Advanced Programming & Maths

Tuur Vanhoutte

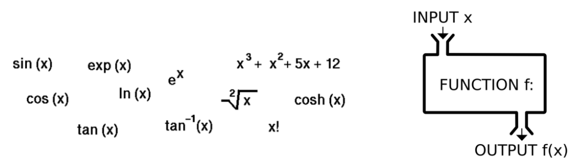
9 februari 2021

Inhoudsopgave

1 Basisfuncties in de wiskunde

1.1 Functies

Definitie 1.1 (Reële functie) *Een reële functie is een relatie in* $\mathbb{R}$ *waarbij elke waarde* x *hoogstens één beeldwaarde* $f(x)$ *heeft*



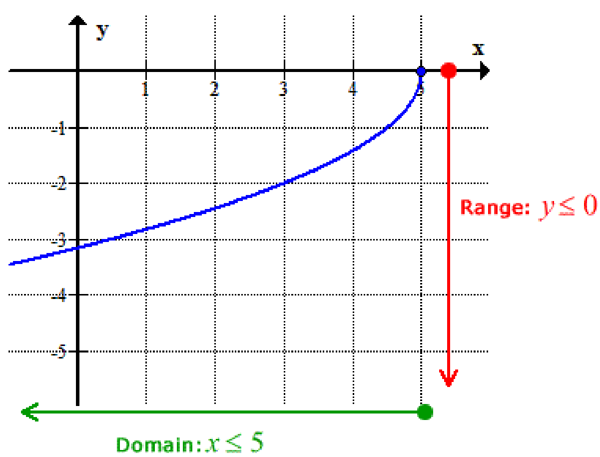
Figuur 1: Voorbeelden reële functies

Definitie 1.2 *Voor elke functie geldt: er bestaat een . . .*

(i) *. . . domein van de functie (domain)*

(ii) *. . . beeld van de functie (range)*

(iii) *. . . functievoorschrift van de functie*

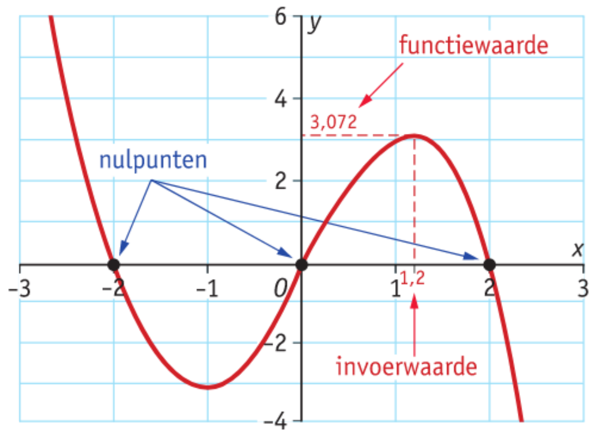


Figuur 2: Domein, bereik, functievoorschrift

$f : \textbf{domein} \rightarrow \textbf{bereik} : x \rightarrow y = f(x)$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = x^3 - 4x$

Definitie 1.3 *Elke functie kan nulpunten hebben.*



Figuur 3: $y = -x^3 + 4x$

Verloop van een functie wordt via een tekenschema verduidelijkt:

x		-2		0		2	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Figuur 4: Tekenschema

1.2 Veelterm en veeltermfuncties

Definitie 1.4 (Veelterm)

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ (a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

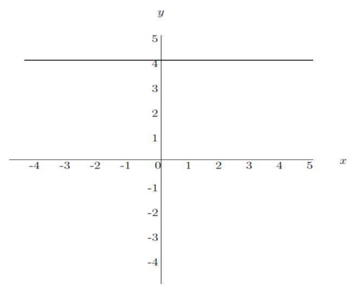
Definitie 1.5 (Veeltermfunctie)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ Graad\ van\ veelterm = n\ als\ a_n \neq 0 \tag{2}$$

1.3 Bijzondere veeltermfuncties

- Constante functie: $f(x) = 4$
- Lineaire functie: $f(x) = 4$
- Tweedegraadsfunctie: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- Derdegraadsfunctie: $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- Exponentiële functie: $f(x) = 2^x$
- Logaritmische functie: $(fx) = log_2(x)$

1.3.1 Constante functie



Figuur 5: $y = 4$

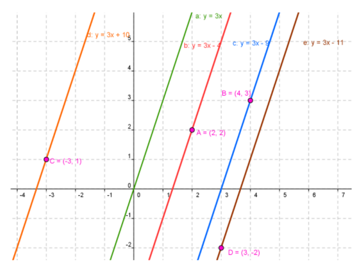
1.3.2 Lineaire functie

Definitie 1.6 (Lineaire functie)

$$f(x) = ax + b \tag{3}$$

Voorbeeld: $f(x) = 3x + 6$

- Betekenis van a: de richtingscoëfficiënt (rico)
- Betekenis van b: het snijpunt met de y-as
- Nulpunt: $f(x) = 0$
  $\Leftrightarrow 3x + 6 = 0$
  $\Leftrightarrow 3x = -6$
  $\Leftrightarrow x = -2$



Figuur 6: Meerdere evenwijdige lineaire functies

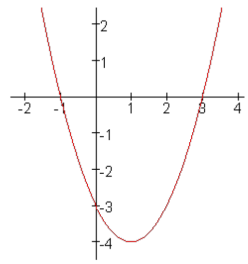
Evenwijdige rechten als: als $a_1 = a_2$

Loodrechte rechten als: als $a_1 \cdot a_2 = -1$

1.3.3 Tweedegraadsfunctie

Definitie 1.7

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \tag{4}$$



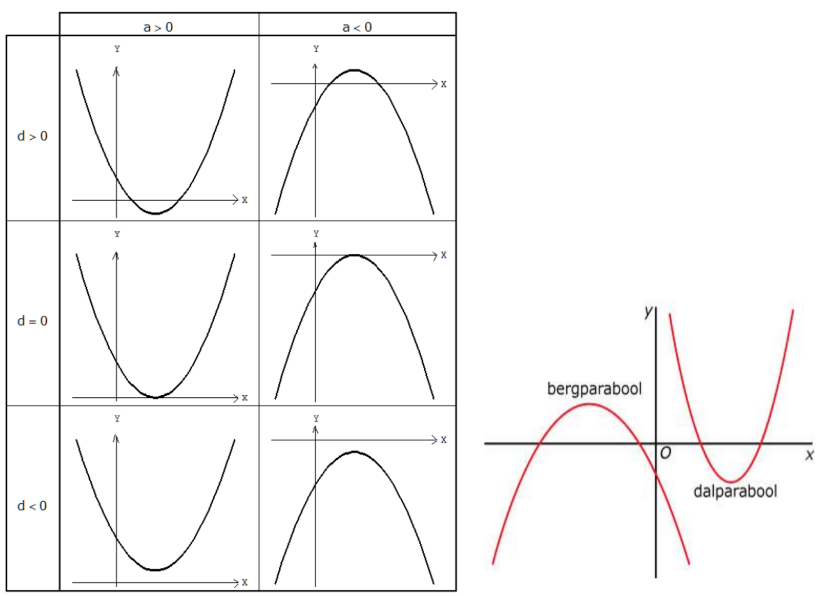
Figuur 7: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- Betekenis van a: positief $\Rightarrow$ dalparabool, negatief $\Rightarrow$ bergparabool
- Nulpunten: via de discriminant berekenen:

Definitie 1.8 (Discriminant) *Bij een tweedegraadsvergelijking is de discriminant:*

$$D = b^2 - 4ac \tag{5}$$

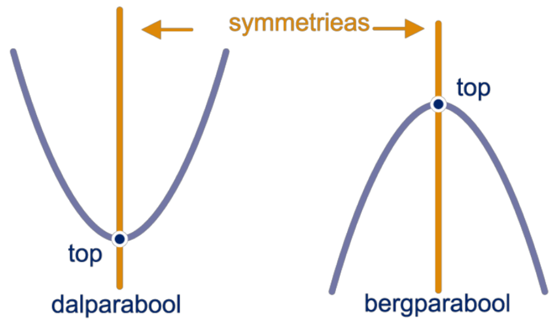
- Geval 1: $D > 0 \Rightarrow$ de functie heeft 2 nulpunten
- Geval 2: $D = 0 \Rightarrow$ de functie heeft 1 nulpunt
- Geval 3: $D < 0 \Rightarrow$ de functie heeft géén nulpunten



Figuur 8: De discriminant toont de nulpunten

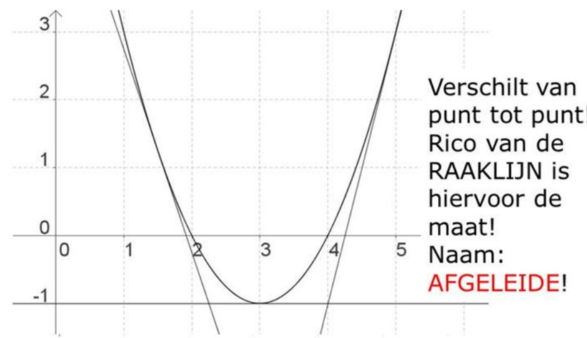
Nulpunten berekenen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{6}$$



Figuur 9: Symmetrieas: $x = \frac{-b}{2a}$

Voorbeeld:



Figuur 10: $y = x^2 - 6x + 8$

1.3.4 Derdegraadsfunctie

Definitie 1.9 (Derdegraadsfunctie)

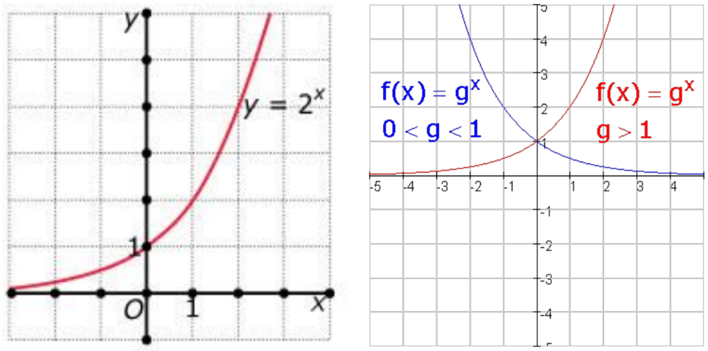
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0) \tag{7}$$

1.3.5 Exponentiële functie

Definitie 1.10 (Exponentiële functie)

$$f(x) = a^{g(x)} \tag{8}$$

Met grondtal $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$



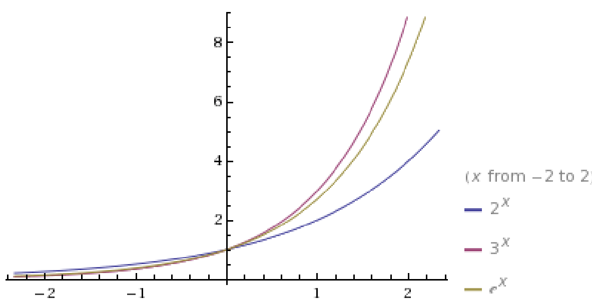
Figuur 11

- Betekenis van a: groeifactor
- Wanneer stijgend?
- Wanneer dalend?
- Nulpunten:
- Vaststelling beeld functie

Definitie 1.11 (Constante van Euler)

$$e \approx 2.718281828 \ldots \quad (9)$$

$f(x) = e^x$ is een bijzondere exponentiële functie



Figuur 12: Verschil tussen 2^x, 3^x en e^x

2 Exponentiële verbanden in data

2.1 Lineaire groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt hetzelfde getal **opgeteld**
- Grafiek is een rechte
- Algemene formule (N = aantal, t = tijd, b: beginhoeveelheid):

$$N = a \cdot t + b \quad (10)$$

t	0	1	2	3	4	5
N	750	780	810	840	870	900

+30 +30 +30 +30 +30

Figuur 13: Lineaire groei

2.2 Exponentiële groei

Kenmerkend:

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal **vermenigvuldigd**
- Grafiek is een exponentiële functie
- **Algemene formule:**

$$N = b \cdot g^t \tag{11}$$

t	0	1	2	3	4
N	1280	1600	2000	2500	3125

x1,25 x1,25 x1,25 x1,25

Figuur 14: Exponentiële groei

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	1998	2002	2006	2010	2014
aantal km	17 600	21 500	26 200	32 000	39 000

Figuur 15: Voorbeeld exponentiële groei met groeifactor ≈ 1.22

2.3 Van groeipercentage naar groeifactor

De toename/afname wordt vaak ook procentueel uitgedrukt

- Een jaarlijkse toename van 14.6%
- Een jaarlijkse afname van 14.6%

Definitie 2.1 (Groeifactor) *De groeifactor is de factor die per tijdseenheid wordt vermenigvuldigd met de vorige waarde.*

2.3.1 Percentage naar factor

$$g = \frac{p + 100}{100}\% \tag{12}$$

100% + 14,6% = 114,6% = 1,146

× 1,146

100% – 14,6% = 85,4% = 0,854

× 0,854

Figuur 16: Van groeipercentage naar groeifactor

2.3.2 Factor naar percentage

0,765 = 76,5% – 100% = -23,5%

Figuur 17: Van groeifactor naar groeipercentage

Figuur 18: Let op: hier gebeuren vaak fouten bij het omrekenen

2.4 Voorbeeld

Een hoeveelheid groeit exponentieel. Na 5u is $N = 82$ en na 12u is $N = 246$.

Stel de formule van N op.

Oplossing

$$N = b \cdot g^t \tag{13}$$

Stap 1: groeifactor berekenen per tijdseenheid:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Na 5u} & \rightarrow & N = 82 \\ \text{Na 12u} & \rightarrow & N = 246\end{array}\right\} \Delta = 7u \rightarrow 164$$

Groeifactor voor 7 uren: $\frac{246}{82} = 3$

Groeifactor voor 1 uur: $3^{1/7} \approx 1.170$

Stap 2: 1 punt nemen waarvan we N weten:

Gekozen punt: $(5, 82)$

$$82 = b \cdot (1.170)^5$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{82}{1.170}^5 \approx 37$$

$$\Leftrightarrow N = 37 \cdot 1.170^t$$

2.5 Belangrijke maten voor exponentiële toename

Definitie 2.2 (Verdubbelingstijd) *De verdubbelingstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid verdubbeld is.*

De verdubbelingstijd t *kan je berekenen met:*

$$g^t = 2 \tag{14}$$

Oefening

De populatie neemt toe met 8.3% per jaar. Bereken de verdubbelingstijd:

$$g^t = 2$$
$$\Leftrightarrow (1.083)^t = 2$$
$$\Leftrightarrow \log(1.083^t) = \log(2)$$
$$\Leftrightarrow t \cdot \log(1.083) = \log(2)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\log(2)}{\log(1.083)}$$
$$\Leftrightarrow t = 8.69\ jaar$$

Definitie 2.3 (Halveringstijd) *De halveringstijd is de nodige tijd tot de hoeveelheid gehalveerd is.*

De halveringstijd t *kan je berekenen met:*

$$g^t = 1/2 \tag{15}$$

2.5.1 Oefening: Combinatie van groeifactoren?

Een hoeveelheid neemt eerst 5 jaar lang met vast percentage (*) toe, om daarna nog 3 jaar met 10% per jaar toe te nemen. Na 8 jaar is de totale hoeveelheid verdubbeld.

(*) Bereken het jaarlijkse groeipercentage in de eerste 5 jaren.

Oplossing

We weten:

- Eerste 5 jaar: toename met vast percentage
- Volgende 3 jaar: toename met 10% (= factor van 1.1)
- Na 8 jaar: hoeveelheid verdubbeld (= factor van 2)

$$g^5 \cdot 1.1^3 = 2$$

We moeten g vinden:

$$\Leftrightarrow g^5 = \frac{2}{1.1^3}$$
$$\Leftrightarrow g = \sqrt[5]{\frac{2}{1.1^3}}$$

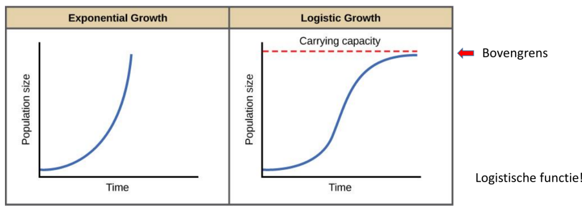
3 Belangrijke functies met betrekking tot machine learning

3.1 Logistische groei

3.1.1 Voorbeeld

Startsituatie: een bos (bv 10km^2) waarin een konijnenepidemie uitbreekt. Boswachter houdt de populatie van de konijnen bij. Wat stelt hij vast?

De groei van de populatie verloopt volgens een typisch patroon (niet exponentieel):



Figuur 19: De rode lijn is de bovengrens

3.1.2 De groei

= de mate van toename

- Hangt af van hoeveel er al zijn tegenover hoeveel er nog bij kunnen
- Heel sterke verandering bij start, op het einde heel kleine verandering
- Hangt dus ook af van de tijd

Definitie 3.1 (De logistische groei) *De logistische groei is de mate van toename, afhankelijk van hoeveel er nog bij kan en hoeveel er al is*

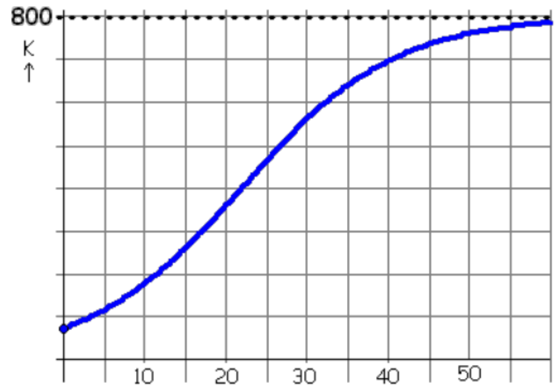
$$\frac{\textit{Hoeveel er nog bij kan}}{\textit{Hoeveel er al is}} = B \cdot g^t \tag{16}$$

- *t = de tijd,*
- *B en g = constanten*

3.1.3 Functievoorschrift

$$y = \frac{G}{1 + B \cdot g^t} \tag{17}$$

- t = de tijd
- B en constanten
- G = bovengrens



Figuur 20: Grafiek logistische groei met G = 800

3.1.4 Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door:

$$N = \frac{2500}{1+5.5\cdot 0.74^t}$$

waarbij N = aantal vissen, t = tijd

Beredeneer: Wanneer bereiken we het 'verzadigingsniveau'

Als t heel groot is:

- Dan wordt $0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $5.5 \cdot 0.74^t \approx 0$
- Dan wordt $N \approx 2500$
- $\Rightarrow$ Het meer is 'verzadigd'

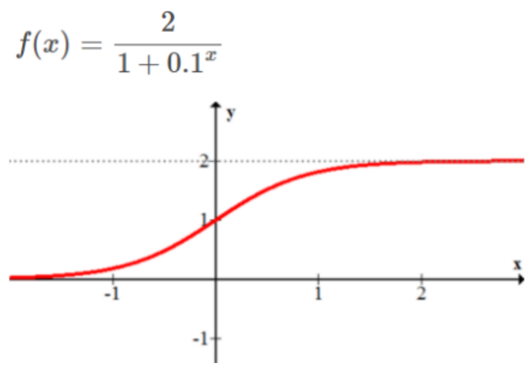
3.1.5 Algemene wiskundige notatie van een logistische functie

Definitie 3.2 (Logistische functie) *De wiskundige notatie voor een logistische functie is:*

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \tag{18}$$

met a,b,c constanten waarbij de constante c de belangrijkste is:

c drukt uit wat de maximumwaarde kan zijn

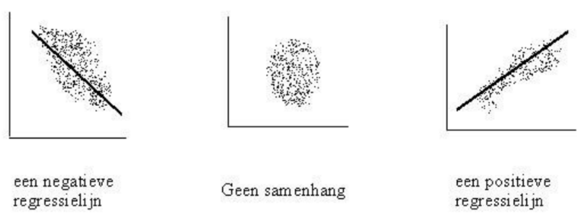


Figuur 21

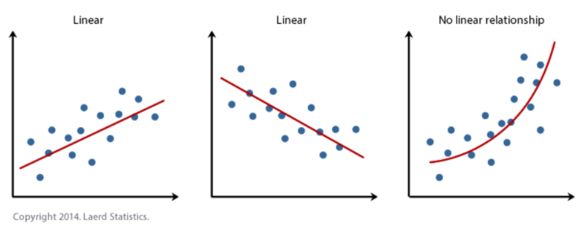
3.2 Regression analysis

Regressieanalyse:

- Is er een (voorspellend) verband tussen 2 variabelen
- Heeft de ene variabele een invloed op de andere variabele



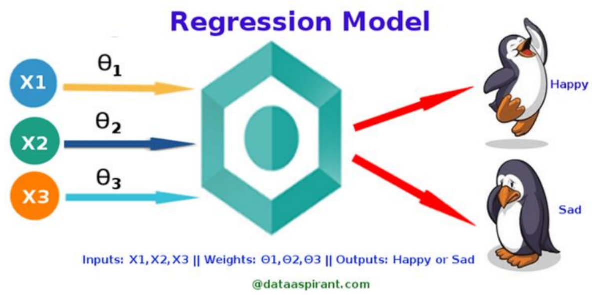
Figuur 22: Regressieanalyse



Figuur 23: Lineaire vs niet-lineaire samenhang

3.2.1 Regressiemodel

Zoeken naar een model dat uitkomst (2 mogelijkheden) voorspelt mbv inputwaardes. Elke inputwaarde heeft een zeker belang (gewicht)



Figuur 24: 3 inputs met elk een bepaald gewicht, die een uitkomst zoekt (2 mogelijkheden)

(TODO slide 12)