Тема 5. Решение задач математической физики

Математическая физика – это теория математических моделей физических процессов. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому сформулирует основные определения, а также рассмотрим методы решения известных задач математической физики, предложенные для широкого круга инженерно-технических исследований.

Определение 5.1. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset R^2$ называется функциональная зависимость вида

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (5.1)$$

между неизвестными переменными x, y и неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными первого и второго порядков.

Определение 5.2. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset R^2$ называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (5.2)$$

где коэффициенты a, b, c есть функции от переменных x, y.

Определение 5.3. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset R^2$ называется, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции $u(x,y)$ ее первых производных, то есть имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \qquad (5.3)$$

где коэффициенты a, b, c, d, e, g, f есть функции от переменных x, y.

Если коэффициенты уравнения (5.3) не зависят от переменных x, y, то оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Определение 5.4. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset R^2$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f,$$

называется однородным, если $f(x,y) = 0$ для $\forall (x,y) \in D$.

Определение 5.5. Решением уравнения (5.1) называется определенная в области D действительная функция $u(x,y)$, непрерывная в этой области вместе со своими производными первого и второго порядков, и обращающая его в тождество в данной области.

Обратимся теперь к обзору простейших уравнений математической физики и познакомимся с методами, позволяющими в каждом конкретном случае найти собственные функции и получить общее решение.

Многие задачи физики, механики описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому эти уравнения и носят название уравнений математической физики. Они подразделяются на три класса.

Определение 5.6. Уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (5.2)$$

называется в некоторой точке $(x, y) \in D$, уравнением:

1) гиперболического типа (уравнение колебаний), если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac > 0$;

2) параболического типа (уравнение диффузии), если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac = 0$;

3) эллиптического типа, если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac < 0$.

Каждое из названных уравнений имеет бесконечно много решений. Для описания реального процесса надо задать начальные условия и краевые условия на границе области, в которой рассматривается процесс. Поэтому такие задачи называются краевыми.

Рассмотрим некоторые примеры известных уравнений математической физики.

Сформулируем задачу о колебаниях струны. Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под воздействием сильного натяжения и в состоянии равновесия без внешних сил направлена по оси X. Если мы выведем ее из положения равновесия и, кроме того, подвергнем действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться, причем точка струны, занимавшая при равновесии некоторое положение с абсциссой x, к моменту времени t займет другое положение. Ограничившись рассмотрением только поперечных колебаний, а именно: предполагая, что все движение происходит в одной плоскости, и что точки струны движутся перпендикулярно оси X, искомой функцией будет смещение точек струны, которое мы обозначим $u(x, t)$.

Задача 5.1. Уравнение вынужденных поперечных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \qquad (5.4)$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $f = 0$, и получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5.5)$$

Одного уравнения движения (5.5) недостаточно для полного определения струны, поэтому нужно еще задать состояние струны в начальный момент времени $t = 0$, то есть положение ее точек u и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), x \in R.$$

Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.5}$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = f(x), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), x \in R, \tag{5.7}$$

где уравнение (5.5) описывает свободные колебания бесконечной однородной струны, а условия (5.6) и (5.7) задают соответственно *начальное положение* и *начальную скорость* точек струны, решение $u = u(x,t)$ задачи (5.5) – (5.7) находится по *формуле Даламбера:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{5.8}$$

Пример 5.1. Дано

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x.$$

Найти $u(x,t)$.

Δ Замечаем, что в нашем случае $f(x) = x, \varphi(x) = \sin x.$ Тогда

$$f(x+at) = x+at, f(x-at) = x-at, \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} = \frac{x+at+x-at}{2} = x,$$

$$\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\tau)d\tau = \int_{x-at}^{x+at}\sin\tau d\tau = -\cos\tau\Big|_{\tau=x-at}^{\tau=x+at} = \cos(x-at) - \cos(x+at) = 2\sin x\sin at$$

Ответ записываем по формуле Даламбера: $u(x,t) = x + \frac{\sin x \sin at}{a}$. ▲

Задача 5.2. Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.5}$$

для случая, когда струна в спокойном состоянии занимает отрезок $[0,l]$ оси Ox. Для однозначного решения данной задачи кроме начальных условий

$$u(x,0) = f(x), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l] \tag{5.7}$$

нужно задать еще краевые условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{5.9}$$

означающие, что концы струны закреплены. Эта задача называется *краевой задачей Коши.* Частное решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной $\boldsymbol{t}$, а другая от переменной $\boldsymbol{x}$. Данный метод известен как метод Фурье.

Δ Фурье предложил искать решения задачи (5.5), (5.6), (5.7), (5.9) в виде ряда вида:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

и уравнение (5.5) перепишется

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или, разделяя переменные

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda = \mathrm{const} \in \mathbf{R}.$$

Слева здесь стоит функция от t, справа – функция от x, а t и x – независимые переменные. Поэтому функции от них равны тогда и только тогда, когда они постоянные.

Следовательно, получаем систему дифференциальных уравнений

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \qquad (5.10)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad (5.11)$$

Займемся вначале уравнением (5.11). В силу нулевых краевых условий (5.9) получаем

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \qquad (5.12)$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0. \qquad (5.13)$$

Анализ (5.11), (5.12) и (5.13) приводит к выводу, что

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Тогда (5.10) имеет решение

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t.$$

Итак, мы нашли подходящие частные решения

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Скомбинируем из них общее решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (5.14)$$

Но здесь A_n и B_n – произвольные числа. Как ими распорядиться, чтобы получить нужное нам решение? Потребуем, чтобы (5.14) можно было почленно дифференцировать по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t + B_n \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (5.15)$$

Подставим в (5.14) и (5.15) $t = 0$. Тогда с учетом начальных условий (5.6) и (5.7) будем иметь:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x).$$

Мы получили разложение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье по синусам. Поэтому неизвестные коэффициенты определяются по стандартным формулам:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \tag{5.16}$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx. \tag{5.17}$$

Итак, решение задачи имеет вид (5.14), где коэффициенты определяются по формулам (5.16) и (5.17). ▲

Пример 5.2. Найти закон свободных колебаний струны, при условии, что ее концы закреплены и в начальный момент времени заданы форма струны и скорости ее точек:

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 31\sin(\pi x), \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(8,t) = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Задана задача с начальными и краевыми условиями.

Δ Используя метод разделения переменных (метод Фурье) ищем частное решение задачи (1) в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Получим систему

$$\begin{cases} X``(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T``(t) + 16\lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия дают $X(0) = X(8) = 0$.

Решение уравнения $X``(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$X(x) = X_n(x) = c_n sin\left(\frac{\pi n x}{8}\right)$, при этом $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{8}\right)^2$.

Решениями уравнения $T``(t) + 16\lambda T(t) = 0$ при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{8}\right)^2$ являются функции

$$T_n(t) = C_{1n} cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right) + C_{2n} sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right).$$

Таким образом, частное решение уравнения (1) можно представить в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right) + B_n sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\right) \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{8}\right). \qquad (5.19)$$

Найдем производную функции (2) по переменной t

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi n}{2} A_n sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right) + \frac{\pi n}{2} B_n cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\right) \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{8}\right). \qquad (5.20)$$

Согласно условию $u_t(x,0) = 0$ и полагая в (5.19) $t = 0$, получаем

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{2} B_n sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\right) = 0, \text{ отсюда } B_n = 0.$$

Согласно условию $u_t(x,0) = 31\sin(\pi x)$ и полагая в (5.20) $t = 0$, получаем условие для нахождения коэффициентов A_n:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n) \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{8}\right) = 31\sin(\pi x),$$

$$A_n = \begin{cases} 0, n \neq 8, \\ 31, n = 8. \end{cases}$$

Решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = 31\cos(4\pi t)\sin(\pi x), 0 \le x \le 8, 0 \le t \le +\infty. \blacktriangle$$

Задача 5.3. Рассмотрим теперь вынужденные колебания однородной струны с закрепленными концами. Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t); \qquad (5.19)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x); \qquad (5.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x); \qquad (5.21)$$

а также определены краевые условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad (5.22)$$

Δ Приступая к решению данной задачи, вновь воспользуемся методом Фурье. Решение будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (5.23)$$

с неизвестными коэффициентами $T_n(t)$.

Функция $u(x,t)$, определяемая соотношением (5.23), уже удовлетворяет краевым условиям (5.22). Осталось подчинить (5.23) условиям (5.20), (5.21), (5.22). Силовую функцию $g(x,t)$ также представим рядом Фурье

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{5.24}$$

где

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x,t) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx. \tag{5.29}$$

С учетом (5.23) и (5.24) уравнение (5.19) перепишется

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv a^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - g_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv 0.$$

Это тождество будет выполняться тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \equiv g_n(t). \tag{5.30}$$

Уравнение (5.30) при фиксированном $n \in N$ решаем стандартно. Вначале решаем соответствующее (5.30) однородное уравнение

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 = 0$$

Решая его, мы получаем комплексные корни $k_{1,2} = \pm i \frac{an\pi}{l}$. Поэтому общее решение однородного уравнения можно записать

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t,$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (5.30) ищем по методу Лагранжа, варьируя произвольные постоянные в общем решении однородного уравнения:

$$T_n(t) = A_n(t) \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n(t) \sin \frac{a\pi n}{l} t. \tag{5.31}$$

Для отыскания $A_n(t)$ и $B_n(t)$ выписываем систему Лагранжа:

$$\begin{cases} A_n'(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t = 0, \\ -\frac{a\pi n}{l}A_n'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t + B_n'(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t = g_n(t). \end{cases}$$

Для решения системы, воспользуемся правилом Крамера:

$$A_n'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{a\pi n}{l}t \\ g_n(t) & \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\frac{a\pi n}{l}t & \sin\frac{a\pi n}{l}t \\ -\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t & \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t \end{vmatrix}} = -\frac{l}{an\pi}g_n(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t,$$

$$B_n'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\frac{a\pi n}{l}t & 0 \\ -\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t & g_n(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\frac{a\pi n}{l}t & \sin\frac{a\pi n}{l}t \\ -\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t & \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t \end{vmatrix}} = \frac{l}{an\pi}g_n(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t.$$

Для определения коэффициентов, интегрируем полученные выше дифференциальные уравнения:

$$A_n(t) = A_n - \frac{l}{an\pi}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{a\pi n}{l}\tau\, d\tau,$$

$$B_n(t) = B_n + \frac{l}{an\pi}\int_0^t g_n(\tau)\cos\frac{a\pi n}{l}\tau\, d\tau.$$

Величины A_n и B_n в правых частях полученных соотношений являются произвольными числами.

Подставляя найденные функции в формулу (5.31), находим

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{a\pi n}{l}t +$$

$$+\frac{l}{an\pi}\int_0^t g_n(\tau)\left[\cos\frac{a\pi n}{l}\tau\sin\frac{a\pi n}{l}t - \sin\frac{a\pi n}{l}\tau\cos\frac{a\pi n}{l}t\right]d\tau \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)\,d\tau.$$

Введем эти $T_n(t)$ в формулу (5.23):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left[A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)\,d\tau\right] \tag{5.32}$$

Полагая, что ряд в (5.32) можно почленно дифференцировать по t, найдем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left[-A_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + B_n\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t\right]. \quad (5.31')$$

При $t=0$ формулы (5.23) и (5.31') с учетом начальных условий (5.20) и (5.21) дают:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \overset{(5.20)}{\triangleq} f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{a\pi n}{l} sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \overset{(5.21)}{\triangleq} \varphi(x).$$

Замечаем, что здесь мы имеем разложение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье, поэтому коэффициенты определяются

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \tag{5.33}$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \tag{5.34}$$

Решение поставленной задачи определяется формулой (5.32) с учетом (5.29), (5.33), (5.34). ▲