

Circuitos Caóticos, Memristores y Complejidad Emergente en Redes Neuronales Celulares

F. Ospina Suarez [†], C. Valenzuela Rodríguez [‡]

30 de Noviembre de 2023

Motivación

El presente trabajo exploratorio tuvo como origen nuestro interés en el área de la neurociencia, a la cual nos aproximamos mediante los modelos de Hodgkin-Huxley [1] y FitzHugh-Nagumo [2][3]. El primer modelo nos condujo a la existencia de un componente electrónico [5] el memristor [6], que exhibe complejidad al ser usado en la unidad de Redes Neuronales Celulares (CNNs) [7][8][9]. El segundo modelo resulta generalizar el oscilador de Van der Pol [4] lo que nos condujo al estudio de circuitos caóticos, allí nos encontramos con que circuitos que emplean memristores resultan ser caóticos [10][11][12]. Fue natural entonces iniciar nuestro trabajo con circuitos caóticos.

Algunos Componentes Electrónicos

Diodo de Chua

El diodo de Chua es un resistir no lineal que hace parte del circuito de Chua que exploraremos mas adelante. Este puede ser descrito por una función lineal continua a trozos, usualmente descrito

$$f(x) = \begin{cases} m_1x + (m_2 - m_1)x_1 & , x \leq x_1 \\ m_2x & , x_1 \leq x \leq x_2 \\ m_3x + (m_2 - m_1)x_2 & , x \geq x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Memristor

El memristor es un elemento electrónico el cual exhibe una relación funcional no-lineal entre la carga eléctrica q y el flujo magnético W . Este se describe mediante la memductancia, en nuestro caso trabajaremos con el memristor

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} a & |\varphi| < 1 \\ b & |\varphi| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

A este se le conoce como un memristor monótonamente-creciente y lineal a trozos, producto

de la función para la carga

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|) \quad (3)$$

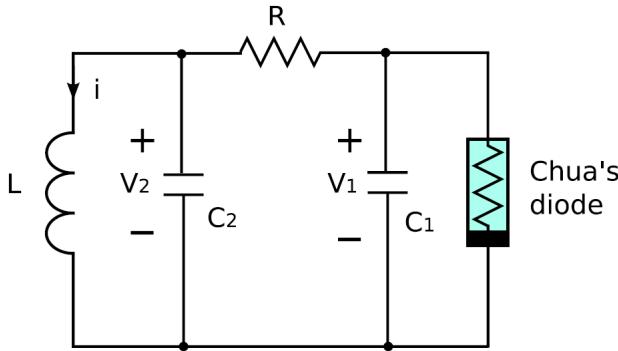
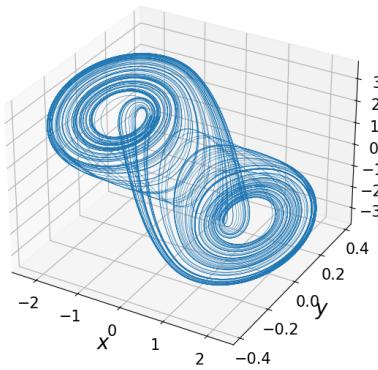
Circuitos Caóticos

En esta sección replicamos principalmente los resultados de dos de los papers previamente mencionados, el trabajo de Itoh y Chua en osciladores basados en memristores [10] y el trabajo de Buscarino, et. al. [12] basado en este ultimo. Para ello se emplea un algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas acoplados y se visualiza el espacio de fase mediante proyecciones en dos y tres dimensiones. Primero exploramos el circuito de Chua y posteriormente circuitos con memristores.

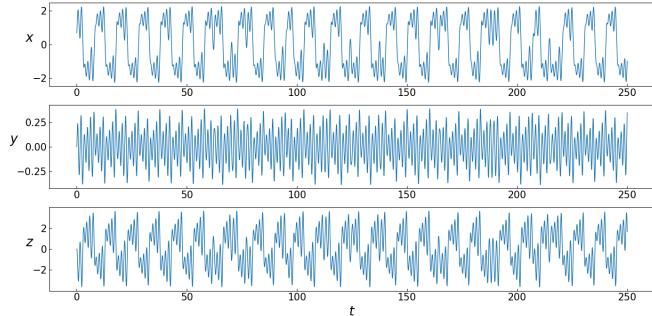
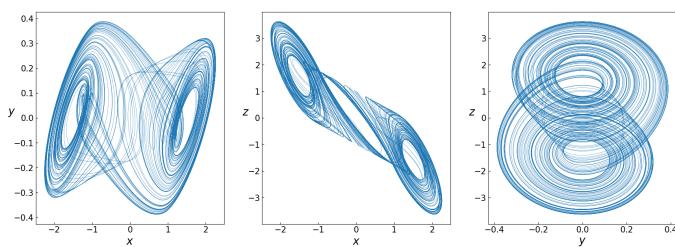
Circuito de Chua

El circuito de Chua esta plasmado en la **Fig. 1** y su principal componente es el diodo de Chua. La dinámica de este sistema puede describirse en términos de variables adimensionales a partir del sistema propuesto en [13] mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha \left[y - x - f(x) \right] \\ \frac{dy}{dt} &= \beta \left[x - y + z \right] \\ \frac{dz}{dt} &= -\gamma y \end{aligned} \quad (4)$$

**Fig. 1.** Circuito de Chua [10]**Fig. 4.** Atractor de Chua obtenido de 4

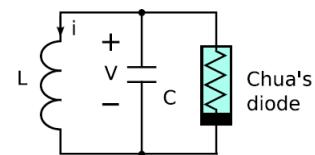
Donde $f(x)$ corresponde a 1 y bajo $\beta = 1$ recuperamos el modelo usual presentada en [14]. Mediante los parámetros ($\alpha = 15.6$, $\beta = 1$, $\gamma = 28$, $m_1 = m_3 = -0.714$, $m_2 = -1.143$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $\epsilon = 0$), sugeridos en [15], y las condiciones iniciales ($x = 0.7$, $y = 0$, $z = 0$) se obtiene el atractor de Chua presentado en la **Fig. 14**

**Fig. 2.** Evolución temporal del sistema 4**Fig. 3.** Proyección del atractor de Chua en los tres posibles planos

Oscilador de Van der Pol mediante un memristor

Omitiremos el estudio del oscilador de Van der Pol y de su versión que emplea un diodo de Chua, presentada en la **Fig. 5**, en su lugar reemplazaremos en este ultimo el diodo de Chua por un memristor activo como se muestra en la **Fig 6**. Las ecuaciones de estado adimensionales que rigen este sistema son

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha \left[-y - x \cdot W(z) + \gamma x \right] \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x \\ \frac{dz}{dt} &= x \end{aligned} \quad (5)$$

**Fig. 5.** Oscilador de Van der Pol empleando un diodo de Chua [10]

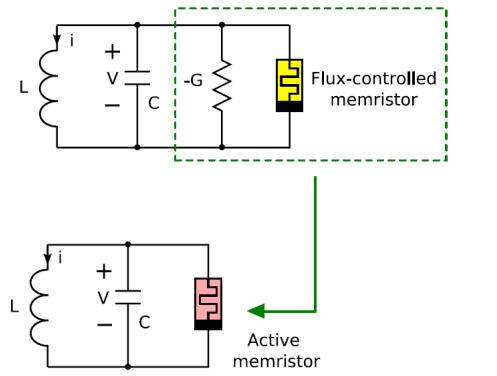


Fig. 6. Oscilador de Van der Pol empleando un memristor activo [10]

Donde W es la memductancia de un memristor monótonamente-creciente y lineal a trozos discutido previamente. Las ecuaciones dimensionales del sistema se encuentran en [10], allí también se sugieren los parámetros ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.3$, $a = 0.1$, $b = 0.5$), con ellos y junto a las condiciones iniciales ($x = 0.25$, $y = 0$, $z = 0$) encontramos uno de los dos atractores que se mencionan en el paper (Fig. 9)

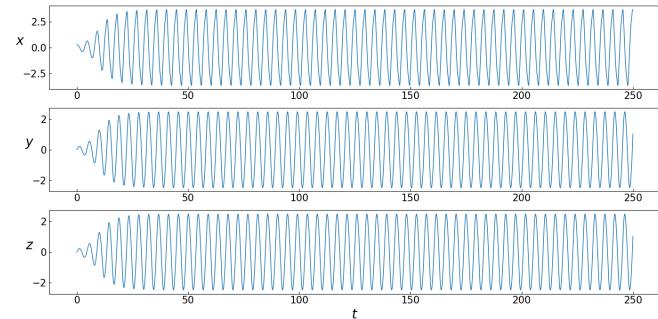


Fig. 7. Evolución temporal del sistema 5

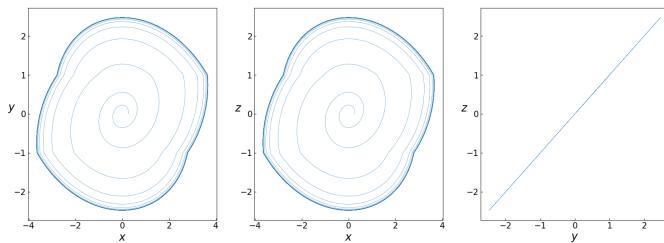


Fig. 8. Proyecciones sobre los planos de la trayectoria de fase

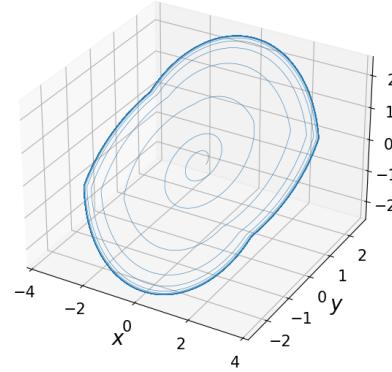


Fig. 9. Atractor encontrado para 5

Oscilador de Chua mediante un memristor

Ahora lidiaremos con un oscilador de Chua (Ver la Fig. 10 para su versión original) que incorpora un memristor en el lugar del diodo de Chua, ilustrada en la Fig. 11. Aplicando las leyes de Kirchhoff y mediante un proceso de adimensionalización obtenemos el sistema propuesto en [10]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha \left[y - x + \xi x - x \cdot W(u) \right] \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y - \gamma z \\ \frac{du}{dt} &= x \end{aligned} \quad (6)$$

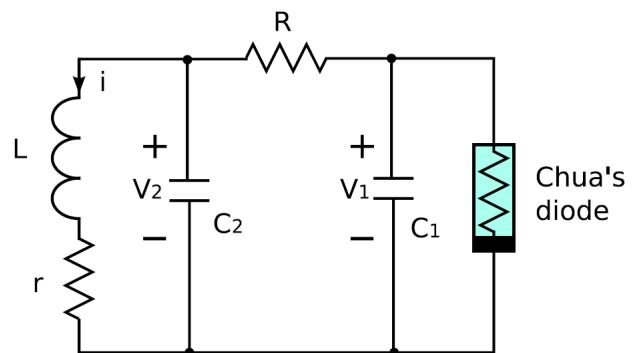


Fig. 10. Oscilador de Chua [10]

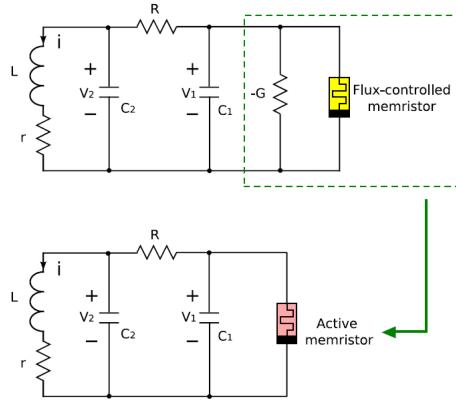


Fig. 11. Oscilador de Chua empleando un memristor activo [10]

Utilizando los parámetros sugeridos ($\alpha = 10$, $\beta = 13$, $\gamma = 0.35$, $\xi = 1.5$, $a = 0.3$, $b = 0.8$) y con las condiciones iniciales ($x = 0.25$, $y = 0$, $z = 0$) logramos replicar la evolución temporal y las proyecciones en dos dimensiones presentadas en [11] y las proyecciones en tres dimensiones expuestas en [10]

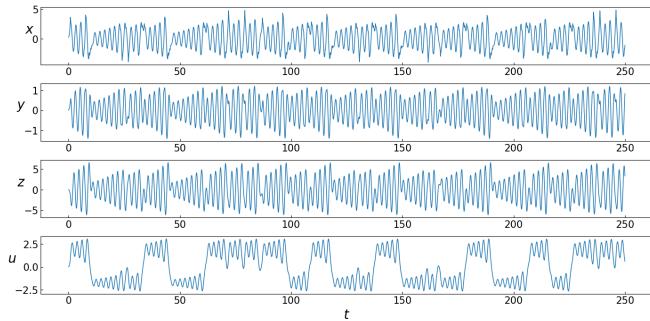


Fig. 12. Evolución temporal del sistema 6

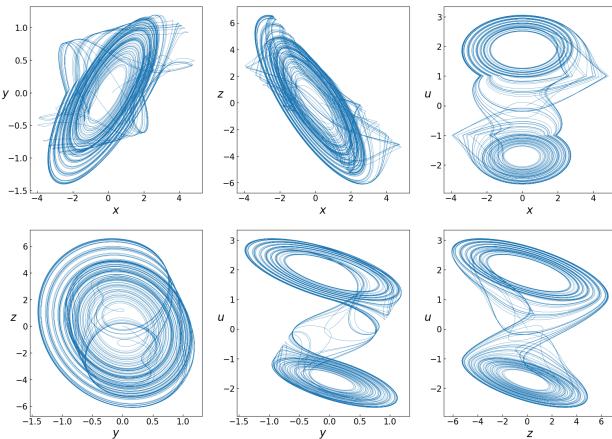


Fig. 13. Proyecciones en dos dimensiones de las trayectoria fasica

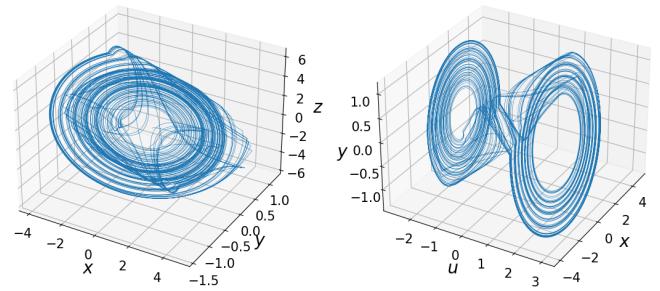


Fig. 14. Proyecciones en tres dimensiones de la trayectoria fasica, donde se observa un atractor

Oscilador Canónico de Chua mediante un Memristor

Al cambiar el diodo de Chua en un oscilador canónico de Chua (Ver Fig. 15) se obtiene un sistema (Ver Fig. 16) regido por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha[y - x \cdot W(u)] \\ \frac{dy}{dt} &= z - x \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y + \gamma z \\ \frac{du}{dt} &= x \end{aligned} \quad (7)$$

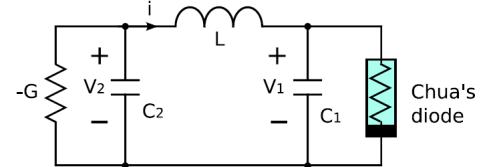


Fig. 6. Canonical Chua's oscillator.

Fig. 15. Oscilador canónico de Chua [10]

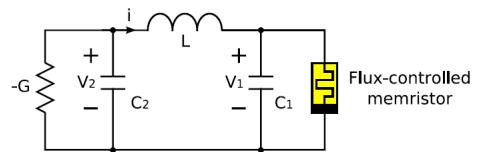


Fig. 16. Oscilador canónico de Chua empleando un memristor controlado por flujo [10]

Utilizando los parámetros sugeridos ($\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.65$, $a = 0.2$, $b = 10$) y con las condiciones

iniciales ($x = 0.25$, $y = 0$, $z = 0$) logramos replicar la evolución temporal y las proyecciones en dos dimensiones presentadas en [11] y las proyecciones en tres dimensiones expuestas en [10]

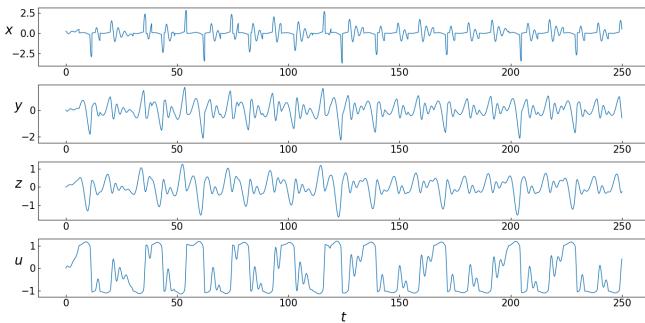


Fig. 17. Evolución temporal del sistema 7

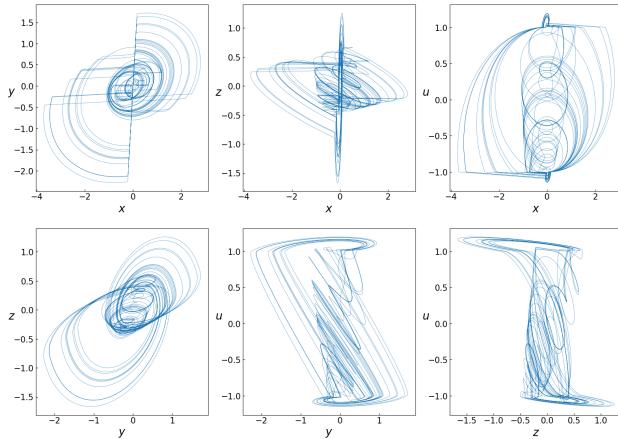


Fig. 18. Proyecciones en dos dimensiones de las trayectoria fasica

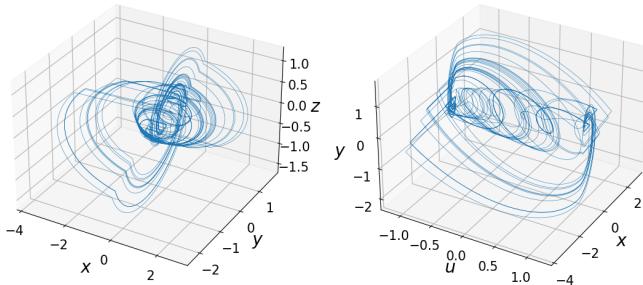


Fig. 19. Proyecciones en tres dimensiones de la trayectoria fasica, donde se observa un atractor

Removiendo la resistencia en paralelo con el capacitor obtenemos el circuito de la **Fig. 20**. La dinámica del sistema esta descrita por **8**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha \left[y - x \cdot W(u) \right] \\ \frac{dy}{dt} &= -\xi(x + z) \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y \\ \frac{du}{dt} &= x \end{aligned} \quad (8)$$

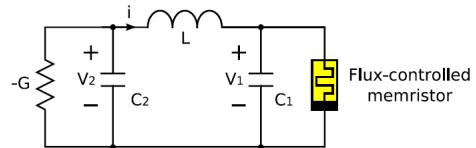


Fig. 20. Oscilador canónico de Chua empleando un memristor controlado por flujo [10]

Utilizando los parámetros sugeridos ($\alpha = 4.2$, $\beta = -20$, $\xi = -1$, $a = -2$, $b = 9$) y con las condiciones iniciales ($x = 0.25$, $y = 0$, $z = 0$) obtenemos la evolución temporal y las proyecciones en dos dimensiones del sistema y replicamos las proyecciones en tres dimensiones expuestas en [10]

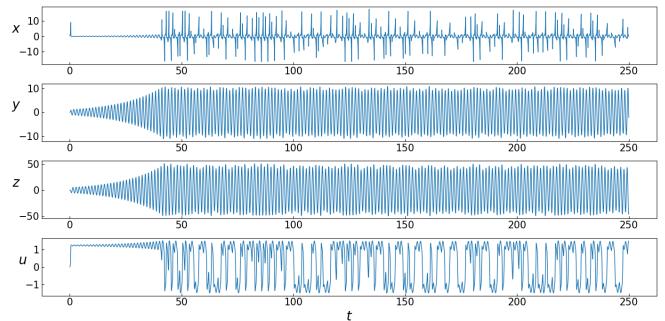


Fig. 21. Evolución temporal del sistema 6

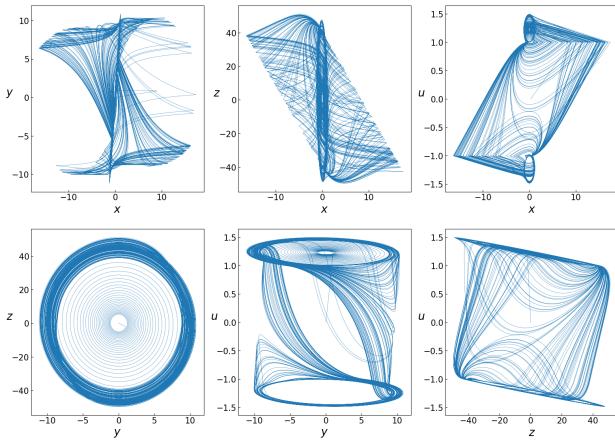


Fig. 22. Proyecciones en dos dimensiones de las trayectorias fasicas

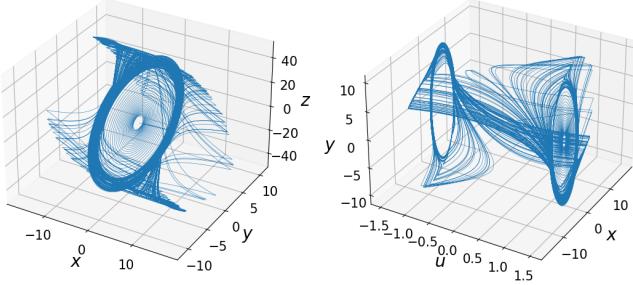


Fig. 23. Proyecciones en tres dimensiones de la trayectoria fasica, donde se observa un atractor

Complejidad Emergente en Redes Celulares Neuronales

Una vez explorados los circuitos caóticos quisimos replicar los resultados de [7][8][9], donde utilizan como célula el oscilador de Van der Pol de la Fig. 5. A partir de la forma mas general de un sistema de acción difusión de dos capas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 x \\ \nabla^2 y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se plantea un sistema donde los componentes de reacción están dados por las funciones que definen el sistema 5, pero se escribe explícitamente una ecuación para z para no perder de vista el comportamiento de este basado en las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D_{11} \nabla^2 x + D_{12} \nabla^2 y + \alpha \left[-y - xW(z) + \gamma x \right] \\ \dot{y} &= D_{21} \nabla^2 x + D_{22} \nabla^2 y + \beta x \\ \dot{z} &= x \end{aligned} \quad (10)$$

El primer fenómeno a explorar es el de las llamadas "autowaves", para que nuestro sistema genere este comportamiento es necesario a su vez que sea capaz de exhibir "slow-fast dynamics" [16][17] característica de varios sistemas biológicos. Afortunadamente este puede obtener mediante los parámetros ($\alpha = 10$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.3$, $a = 0.1$, $b = 0.5$), en la Fig. ?? puede observarse la evolución temporal del sistema bajo las condiciones iniciales ($x = 0.25$, $y = 0$, $z = 0$).

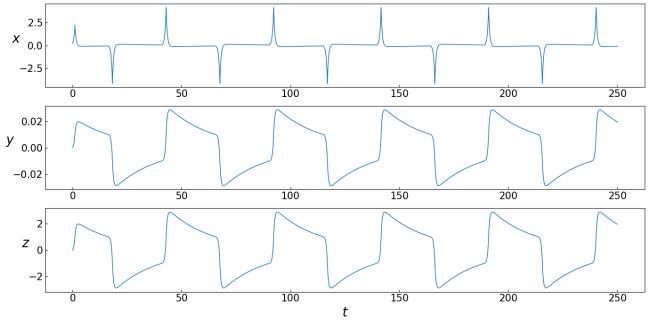
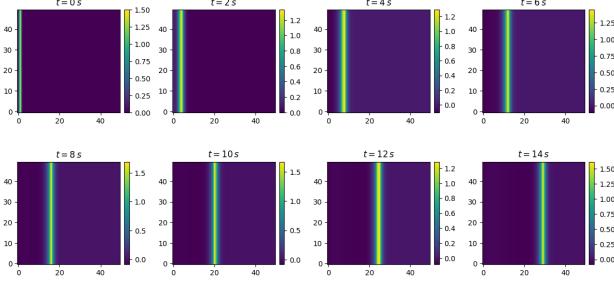
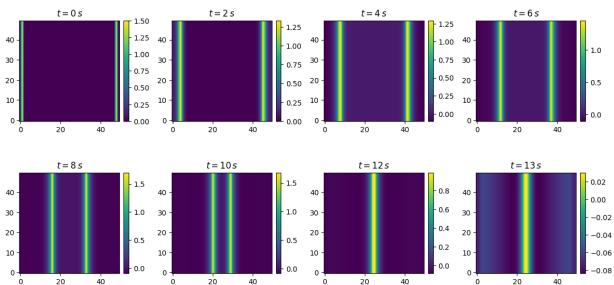
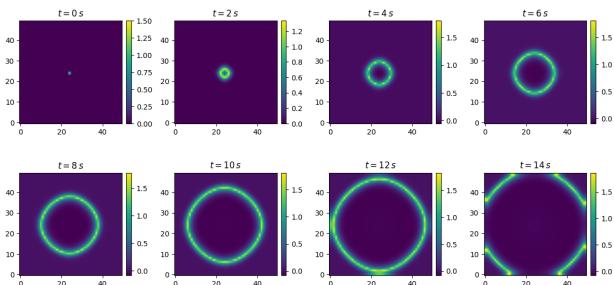
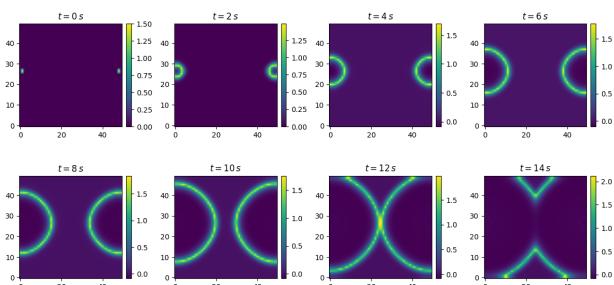


Fig. 24. El oscilador de Van der Pol puede exhibir dinámica "slow-fast" 6

Siguiendo [7] simulamos el caso ($D_{12} = D_{21} = D_{22} = 0$, $\alpha = 10$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.3$, $a = 0.1$, $b = 0.5$) con condiciones Neumann homogéneas en las fronteras, mediante las formulas recursivas 11 e imponiendo la condición $x_{ij} = 1.5$ de manera apropiada para replicar los resultados deseados. Observe que el laplaciano empleado es totalmente local y no emplea términos como dx o dy , la naturaleza de esta elección no es del toda clara para nosotros por el momento.

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{n+1} &= x_{i,j}^n + dt D_{11} \nabla^2 x \\ &\quad + \alpha dt \left[-y_{i,j}^n - x_{i,j}^n \cdot W(Z_{i,j}^n) + \gamma x_{i,j}^n \right] \\ y_{i,j}^{n+1} &= y_{i,j}^n + \beta dt x_{i,j}^n \\ z_{i,j}^{n+1} &= z_{i,j}^n + dt x_{i,j}^n \end{aligned} \quad (11)$$

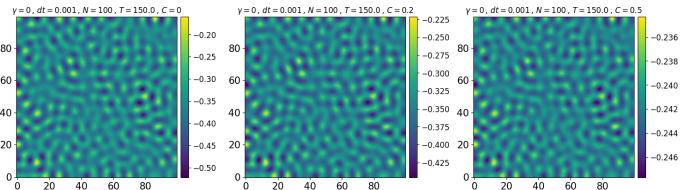
**Fig. 25.** Onda plana viajera**Fig. 26.** Ondas planas viajeras paralelas. No se replica la aniquilación deseada, pero no difiere mucho de esta**Fig. 27.** Onda esférica viajera**Fig. 28.** Aniquilación de dos ondas esféricas viajeras

Finalmente si no despreciamos ninguno de los coeficientes de difusión D podemos satisfacer las condiciones para la inestabilidad de Turing. Seguiremos

los casos estudiados en [9], donde se utiliza la dependencia lineal entre \dot{y} y \dot{z} para obtener un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{n+1} &= X_{i,j}^n + dt \left[D_{1,1} \nabla^2 x + D_{1,2} \nabla^2 y \right] \\ &+ \alpha dt \left[-y_{i,j}^n - x_{i,j}^n \cdot W \left(\frac{Y_{i,j}^n + C}{\beta} \right) + \gamma X_{i,j}^n \right] \quad (12) \\ y_{i,j}^{n+1} &= Y_{i,j}^n + dt \left[D_{2,1} \nabla^2 x + D_{2,2} \nabla^2 y \right] + \beta dt x_{i,j}^n \end{aligned}$$

El paper utiliza los valores ($D_{11}=1$, $D_{12}=4$, $D_{21}=6$, $D_{22}=26$, $\alpha=1$, $\beta=0.8$, $a=-0.01$, $b=-0.61$) Lamentablemente en el paper no se especifica el valor de γ y por alguna razón hay un cambio de signo en el termino $xW(y/\beta + C)$. En parte debido a esto no fuimos capaces de reproducir los resultados, nuestras simulaciones se encuentran a continuación

**Fig. 29.** Se observan características usuales de los patrones de Turing, pero no se replican los resultados del paper o siquiera la alta dependencia del parametro C

References

- [1] Hodgkin A.L., Huxley, A.F. (1952). 'A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve'. *The Journal of physiology.* **117**(4), pp. 500–544.
- [2] FitzHugh R. (1961). 'Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane'. *Biophysical Journal.* **1**(6), pp. 445–466.
- [3] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. (1962). 'An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon'. *Proceedings of the IRE.* **50**(10), pp. 2061–2070.
- [4] Van der Pol B. (1920). 'A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations', *Radio Review.* **1**, pp. 701-710 and 754-762 .

- [5] Chua L.O., Sbitnev V., Kim H. (2012). 'Hodgkin-Huxley axon is made of memristors'. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **22**(3), 1230011
- [6] Chua L.O. (1971). 'Memristor - The missing circuit element'. *IEEE Transactions on Circuit Theory*. **18**(5), pp. 507–519
- [7] Pham V.T., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. (2012). 'Autowaves in memristive cellular neural networks'. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **22**(8), 1230027
- [8] Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Chua L.O. (2016). 'Turing patterns in memristive cellular nonlinear networks'. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. **63**(8), pp. 1222–1230
- [9] Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Pham VT. (2018). 'A Memristor-Based Cell for Complexity'. In: Corinto F., Torcini A. (eds) *Nonlinear Dynamics in Computational Neuroscience*. PoliTO Springer Series. pp. 133–141
- [10] Itoh M., Chua L.O. (2008). 'Memristor oscillators'. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **18**(11), pp. 3183–3206
- [11] Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L. V., Sciuto G. (2012). 'Memristive chaotic circuits based on cellular nonlinear networks'. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **22**(3), 1250070
- [12] Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. (2012). 'A chaotic circuit based on Hewlett-Packard memristor'. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. **22**(2), 023136
- [13] Matsumoto T. (1984) 'A chaotic attractor from Chua's circuit'. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. **31**(12), pp. 1055-1058
- [14] Chua L.O. (1994) 'Chua's Circuit: An overview ten years later". *Journal of Circuits, Systems and Computers*. **4**(2), pp. 117-159
- [15] 'Chua's circuit simulator'. Disponible en: <http://www.chuacircuits.com/sim.php>.