

# Лабораторная работа №1

## Преобразование Фурье

### 1. Цель работы

Изучение преобразования Фурье и его основных свойств, а также методики получения быстрого преобразования Фурье (БПФ).

### 2. Теоретические сведения

#### Ортогональные функции

Для лучшего понимания вопроса о рядах Фурье дадим определение ортогональным функциям. Множество непрерывных функций действительного переменного  $\{U_n(t)\} = \{U_0(t), U_1(t), \dots\}$  называется **ортогональным** на интервале  $[t_0, t_0 + T]$ , если

$$\int_{t_0}^{t_0+T} U_m(t) U_n(t) dt = \begin{cases} c, & \forall m = n, \\ 0, & \forall m \neq n \end{cases} \quad (1.1)$$

При  $c = 1$  множество  $\{U_n(t)\}$  называется **ортонормированным**.

#### Ряд Фурье

Для теории формирования и обработки сигнала особое значение имеет возможность разложения заданного в виде функции сигнала по различным ортогональным системам функций.

Впервые в 1807 году французский математик и физик Жан Батист Жозеф **Фурье показал, что любую произвольную функцию  $x(t)$  можно представить в виде бесконечной суммы синусных и косинусных членов:**

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad (1.2)$$

где  $\omega_0$  (рад/с) – основная угловая частота, которая связана с периодом  $T$  функции соотношением  $T = 2\pi/\omega_0$ . Частоты  $n\omega_0$  называют гармониками, так как они кратны основной частоте  $\omega_0$ . В данном случае речь идет о системе ортогональных функций вида  $\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$ .

Коэффициенты  $\{a_0, a_n, b_n\}$  из формулы (1.2) можно вычислить с учетом ортогональности множества функций  $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$  на периоде  $T$ :

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_T \cos n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0, \forall m, n \quad (1.4)$$

$$\int_T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.5)$$

С учетом этих соотношений:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt; \quad (1.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt; \quad (1.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt. \quad (1.8)$$

Раздел математики, устанавливающий соотношение между функцией  $x(t)$  и коэффициентами  $a_n$  и  $b_n$ , называется гармоническим анализом, а представление (1.2) – рядом Фурье.

Компоненты ряда Фурье называются гармониками. Любая четная функция может быть разложена в ряд Фурье, состоящий из косинусов, а любая нечетная функция раскладывается в ряд из синусов. Для некоторых функций ряд Фурье может состоять лишь из нечетных гармоник.

В целом, **любая полная система ортогональных функций может быть применена для разложения в ряды, которые соответствуют рядам Фурье.** Например, часто используется разложение в ряды по функциям Уолша, Хаара, Лагерра, Бесселя и т.д.

### ***Семейство преобразований Фурье***

**Преобразование Фурье (Fourier transform) – это разложение функций на синусоиды** (далее косинусные функции также будем называть синусоидами, т.к. они отличаются от «настоящих» синусоид только фазой). Анализ Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в цифровой обработке сигналов и изображений (ЦОСиИ). По сути, **преобразование Фурье (ПФ) позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области.** Обратно, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование Фурье позволяет определить соответствующий сигнал во временной области.

Семейство преобразований Фурье (преобразование Фурье, ряды Фурье, дискретные ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье) представлено на рис. 1.1 – 1.4.

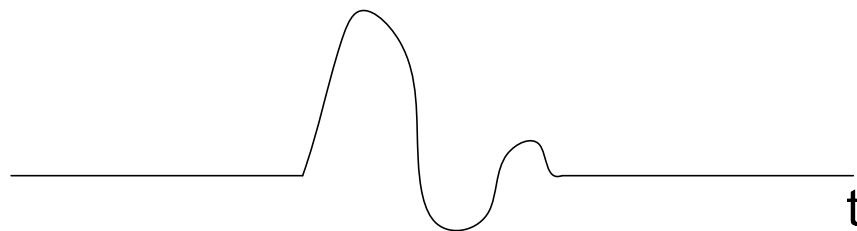


Рис. 1.1. Преобразование Фурье: сигнал непрерывный и аperiodический

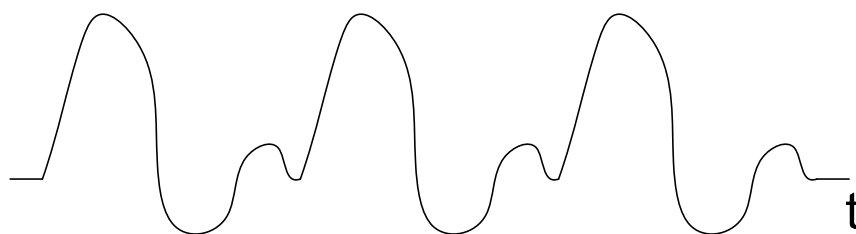


Рис. 1.2. Ряды Фурье: сигнал непрерывный и периодический

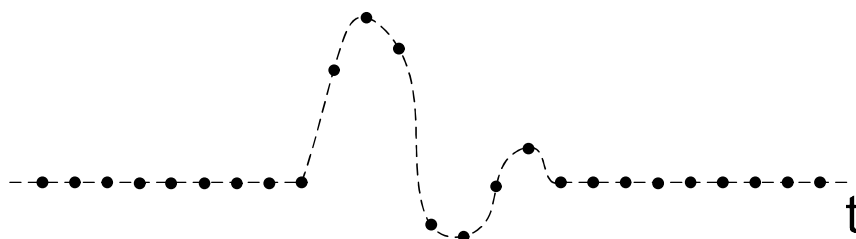


Рис. 1.3. Дискретные ряды Фурье: сигнал дискретный и аperiodический

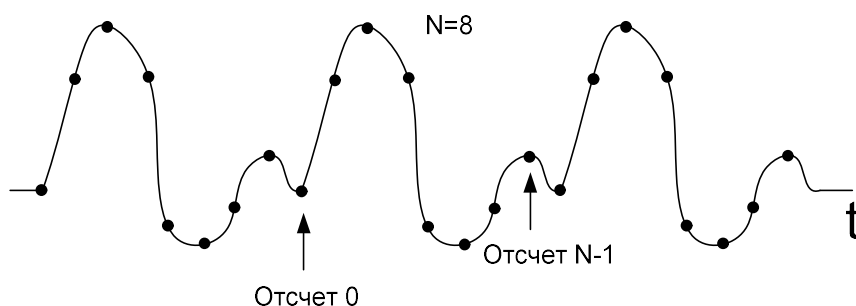


Рис. 1.4. Дискретное преобразование Фурье:  
(дискретные ряды Фурье) сигнал дискретный и периодический

### ***Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)***

Из описанного семейства преобразований к цифровой обработке сигналов и изображений имеет отношение дискретное преобразование Фурье, которое оперирует дискретной по времени выборкой периодического сигнала во временной области. Для того, чтобы быть представленным в виде суммы синусоид, сигнал должен быть периодическим. Но в качестве набора входных данных для ДПФ доступно только конечное число отсчетов ( $N$ ) рис. 1.

Основная идея ДПФ ни чем не отличается от ПФ (см. рис. 1.5).

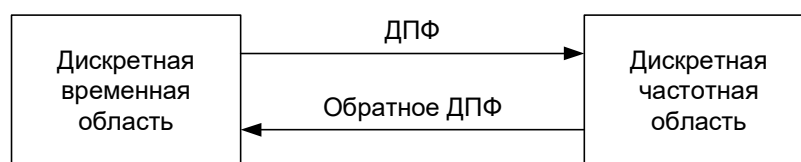


Рис. 1.5. Основная идея ДПФ

Для получения представления  $x(t)$  (1.2) рядом Фурье в комплексной форме необходимо использовать соотношения в виде формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}\cos n\omega_0 t &= \frac{1}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}); \\ \sin n\omega_0 t &= \frac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}); \quad i = \sqrt{-1}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) - ib_n(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})\} = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 t} + (a_n + ib_n)e^{-in\omega_0 t}\}\end{aligned}\quad (1.10)$$

Введем коэффициент

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{T} \int_T x(t) [\cos n\omega_0 t - i \sin n\omega_0 t] dt \quad \text{или} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt; \\ C_{-n} &= C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).\end{aligned}\quad (1.11)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n e^{in\omega_0 t} + C_n^* e^{-in\omega_0 t}] = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}; \\ C_0 &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = a_0; \\ x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Таким образом, если  $\{X(m)\}$  означает последовательность  $X(m)$  конечных действительных или комплексных чисел, где  $m = \overline{0, N-1}$ , то дискретное преобразование Фурье этой последовательности определяется как

$$C_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{km}, \quad \text{где } k = \overline{0, N-1}, \quad W = e^{-i2\pi/N}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (1.13)$$

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} C_x(k) W^{-km}. \quad (1.14)$$

Выражения (1.13), (1.14) составляют *пару преобразований Фурье*.

Функции  $W^{km}$  являются  $N$ -периодическими, т.е.  $W^{km} = W^{(k+N)m} = W^{k(m+N)}$ .

Следовательно, последовательности  $\{C_x(k)\}$ ,  $\{X(m)\}$  также являются  $N$ -периодическими, т.е.

$$X(\pm m) = X(SN \pm m);$$

$$C_x(\pm k) = C_x(SN \pm k).$$

Рассмотрим **основные свойства дискретного преобразования Фурье:**

а) *теорема линейности*: дискретное преобразование Фурье является линейным, т.е. если  $X(m) \leftrightarrow C_x(k)$ ,  $Y(m) \leftrightarrow C_y(k)$  и  $Z(m) = aX(m) + bY(m)$ , то  $C_z(k) = aC_x(k) + bC_y(k)$ ;

б) *теорема комплексной сопряженности*: если  $\{X(m)\} = \{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  – такая последовательность действительных чисел, что  $N/2$  – целое число и  $X(m) \leftrightarrow C_x(k)$ , то

$$C_x\left(\frac{N}{2} + l\right) = \overline{C_x\left(\frac{N}{2} - l\right)}, \forall l = \overline{0, N/2}. \quad (1.15)$$

Из (1.13) следует, что  $C_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{km}$ , где  $W = e^{-i2\pi/N}$ .

Тогда, подставляя вместо  $k - (N/2 + l)$ , будем иметь

$$C_x\left(\frac{N}{2} + l\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{(N/2+l)m} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{-(N/2-l)m} W^{Nm} = \overline{C_x\left(\frac{N}{2} - l\right)},$$

$$\text{т.к. } W^{Nm} = e^{-i2\pi m} \equiv -1.$$

в) *теорема сдвига*: если  $Z(m) \leftrightarrow C_z(k)$  и  $Z(m) = X(m+h)$ ,  $h = \overline{0, N-1}$ , то

$$C_z(k) = W^{-kh} C_x(k). \quad (1.16)$$

Доказательство:

$$Z(m) \leftrightarrow C_z(k), \text{ т.е. } C_z(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Z(m) W^{km}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

С учетом подстановки  $Z(m) = X(m+h)$ , будем иметь  $C_z(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m+h) W^{km}$ .

Осуществляя замену переменных  $m+h=r$ , указанное соотношение будет иметь вид  $C_z(k) = W^{-kh} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{r=h}^{N+h-1} X(r) W^{kr} \right\}$ .

Так как

$$\sum_{m=p}^q X(m) W^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{km},$$

$$\sum_{m=p}^q C_x(k) W^{-km} = \sum_{m=0}^{N-1} C_x(k) W^{-km}, \text{ когда } p \text{ и } q \text{ удовлетворяют условию}$$

$$|p-q| = N-1, \text{ то } C_z(k) = W^{-kh} C_x(k).$$

Аналогично при  $Z(m) = X(m-h)$ ,  $C_z(k) = W^{kh} C_x(k)$ .

**Можно выделить следующие области применения ДПФ:**

- цифровой спектральный анализ
  - анализаторы спектра
  - обработка речи
  - обработка изображений
  - распознавание образов
- проектирование фильтров
  - вычисление импульсной характеристики по частотной
  - вычисление частотной характеристики по импульсной
- быстрое преобразование Фурье (БПФ) – простой алгоритм для эффективного вычисления ДПФ.

### ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ)

- Периодический сигнал может быть разложен на сумму выбранных должным образом косинусоидальных и синусоидальных функций (Жан Батист Жозеф Фурье, 1807).
- ДПФ работает с конечным числом ( $N$ ) оцифрованных по времени отсчетов  $X(m)$ . Когда эти группы отсчетов повторяются, они становятся периодическими с точки зрения преобразования.
- Комплексный спектральный выход ДПФ  $S(k)$  является результатом свертки входных отсчетов с базисными функциями синуса и косинуса.

### Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Быстрое преобразование Фурье (FFT) является не более, чем алгоритмом для ускоренного вычисления ДПФ путем сокращения требуемого числа операций умножения и сложения. Данное преобразование было предложено в 1960-ых годах. Алгоритм быстрого преобразования Фурье значительно сокращает количество арифметических операций и объем памяти, необходимой для вычисления ДПФ. ДПФ может быть сильно упрощено, если использовать свойства симметрии и периодичности коэффициентов поворота.

При вычислении  $N$ -точечного ДПФ требуется  $N^2$  вычислений с комплексными числами, а при реализации  $N$ -точечного БПФ  $(N/2)\log_2(N)$  вычислений с комплексными числами. Вычислительная эффективность БПФ по сравнению с ДПФ становится весьма существенной, когда количество точек БПФ увеличивается до нескольких тысяч (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Эффективность БПФ

$N$	Умножений при ДПФ	Умножений при БПФ	Эффективность БПФ
256	65 536	1 024	64 : 1
512	262 144	2 304	114 : 1
1 024	1 048 576	5 120	205 : 1
2 048	4 194 304	11 264	372 : 1
4 096	16 777 216	24 576	683 : 1

Если необходимо рассчитать только несколько точек спектра, ДПФ может быть более эффективным. Вычисление одного выходного отсчета спектра с использованием ДПФ требует только  $N$  умножений с комплексными числами.

Мы будем предполагать далее, что  $N=2^n$ . При этом общность не теряется, так как  $N$  выбирается достаточно большим для того, чтобы удовлетворять теореме дискретизации Котельникова, т.е.

$$N \geq 2BT,$$

где  $B$  – полоса частот сигнала  $x(t)$ ;  $T$  – его длительность.

**Теорема Котельникова-Найквиста-Шеннона:** если сигнал таков, что его спектр ограничен частотой  $F$ , то после дискретизации сигнала с частотой не менее  $2F$  можно восстановить непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно проинтерполировать цифровой сигнал «между отсчетами» специальными функциями.

Рассмотрим случай вещественно-значной последовательности  $\{X(m)\}$  при  $N=8$ . Из свойства комплексной сопряженности ДПФ следует, что

$$C_x(4+l) = C_x^*(4-l); \quad l = \overline{1, N/2-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_x(k) &= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 X(m) W^{km}; \quad k = \overline{0, N-1}; \\ W &= e^{-i2\pi/8} = e^{-i\pi/4}; \\ 8C_x(k) &= \sum_{m=0}^7 X(m) \cos\left(\frac{mk\pi}{4}\right) - i \sum_{m=0}^7 X(m) \sin\left(\frac{mk\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Используя свойство  $N$ -периодичности экспонент, для  $N=8$  матрица будет иметь вид

$$F = \begin{bmatrix} W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 \\ W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & W_6 & W_7 \\ W_0 & W_2 & W_4 & W_6 & W_0 & W_2 & W_4 & W_6 \\ W_0 & W_3 & W_6 & W_1 & W_4 & W_7 & W_2 & W_5 \\ W_0 & W_4 & W_0 & W_4 & W_0 & W_4 & W_0 & W_4 \\ W_0 & W_5 & W_2 & W_7 & W_4 & W_1 & W_6 & W_3 \\ W_0 & W_6 & W_4 & W_2 & W_0 & W_6 & W_4 & W_2 \\ W_0 & W_7 & W_6 & W_5 & W_4 & W_3 & W_2 & W_1 \end{bmatrix}.$$

Из свойства симметрии экспоненциальных функций следует, что

$$W_{k+N/2} = -W_k, \quad \text{где } k = \overline{0, N/2-1}.$$

То есть  $W_4 = -W_0$ ;

$$W_5 = -W_1;$$

$$W_6 = -W_2;$$

$$W_7 = -W_3.$$

Тогда матрица  $F$  будет иметь вид

$$F = \begin{bmatrix} W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 \\ W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & -W_0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_0 & W_2 & -W_0 & -W_2 & W_0 & W_2 & -W_0 & -W_2 \\ W_0 & W_3 & -W_2 & W_1 & -W_0 & -W_3 & W_2 & -W_1 \\ W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 \\ W_0 & -W_1 & W_2 & -W_3 & -W_0 & W_1 & -W_2 & W_3 \\ W_0 & -W_2 & -W_0 & W_2 & W_0 & -W_2 & -W_0 & W_2 \\ W_0 & -W_3 & -W_2 & -W_1 & -W_0 & W_3 & W_2 & W_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}.$$

Используя двоичную инверсию (перестановку) строк,  $(0,1,2,3,4,5,6,7) \rightarrow (0,4,2,6,1,5,3,7)$  будем иметь

$$\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 & W_0 \\ W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 & W_0 & -W_0 \\ W_0 & W_2 & -W_0 & -W_2 & W_0 & W_2 & -W_0 & -W_2 \\ W_0 & -W_2 & -W_0 & W_2 & W_0 & -W_2 & -W_0 & W_2 \\ \hline W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & -W_0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_0 & -W_1 & W_2 & -W_3 & -W_0 & W_1 & -W_2 & W_3 \\ W_0 & W_3 & -W_2 & W_1 & -W_0 & -W_3 & W_2 & -W_1 \\ W_0 & -W_3 & -W_2 & -W_1 & -W_0 & W_3 & W_2 & W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^1 \\ B_1^1 & -B_1^1 \end{bmatrix} \bar{X} = \\
&= \begin{bmatrix} A_1^1 \left\{ \begin{matrix} X_0 + X_4 \\ X_1 + X_5 \\ X_2 + X_6 \\ X_3 + X_7 \end{matrix} \right\} \\ B_1^1 \left\{ \begin{matrix} X_0 - X_4 \\ X_1 - X_5 \\ X_2 - X_6 \\ X_3 - X_7 \end{matrix} \right\} \end{bmatrix}. \tag{1.18}
\end{aligned}$$

В свою очередь, матрицы  $A_I^I$  и  $B_I^I$  можно представить в виде, где верхний индекс представляет собой номер шага процедуры БПФ

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1^2 \\ A_2^2 & -A_2^2 \end{bmatrix}; \\
B_1^1 &= \begin{bmatrix} B_1^2 & W_2 B_1^2 \\ B_2^2 & -W_2 B_2^2 \end{bmatrix}. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для  $A_I^I$  и  $B_I^I$  в (1.18) получим

$$\begin{aligned}
&A_1^2 \left\{ \begin{matrix} (X_0 + X_4) + (X_2 + X_6) \\ (X_1 + X_5) + (X_3 + X_7) \end{matrix} \right\}; \\
&A_2^2 \left\{ \begin{matrix} (X_0 + X_4) - (X_2 + X_6) \\ (X_1 + X_5) - (X_3 + X_7) \end{matrix} \right\}; \\
&B_1^2 \left\{ \begin{matrix} (X_0 - X_4) + W_2 (X_2 - X_6) \\ (X_1 - X_5) + W_2 (X_3 - X_7) \end{matrix} \right\}; \\
&B_2^2 \left\{ \begin{matrix} (X_0 - X_4) - W_2 (X_2 - X_6) \\ (X_1 - X_5) - W_2 (X_3 - X_7) \end{matrix} \right\}. \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Наконец, на последнем шаге получим



$$\begin{aligned}
& [(X_0 + X_4) + (X_2 + X_6)] + [(X_1 + X_5) + (X_3 + X_7)] \\
& [(X_0 + X_4) + (X_2 + X_6)] - [(X_1 + X_5) + (X_3 + X_7)] \\
& [(X_0 + X_4) - (X_2 + X_6)] + W_2[(X_1 + X_5) - (X_3 + X_7)] \\
& [(X_0 + X_4) - (X_2 + X_6)] - W_2[(X_1 + X_5) - (X_3 + X_7)] \\
& [(X_0 - X_4) + W_2(X_2 - X_6)] + W_1[(X_1 - X_5) + W_2(X_3 - X_7)] \\
& [(X_0 - X_4) + W_2(X_2 - X_6)] - W_1[(X_1 - X_5) + W_2(X_3 - X_7)] \\
& [(X_0 - X_4) - W_2(X_2 - X_6)] + W_3[(X_1 - X_5) - W_2(X_3 - X_7)] \\
& [(X_0 - X_4) - W_2(X_2 - X_6)] - W_3[(X_1 - X_5) - W_2(X_3 - X_7)]
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Описанный алгоритм удобно представить графически (рис. 1.6).

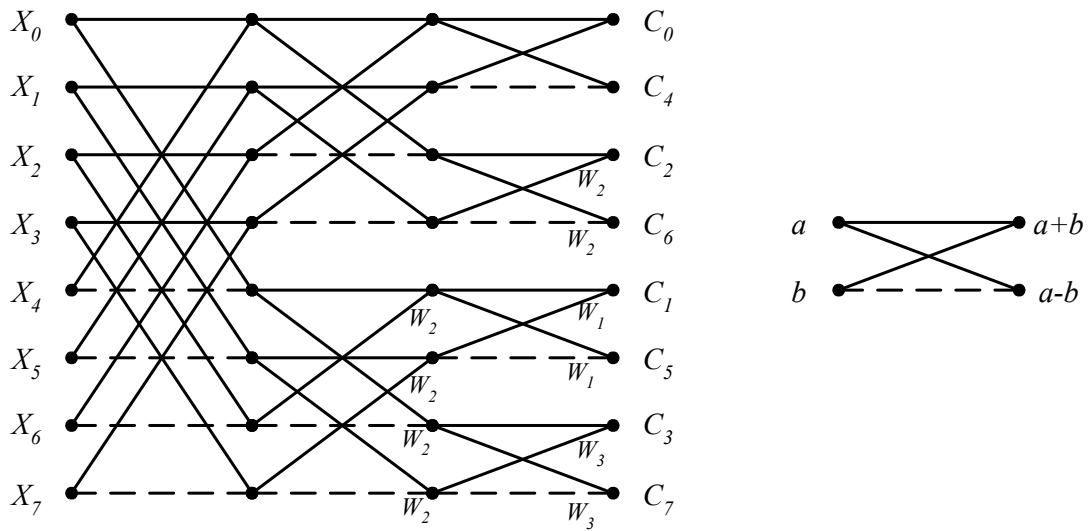


Рис. 1.6. **Граф-схема быстрой процедуры вычисления коэффициентов преобразования Фурье**

Для определения степеней  $W$  на одном шаге необходимо выразить последовательность  $l=0, 1, 2, \dots, N/2-1$  в виде  $(n-1)$  – разрядных двоичных последовательностей. В результате для  $N=16$ , к примеру, получим множество  $S_1=(000,001,010,011,100,101,110,111)$ .

Для получения  $S_2$  необходимо выполнить двоичную инверсию каждой  $(n-1)$ -разрядной последовательности множества  $S_1$ , т.е.

$$S_2=(000,100,010,110,001,101,011,111),$$

и записать двоичную последовательность в виде десятичных чисел

$$S_3=(0,4,2,6,1,5,3,7),$$

и таким образом имеем  $W_0, W_4, W_2, W_6, W_1, W_5, W_3, W_7$ . (табл. 1.2).

Итерация  $r$  для БПФ состоит из  $2^{r-1}$  групп, где  $r = \overline{1, n}$  ( $N=2^n$ ). Для  $N=16$ ,  $r = \overline{1, 4}$ .

Таблица 1.2

Значения степени  $W$ 

Номер итерации	Степени $W$ ( $N=16$ )
1	$W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0$
2	$W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_0 W_4 W_4 W_4 W_4 W_4 W_4 W_4 W_4$
3	$W_0 W_0 W_0 W_0 W_4 W_4 W_4 W_4 W_2 W_2 W_2 W_2 W_6 W_6 W_6 W_6$
4	$W_0 W_0 W_4 W_4 W_2 W_2 W_6 W_6 W_1 W_1 W_5 W_5 W_3 W_3 W_7 W_7$

Первый элемент первой строки таблицы равен нулю. Последующие первые элементы каждой из строк определяются как  $n_s = N/2^s$ , где  $s = \overline{1, n}$ ,  $N=2^n$ . Каждая  $k$  строка таблицы получается прибавлением элемента  $n_{k-1}$  к каждому элементу предыдущих строк. Тогда таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & \\
 n_1 & & & & & & \\
 n_2 & (n_1+n_2) & & & & & \\
 n_3 & (n_1+n_3) & (n_2+n_3) & (n_1+n_2+n_3) & & & \\
 n_4 & (n_1+n_4) & (n_2+n_4) & (n_1+n_2+n_4) & \dots & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 n_k & \dots & & & & &
 \end{array}$$

Требуемая последовательность  $L_n$ , соответствующая двоичной инверсии, определяется как  $L_n = (0, n_1, n_2, (n_1+n_2), n_3, (n_1+n_3), \dots, n_k, \dots)$ . В качестве примера рассмотрим случай для  $N=16$ . Тогда  $n_1=8, n_2=4, n_3=2, n_4=1$ , т.е. таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & & & & & & & \\
 8 & & & & & & & \\
 4 & 12 & & & & & & \\
 2 & 10 & 6 & 14 & & & & \\
 1 & 9 & 5 & 13 & 3 & 11 & 7 & 15 \\
 L_n = (0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15).
 \end{array}$$

Для обработки исходных данных (которые предполагаются комплексными) с помощью алгоритма БПФ требуется  $2N$  ячеек оперативной памяти. Поэтому выходной массив может храниться в тех же ячейках памяти, что и исходный массив. Процедура перестановки данных может потребовать дополнительно  $2N$  ячеек памяти. Таким образом, для алгоритма БПФ необходимо примерно  $4N$  ячеек. В противоположность этому прямой метод требует приблизительно  $2N^2$  ячеек памяти, т.к. необходимо запомнить  $N^2$  значений степеней  $W$ .

В общем виде матрицу преобразования Фурье в факторизованной форме можно представить как

$$F_N = \prod_{i=1}^n F_i D_i. \quad (1.22)$$

Для  $N=8$   $F_8 = F_1 D_1 \cdot F_2 D_2 \cdot F_3 D_3$ , где  $F_1 = \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}$ ;  $I_4$  – единичная матрица

размерностью  $4 \times 4$ ;  $D_1$  – диагональная матрица с элементами  $W_0$ ;

$$F_2 = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2 \\ & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}.$$

$D_2$  – диагональная матрица с элементами  $W_0, W_2$ :

$$D_2 = \begin{bmatrix} W_0 & & & & & & \\ & W_0 & & & & & \\ & & W_0 & & & & \\ & & & W_0 & & & \\ & & & & W_0 & & \\ & & & & & W_2 & \\ & & & & & & W_2 \end{bmatrix};$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} I_1 & I_1 & & & & & \\ I_1 & -I_1 & & & & & \\ & & I_1 & I_1 & & & \\ & & I_1 & -I_1 & & & \\ & & & & I_1 & I_1 & \\ & & & & I_1 & -I_1 & \\ & & & & & & I_1 & I_1 \\ & & & & & & I_1 & -I_1 \end{bmatrix};$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} W_0 & & & & & & \\ & W_0 & & & & & \\ & & W_0 & & & & \\ & & & W_2 & & & \\ & & & & W_0 & & \\ & & & & & W_1 & \\ & & & & & & W_0 \\ & & & & & & & W_3 \end{bmatrix}.$$

Факторизованная форма – это такая форма, когда в каждой строке матрицы, являющейся множителем, присутствует не более 2 значащих элементов, а остальные равны нулю.

Из вышесказанного следует сделать вывод о том, что при реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычислений в зависимости

от способа деления последовательности отсчетов на части (прореживание по времени либо по частоте) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге (основание БПФ).

### Алгоритм БПФ (FFT) с прореживанием по времени (decimation-in-time, DIT)

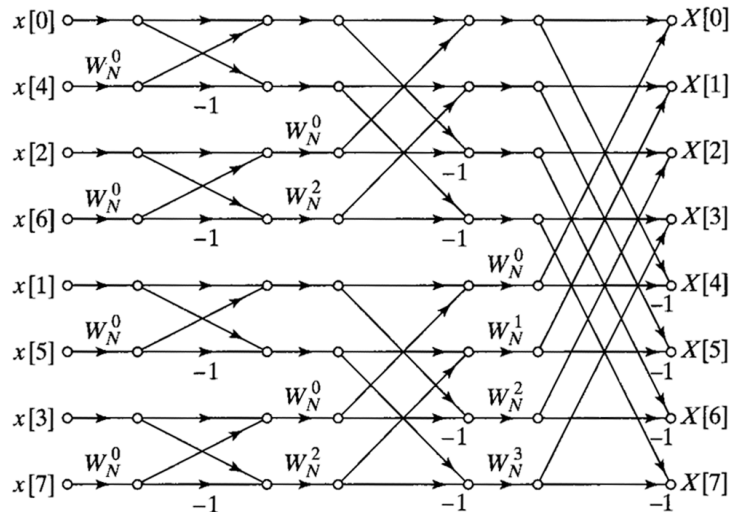


Рис. 1.7. Граф-схема алгоритма БПФ с прореживанием по времени

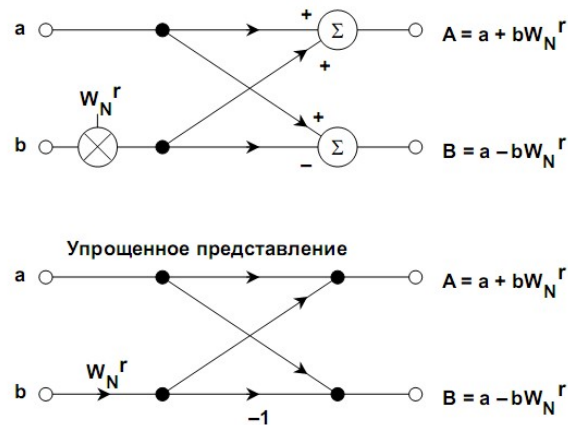


Рис. 1.8. Операция «бабочка» в алгоритме БПФ с прореживанием по времени

Алгоритм быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени можно выразить следующим образом.

#### АЛГОРИТМ БПФ( $a, N, dir$ )

{

1. Если длина вектора равна 1, вернуть  $a$ .
2. Разбить вектор  $a$  на четную часть  $a^{чет} = (a_0, a_2, \dots, a_{N-2})$  и нечетную  $a^{нечет} = (a_1, a_3, \dots, a_{N-1})$ .
3. Рекурсивно вызвать БПФ на каждой из частей

$$b^{чет} = \text{БПФ}(a^{чет})$$

$$b^{нечет} = \text{БПФ}(a^{нечет})$$

4. Объединение результатов.

а. (инициализация) Присвоить  $\omega_N$  значение главного комплексного корня N-й степени из единицы

$$\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}$$

б. (инициализация) Присвоить  $\omega = 1$

с. В цикле вычислить левую и правую часть одновременно:

for( j=0; j < N/2; j++)

{

$$y_j = b_j^{чет} + \omega b_j^{нечет}$$

$$y_{j+N/2} = b_j^{чет} - \omega b_j^{нечет}$$

$$\omega = \omega \cdot \omega_N$$

}

5. Вернуть вектор y.

}

При реализации алгоритма БПФ с прореживанием по времени происходит разбиение вектора на две части – четную и нечетную, после чего выполняется операция бабочка.

Ниже изображено дерево рекурсий, рис. 1.9. Каждый уровень, начиная снизу, соответствует проходу алгоритма по всему вектору и объединению сначала одиночных элементов в пары, затем пар в четверки и так далее до конца. Обратите внимание на то, что порядок индексов на верхнем уровне не соответствует нижнему. Это естественно, если учесть, что нечетные индексы после бабочки идут в правую половину вектора, а четные – в левую.

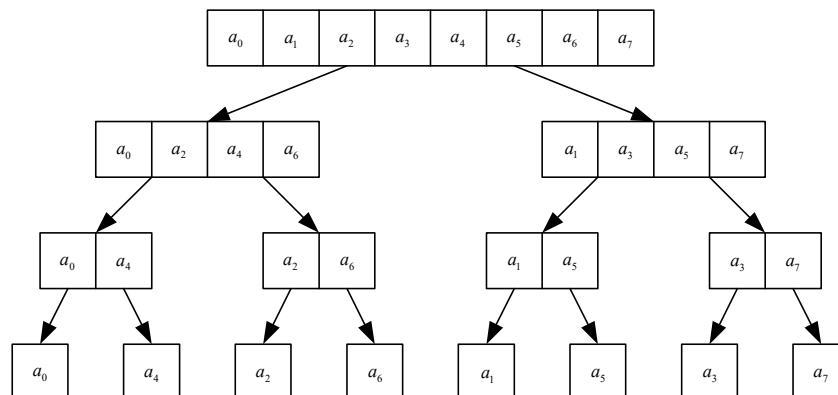


Рис. 1.9. Дерево рекурсий для 8 элементов

**Алгоритм БПФ (FFT) с прореживанием по частоте (decimation-in-frequency, DIF)**

При реализации алгоритма БПФ с прореживанием по частоте первоначально выполняется операция бабочка, а затем проводится разбиение вектора на две части («верхнюю» и «нижнюю»).

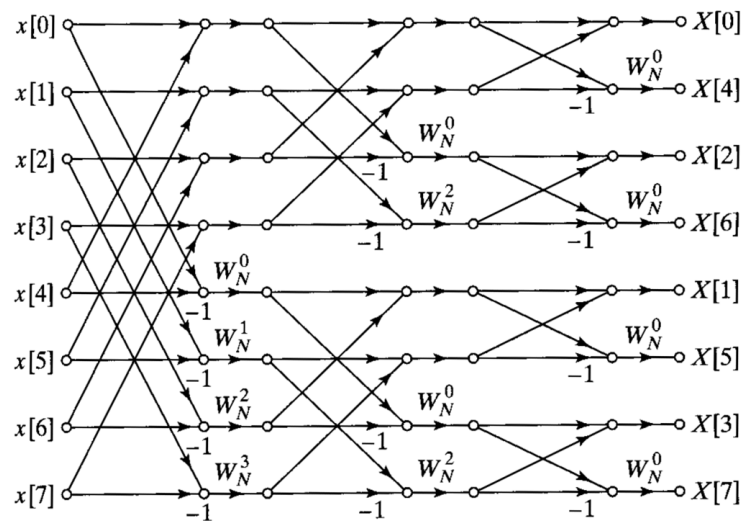


Рис. 1.10. Граф-схема алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

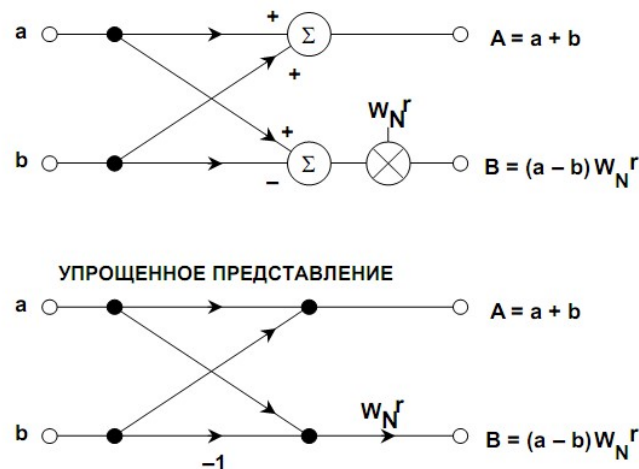


Рис. 1.11. Операция «бабочка» в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте

### АЛГОРИТМ БПФ( $a, N, dir$ )

{

1. Если длина вектора равна 1, вернуть  $a$ .

2.

✓ Присвоить  $\omega_N$  значение главного комплексного корня  $N$ -й степени

$$\text{из единицы } \omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} + dir \cdot i \sin \frac{2\pi}{N}$$

✓ Присвоить  $\omega = 1$

for( $j=0; j < N/2; j++$ )

{

$$b_j = a_j + a_{j+N/2}$$

$$c_{j+N/2} = (a_j - a_{j+N/2})\omega$$

$$\omega = \omega \cdot \omega_N$$

}

3. Рекурсивно вызвать БПФ на каждой из частей

$y = \text{БПФ}(b)$

$y = \text{БПФ}(c)$

4. Объединение результатов.

5. Вернуть вектор  $y$ .

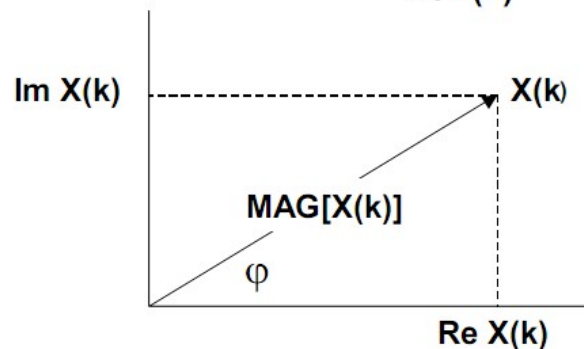
}

### Преобразование вещественных и мнимых компонент в амплитуду и фазу

$$X(k) = \text{Re}X(k) + j \text{Im}X(k)$$

$$\text{MAG}[X(k)] = \sqrt{\text{Re}X(k)^2 + \text{Im}X(k)^2}$$

$$\varphi[X(k)] = \tan^{-1} \frac{\text{Im}X(k)}{\text{Re}X(k)}$$



### 3. Задание

1. Ознакомьтесь с теоретической частью.

2. Для заданного сигнала реализовать ДПФ и алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) (прямое и обратное преобразования). Результат работы программы – амплитудный и фазовый спектр сигнала.

3. Сравнить БПФ с методом ДПФ по вычислительной сложности (количество операций сложения и умножения).

4. Оформить отчет.

#### Содержание отчета:

- исходные данные;
- краткое описание алгоритма работы программы;
- график заданной функции, график по результатам прямого преобразования, график по результатам обратного преобразования;
- анализ вычислительной сложности ДПФ и БПФ, пояснение полученных результатов;
- выводы.

Таблица 3.1

Варианты задания

№ варианта	Сигнал	Алгоритм БПФ	N
1	$y=\cos(3x)+\sin(2x)$	БПФ с прореживанием по времени	8
<u>2</u>	<u><math>y=\sin(3x)+\cos(x)</math></u>	<u>БПФ с прореживанием по частоте</u>	<u>16</u>
3	$y=\cos(2x)+\sin(5x)$	БПФ с прореживанием по времени	32
4	$y=\sin(2x)+\cos(7x)$	БПФ с прореживанием по частоте	64
5	$y=\cos(x)+\sin(x)$	БПФ с прореживанием по времени	8
6	$y=\sin(x)+\cos(4x)$	БПФ с прореживанием по частоте	16
7	$y=\cos(5x)+\sin(6x)$	БПФ с прореживанием по времени	32
8	$y=\sin(5x)+\cos(x)$	БПФ с прореживанием по частоте	64

#### 4. Контрольные вопросы

1. Для чего используются ортогональные преобразования?
2. Дать определение ортогональным и ортонормальным функциям.
3. Доказать, что Фурье – базис является ортогональным.
4. Дать определение преобразования Фурье.
5. Каковы основные свойства дискретного преобразования Фурье?
6. Каким образом осуществляется быстрое преобразование Фурье?
7. В чем заключается преимущество быстрого преобразования Фурье?