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	1998	2002	2006	2010	2014
aantal km	17 600	21 500	26 200	32 000	39 000

Figuur 15: Voorbeeld exponentiële groei met groeifactor ≈ 1.22

2.3 Van groeipercentage naar groeifactor

De toename/afname wordt vaak ook procentueel uitgedrukt

- Een jaarlijkse toename van 14.6%
- Een jaarlijkse afname van 14.6%

Definitie 2.1 (Groeifactor) *De groeifactor is de factor die per tijdseenheid wordt vermenigvuldigd met de vorige waarde.*

2.3.1 Percentage naar factor

$$g = \frac{p + 100}{100}\% \tag{12}$$

$100\% + 14{,}6\% = \underbrace{114{,}6\% = 1{,}146}_{\times 1{,}146}$

$100\% - 14{,}6\% = \underbrace{85{,}4\% = 0{,}854}_{\times 0{,}854}$

Figuur 16: Van groeipercentage naar groeifactor

2.3.2 Factor naar percentage

Figuur 17: Van groeifactor naar groeipercentage

Figuur 18: Let op: hier gebeuren vaak fouten bij het omrekenen

2.4 Voorbeeld

Een hoeveelheid groeit exponentieel. Na 5u is $N = 82$ en na 12u is $N = 246$.

Stel de formule van N op.

Oplossing

$$N = b \cdot g^t \tag{13}$$

Stap 1: groeifactor berekenen per tijdseenheid:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Na 5u} & \rightarrow & N = 82 \\ \text{Na 12u} & \rightarrow & N = 246 \end{array}\right\} \Delta = 7u \rightarrow 164$$

Groeifactor voor 7 uren: $\frac{246}{82} = 3$

Groeifactor voor 1 uur: $3^{1/7} \approx 1.170$

Stap 2: 1 punt nemen waarvan we N weten:

Gekozen punt: $(5, 82)$

$$82 = b \cdot (1.170)^5$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{82}{1.170}^5 \approx 37$$

$$\Leftrightarrow N = 37 \cdot 1.170^t$$

2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename

Definitie 2.2 (Verdubbelingstijd) *De verdubbelingstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid verdubbeld is.*

De verdubbelingstijd t *kan je berekenen met:*

$$g^t = 2 \tag{14}$$

Oefening

De populatie neemt toe met 8.3% per jaar. Bereken de verdubbelingstijd:

$$g^t = 2$$
$$\Leftrightarrow (1.083)^t = 2$$
$$\Leftrightarrow \log(1.083^t) = \log(2)$$
$$\Leftrightarrow t \cdot \log(1.083) = \log(2)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\log(2)}{\log(1.083)}$$
$$\Leftrightarrow t = 8.69\ jaar$$

Definitie 2.3 (Halveringstijd) *De halveringstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid gehalveerd is.*

De halveringstijd t *kan je berekenen met:*

$$g^t = 1/2 \tag{15}$$

2.5.1 Oefening: Combinatie van groeifactoren?

Een hoeveelheid neemt eerst 5 jaar lang met vast percentage (*) toe, om daarna nog 3 jaar met 10% per jaar toe te nemen. Na 8 jaar is de totale hoeveelheid verdubbeld.

(*) Bereken het jaarlijkse groeipercentage in de eerste 5 jaren.

Oplossing

We weten:

- Eerste 5 jaar: toename met vast percentage
- Volgende 3 jaar: toename met 10% (= factor van 1.1)
- Na 8 jaar: hoeveelheid verdubbeld (= factor van 2)

$$g^5 \cdot 1.1^3 = 2$$

We moeten g vinden:

$$\Leftrightarrow g^5 = \frac{2}{1.1^3}$$
$$\Leftrightarrow g = \sqrt[5]{\frac{2}{1.1^3}}$$

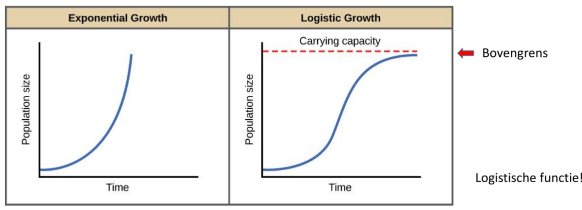
3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning

3.1 Logistische groei

3.1.1 Voorbeeld

Startsituatie: een bos (bv 10km^2) waarin een konijnenepidemie uitbreekt. Boswachter houdt de populatie van de konijnen bij. Wat stelt hij vast?

De groei van de populatie verloopt volgens een typisch patroon (niet exponentieel):



Figuur 19: De rode lijn is de bovengrens

3.1.2 De groei

= de mate van toename

- Hangt af van hoeveel er al zijn tegenover hoeveel er nog bij kunnen
- Heel sterke verandering bij start, op het einde heel kleine verandering
- Hangt dus ook af van de tijd

Definitie 3.1 (De logistische groei) *De logistische groei is de mate van toename, afhankelijk van hoeveel er nog bij kan en hoeveel er al is*

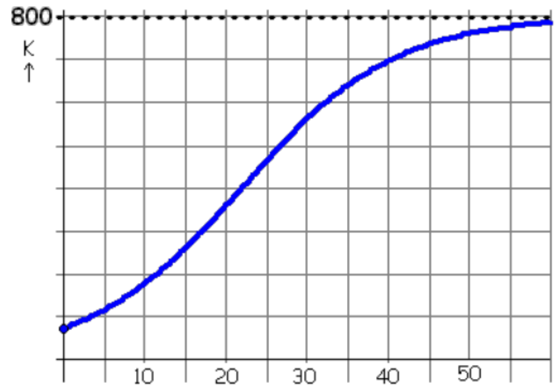
$$\frac{\textit{Hoeveel er nog bij kan}}{\textit{Hoeveel er al is}} = B \cdot g^t \tag{16}$$

- *t = de tijd,*
- *B en g = constanten*

3.1.3 Functievoorschrift

$$y = \frac{G}{1 + B \cdot g^t} \tag{17}$$

- t = de tijd
- B en constanten
- G = bovengrens



Figuur 20: Grafiek logistische groei met G = 800

3.1.4 Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door:

$$N = \frac{2500}{1+5.5 \cdot 0.74^t}$$

waarbij N = aantal vissen, t = tijd

Beredeneer: Wanneer bereiken we het 'verzadigingsniveau'

Als t heel groot is:

- Dan wordt $0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $5.5 \cdot 0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $N \approx 2500$
- $\Rightarrow$ Het meer is 'verzadigd'

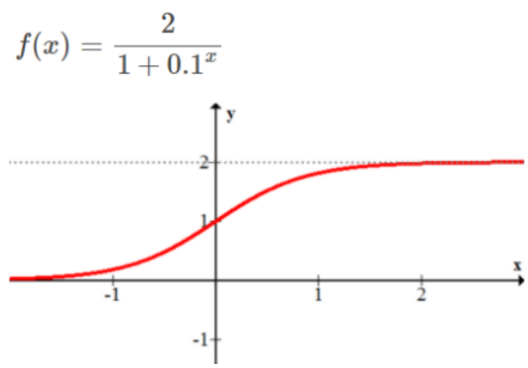
3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie

Definitie 3.2 (Logistische functie) *De wiskundige notatie voor een logistische functie is:*

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \tag{18}$$

met a,b,c constanten waarbij de constante c de belangrijkste is:

c drukt uit wat de maximumwaarde kan zijn

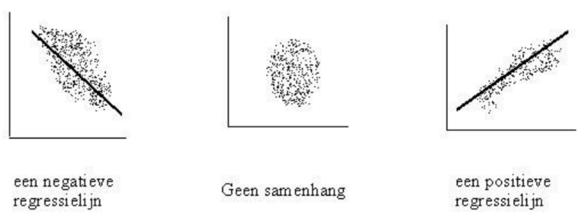


Figuur 21

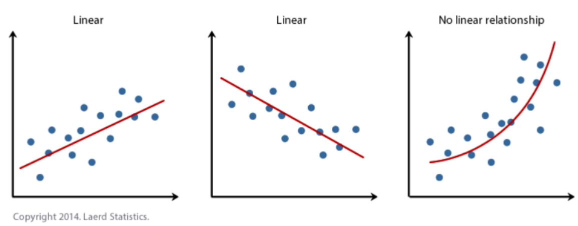
3.2 Regression analysis

Regressieanalyse:

- Is er een (voorspellend) verband tussen 2 variabelen
- Heeft de ene variabele een invloed op de andere variabele



Figuur 22: Regressieanalyse

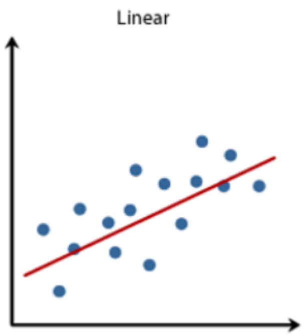


Figuur 23: Lineaire vs niet-lineaire samenhang

3.2.1 Lineair regressiemodel

Enkelvoudige vorm:

- 1 inputwaarde x
- via lineaire functie $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$



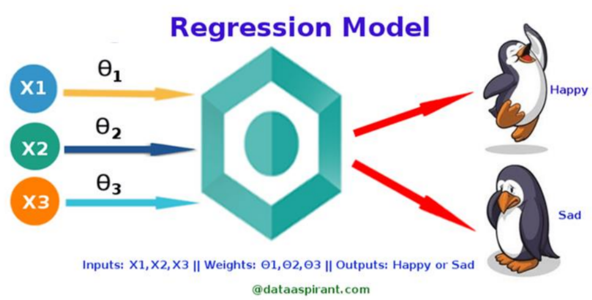
Figuur 24

- Aan de hand van de opgestelde functie doe je een voorspelling
- **Doel:** een zo goed mogelijke lineaire functie opstellen
- $\Rightarrow$ zoektocht naar de beste θ_0 en θ_1

3.2.2 Logistisch regressiemodel

Logistische regressie = **Classificatie-algoritme**

Zoeken naar een model dat uitkomst (2 mogelijkheden) voorspelt mbv inputwaardes. Elke inputwaarde heeft een zeker belang (gewicht).



Figuur 25: 3 inputs met elk een bepaald gewicht, die een uitkomst zoekt (2 mogelijkheden)

Vereenvoudiging:

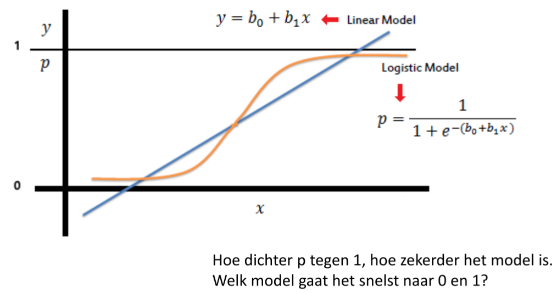
- 1 inputwaarde x
- Logistische functie $p = \frac{1}{1+e^{-(b_0+b_1x)}}$

Uitkomst:

- de persoon slaagt als $h_\theta(x) \geq 0.5$
- de persoon slaagt niet als $h_\theta(x) < 0.5$

Figuur 26: 1 inputwaarde x, met twee uitkomsten

3.2.3 Lineair vs logistisch regressiemodel



Figuur 27: Hoe dichter p tegen 1, hoe zekerder het model is

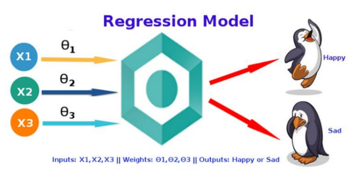
Welk model gaat het snelst naar 0 en 1?

- Het logistische model
- Daarom is het logistische model beter voor classificate: je splitst de groep op in 2

3.2.4 Meerdere inputfactoren

Zelfde redenering:

- Meerdere inputwaardes $x_1, x_2, \ldots$
- Gebruik $\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots$



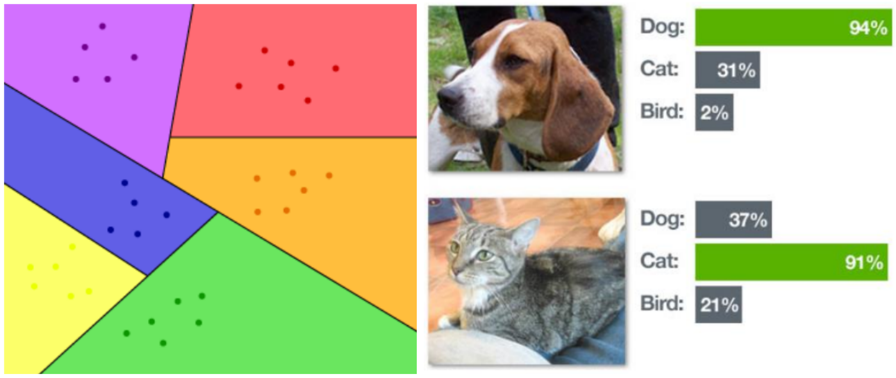
Figuur 28: Regressiemodel met meerdere inputfactoren

3.3 Softmax functie

Doelstelling:

- Model dat in staat is om data te gaan categoriseren
- Hoe?

- $\Rightarrow$ Met behulp van verschillende inputvariabelen en bijhorende parameters



Figuur 29: Categoriseren met de softmax functie

3.3.1 Kansen

Kans dat de toestand tot groep A behoort:

- $\theta_{A,0} + \theta_{A,1}x_1 + \theta_{A,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.01 + 0.1x_1 + 0.1x_2$

Kans dat de toestand tot groep B behoort:

- $\theta_{B,0} + \theta_{B,1}x_1 + \theta_{B,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.1 + 0.2x_1 + 0.2x_2$

Kans dat de toestand tot groep C behoort:

- $\theta_{C,0} + \theta_{C,1}x_1 + \theta_{C,2}x_2$
- Voorbeeld: $0.1 + 0.3x_1 + 0.3x_2$

3.3.2 Model

Het softmax-model berekent de mate van zekerheid dat een toestand tot een bepaalde categorie behoort.

vb: volgende quotiënt drukt uit hoe zeker hij is dat (z1, z2) tot categorie A behoort:

$$\frac{e^{\theta_{A,0}+\theta_{A,1}z_1+\theta_{A,2}z_2}}{e^{\theta_{A,0}+\theta_{A,1}z_1+\theta_{A,2}z_2}+e^{\theta_{B,0}+\theta_{B,1}z_1+\theta_{B,2}z_2}+e^{\theta_{C,0}+\theta_{C,1}z_1+\theta_{C,2}z_2}}$$

(analoog voor categorie B en C: vervang de teller)

$$\frac{e^{0.01+0.1*0.1+0.1*0.5}}{e^{0.01+0.1*0.1+0.1*0.5}+e^{0.1+0.2*0.1+0.2*0.5}+e^{0.1+0.3*0.1+0.3*0.5}} = 0.2945$$

Figuur 30: Betekenis: het model is 29% zeker dat (0.1, 0.5) tot categorie A behoort. Bereken zelf als oefening voor B en C

3.3.3 Wiskundig

Het gebruikte model wordt via volgende wiskundige formule algemeen beschreven:

$$\frac{e^{x_k}}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}} \tag{19}$$

waarbij:

- $x_k = \theta_{k,0} + \theta_{k,1}x_1 + \theta_{k,2}x_2 + \cdots + \theta_{k,m}x_m$
- n = aantal groepen
- m = het aantal meetcriteria

3.4 Logistic regression cost function

Het model:

$$h_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^\tau x}} \tag{20}$$

waarbij:

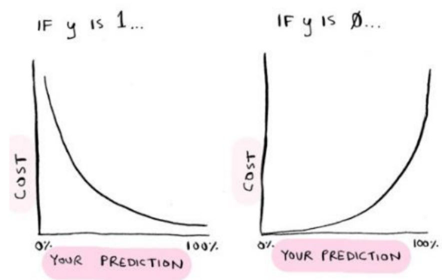
- $\theta^\tau x = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$
- h_θ drukt uit wat de kans is dat voor opgegeven x_1 en x_2 de waarneming tot 1 groep behoort
- x_1 en x_2 zijn de inputwaardes
- θ_1 en θ_2 zijn gewichten (hoe belangrijk is de input)
- **Doel:** vinden van de beste gewichten zodat de voorspelling == de werkelijkheid

3.4.1 Success meten

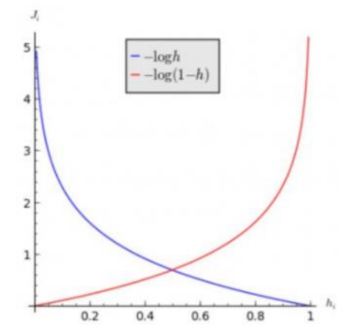
Stel: je maakt een logistisch regressiemodel die bepaalt of een object een groene appel of een tennisbal is.

- Bepalen van de kostenfunctie $J(\theta)$ met als doel deze zo laag mogelijk te brengen
- kost = afwijking tegenover de werkelijke situatie
- werkelijkheid kan 2 situaties zijn:
  - Indien de werkelijkheid een groene appel is $\Rightarrow y = 1$
  - Indien de werkelijkheid géén groene appel is $\Rightarrow y = 0$

Hoe ziet zo'n kostfunctie er dan uit?



Figuur 31: Als $y = 1$ en $y = 0$



Figuur 32

$$\begin{aligned} -\log(h_\theta(x)) \quad & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) \quad & \text{if } y = 0 \end{aligned}$$

Figuur 33

Hoe brengen we 2 mogelijke situaties in 1 functie samen?

(TODO: slide 24)