

## **Вопросы к экзамену по дисциплине «Специальные математические методы и функции»**

1. Линейное пространство: операции и аксиомы к ним. Свойства линейных пространств. Линейная (не)зависимость элементов. Базис и размерность линейного пространства.
2. Скалярное произведение элементов. Евклидовы пространства.
3. Норма элемента. Нормированные пространства. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта (ортонормированный базис).
4. Метрические пространства. Полнота метрического пространства.
5. Линейные операторы: определение, операции. Ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и значения линейного оператора.
6. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье (для  $2\pi$  и  $2l$ -периодических функций, четных и нечетных функций). Теорема Дирихле. Ряд Фурье в комплексной форме. Интеграл Фурье. Многочлены Лежандра.
7. Уравнения математической физики: основные определения. Методы Даламбера и Фурье.
8. Функции  $\Gamma(x)$  и  $B(x, y)$ : определения и свойства.
9. Уравнение Бесселя, функции Бесселя первого и второго рода. Свойства функций Бесселя
10. Решетчатые функции.  $Z$  –преобразование и его свойства. Решение разностных уравнений с помощью  $Z$  –преобразования
11. Определение функционала. Простейшая задача вариационного исчисления. Лемма Эйлера. Уравнение Эйлера и его частные случаи.
12. Оригинал и его преобразование Лапласа. Свойства преобразования Лапласа. Приложения операционного исчисления при решении дифференциальных уравнений.

### **Вопросы, которые необходимо знать с доказательством:**

1. Утверждение о существовании и построении ортонормированного базиса в нормированном пространстве
2. Вывод формулы для характеристического уравнения линейного оператора
3. Ортогональность системы функций  $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx, \dots\}$
4. Формулы для коэффициентов ряда Фурье

5. Комплексная форма ряда Фурье
6. Интеграл Фурье
7. Метод Фурье для решения уравнения свободных колебаний струны
8. Формула понижения для  $\Gamma(x)$
9. Дифференцируемость  $\Gamma(x)$
10. Симметричность  $B(x, y)$
11. Связь между  $\Gamma(x)$  и  $B(x, y)$
12. Связь между функциями Бесселя  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$
13. Вычисление  $J_{\frac{1}{2}}(x)$
14. Дифференцирование функций Бесселя
15. Рекуррентная формула для функций Бесселя
16. Дифференцирование  $Z$  –преобразования
17. Вывод уравнения Эйлера
18. Свойства изображения Лапласа

**Задачи, которые необходимо уметь решать:**

1. Проверка операций и 8-ми условий линейного пространства
2. Проверка линейной (не)зависимости элементов
3. Разложение элемента по базису (векторы, матрицы, многочлены)
4. Проверка того, является ли пространство евклидовым (условия скалярного произведения)
5. Построение ортонормированного базиса
6. Проверка, является ли отображение линейным оператором и запись его матрицы в данном базисе
7. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора
8. Построение ряда Фурье для  $2\pi$  и  $2l$ -периодических функций, четных и нечетных функций. Построение графиков функций  $f(x)$  и  $S(x)$ .
9. Ряд Фурье в комплексной форме
10. Интеграл Фурье
11. Разложение функций по многочленам Лежандра
12. Решение уравнений свободных колебаний струны методом Фурье

- ~~13. Вычисление интегралов с помощью  $F(x)$  и  $B(x, y)$~~
- ~~14. Нахождение  $Z$ -преобразования для решетчатой функции~~
- ~~15. Восстановление решетчатой функции по ее  $Z$ -преобразованию~~
- ~~16. Решение разностных уравнений с помощью  $Z$ -преобразования~~
- ~~17. Решение простейшей задачи вариационного исчисления (общий и частные случаи уравнения Эйлера)~~
- ~~18. Нахождение изображения Лапласа для данного оригинала~~
- ~~19. Восстановление оригинала по его изображению~~
- ~~20. Решение дифференциальных уравнений с помощью изображения Лапласа~~