Тема 7. Дифференциальные уравнения и функции Бесселя, их приложения

7.1. Понятие функции Бесселя

Степенные ряды находят широкое применение при решении дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим так называемое уравнение Бесселя, применение которого встречаются в различных вопросах физики и техники.

Определение 7.1. Дифференциальное уравнение вида

$$x^2y`` + xy` + (x^2 - p^2)y = 0, \qquad (7.1)$$

$p -$ заданная постоянная, называется уравнением Бесселя.

Данное уравнение удовлетворяет условиям теоремы 7.1, в соответствии с которой его решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда.

Теорема 7.1. Пусть в уравнении

$$p_0(x)y`` + p_1(x)y` + p_2(x)y = 0$$

Функции $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ разлагаются в степенные ряды в окрестности точки x_0, причем точка x_0 является нулем порядка s функции $p_0(x)$, является нулем порядка $s-1$ функции $p_1(x)$, является нулем порядка $s-2$ функции $p_2(x)$. Тогда решение дифференциального уравнение существует и представимо в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^{k+\rho},$$

где $a_0 \neq 0, \rho \in R$.

(7.2)

Уравнение для определения его показателя p имеет вид

$$\rho(\rho - 1) + \rho - p^2 = 0 \text{ или } \rho^2 - p^2 = 0.$$

Последнее уравнение называется определяющим уравнением, и его корни равны $\rho_1 = p, \rho_2 = -p$.

Будем искать решение уравнения в виде

$$y = x^p(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots).$$

Подставляя в левую часть уравнения Бесселя решение и, приравнивая коэффициенты при различных степенях переменной x нулю, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} [(p+1)^2 - p^2]a_1 = 0, \\ [(p+2)^2 - p^2]a_2 + a_0 = 0, \\ [(p+3)^2 - p^2]a_2 + a_1 = 0, \\ \dots \\ [(p+n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Подставляя $a_0 = 1$ и вычисляя последовательно коэффициенты, приходим к решению

$$y_1 = x^p\left(1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \cdots\right).$$

Решение y_1 удобно представить в виде ряда с учетом того, что коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а с четными индексами можно записать с использованием функции Эйлера:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k!\,2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}.$$

При $a_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ имеем

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}$$

и, следовательно, решение можно представить в виде

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = J_p(x). \tag{7.3}$$

Используя второй корень $\rho_2 = -p$, можем построить второе решение уравнения Бесселя. Оно может быть получено из решения y_1 простой заменой p на $-p$, так как уравнение Бесселя содержит только p^2 и не меняет знак при замене p на $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left(1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \cdots\right).$$

Решение y_2 аналогично предыдущему можно записать с использованием функции Эйлера:

$$a_0 = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)},$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} = J_{-p}(x). \tag{7.4}$$

Разность корней определяющего уравнения равна $2p$, а следовательно, два решения будут верны, если p не равно целому числу или половине целого нечетного числа. Решение y_1 с точностью до некоторого постоянного множителя дает функцию Бесселя p –порядка, которую обозначают через $J_p(x)$ и называют цилиндрической функцией первого рода. Таким образом, если p не есть целое число или половина целого нечетного числа, то общее решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$y = C_1 \cdot J_p(x) + C_2 \cdot J_{-p}(x),$$

где

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Степенной ряд, входящий в решение

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = J_p(x),$$

сходится при любом значении переменной, в чем нетрудно убедиться, применив признак Даламбера.

Определение 7.2. Функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ называются функциями Бесселя первого рода порядка p и $-p$ соответственно или цилиндрическими функциями первого рода.

Если рассмотрим $p = n$ – целое положительное число, то решение y_1 сохранит свою силу, а решение y_2 потеряют силу, так как, начиная с некоторого числа, один из множителей в знаменателе членов разложения будет равен нулю.

При целом $p = n$ имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x), \tag{7.5}$$

которое показывает линейную зависимость функций Бесселя.

Докажем равенство (7.5).

Δ Так как гамма-функция $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$, то

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

Положим $k - n = m$. Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m!\,(n+m)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Итак, при целом n функции $J_{-n}(x), J_n(x)$ не образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя (7.1). ▲

При целом положительном $p = n$ второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$, имеет вид

$$N_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{J_p(x)\cos(\pi p) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)},$$

где $\boldsymbol{p}$ – нецелое. (7.6)

Определение 7.3. Функция $N_n(x)$ называется цилиндрической функцией Бесселя второго рода или функцией Неймана.

Таким образом, при целом $p = n$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x).$$

7.2. Функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной

Пример 7.1. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$. Найдем функцию Бесселя $\boldsymbol{J_{\frac{1}{2}}(x)}$.

∆ Применяя формулу (7.3), получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Так как из свойств гамма-функций следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k),$$

то получаем следующие соотношения

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Учитывая, что для натуральных k справедливо соотношение $\Gamma(k+1) = k!$, после некоторых преобразований получим следующее

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1) \cdot 2^k} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Правая часть последнего соотношения представляет собой разложение известной нам тригонометрической функции $sin(x)$. Таким образом мы показали справедливость равенства

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot sin(x).$$

▲ (7.6)

Пример 7.2. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $\boldsymbol{p} = -\frac{1}{2}$. Найдем функцию Бесселя $\boldsymbol{J_{-\frac{1}{2}}(x)}$.

∆ Применяя формулу (7.4), имеем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot x^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos(x).$$

Таким образом мы показали, что функция Бесселя $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выражается через тригонометрическую функцию $cos(x)$ и справедливо равенство

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot cos(x).$$

▲ (7.7)

Получим некоторые рекуррентные соотношения для функций Бесселя, которые связывают функции Бесселя первого рода различных порядков.

Свойство 7.1. Справедливо равенство

$$\frac{d}{dx}\left(x^p \cdot J_p(x)\right) = x^p \cdot J_{p-1}(x) \quad (7.8)$$

Δ Найдем производную по переменной x от произведения $x^p \cdot J_p(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^p \cdot J_p(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+2p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+2p)x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+2p)x^{2k+2p-1}}{k!\,(k+p)\Gamma(k+p)\cdot 2^{2k+p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p)\cdot 2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1)\cdot 2^{2k+p-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^p \cdot x^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1)\cdot 2^{2k+p-1}} = x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1)\cdot 2^{2k+p-1}} =$$

$$= x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p-1+k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} = x^p \cdot J_{p-1}(x),$$

Таким образом, доказана формула (7.8)

$$\frac{d}{dx}\left(x^p \cdot J_p(x)\right) = x^p \cdot J_{p-1}(x)$$

▲

Свойство 7.2. Справедливо равенство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right) = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x) \qquad (7.9)$$

Δ Найдем производную по переменной x от частного $\frac{J_p(x)}{x^p}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)x^p} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{\cancel{k=0}}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k)x^{2k-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}} =$$

$$\cancel{=} \sum_{\cancel{k=0}}^{\infty} \cancel{\frac{(-1)^k \cdot (2k+2p)x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}}} = \left\{\begin{matrix}\text{суммирование начнем с } k=1,\\ \text{так как при } k=0 \text{ первый член}\\ \text{суммы равен нулю}\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\cancel{\infty}} \frac{(-1)^k \cdot 2x^{2k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2^{2k+p}} = \left\{\begin{matrix}\text{положим}\\ k=m+1\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2x^{2m+1}}{m!\,\Gamma(p+m+2)\cdot 2^{2m+p+2}} = \left\{\begin{matrix}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } x^p\end{matrix}\right\}$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1+p}}{m!\,\Gamma\big((p+1)+m+1\big) \cdot 2^{2m+p+1}} = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x).$$

Таким образом, доказана формула (7.8)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right) = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x)$$

▲

Свойство 7.3. Справедливо равенство

$$J_p(x) = \frac{x}{2p} \cdot \big(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\big) \tag{7.10}$$

Δ Распишем производные в левых частях доказанных равенств (7.9) и (7.10), получим систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\big(x^p \cdot J_p(x)\big) = x^p \cdot J_{p-1}(x), \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_p(x)}{x^p}\right) = -\dfrac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \cdot x^{p-1} \cdot J_p(x) + x^p \cdot J`_p(x) = x^p \cdot J_{p-1}(x), \\ -p \cdot x^{-p-1} \cdot J_p(x) + x^{-p} \cdot J`_p(x) = -\dfrac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x). \end{cases}$$

Выразим из последней системы $J`_p(x)$ и приравняем полученные выражения:

$$\begin{cases} J`_p(x) = J_{p-1}(x) - \dfrac{p}{x} \cdot J_p(x), \\ J`_p(x) = -J_{p+1}(x) + \dfrac{p}{x} \cdot J_p(x). \end{cases}$$

Данная система дает соотношение (7.10), которое представляет собой рекуррентное равенство, связывающее функции Бесселя первого рода различных порядков, а именно:

$$J_p(x) = \frac{x}{2p} \cdot \big(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\big).$$

▲

Заметим, что, используя рекуррентную формулу (7.10) и положив в ней $p = \frac{1}{2}$, можно получить выражения функций Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x), J_{\frac{5}{2}}(x), J_{\frac{7}{2}}(x), \ldots$.

Отметим также, что функции Бесселя с полуцелым индексом $J_{\frac{1}{2}+n}(x)$ всегда выражаются через элементарные функции.