

## 12. Линейные преобразования.

Пусть  $V$  – линейное пространство.

**Определение 1.** Если задан закон  $f$ , по которому каждому вектору  $\vec{x} \in V$  поставлен в соответствие единственный вектор  $\vec{y} \in V$ , то будем говорить, что задано **преобразование (отображение, оператор)**  $f$  пространства  $V$  в себя и записывать  $f: V \rightarrow V$ .

Вектор  $\vec{y}$  называется **образом** вектора  $\vec{x}$ , а вектор  $\vec{x}$  — **прообразом** вектора  $\vec{y}$ . Если преобразование  $f$  переводит вектор  $\vec{x}$  в вектор  $\vec{y}$ , то это будем записывать как  $\vec{y} = f(\vec{x})$ .

**Определение 2.** Преобразование  $f$  называется **линейным**, если выполнены два условия:

$$1) f(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) \oplus f(\vec{x}_2), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V;$$

$$2) \ f(\lambda \otimes \vec{x}) = \lambda \otimes f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in R.$$

**Замечание.** Линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой.

Действительно,

$$f(\vec{0}) = f(\vec{x} \oplus (-\vec{x})) = f(\vec{x}) \oplus f(-\vec{x}) = f(\vec{x}) \oplus f(-1 \otimes \vec{x}) = f(\vec{x}) \oplus (-1 \otimes f(\vec{x})) = f(\vec{x}) \oplus (-f(\vec{x})) = \vec{0}.$$

**Определение 3.** Преобразование  $f$  называется тождественным, если оно каждому вектору пространства  $V$  ставит в соответствие этот же вектор, то есть  $f(\vec{x}) = \vec{x}$ .

Тождественное преобразование является линейным.

Пусть линейное преобразование  $f$  переводит базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  в векторы  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , то есть  $f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i, i = 1, 2, \dots, n$ , при этом

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{e}'_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

#### Определение 4. Матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного преобразования**  $f$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ .

**Определение 5.** Ранг  $r$  матрицы  $A$  называется **рангом преобразования**, а число  $n-r$  – **дефектом** этого преобразования.

## Связь между координатами вектора и его образа

Пусть вектор  $\vec{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , то есть  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ . Найдем  $f(\vec{x})$ .

Предположим, что  $f(\vec{x}) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Тогда  $f(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n$ .

С другой стороны

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \dots + x_nf(\vec{e}_n) = \\ &= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n) + \dots + x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Отсюда

[illegible]

Обозначим  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ . Тогда система (1) примет вид

$$Y = AX \text{ .}$$

**Определение 6.** Областью значений линейного оператора  $f$  называется множество  $\text{Im } A$  векторов вида  $\bar{y} = A\bar{x}$ , то есть  $\text{Im } A = \{\bar{y} \in V \mid \bar{y} = A\bar{x}, \bar{x} \in V\}$ .

**Определение 7.** Ядром линейного оператора  $f$  называется множество  $KerA$  всех векторов  $\vec{x} \in V$ , для которых  $A\vec{x} = \vec{0}$ , то есть  $\ker A = \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ .

## Связь между координатами вектора и его образа

**Определение 8.** Пусть в линейном пространстве  $V$  даны два базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + \dots + t_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + \dots + t_{n2}\vec{e}_n, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{e}'_n = t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \dots + t_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Матрица  $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$  называется **матрицей перехода от базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  к**

базису  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ .

Если  $\vec{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{x}(x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$  в базисе  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , то покажем,

что  $X = TX'$ , где  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ .

Действительно,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n, \\ \vec{x} &= x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \dots + x'_n\vec{e}'_n = x'_1 \cdot (t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + \dots + t_{n1}\vec{e}_n) + x'_2 \cdot (t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + \dots + t_{n2}\vec{e}_n) + \\ &\quad + \dots + x'_n \cdot (t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \dots + t_{nn}\vec{e}_n) = \\ &= (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \dots + t_{1n}x'_n)\vec{e}_1 + (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \dots + t_{2n}x'_n)\vec{e}_2 + \dots + (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \dots + t_{nn}x'_n)\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Отсюда

[illegible]

или в матричной форме

$$X = TX'. \quad (3)$$

**Определение 9.** Формулы (2) или (3) называются **формулами преобразования координат**.

**Пример 1.** Выясните, являются ли линейными операторы  $f: R^3 \rightarrow R^3$ , заданные условиями:

a)  $f(\vec{x}) = (x_1 - x_3; x_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3), \vec{x}(x_1; x_2; x_3) \in R^3$ .

б)  $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$ ,  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{x}(x_1; x_2; x_3) \in R^3$ .

**Решение.**

а) Проверим первое условие из определения линейного оператора. Найдем  $f(\vec{x} + \vec{y})$  и  $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ . Учитывая, что  $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$ , получим

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= ((x_1 + y_1) - (x_3 + y_3); (x_2 + y_2)^2; (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3)) = \\ &= (x_1 + y_1 - x_3 - y_3; x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2; x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 + 3x_3 + 3y_3), \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= (x_1 - x_3; x_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (y_1 - y_3; y_2^2; y_1 + 2y_2 + 3y_3) = \\ &= (x_1 - x_3 + y_1 - y_3; x_2^2 + y_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 + 2y_2 + 3y_3). \end{aligned}$$

Сравнивая по координатам векторы  $f(\vec{x} + \vec{y})$  и  $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ , получаем, что их первые и третьи координаты совпадают, тогда как вторые различны:  $x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 \neq x_2^2 + y_2^2$ , если  $x_2y_2 \neq 0$ .

Таким образом, равенство  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$  выполняется не для всех векторов  $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ . Значит, оператор  $f$  не является линейным.

б) В силу свойств векторного произведения векторов получим

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = f(\vec{x}) + f(\vec{y}); \quad f(\lambda \vec{x}) = [\lambda \vec{x}, \vec{a}] = \lambda [\vec{x}, \vec{a}] = \lambda f(\vec{x}).$$

Значит, оператор  $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$  является линейным для любого вектора  $\vec{a}$ .

Составим матрицу оператора  $f$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Для этого найдем  $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ . Получим

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= [\vec{i}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (0; -5; -1); \\ f(\vec{j}) &= [\vec{j}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (5; 0; -2); \\ f(\vec{k}) &= [\vec{k}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (1; 2; 0). \end{aligned}$$

Столбцами матрицы  $A$  этого оператора в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  являются координаты образов базисных векторов  $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Задача.** Составьте матрицу линейного оператора  $f$ , являющегося оператором ортогонального проектирования векторов  $R^3$  на плоскость  $x + y = 0$ .

### Собственные векторы линейного оператора

**Зависимость между матрицами одного и того же оператора в различных базисах.**

**Теорема 1.** Если  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  — два базиса некоторого линейного пространства и  $A$  — матрица линейного оператора  $f$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , то матрица  $B$  этого оператора в базисе  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  имеет вид

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad (1)$$

где  $T$  — матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ .

**Доказательство.**

Пусть вектор  $\vec{x}$  имеет координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  в базисе  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , а вектор  $f(\vec{x})$  имеет координаты  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$  в

базисе  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ . Обозначим  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$ . Тогда

$$X = T \cdot X', \quad (2)$$

$$Y = T \cdot Y' \quad (3)$$

и

$$Y = A \cdot X, \quad (4)$$

$$Y' = B \cdot X'. \quad (5)$$

Умножим обе части равенства (2) на матрицу  $A$  слева, получим  $A \cdot X = A \cdot T \cdot X'$ . Отсюда и в силу (3) и (4) получим

$$T \cdot Y' = A \cdot T \cdot X'. \quad (6)$$

Так как  $T$  – матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , то она является невырожденной и, значит, существует обратная матрица  $T^{-1}$ . Умножим обе части равенства (6) на матрицу  $T^{-1}$  слева, получим

$$T^{-1} \cdot (T \cdot Y') = T^{-1} \cdot (A \cdot T \cdot X') \Leftrightarrow (T^{-1} \cdot T) \cdot Y' = (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot X' \Leftrightarrow Y' = (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot X'.$$

Из последнего равенства и в силу (5) получим  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ .

**Теорема 1 доказана.**

**Следствие.**

Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной.

Действительно, пусть  $A$  и  $B$  – матрицы линейного оператора в двух различных базисах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  соответственно и  $\det A \neq 0$ . Так как  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ , где  $T$  – невырожденная матрица, то найдем  $\det B$ , получим

$$\det B = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T) = \det(T^{-1}) \cdot \det A \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det A \cdot \det T = \det A \neq 0,$$

то есть  $\det A = \det B \neq 0$ .

**Замечание.**

Если  $A$  и  $B$  – матрицы линейного оператора в двух различных базисах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  соответственно, то  $A = T \cdot B \cdot T^{-1}$ .

### Характеристическое уравнение линейного оператора.

**Теорема 2.**

Если  $A$  и  $B$  – матрицы линейного оператора в двух различных базисах  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  соответственно, то

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det(B - \lambda \cdot E),$$

где  $\lambda$  – произвольное число и  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ .

**Доказательство.**

Пусть  $T$  – матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  к базису  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ , тогда  $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ . Найдем  $\det(B - \lambda \cdot E)$ , получим

$$\det(B - \lambda \cdot E) = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda \cdot E) = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda \cdot (T^{-1} \cdot E \cdot T)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \det(T^{-1} \cdot (A \cdot T) - \lambda \cdot (T^{-1} \cdot (E \cdot T))) = \det(T^{-1} \cdot (A \cdot T) - T^{-1} \cdot (\lambda \cdot E \cdot T)) = \det(T^{-1} \cdot (A \cdot T - \lambda \cdot E \cdot T)) = \\
&= \det(T^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot T) = \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \cdot \det T = \det(A - \lambda \cdot E),
\end{aligned}$$

то есть  $\det(B - \lambda \cdot E) = \det(A - \lambda \cdot E)$ .

**Теорема 2 доказана.**

**Определение 10.** Многочлен  $\det(A - \lambda \cdot E)$  степени  $n$  относительно  $\lambda$  называется **характеристическим многочленом** матрицы  $A$  или линейного оператора  $f$ .

**Определение 11.** **Характеристическим уравнением** линейного оператора  $f$  называется уравнение вида

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0, \quad (1)$$

где  $A$  – матрица линейного оператора  $f$  в некотором базисе.

**Определение 12.** Корни характеристического уравнения (1) называются **характеристическими числами** матрицы  $A$  или линейного оператора  $f$ .

**Замечание.** При переходе от одного базиса к другому матрица линейного оператора меняется, а характеристический многочлен остается неизменным.

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  – матрица линейного оператора  $f$  в некотором базисе. Тогда

характеристическое уравнение примет вид

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \det \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

### Собственные векторы линейного оператора.

**Определение 13.** Вектор  $\vec{x}$  линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора  $f$** , если этот вектор ненулевой и существует действительное число  $k$  такое, что

$$f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}. \quad (1)$$

**Определение 2.** Число  $k$  называется **собственным числом вектора  $\vec{x}$  относительно линейного оператора  $f$** .

Равенство (1) можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = k \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X = k \cdot (E \cdot X) \Leftrightarrow A \cdot X = (k \cdot E) \cdot X \Leftrightarrow (A - k \cdot E) \cdot X = O,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица линейного оператора } f \text{ в некотором базисе, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– матрица–столбец из координат вектора  $\vec{x}$  в том же базисе.

### Свойства линейного оператора

**1.** Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение.

**Доказательство.**

Пусть  $k_1$  и  $k_2$  – различные собственные числа собственного вектора  $\vec{x}$  относительно линейного оператора  $f$ . Тогда  $f(\vec{x}) = k_1 \cdot \vec{x}$  и  $f(\vec{x}) = k_2 \cdot \vec{x}$ . Отсюда

$$k_1 \cdot \vec{x} = k_2 \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (k_1 - k_2) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Так как  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , то  $k_1 = k_2$ . Получили противоречие. Значит, собственное значение собственного вектора определено однозначно.

**2.** Если  $\vec{x}$  – собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$  и  $\lambda$  – любое отличное от нуля число, то  $\lambda \cdot \vec{x}$  – также собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$ .

**Доказательство.**

Если  $\vec{x}$  – собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$ , то по определению  $f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}$ .

Найдем  $f(\lambda \cdot \vec{x})$ . Учитывая определение линейного оператора и в силу (1), получим

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) = \lambda \cdot (k \cdot \vec{x}) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{x}).$$

Следовательно,  $\lambda \cdot \vec{x}$  – также собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$ .

**3.** Если  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  – линейно независимые собственные векторы линейного оператора  $f$  с одним и тем же собственным значением  $k$ , то  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$  – собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$ .

**Доказательство.**

Если  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  – собственные векторы линейного оператора  $f$  с одним и тем же собственным значением  $k$ , то из определения собственного вектора имеем

$$f(\vec{x}_1) = k \cdot \vec{x}_1, \quad f(\vec{x}_2) = k \cdot \vec{x}_2.$$

Так как  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  – линейно независимые векторы,  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$  – ненулевой вектор. Найдем  $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$ . В силу определения линейного оператора получим

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = k \cdot \vec{x}_1 + k \cdot \vec{x}_2 = k \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

Значит,  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$  – собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственным значением  $k$ .

**4.** Если  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  – собственные векторы линейного оператора  $f$  с собственными значениями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, и  $k_1 \neq k_2$ , то  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  – линейно независимые векторы.

**Доказательство.**

Предположим, что векторы  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  линейно зависимы. Тогда существует ненулевое число  $\alpha$  такое, что  $\vec{x}_1 = \alpha \cdot \vec{x}_2$ . Отсюда по свойству 2 вектор  $\vec{x}_1 = \alpha \cdot \vec{x}_2$  – собственный вектор линейного оператора  $f$  с собственными значениями  $k_2$ . А так как собственное значение собственного вектора линейного оператора  $f$  определено однозначно, то  $k_1 = k_2$ . Значит, наше предположение не верно и векторы  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  линейно независимы.

**Теорема 3.**

Для того, чтобы линейный оператор  $f$  имел собственный вектор  $\vec{x}$  с собственным значением  $k$ , необходимо и достаточно, чтобы число  $k$  являлось корнем характеристического уравнения этого оператора.

**Доказательство.**

Для того, чтобы линейный оператор  $f$  имел собственный вектор  $\vec{x}$  с собственным значением  $k$ , необходимо и достаточно, имело место равенство

$$f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x} \Leftrightarrow A \cdot X = k \cdot E \Leftrightarrow (A - k \cdot E) \cdot X = O.$$

Для того, чтобы однородная система  $(A - k \cdot E) \cdot X = O$  имела ненулевое решение  $\vec{x}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\det(A - k \cdot E) = 0$ , то есть число  $k$  являлось корнем характеристического уравнения линейного оператора  $f$ .

**Теорема 3 доказана.**

**Теорема 4.**

Пусть  $k$  – собственное число линейного оператора  $f$  с матрицей  $A$   $n$  – мерного линейного пространства. Если ранг матрицы  $A - k \cdot E$  равен  $r$ , то существует  $n - r$  линейно независимых собственных векторов линейного оператора  $f$  с собственным числом  $k$ .

**Доказательство.**

Если  $k$  – собственное число линейного оператора  $f$  с матрицей  $A$   $n$  – мерного линейного пространства, то  $(A - k \cdot E) \cdot X = O$ . Так как ранг матрицы  $A - k \cdot E$  равен  $r$ , то существует  $n - r$  линейно независимых решений однородной системы. Учитывая, что каждое решение системы  $(A - k \cdot E) \cdot X = O$  является собственным вектором с собственным значением  $k$ , получим, что существует  $n - r$  линейно независимых собственных векторов линейного оператора  $f$  с собственным числом  $k$ .

**Теорема 4 доказана.**

**Пример.**

Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в

некотором базисе матрицей  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Решение.**

Составим характеристическое уравнение  $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ , корнями которого являются собственные значения  $\lambda$  матрицы  $A$ :

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda) \cdot ((2-\lambda)^2 - 1) + (2-\lambda+1) - (-1-(2-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 6 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 (2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2, \\ \lambda = 3. \end{cases}$$

Для каждого собственного значения  $\lambda$  составим и решим однородную систему уравнений  $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ :

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы  $A$  с собственным значением  $\lambda$ .

Для  $\lambda_1 = 2$  указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2 + (-2)S_1 \\ S_3 + (-1)S_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 + (-1)S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система  $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Выберем базисными переменными  $x_1$  и  $x_2$ , а свободной неизвестной –  $x_3$ . Тогда  $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_3$ . Полагая  $x_3 = c_3 \neq 0$ , получим собственные векторы  $\vec{X}_1$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_1 = 2$ :

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_3,$$

где  $c_3$  – произвольное число, отличное от нуля.

Для  $\lambda_2 = 3$  указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Выберем  $x_1$  базисной переменной, а  $x_2, x_3$  – свободными неизвестными. Тогда  $x_1 = x_2 + x_3$ .

Полагая  $x_2 = c_2, x_3 = c_3$ , получим собственные векторы  $\vec{X}_2$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_2 = 3$ :

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $c_2, c_3$  – произвольные числа, не равные нулю одновременно, что равносильно условию  $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ .

**Задача.** Составьте матрицу линейного оператора

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 3 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и найдите собственные значения и собственные векторы оператора  $f$ .