Universidad La Salle México

Cuestionario 1

Santiago Neiszer, Marco Osornio

27 de mayo de 2024

1. Ejercicio 1

(1) Verdadero, porque el PCA halla la maxima variabilidad y con eso forma la cámara de Weyl

(2) Verdadero, porque son ortogonales

(3) Verdadero, por Hotelling-Fisher, se trabaja con los datos reduciendo lo más posible la dimensión $p \ll n$

2. Ejercicio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula la primer componente principal

Primer paso: Calcular los eigenvalores

$$\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 2$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 1$

Segundo paso: Meterlos a la cámara de Weyl

Tercer paso: Calcular los eigenvectores

$\det(XX^T - 2I) \cdot \mathbf{v}_1 = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Así: v = (1,0,0)

3. Ejercicio 3

Suponga que se tiene la siguiente tabla:

Observación	X_1	X_2
1	-2	2
2	2	-2

- La primer componente (loading) del eigenvector que resuelve el problema de optimización del PCA para X_1 es 0.7071.
- La primer componente (loading) del eigenvector que resuelve el problema de optimización del PCA para X_2 es negativa.

Calcula Xb_1

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ Xb_1 \end{pmatrix}$$

Asi el eigenvector puede ser cualquier vector en el espacio generado por el primer eje, tambien sabemos que:

$$b_{1_1}^2 + b_{1_2}^2 = 1$$

$$1 - b_{1_1}^2 = b_{1_2}^2$$

$$b_{1_2}^2 = 1 - 0.7071^2$$

$$b_{1_2} = \sqrt{1 - 0.7071^2}$$

$$b_{1_2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{pmatrix}$$

$$b_{1_2} = \begin{pmatrix} 1 - 2(0.7071) + 2(-.07071) \\ 2(0.7071) - 2(0.7071) \end{pmatrix}$$

$$b_{1_2} = \begin{pmatrix} -1.8284 \\ 2.8284 \end{pmatrix}$$

4. Ejercicio 4

Es facil ver que en la figura izquierda que los ejes coordenados son los que corresponden a los de los componentes principales, al buscar la ortogonalidad mientras estos se rotan para que no exista una correlación.

5. Ejercicio 5

Como X, X_1, X_2 son variables aleatorias gaussianas con media cero y matriz de covarianza identidad $W(0,1)$ y $Y_1 = 0.5X + 2X_1$, y $Y_2 = -0.5X + 2X_2$, así Y:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que Y comp Y es una com. lineal de variables gaussianas, Y es gaussiano.

$$\text{Cov}(Y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para los valores propios :

—Cov(Y) - $\lambda I| = 0$,Y dan como resultado: $\lambda_1 = 9.25 y \lambda_2 = 0.75$.Los eigenvectores que tenemos son:

$$\lambda_1 = 9.25 :$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.803 \\ -0.596 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = .75 :$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -.596 \\ .803 \end{pmatrix}$$

$\text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$

6. Ejercicio 6

Supongamos que el eigenvector de la primera componente principal del conjunto de datos es (0.707. -0.5. -0.5). Calcula la proporción de la varianza explicada por el primer componente.

$$v_1 = (0.707)^2 + (-0.5)^2 + (-0.5)^2$$

$$v_1 = 0.5 + 0.25 + 0.25$$

$$\lambda_1 = 1 :$$

La proporción de la varianza es:

$$1/1 = 1 :$$

7. Ejercicio 7

(a) Falso, La proposición de varianza explicada por un componente principal adicional sí puede disminuir a medida que se agregan más componentes principales.

(b) Verdadero, La proposición acumulativa de la varianza explicada nunca decrece a medida que se agregan más componentes principales.

(c) Falso, Usar todas las posibles componentes principales no necesariamente provee de un mejor entendimiento de los datos.

(d) Verdadero, La gráfica scree sí provee un método para determinar el número de componentes principales a usar.

8. Ejercicio 8

Podemos ver que todas las aseveraciones son falsas, ya que en el PCA se hace una transformación ortogonal y en ninguna de las gráficas observamos dicha transformación ortogonal.

9. Ejercicio 9

(1) Falso.

(2) Verdadero.

(3) Verdadero.

10. Ejercicio 10

Para poder saber cual de los vectores representa mejor la primera componente principal, debemos calcular los vectores y valores propios de la matriz de covarianza de los datos.

Supongamos que ya normalizamos los datos sacando su desviacion estandar y su media cero.

Tenemos la matriz covarianza M:

$$M = (1/n)X^T X$$

Siendo n el numero de observaciones.

Entonces calculamos los valores y vectores propios de M.

Despues tenemos que el vector propio asociado con el valor mas grande es la direccion de la primera componente principal.

Como no tenemos ni los datos ni la matriz de covarianza podemos analizar las caracteristicas de los vectores pedidos.

(A) (1,1,1,1) Nos dice que las caracteristicas tienen el mismo peso, por lo que no hay una caracteristica sobresaliente.

(B) (0.5,0.5,-0.5,0.5) Este vector parece tener un equilibrio teniendo carcteristicas positivas y negativas.

(C) (1,-1,1,-1) Este es similar al anterior pero con la diferencia de que sus caracteristicas son cotrapuestas con un peso de 1.

(D) (0.7071,0,-0.7071,0) En este vector podemos ver que esta ponderado mas las caracteristicas diagonales de la matriz de covarianza.

(E) (0.5,0.5,0.5,0.5) Similar al primero, todas las caracteristicas tienen el mismo peso.

Si la matriz de covarianza refleja una relacion lineal mas fuerte entre las caracteristicas, esperariamos que le vector propio este mas alineado con esas caracteristicas.

Por lo que, el vector propiio que representa la mejor primer componente principal probablemente es D o B, ya que parecen sugerir una direccion donde las caracteristicas estan relacionadas de manera mas significativa. Pero la verdadera eleccion final dependera de como estan distribuidas todas las caracteristicas y de los datos.