# 8. Применение преобразования Лапласа и Z-преобразования при решении задач

## 8.1. Решетчатые функции

Основой математической теории описания процессов в импульсных системах является аппарат решетчатых функций и разностных уравнений.

**Определение 8.1.** Пусть дана непрерывная функция $f(t)$ (рис.8.1)

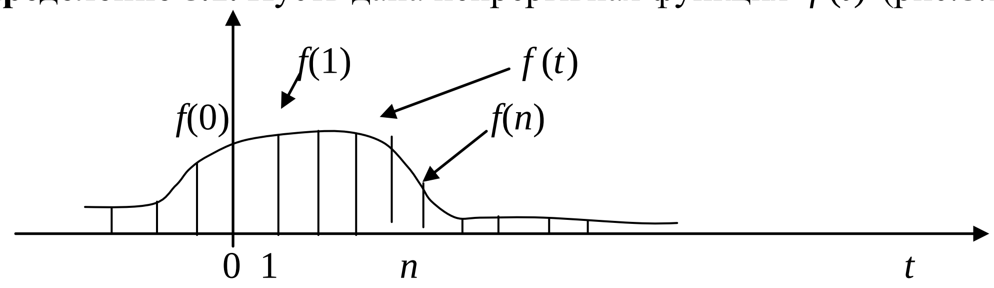



Рис.8.1

Пройдем по оси $t$ с шагом $T=1$ и найдем множество значений функции $f$ целочисленного аргумента $n \in \mathbf{Z}$:

$$\{f(n)\} = \{\ldots, f(-n), \ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$$

Если значения этого множества изобразить в виде отрезков, исходящих из точек $n$ оси $t$, то получим картину, напоминающую решетку, поэтому функцию $\{f(n)\}$ и называют **решетчатой функцией**.

Решетчатая функция является математической абстракцией реального дискретного сигнала. Дискретный сигнал (в том числе и импульсный) образуется из непрерывного сигнала в результате квантования по времени.

Заметим, что для инженера, как правило, неинтересно течение процесса, описываемого функцией $f(t)$ для времени $t<0$ (т.е. до начального момента времени), поэтому для дальнейших рассуждений мы рассмотрим определение преобразования Лапласа и применим его к *решетчатым оригиналам.*

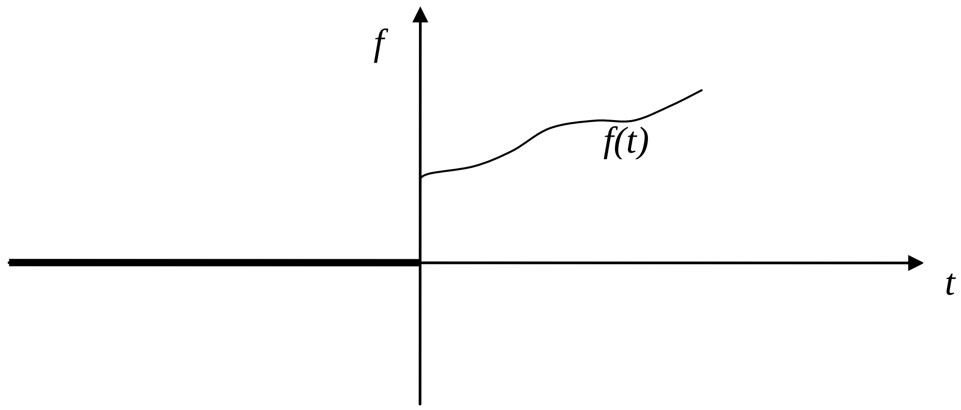
**Определение 8.2.** Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если она удовлетворяет трем условиям:

1) функция $f(t)$ является непрерывной или кусочно-непрерывной на всей оси $t$ (это значит, что она или непрерывна, или имеет конечное число точек разрыва первого рода);

2) $f(t)=0$ для $t<0$;

3) при $\forall t\in\mathbf{R}$ справедливо неравенство $|f(t)|\le M_0 e^{s_0 t}$. Это условие дает ограничение в росте для функции $|f(t)|$ по сравнению с некоторой показательной функцией $M_0 e^{s_0 t}$, где $M_0$ и $s_0$ – некоторые постоянные, причем $M_0>0$, а $s_0\ge 0$.

Графически некоторый оригинал можно изобразить следующим образом:




Отметим, что если функция $f(t)$ не удовлетворяет хотя бы одному из трех указанных условий, то она не является оригиналом.

Отметим также, что необязательно считать оригинал $f(t)$ действительной функцией. Функция $f(t)$ может быть и комплекснозначной, то есть иметь вид $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$. При этом действительная и мнимая части $u(t)$ и $v(t)$ должны быть оригиналами, то есть удовлетворять условиям 1,2,3 определения 8.2.

**Определение 8.3.** Функция комплексной переменной $p=\alpha+i\beta$ ($\alpha>0$)

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (8.1)$$

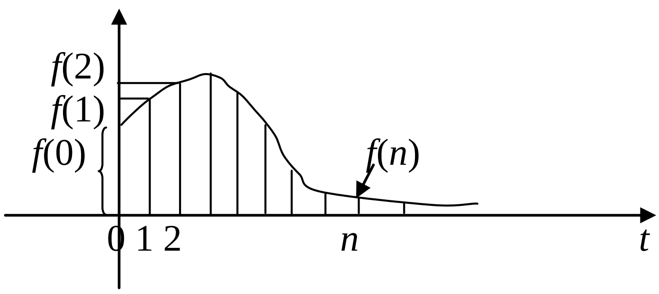
называется **изображением** ($L$-изображением) оригинала $f(t)$. Операцию перехода от оригинала к изображению в соответствии с формулой (8.1) называют **преобразованием Лапласа**.

Справедлива следующая

**Теорема 8.1**. Несобственный интеграл $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ является абсолютносходящимся при $\alpha > s_0$ ($\alpha = \operatorname{Re} p$, $s_0$ из определения 8.1 оригинала усл.1)

### 8.2. Z-преобразование

Рассмотрим теперь решетчатый оригинал $\{f(n)\}$.




Отметим, что его можно представить как импульсный:

$$\tilde{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\delta(t-n),$$

где $\delta$ - дельта-функция Дирака.

Найдем по определению изображение оригинала $\tilde{f}(t)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\int\limits_0^{\infty}\delta(t-n)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn} = \\ &= f(0)+f(1)e^{-p}+f(2)e^{-2p}+\ldots+f(n)e^{-np}+\ldots.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Обозначим $z=e^{p}$ и тогда получим:

$$\tilde{F}(p)=f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\ldots+\frac{f(n)}{z^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{z^n}=F(z). \tag{8.3}$$

**Определение 8.4**. Функция $F(z)$ называется **Z-преобразованием (Z-изображением)** для решетчатого оригинала $\{f(n)\}$ (в дальнейшем фигурные скобки для простоты будем опускать).

Отметим, что замена $z = e^p$ преобразует область $D: \mathrm{Re}\, p > s_0$ в область $D'$: $|z| > R_0 = e^{s_0}$. На комплексной плоскости $z$ область $D'$ представляет собой внешность круга (см. заштрихованную часть на рис. 8.2).

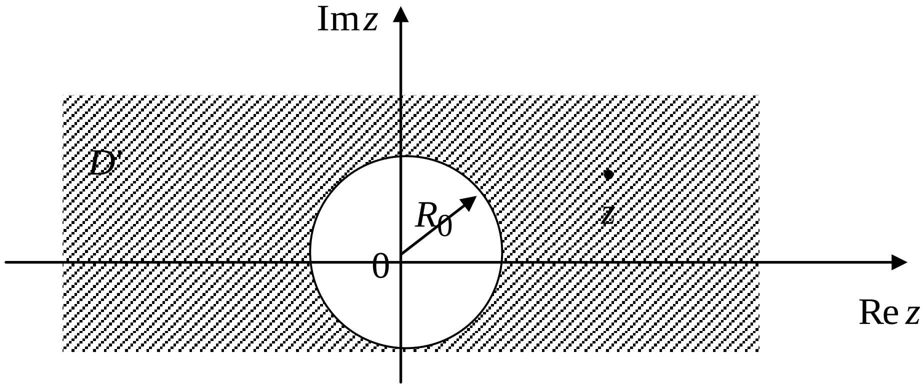



Рис. 8.2

В области $D'$ ряд Лорана (8.3), представляющий функцию $F(z)$

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots + \frac{f(n)}{z^n} + \ldots,$$

сходится абсолютно и равномерно, а $F(z)$ это аналитическая функция от $z$.

Отметим также, что все свойства преобразования Лапласа переносятся на $Z$-преобразования.

**Свойства Z-преобразования**

**1° (линейность).** Оператор $F$ является линейным, т.е. если $f_1(n) \leftrightarrow F_1(z)$, $f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$, то

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \leftrightarrow c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z),$$

где $c_1, c_2$ – произвольные числа.

**2° (запаздывание аргумента).** Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то

$$f(n-k) \leftrightarrow \frac{F(z)}{z^k}.$$

▲ По определению $f(n) \leftrightarrow F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$.

Тогда

$$f(n-k)\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n-k)}{z^n}=\begin{Bmatrix}\text{сделаем замену:}\\ n-k=m\Rightarrow n=m+k\end{Bmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)}{z^{m+k}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)}{z^m\cdot z^k}=\frac{1}{z^k}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)}{z^m}=\frac{1}{z^k}\cdot F(z).\ \Delta$$

**3° (опережение аргумента).** Если $f(n)\leftrightarrow F(z)$, то

$$f(n+k)\leftrightarrow z^k\left[F(z)-\left(f(0)+\frac{f(1)}{z}+\ldots+\frac{f(k-1)}{z^{k-1}}\right)\right].$$

**4° (подобие).** Если $f(n)\leftrightarrow F(z)$, то $\dfrac{f(n)}{a^n}\leftrightarrow F(az)$.

▲ Если $f(n)\leftrightarrow F(z)\equiv f(0)+\dfrac{f(1)}{z}+\dfrac{f(2)}{z^2}+\ldots+\dfrac{f(n)}{z^n}+\ldots$, то

$$\frac{f(n)}{a^n}\leftrightarrow F(z)\equiv f(0)+\frac{f(1)}{az}+\frac{f(2)}{(az)^2}+\ldots+\frac{f(n)}{(az)^n}+\ldots=F(az).\ \Delta$$

**5° (дифференцирование Z-преобразования).** Если $f(n)\leftrightarrow F(z)$, то

$$n\cdot f(n)\leftrightarrow -z\cdot F'(z).$$

▲ По определению $F(z)\equiv f(0)+\dfrac{f(1)}{z}+\dfrac{f(2)}{z^2}+\ldots+\dfrac{f(n)}{z^n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(n)}{z^n}$.

Продифференцируем по $z$ это тождество (это можно сделать, так как ряд Лорана равномерно сходится к $F(z)$):

$$F'(z)\equiv-\frac{f(1)}{z^2}-2\frac{f(2)}{z^3}-\ldots-n\frac{f(n)}{z^{n+1}}+\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{f(n)}{z^{n+1}}.$$

Далее умножим на $(-z)$ обе части полученного равенства:

$$-z\cdot F'(z)\equiv-z\left(-\frac{f(1)}{z^2}-2\frac{f(2)}{z^3}-\ldots-n\frac{f(n)}{z^{n+1}}+\ldots\right)=\frac{f(1)}{z}+2\frac{f(2)}{z^2}+\ldots+n\frac{f(n)}{z^n}+\ldots=$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{f(n)}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot f(n)}{z^n}$$

Таким образом, справедливо соответствие: $n\cdot f(n)\leftrightarrow -z\cdot F'(z)$. $\Delta$

**6° (свертка решетчатых оригиналов).**

Если $f(n)\leftrightarrow F(z),\ \varphi(n)\leftrightarrow \Phi(z)$, то

$$f(n)*\varphi(n)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k) \leftrightarrow F(z)\Phi(z).$$

▲ Обозначим через $g(n)$ свертку двух решетчатых функций $f(n)$ и $\varphi(n)$:

$$g(n)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k),$$

а через $G(z)$ – $Z$-изображение для $g(n)$.

По определению

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k)}{z^n}=\left|\text{изменим порядок суммирования}\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n-k)}{z^n}=\left|\begin{array}{l}\text{замена}:\\ m=n-k\\ n=m+k\end{array}\right|=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{z^{m+k}}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{z^k}}_{F(z)}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{z^m}}_{\Phi(z)}=F(z)\Phi(z).$$

**Таблица соответствия** $f(n)\leftrightarrow F(z)$

| № | $f(n)$ | $F(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\dfrac{z}{z-1}$ |
| 2 | $(-1)^n$ | $\dfrac{z}{z+1}$ |
| 3 | $e^{\alpha n}$ | $\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$ |
| 4 | $a^n$ | $\dfrac{z}{z-a}$ |
| 5 | $a^n\cdot e^{\alpha n}$ | $\dfrac{z}{z-a\cdot e^{\alpha}}$ |
| 6 | $\dfrac{a^n}{n!}$ | $e^{\frac{a}{z}}$ |
| 7 | $n\cdot a^{n-1}$ | $\dfrac{z}{(z-a)^2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | $(n+1)\cdot a^n$ | $\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$ |
| 9 | $a^n\cdot\sin\beta n$ | $\dfrac{az\sin\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$ |
| 10 | $a^n\cdot\cos\beta n$ | $\dfrac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$ |
| 11 | $\cos\beta n$ | $\dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$ |
| 12 | $\sin\beta n$ | $\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$ |
| 13 | $n$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ |
| 14 | $n^2$ | $\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |

Докажем некоторые из данных формул.

1) $f(n)=1$

$$1\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots=\left\{\left|\frac{1}{z}\right|<1\Leftrightarrow|z|>1\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}.$$

5) $f(n)=a^n\cdot e^{\alpha n}$

$$a^n\cdot e^{\alpha n}\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cdot e^{\alpha n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^n=1+\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}+\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^n+\ldots=$$

$$=\left\{\left|\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right|<1\ \Leftrightarrow\ |z|>e^{\alpha}|a|\right\}=\frac{1}{1-\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}}=\frac{z}{z-a\cdot e^{\alpha}}$$

В частности, при $a=1$ получим формулу 3): $e^{\alpha n}\leftrightarrow\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$; а при $\alpha=0$ получим формулу 4): $a^n\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$.

6) $f(n)=\dfrac{a^n}{n!}$

$$\frac{a^n}{n!} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! \cdot z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a}{z}\right)^n = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a}{z}\right)^n + \ldots = e^{\frac{a}{z}}$$

Здесь мы воспользовались известным разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

### 8.3. Восстановление решетчатой функции по ее Z-преобразованию

Рассмотрим вопрос о восстановлении решетчатой функции $f(n)$ по ее $Z$ - изображению $F(z)$.

Отметим, что в некоторых простейших случаях восстановить решетчатую функцию по ее изображению можно используя таблицу основных Z-преобразований и его свойства.

**Пример 8.1**. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}$.

Решение

Представим дробь $F(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+B(z+1)}{z^2+3z+2}$$

Используя метод частных значений получим: $\begin{matrix} z=-1: & A=-2 \\ z=-2: & B=3 \end{matrix}$.

Таким образом $\frac{z-1}{z^2+3z+2} = -2 \cdot \frac{1}{z+1} + 3 \cdot \frac{1}{z+2}$.

Используя таблицу, свойства линейности и запаздывания аргумента получим:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} \leftrightarrow (-1)^{n-1}, \qquad \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+2} \leftrightarrow (-2)^{n-1}$$

А значит $F(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} \leftrightarrow -2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1} = f(n)$.

**Ответ**: $f(n) = -2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Далее рассмотрим некоторые вспомогательные определения.

**Определение 8.5.** Точки, в которых нарушается аналитичность функции $F(z)$ называются ее **особыми точками** (о.т.).

**Определение 8.6.** Особые точки, для каждой из которых существует такая ее окрестность, в которой нет других особых точек функции $F(z)$, называются **изолированными особыми точками** (и.о.т.).

**Определение 8.7.** И.о.т. $z_0$ функции $F(z)$ называется **полюсом**, если $\lim\limits_{z\to z_0} F(z)=\infty$.

**Утверждение 8.1.** Если функция $F(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ некоторые многочлены, то ее особыми точками являются нули знаменателя, то есть корни многочлена $Q(z)$ (простой корень является простым полюсом, а корню кратности $m$ соответствует полюс такой же кратности).

**Утверждение 8.2.** Если $z_1, z_2, \ldots, z_k$ особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри некоторого круга $|z|=R_1$, тогда решетчатая функция $f(n)$ может быть найдена по формуле

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right), \tag{8.4}$$

где

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to z_i}\left((z-z_i)\cdot F(z)\cdot z^{n-1}\right), \tag{8.5}$$

если $z_i$ - простой полюс;

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_i)^m\cdot F(z)\cdot z^{n-1}\right), \tag{8.6}$$

если $z_i$ - полюс кратности $m$.

**Утверждение 8.3.** Если функция $F(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ является правильной дробью и $z_i$ $(i=\overline{1,k})$ - ее простые полюса, тогда решетчатую функцию $f(n)$ можно найти по формуле

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}\cdot z_i^{n-1} \qquad (8.7)$$

Вернемся к условию примера 8.1. и решим его с помощью формул (8.4) и (8.7).

**Пример**. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z)=\dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$.

Решение

1) Используем формулу (8.4).

Точки $z_1=-1$ и $z_2=-2$ являются простыми корнями знаменателя, а значит простыми полюсами функции $F(z)$, поэтому

$$f(n)=\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)+\operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right).$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся формулой (8.5), а также тем, что функцию $F(z)$ можно записать в виде $F(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z+2)}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to-1}\left((z+1)\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)}\cdot z^{n-1}\right)=-2\cdot(-1)^{n-1}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to-2}\left((z+2)\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)}\cdot z^{n-1}\right)=3\cdot(-2)^{n-1}$$

С учетом полученных выражений имеем

$$f(n)=-2\cdot(-1)^{n-1}+3\cdot(-2)^{n-1}.$$

2) Используем формулу (8.7).

$$f(n)=\frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot z_1^{n-1}+\frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}\cdot z_2^{n-1}=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{P(-2)}{Q'(-2)}\cdot(-2)^{n-1}\langle=\rangle$$

Вычислим $Q'(z)$: $Q'(z)=2z+3$, тогда

$$\langle=\rangle\frac{-1-1}{2\cdot(-1)+3}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{-2-1}{2\cdot(-2)+3}\cdot(-2)^{n-1}=-2\cdot(-1)^{n-1}+3\cdot(-2)^{n-1}$$

**Пример 8.2.** Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)^3}$.

Решение

В данном случае $z=1$ – особая точка знаменателя, корень кратности 3, а значит и полюс 3-го порядка.

Используя формулы (8.4) и (8.6) получим

$$f(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left[F(z)z^{n-1}(z-1)^3\right]^{//}=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left[(z+3)z^{n-1}\right]^{//}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left[z^n+3z^{n-1}\right]'=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left[n\cdot z^{n-1}+3(n-1)z^{n-2}\right]^{/}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left[n(n-1)z^{n-2}+3(n-1)(n-2)z^{n-3}\right]=\frac{1}{2}(n-1)(n+3n-6)=(n-1)(2n-3).$$

**Ответ:** $f(n)=(n-1)(2n-3)$.

## 8.4. Разностные уравнения

**Определение 8.8.** Пусть $f(n)$ некоторая решетчатая функция. Функция

$$\boxed{\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)} \qquad (8.8)$$

называется **конечной разностью первого порядка** (первой конечной разностью).

Далее можно записать определения и формулы для конечных разностей второго, третьего и т.д. порядков.

Функция $\Delta^2 f(n)=\Delta\left(\Delta f(n)\right)$ называется **конечной разностью второго порядка**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta^2 f(n)=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)=f(n+2)-f(n+1)-(f(n+1)-f(n))=\\&=f(n+2)-2f(n+1)+f(n)\end{aligned}} \qquad (8.9)$$

Рекуррентно $k$-я конечная разность определяется следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta^k f(n)=\Delta\left(\Delta^{k-1}f(n)\right)=\Delta^{k-1}f(n+1)-\Delta^{k-1}f(n)=f(n+k)-C_k^1 f(n+k-1)+\\&+C_k^2 f(n+k-2)-\ldots+(-1)^i C_k^i f(n+k-i)+\ldots+(-1)^k f(n),\end{aligned}} \qquad (8.10)$$

где $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ - биномиальные коэффициенты.

Формулы (8.8) – (8.10) выражают разности решетчатой функции через значения этой функции в целочисленных точках. Рассмотрим, как можно выразить значения самой решетчатой функции $f(n)$ через ее разности различных порядков.

**Определение 8.9. Разностным уравнением $k$-го порядка** называется любое соотношение, связывающее неизвестную решетчатую функцию $f(n)$ и ее разности до порядка $k$ включительно:

$$F\left(n,\ f(n), \Delta f(n), \Delta^2 f(n), \ldots, \Delta^k f(n)\right) = 0 \qquad (8.11)$$

или с учетом формул (8.10)

$$F\left(n,\ f(n),\ f(n+1),\ f(n+2), \ldots, f(n+k)\right) = 0 \qquad (8.12)$$

**Определение 8.10. Решением** уравнений (8.11) или (8.12) называется любая решетчатая функция $f(n)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$

**Определение 8.11. Линейным разностным уравнением $k$-го порядка** называется уравнение вида

$$a_0 y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \ldots + a_k y(n) = f(n), \qquad (8.13)$$

где $a_i = \text{const.}$, $i = \overline{0, k}$, причем $a_0 \neq 0, a_k \neq 0$.

Если решетчатая функция $f(n) \equiv 0$, то уравнение (8.13) называется **однородным**; в противном случае – **неоднородным**.

**Определение 8.12. Начальными условиями** для разностного уравнения (8.13) называются условия вида

$$y(n_0) = y_0, \quad y(n_0+1) = y_1, \quad \ldots \quad y(n_0+k-1) = y_{k-1} \qquad (8.14)$$

Решение разностного уравнения (8.13) с начальными условиями (8.14) называется **задачей Коши**.

## 8.5. Решение разностных уравнений и систем разностных уравнений с помощью $Z$-преобразования

Рассмотрим приложения $Z$-преобразования к решению линейных разностных уравнений.

**Алгоритм решения линейного разностного уравнения $k$-го порядка**

Дано линейное разностное уравнение вида (8.13):

$$a_0 y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \ldots + a_k y(n) = f(n)$$

при начальных условиях вида (8.14)

$$y(0)=y_0, y(1)=y_1,\dots,y(k-1)=y_{k-1},$$

где $y_0, y_1,\dots,y_{k-1}$ – заданные числа.

1) Применим $Z$-преобразование с учетом его свойств к обеим частям уравнения (8.12):

$f(n)\leftrightarrow F(z)$

$$y(n)\leftrightarrow Y(z),$$
$$y(n+1)\leftrightarrow z[Y(z)-y_0],$$
$$y(n+2)\leftrightarrow z^2\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}\right)\right],$$

…………………………………………

$$y(n+k-1)\leftrightarrow z^{k-1}\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}+\frac{y_2}{z^2}+\ldots+\frac{y_{k-2}}{z^{k-2}}\right)\right],$$
$$y(n+k)\leftrightarrow z^{k}\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}+\frac{y_2}{z^2}+\ldots+\frac{y_{k-1}}{z^{k-1}}\right)\right].$$

2) Подставим данные выражения в уравнение (8.13) и используя свойство линейности, а также то, что из равенства решетчатых оригиналов следует равенство их $Z$-изображений, получим операторное уравнение:

$$Y(z)(a_0z^k+a_1z^{k-1}+a_{k-1}z+a_k)-y_0(a_0z^k+a_1z^{k-1}+a_{k-1}z)-$$
$$-y_1(a_0z^{k-1}+a_1z^{k-2}+a_{k-2}z)-\ldots-y_{k-1}a_0z\equiv F(z).$$

Данное уравнение легко решается относительно функции $Y(z)$. Запишем его в виде:

$$Y(z)\varphi(z)-\psi(z)\equiv F(z),$$
$$Y(z)=\frac{F(z)+\psi(z)}{\varphi(z)}.$$

3) Далее стандартным образом необходимо восстановить решетчатый оригинал $y(n)$.

**Замечание.** Аналогичным образом решаются системы линейных разностных уравнений.

**Пример 8.3.** Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2)-y(n)=2^n$ при начальных условиях $y(0)=y(1)=0$.

Решение

Пусть $y(n) \leftrightarrow Y(z)$, тогда

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}\right)\right]=z^2\left[Y(z)-\left(0+\frac{0}{z}\right)\right]=z^2\cdot Y(z).$$

Также по формуле 4) таблицы соответствия имеем $2^n \leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}$.

Запишем операторное уравнение:

$$z^2\cdot Y(z)-Y(z)=\frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow \quad (z^2-1)\cdot Y(z)=\frac{z}{z-2}.$$

Выразим функцию $Y(z)$: $\quad Y(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z-2)}$.

Восстановим решетчатый оригинал $y(n)$ по полученному $Z$-преобразованию.

Так как особые точки $z_1=1, z_2=-1, z_3=2$ функции $Y(z)$ являются ее простыми полюсами, то используя формулы (8.4) и (8.5) находим:

$$y(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)z^{n-1}\langle=\rangle$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z-1)\cdot z^{n-1}=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to -1}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z+1)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{6}\cdot(-1)^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z-2)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

$$\langle=\rangle-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}+\frac{2^n}{3}.$$

**Ответ:** $y(n)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{6}+\dfrac{2^n}{3}$.

**Пример 8.4.** Решите систему линейных разностных уравнений

$$\begin{cases} x(n+1)-x(n)+y(n)=3^n \\ y(n+1)+2x(n)=-3^n \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=3, y(0)=0$.

Решение

Пусть $x(n)$ – решетчатый оригинал, а $X(z)$ – его Z-изображение.

Пусть $y(n)$ – решетчатый оригинал, а $Y(z)$ – его Z-изображение.

Тогда с учетом начальных условий будем иметь

$$x(n) \leftrightarrow X(z);$$
$$x(n+1) \leftrightarrow z[X(z) - x(0)] = z[X(z) - 3)].$$

Аналогично

$$y(n) \leftrightarrow Y(z),$$
$$y(n+1) \leftrightarrow z[Y(z) - y(0)] = zY(z),$$
$$3^n \leftrightarrow \frac{z}{z-3}.$$

Соответствующая операторная Z-система имеет вид:

$$\begin{cases} z[X(z)-3] - X(z) + Y(z) = \dfrac{z}{z-3}, \\ zY(z) + 2X(z) = -\dfrac{z}{z-3}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (z-1)X(z) + Y(z) = \dfrac{3z^2-8z}{z-3}, \\ 2X(z) + zY(z) = -\dfrac{z}{z-3}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему по правилу Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z \end{vmatrix} = z^2 - z - 2, \qquad \Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{3z^2-8z}{z-3} & 1 \\ -\dfrac{z}{z-3} & z \end{vmatrix} = \frac{z(3z^2-8z+1)}{z-3},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} z-1 & \dfrac{3z^2-8z}{z-3} \\ 2 & -\dfrac{z}{z-3} \end{vmatrix} = \frac{z - z^2 - 6z^2 + 16z}{z-3} = \frac{-7z^2+17z}{z-3}$$

$$X(z) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{z(3z^2-8z+1)}{(z-3)(z+1)(z-2)} \quad \text{и} \quad Y(z) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{17z-7z^2}{(z-3)(z+1)(z-2)}.$$

Далее по полученным Z-изображениям $X(z)$ и $Y(z)$ восстановим решетчатые оригиналы $x(n)$ и $y(n)$.

Используем формулы (8.4) и (8.5) для простых полюсов $z_1 = -1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$:

$$x(n) = \operatorname*{Res}_{z=-1}\left(X(z)\cdot z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=2}\left(X(z)\cdot z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=3}\left(X(z)\cdot z^{n-1}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{(3z^2-8z+1)z^n}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z\to 2}\frac{(3z^2-8z+1)z^n}{(z+1)(z-3)} + \lim_{z\to 3}\frac{(3z^2-8z+1)z^n}{(z+1)(z-2)} =$$

$$= \frac{3+8+1}{12}(-1)^n + \frac{12-16+1}{-3}2^n + \frac{27-24+1}{4}3^n = (-1)^n + 2^n + 3^n;$$

$$y(n) = \operatorname*{Res}_{z=-1}\left(Y(z)\cdot z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=2}\left(Y(z)\cdot z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=3}\left(Y(z)\cdot z^{n-1}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{(17-7z)z^n}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z\to 2}\frac{(17-7z)z^n}{(z+1)(z-3)} + \lim_{z\to 3}\frac{(17-7z)z^n}{(z+1)(z-2)} =$$

$$= 2(-1)^n - 2^n - 3^n.$$

**Ответ:** $x(n) = (-1)^n + 2^n + 3^n$, $y(n) = 2(-1)^n - 2^n - 3^n$.