1. 함수

- 선형대수학이란?

선형(Linear) + 대수학(Algebra)

대수학의 한 분야. 선형사상(Linear Map)에 관한 대수학

△ 선형 : 함수 f가 가산성과 동차성을 만족할 때 함수 f는 선형

. 가산성(Additivity) : 임의의 수 x, y에 대해 $f(x+y) = f(x) + f(y)$가 항상 성립

ex: $f(x) = 5x$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \ln x + 4$

. 동차성(Homogenity): 임의의 수 x와 a에 대해 $f(ax) = af(x)$가 항상 성립

△ 대수 : 수를 대신하여 문자를 사용

- $1, 2, 3 \to a, b, c$
- $1+2=3 \Rightarrow a+b=c$

⇒ 숫자를 가지고 계산하는것이 아니라 자연현상을 논리적으로 표현하고 예측할 수 있도록 도와주는 방법에 대해 연구하는 학문

○ 집합(Set) : 수학 객체를 모아놓은것

- 집합 내 객체 = 원소(Element) [중복원소는 생략, 순서상관 X]
- $\in$: 객체가 집합에 속함
- R: 실수(real number) → $\{x \in R : x \geq 0\}$: 실수 집합을 구성하는 모든 원소들 중 $x \geq 0$인 원소들

R이 생략된 표현 $\{x : x \geq 0\}$

○ 튜플을 원소로 하는 집합 : $\{\underline{(x, y)} \in R \times R : y = x^2\}$ R^2

x, y Tuple : 각각 실수 집합 R에서 왔고 : 이 x랑 y는 $x^2 = y$인 관계의 집합

- $A \subseteq B$: A는 B의 부분집합 : 속하거나 같은
- $A = B$: A와 B가 같다 : $A \subseteq B$ 와 $B \subseteq A$ 가 성립

△ 집합의 곱

- 카테시안 곱: $a \in A$, $b \in B$의 가능한 모든 쌍 (a, b)로 이루어진 집합

  ex: $A = \{1, 2\}$, $B = \{○, □, △\}$에 대한 카테시안 곱은

  $\{(1, ○), (2, ○), (1, □), (2, □), (1, △), (2, △)\}$

△ 집합크기:
집합도 원소일수 있음. $A = \{1, \{2, 3\}\}$ 이면 A의 크기 2

O 함수 : 집합의 원소를 다른 집합의 원소에 할당하는 어떤 것

- Function 혹은 사상(Mapping) f는 집합 X의 임의의 한 원소를 집합 Y의 오직 한 원소에 대응시키는 이항 관계
- $f: X \to Y$
- X: 정의역 (domain)
- Y: 공역 (co-domain) : 공역의 모든 원소가 함수값이 되어야 하는건 아님
- $f(X)$: 치역 (range)
- 표현: f에 의한 a의 상 : $f(a)$

  $r = f(a)$: "a는 r로 매핑된다" : $a \mapsto r$

  ↳ 무슨 함수?

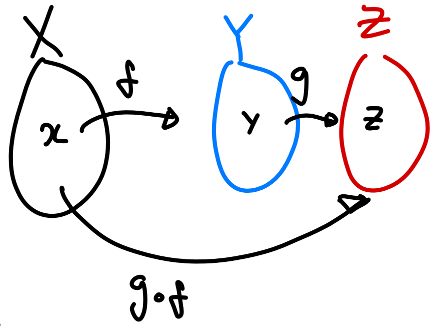
  $f: D \to F$ 로 표기. D에서 F로의 함수 f

○ 항등함수 : 임의의 정의역 D에 대하여 $I: D \to D$ 이고

D의 모든 원소 x에 대해서 $I(x) = x$ 이면

I를 D에 대한 항등함수라 함.

○ 함수의 합성



ex) $f: A \to B$, $g: B \to C$ 를 합성하면

$f \circ g$ 이 모든 $x \in A$에 대하여 다음이 성립

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

* 함수 f의 치역이 g의 정의역에 포함되어 있어야 함.

△ 합성함수 결합법칙

함수 f, g, h에 대하여 만약 합성함수가 존재한다면 다음이 성립

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$\sqrt{2}$는 유리수라면 $\frac{m}{n}$ 꼴 가능 (단, m, n은 서로소인 정수, $n \neq 0$)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m^2 = 2n^2$

m^2 : 짝수, m도 짝수이니

$m = 2k$인 정수 k 있음.

$2n^2 = m^2 = 4k^2$. $n^2 = 2k^2$. n^2 짝수, n도 짝수

m, n 서로소인 가정 모순. $\sqrt{2}$: 무리수

나 햄버거 3개 [illegible].

직접 먹는것.

○ 증명방법 : 직접증명, 수학적 귀납법, 귀류법, 대우증명법

● 역함수 : 다음 조건을 만족하면 함수 f와 g는 서로 역함수 f^{-1} 이다.

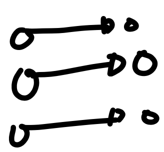
- $f \circ g$가 정의되고 g의 정의역에 대한 항등함수
- $g \circ f$가 정의되고 f의 정의역에 대한 항등함수

○ 모든 함수가 역함수 가지는 것 아님

○ 역함수를 가지는 함수는 가역함수라 함.

○ 단사함수 - 전사함수

one to one



$f(x) = f(y)$가 $x = y$이면 $f: D \to F$를 단사 (one-to-one)라 함.

모든 $z \in F$에 대해, $f(x) = z$를 만족하는 $x \in D$가 존재하면 전사(Onto)라 함.

Onto : 공역 = 치역

2. Vector

단위 vector, unit vector

$\|u\| = 1$

○ Vector의 크기 표현은 절대값 2중 쓰기 같은 표현으로 함.

○ 정규화 : Vector V의 단위 vector u를 만드는 과정

$$\frac{1}{\|v\|} v = u$$

필드 F에 속하는 n개의 원소를 가지는 벡터.

F상의 n-벡터. F^n

표기:

$v = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = (1,3)$ → Norm : 벡터의 크기

$v_1 = 1,\ v_2 = 3$ ↳ V의 Norm : $\sqrt{10}$

Vector ~~+~~ 스칼라 불가능

$$\text{선형결합} : [\underbrace{v_1, v_2, v_3, \cdots v_n}_{\text{벡터}}] - [\underbrace{c_1, c_2, \cdots c_n}_{\text{계수}}]$$

$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n$에 매핑하는 함수

선형결합을 통해 y에 도달가능하게하는 $c_1, \dots c_p$를 해라함.

해 여러개 가능. 해집합

내적 : $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots$

$= \|u\| \, \|v\| \cos\theta$

선형독립 : 벡터들이 서로 다른차원 표현

$c_1v_1 = c_2v_2 \to c_1, c_2$ 모두 0일때만 성립

$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \Rightarrow c_1, c_2, c_3, \dots = 0$ 이면 성립

이게 아니면 선형종속. 같은차원O

3. 행렬

$$\begin{bmatrix} 1, 2, 3 \\ 4, 5, 6 \end{bmatrix} \rightarrow$$ 2×3 행렬
2행 3열

행: 층, 열: 호수

I 라고 함.

단위행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↓

행, 열 크기 같아야 함.

d×d 일때 대각선 \ 이 1, 나머지 0

(transpose)

전치: 행, 열 성분 바꾸는 것

$(i,j) \rightarrow (j,i)$

$A = \begin{bmatrix} x & n \\ y & m \end{bmatrix}$

$3A = \begin{bmatrix} 3x & 3n \\ 3y & 3m \end{bmatrix}$

↓

스칼라곱

행렬연산

+, − : 성분끼리. 행렬크기가 같을때만 가능

× : 좌측 행렬의 열의 수와 우측 행렬의 행의 수가 같을때만 가능 → 행렬끼리 곱

결과는?

$m \times \underbrace{n \quad n}_{\text{같아야 가능}} \times k \rightarrow m \times k$ 행렬

	햄버거	콜라
K	1500	1000
L	2000	500

2×2

	A
햄	3
콜	2

2×1

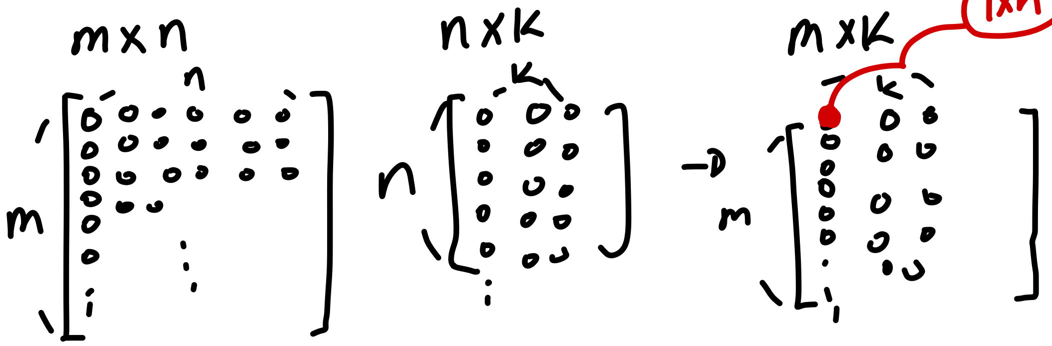
$\begin{pmatrix} 6500 \\ 7000 \end{pmatrix}$ → 지불해야할 돈

(2×1)

A가 사고싶은 양과 회사의 가격

※곱셈 결과의 해석

● 벡터곱 방식은 결국?



(1xn) x (nx1)의 원리 2개

m x n ~ n x k

ㄴ 같은 개수여야 함

단위 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

m x m 행렬

dem. (d,d) = 1

나머지다 0

대칭행렬 : $M^T = M$.

M^T는 M의 전치 (Transpose)

기본행 연산

$m \times n$ 행렬 A의 다음 3가지 연산

① A의 두 행 i, j를 서로 바꿈 $R_i \leftrightarrow R_j$

② A의 i행에 0이 아닌 상수 K를 곱함 $KR_i \to R_i$

③ A의 i행을 K배하여 j행에 더함 $kR_i + R_j \to R_j$

다 왼→오, 오→왼 가능

① $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} R_i \\ R_j \\ \end{array}$ $3R_i + R_j \to R_j$

행동치: 행렬 A에 기본행 연산을 해서 얻어지는 행렬을 B라 하면 A, B는 행동치

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 로 바꾸는 이유?

(RREF)

기약행 사다리꼴: 연립 방정식의 해. 행사다리꼴에서 줄인 꼴

m×n 행렬 E가 다음 3가지 성질을 만족하면 행사다리 꼴이라함 (REF)

① 성분이 모두 0인 행이 존재하면

그 행은 행렬의 맨 아래 위치한다.

(그전까지는 모두 0)

② 각 행에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 성분은 1이며

이때 이 1을 그 행의 선행 성분이라함

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ i행과 (i+1)행 모두에 선행 성분이 존재하면

(i+1)행의 선행성분은 i행의 선행성분보다 오른쪽에 위치

→ 1이 왼쪽으로 가까운 것부터 차례대로.

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

00

0이 → 0이 아닌 1이 대각선에

밑에 위치.

1 선행성분 밑에 0이 와야함

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

0이여야함

REF. 행사다리꼴

기약행 사다리꼴 : 행사다리꼴 +

선행성분 라인은 위, 아래 다 0이어야 함

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \times & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ 기약행으로 만들면?

연립방정식 풀이가능.

기본행 연산이 쓰는 과정

● 행렬은 선형연립방정식에 사용가능

$x_1 v + x_2 u + x_3 w = 0$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$Ax = b$

계수행렬

첨가행렬

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{계수행렬} & b \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 \cdots & x_n & \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} \cdots & & a_{n1} \\ \vdots & a_{22} \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \ddots & a_{mn} \end{array}\right. & & & \left|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right] \end{array}$$

가우스 조단 소거법

1. 선형연립방정식 → 첨가행렬로 변환
2. 첨가행렬 변환 → RREF 변환
3. 선행변수와 자유변수를 찾아 해표현
4. 해를 선행변수, 자유변수의 식으로 표현

Option : 해를 벡터로 표현

↓

선행변수 : 선행성분 가지고 있는 변수.
→ 다른 자유변수로 표현되는 변수

자유변수 : 선행성분을 가지지 못한 변수. → 어떤 값도 가질 수 있는.

- Step 4 : 해를 선행 변수와 자유 변수의 식으로 표현

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

< 해 구하기 완료 >

$$\boxed{\begin{aligned} & x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ & x_3 = -2x_4 \\ & x_6 = \tfrac{1}{3} \\ & x_2, x_4, x_5 \text{ are free} \end{aligned}}$$

↓ 해를 벡터로 표현

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

선형독립관계

↓

마지막 page 벡터들은 선형 독립 관계는?.

x_1, x_2, x_3 . . 는 다른축·차원

그래서 선형변수는 다른축, 차원에 영향은 받는다. 자유변수로 표현되는?

Week 4

복습 : Vector

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$V = (1,3)$ $u = (-3,2,5)$ 성분 $(1,1)$

$V_1 = 1, V_2 = 3$ 유향성분: 화살표 ↗

- Vector 공간

Vector들의 기하학적 의미

$\{cv : c \in R, 0 \le c \le 1\}$ 스칼라 $c = 0 \sim 1$ 이면 원점과 v를 지나는 선분이 형성

$\{cv : c \in R\}$ 스칼라가 어떤 수도 가질 수 있으면 원점과 v를 지나는 직선이 형성

Vector Field : 익형(비행기 날개) 주위의 공기흐름
두개의 같은 크기의 양전하 주위의 전기장
등등

Vector Space = Vector Dimension으로 이해

(실수) Vector 공간 V는 다음의 조건을 만족하는 덧셈과 스칼라 곱셈연산을 갖는, 벡터라고 불리는 원소들의 집합이다. (아래 u, v, w는 V의 임의의 원소, c, d는 스칼라다.)

집합 A와 연산 •에 대해 집합 A의 임의의 원소 a, b가 a•b∈A이면 A는 •에 관하여 닫혀있다.
ex 자연수 집합 +에 닫혀있고 -에는 닫혀있지 않다.

• 닫힘공리 $u, v, u+v \in V$

1. 합 $u+v$가 존재하고 V의 원소들이다. (V는 덧셈에 닫혀있다)
2. cu는 V의 원소이다. (V는 스칼라 곱셈에 닫혀있다.)

• 덧셈공리

3. $u+v = v+u$ (교환성질)
4. $u+(v+w) = (u+v)+w$ (결합성질)
5. V에 $u+0=u$를 만족하는 원소가 존재한다. 이 원소를 영벡터라 한다. (항등원)
6. V의 모든원소 u에 대해 $u+(-u)=0$ 이 되는 원소 $-u$가 존재한다. 이 원소를 u의 음이라고 한다. (역원)

항등원을 만든수 없나?

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2x3 행렬 항등원

• 스칼라 곱셈공리

7. $c(u+v) = cu+cv$
8. $(c+d)u = cu+du$
9. $c(d)u = (cd)u$
10. $1u = u$

즉 Vector공간은?

1. 집합이고
2. 덧셈, 스칼라 곱셈을 가지고
3. 10개를 만족해야함 (닫힘, 덧셈, 스칼라곱셈공리)

행렬 덧셈
스칼라 곱셈

• Vector 공간 예시

1. 행렬 집합

2. 정수 집합

3. $C(f)$ = Continuous function. 연속함수도

벡터공간인 경우 있음. 몰라도됨.

→ Vector 공간도 결국 집합의 일종.

그러면! 부분집합, 부분공간 존재

• SubSpace (부분공간)

Definition (정의)

+ V상에서 정의된 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 벡터공간이 될때 (위 P 10개 만족할 때)

만약 V, W는 벡터공간이고 V가 W의 부분집합이면, → 없으면 확인해야지.

V는 W의 부분공간이라 한다.

이경우 2,3,7,8,9,10 성립 [연산가능여부 연산결과가 W내에 있을 필요 X]

[벡터공간 V의 한 부분집합 W]가 V의 부분공간인지 판별

→ ① 덧셈에 대해 닫혀있나? $u, v \in W$ 면 $u+v \in W$

② 0 벡터 있나? $w+0=w$ 인 $0 \in W$

③ 역원 있나? $u \in W$ 면 $-u \in W$

④ $u \in W$ 면 $ku \in W$. 곱셈에 대해 닫혀있나?

— 벡터공간인지 판별

임의의

$\forall v \in V, \ v \in W$

$W \subset V$

V: vector space

존재한다

$\exists x \in N$

→ 기호알아만두고 확실히 쓰는거 아니면 한글로

■ 부분공간 예

R^2는 R^3의 부분공간은 아니다.

(성분 개수의 차이가 나기 때문에) → 부분집합인지 여부조차 따지지 못함. 다른차원.

그렇다면 아래의 벡터 집합은 R^3의 부분공간이 될수있나? (H는 R^3의 부분집합)

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} : s \text{ and } t \text{ are real} \right\} \quad \text{why?} \quad \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

좀 더 정확히

덧셈 $\begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1+s_2 \\ t_1+t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_1+s_2) \\ t_1+t_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ 같은 원소개수

판별

① Vector Space?

② 덧셈이 닫혀있나?

③ 스칼라곱이 닫혀있나?

곱셈 $c\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cs \\ ct \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (cs) \\ ct \\ 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, 성분 개수 3개

0벡터 포함.

안되는 예) $\begin{bmatrix} a^2 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ 집합은 R^3의 subspace 아님

$$\begin{bmatrix} a_1^2 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2^2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2+a_2^2 \\ b_1+b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} (a_1+a_2)^2 \\ b_1+b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a^2 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c\begin{bmatrix} a^2 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca^2 \\ cb \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} (ca)^2 \\ cb \\ 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a^2 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

R^2가 R^3의 subspace이 아닌 이유

R^2의 (a,b)는 R^3의 $(a,b,0)$ (이형성) 같은 모양이지만, R^3의 다른 부분공간 2차원 공간이고

이형성이 없음. 즉 표준적인 위상이 없음.

$(a,b) \neq (a,b,0)$. 이건 다른 각자의 벡터다.

부분집합 자체 판단이 안됨!

② 임의의, 모든 R^2에 대한거니

R^2 is not subspace of R^3!

$(a,b) \in R^2 \leftrightarrow (a,b,0) \in R^3 \leftrightarrow (a,0,b) \in R^3$

① R^2가 R^3로 할 때 그저 중심이 $(0,0,0)$이 아니라 $(0,0,1)$일 수도 있지!!

embed R^2 in R^3. for ↓

$(a,b) \in R^2 \leftrightarrow (a,b,1) \in R^3$?

Clearly the zero vector is not in the embedded R^2. So not subspace of R^3

Week 4-2

생성 : 조건을 선형결합식으로 줌

① Vector 표현

· 원소나열법 : 다 표기하기 가장간단 : $V = \{v_1, v_2, \cdots v_k\}$

R^2에서 $(7,12)^T = 2(2,3)^T + 3(1,2)^T$ → R^n은 성분이 몇개인지

· 조건제시법 : $V = \{v \mid v$는 ㅇㅇ조건 만족$\}$

② Vector Space는 어떤 벡터들의 선형결합만으로 표현할 수 있는 벡터들의 집합

(벡터공간 표현)

$V = \{v \mid v = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n (c_1, c_2, \cdots c_n \in R)\}$

$V = Span\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ → Vector $x_1, x_2, \ldots x_n$을 가지고 벡터공간 V를 만들어 냈다고 해서 생성(Span)이라 정의해서 사용가능

ex) $Span\{v_1 = [1,0], v_2 = [0,1]\} = [1,1], [1,-1] \cdots [2,0] \ldots$ 무한개

가능한 선형결합의 공간

Definition - Span

벡터들 $v_1, v_2, \cdots v_p$의 모든 선형결합으로 이루어진 집합을

이 벡터들의 생성이라고 하고

$Span\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$라고 쓴다.

R(실수) 또는 C(복소수)와 같은 무한집합 위의 벡터들에 대해 생성은 보통 무한집합

예시

· R^2로 구성되는 집합에서 $Span\{\emptyset\}$은 몇개의 벡터 포함? : 1개 [0,0]

· R상의 R^2 [2,3]의 Span은? : 무한개

· $Span\{v\}$가 유한개의 Vector들로 구성되는 R상의 R^2 Vector v은 무엇인가? : 영벡터, [0,0]

• 생성자(generator)

V : 벡터들의 집합

만약 $v_1, v_2, \cdots v_p$ 이 $V = \text{Span}\{v_1, \cdots v_p\}$ 만족하는 벡터들이면

$\{v_1, \cdots v_p\}$은 V 에 대한 생성집합

$v_1, \cdots v_p$ 는 V 에 대한 생성자들이라 함.

• 표준 생성자 : 성분하나만 1, 나머지 다 0

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ (e_1, e_2, e_3) $e_1, \cdots e_n$ → R^n 을 생성가능

ex) R^3

$$\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + e_3$$

• 부분공간정리

벡터공간 V에 속한 $v_1, \cdots v_p$가 있을때

$\text{Span}\{v_1, v_2, \cdots v_p\}$는 V의 부분공간이다.

how?

• 부분공간 예제   ① H는 부분공간

어떤 부분공간 H에 있는 벡터들은

모두 $(a-3b, b-a, a, b)$ 형태로 구성.

H가 R^4 의 부분집합 이라는 것을 보여라.

② H는 R^4의 subspace

$$\begin{bmatrix}a-3b\\b-a\\a\\b\end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_2}$$

?

H의 generator가 모두 R^4에 속하기 때문에 H는 R^4의 부분집합

● 기저 : 생성자를 효율적으로 선택

생성집합 내 선형종속관계 이 있는 벡터가 존재할 때 생성집합 내 벡터를 다 안쓰고 선형독립 관계 만 표현해도 같은 공간이다.

선형독립 관계에 있는 벡터들이 어떤 부분공간을 생성할 때 이 벡터들을 이 부분공간의 기저(Basis)라 한다.

벡터공간 V의 부분공간 H가 있을 때

V 내 벡터 집합 $S=\{v_1, \cdots v_s\}$이

S는 선형독립집합 이며

S를 가지고 span 하면 H와 같을때 : $H=\mathrm{span}\{v_1, \cdots v_s\}$

S는 H의 기저라고 부른다.

- 주어진 벡터가 어떤 공간의 기저인지 알려면?

1. 선형 결합 했을 때 해당 공간 만들 수 있나?
2. 주어진 벡터들이 서로 독립?

예제 : v_1, v_2, v_3는 R^3의 기저?

$$v_1=\begin{bmatrix}3\\0\\-6\end{bmatrix} \quad v_2=\begin{bmatrix}-4\\1\\7\end{bmatrix} \quad v_3\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}$$

① 선형독립 (첨가행렬 → REFF → 스칼라값 확인)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & -4 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\-6 & 7 & 5 & 0\end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -4/3 & -2/3 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ 자유변수 X. $\therefore c_1=c_2=c_3=0$

$\Downarrow$

선형독립확인

임의의 벡터 넣어서 만들 수 있는지 확인

R^3 내 어떤 벡터도 만들수 있음.

기저확인 법

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -6 & 7 & 5 & c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & g \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

Spanning Set Theorem

$H = \text{Span}\{v_1, \dots v_p\}$ 일 때

어떤 벡터 (v_k)가 다른 벡터들의 선형 결합이면

이 벡터 (v_k)를 제외하고 부분공간을 생성해도

원래의 부분공간인 H가 동일하게 생성됨.

→ 그래서 기저 찾을 때 '선형 독립'인 벡터만 선택

기저 찾는 방식

$v_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ → 기저 v_1, v_2

1. 행렬 RREF로 변환
2. 선행 변수에 연결된 벡터들이 기저

   자유변수와 연결된 벡터는

   다른 벡터들의 선형 결합으로 표현이 가능하다.

기저는 성분개수가 같아야함.

$\mathbb{R}^2$ 에선 기저의 개수는 2개 $\{(1,0),(0,1)\}$

$\mathbb{R}^3$ 에선 3개지. why?

각 차원당 1개가 있는거니

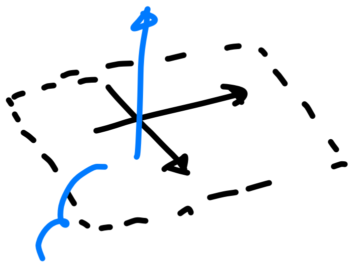
1차원당 기저의 개수 1개.

$\mathbb{R}^2$ 는 오직 2개의 기저 벡터를 가질 수 있음.

$(1,4)$ 는 $\mathbb{R}^3$ 에 포함되지 않음.

[칸 아카데미]

선형 종속 : linearly dependent



선형독립 : linearly independent

어떤 Vector 2개가
각각 선형결합해도 못나타내는거.
& 같은 방향 X.

2차원 상에서
Vector가 3개면
자명하게 1개는 여분

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}(\vec{\varnothing}) = \varnothing$$

$\mathrm{Span}\{v_1, \cdots v_p\}$: $v_1 \sim \cdots v_p$가 선형결합으로
표현할 수 있는 공간

선형종속 공식적인 정의

$S = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ $\Longleftrightarrow$ $c_1v_1 + \cdots c_nv_n = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

if only if

for some c_i's

not all zero : c_i가 다 0이 아니거나.

at least 1 is non-zero : 적어도 하나가 0이 아님.

선형 부분공간

Sub Space Of R^n — $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} x_i \in R, \ 1 \le i \le n \right.$

$V \leftarrow$ Subset of R^n

V Subspace of $\mathbb{R}^n$

3가지 의미

1. V Contains $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ vector
2. $\vec{X}$ in V 면 $c\vec{X}$ in V
   = 스칼라 곱셈에 대해 닫혀 있다.
3. $\vec{a}, \vec{b} \in V$. $\vec{a}+\vec{b} \in V$
   = 덧셈에 대해 닫혀있다.

벡터공간

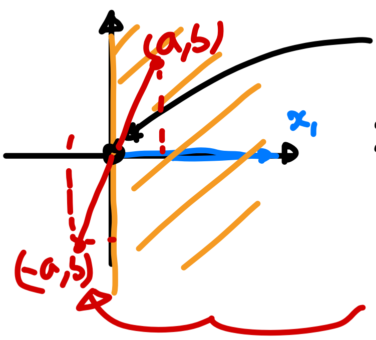
W가 V의 부분집합 일때 당연히 만족하는 게 있음. 안되는 것만 확인하면 됨.

1. u, v in V (W), $u+u$ in V
2. $\mathbf{0}$, 영벡터 존재
3. 역원 존재. — -1로 곱한거
4. u in V, $\underbrace{k}_{\text{스칼라}}u$ in V

나머지 6개는 W가 벡터공간인 것에서 확인 됨.

? 부분집합 얘기하는 듯

EX) $\underset{\text{subset}}{S} = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x_1 \ge 0 \right\}$



① Contain 0 Yes

: ② $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ $(a, c \ge 0)$ Yes

③ $-1\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} \notin S$. not a subspace of $\mathbb{R}^2$

sub space

$\left\{ V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_n\} \right.$

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ → S is a basis for V

기저는 어떤 공간을 생성하는데 필요한 "최소한의 벡터집합". - 선형독립, 어떤 공간을 Span할 수 있는

ex)

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\mathrm{Span}(S) = \mathbb{R}^2$

☆ ① Span(S) 의 공간은?

$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$

↓

$c_1 = \frac{x_2}{3}$

$c_2 = \frac{x_1}{7} - \frac{2}{21} x_2$

→ x_1, x_2 어떤 값을 넣든 가능. → ① $\mathrm{Span}(S) = \mathbb{R}^2$

② 선형독립확인 $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

$c_1, c_2 = 0$ 이면 선형독립

x_1, x_2 에 0 대입 → ② S는 선형독립

↓

- S is a basis for $\mathbb{R}^2$
- S는 $\mathbb{R}^2$의 기저

단위벡터 = 표준기저 집합

$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ = 부분공간 U의 기저.

↓

유일. what?

$\vec{a} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots c_n v_n$

$\vec{a} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots d_n v_n$

$(c_i \neq d_i)$ 인 $\vec{a}$가 없다면

$0 = (c_1 - d_1) v_1 + (c_2 - d_2) v_2 + \cdots (c_n - d_n) v_n$ → 선형독립이니 v_i는 다른 v_i의 곱이 X.

즉 $(c_i - d_i) = 0$. 모든 $c_i = d_i$. 모순. 즉 어떤 부분공간의 기저가 있으면 그 부분공간은 그 기저 벡터들의 유일한결합

특별한 공간들

1. 영공간

행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & & \vdots & \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = 0$$

어떤 공간의 벡터

- 행렬 A를 만나 0으로 가게되는 벡터들의 집합 혹은 그들이 이루는 공간
  행렬 A의 영공간

\- 수학적정의 -

$m \times n$ 행렬 A의 영공간, Nul A는

동차 식 $Ax = 0$의 모든 해 집합을 말함

$$\mathrm{Nul}\,A = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ and } Ax = 0\}$$

• 공간관련 질문

Q1. 어떤 벡터가 어떤 공간에 포함되나?

→ 선형 연립 방정식 해 존재 여부

Spanning set → 첨가행렬 → RREF에서 '0 0 … 0 | b' ($b \neq 0$) 존재여부

해당 행 존재여부

Q2. 이 공간의 기저는?

Spanning Set에서 선형독립 관계 벡터만 선택

↓ in 영공간?

영공간 포함여부 체크

주어진 벡터 u를 영공간 조건 $Ax = 0$에 대입해 성립하는지 확인

영공간 Spaning Set 구하기

ex) 첨가행렬 → RREF → Vector로 재표현

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & 7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}_{3\times5} \times X\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}_{5\times1}$$

$$Ax=\begin{bmatrix}2x_2+x_4-3x_5\\ x_2\\ -2x_4+2x_5\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{u}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}}_{v}+x_5\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}}_{w}$$

u, v, w가 Spaning Set

u, v, w가 기저.

[A의 자유변수 수 = 영공간의 기저 수]

⇓ 실제 과정

Step1. 첨가행렬

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c}-3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0\end{array}\right]$$

Step2 RREF ~, Step3 순행, 자유 변수 찾아 해를 표현

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{자유}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{u} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{v} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}_{w}$$

$$= x_2 u + x_4 v + x_5 w$$

$Ax=0$ 을 만족시키는 x들의 집합

A의 자유변수 = 영공간의 기저

열공간 · 행공간 → 행렬이 품고있는 벡터들로 만들수 있는 공간

행렬 M에

열공간 Col M은 행렬의 열들로 Span 가능한 공간

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & u_n & w_n \end{bmatrix}} = \overset{v}{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}} \overset{u}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}} \overset{w}{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}}$$

$$\mathrm{Col}A = \mathrm{Span}\{v, u, w\}$$

특징. Spanning set이 명시적으로 보임. (행렬의 열 임)

[A의 선행 변수의 수 = 기저의 수]

ex) (벡터 b가 A의 열공간에 포함 될수 있는가?)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5/2 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -9/2 \\ 0 & 1 & 3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$C_1 = -5C_3 - 9/2$

$C_2 = -3C_3 - 5/2$ →

C_3 is free

무수히 많은 해 존재

열공간 OK

$1 \cdot C_1 + (-3 \cdot C_2) + (-4 \cdot C_3) = 3$

하고싶은말이 해를 찾을수 있으니 조합 o 라는뜻인듯 ←

이때 C_3를 뭘 넣어도 3 제작가능

A 벡터로 b 만드는 법 여러가지

2. 열공간의 기저구하기

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

선행변수와 연결된 벡터 a_1, a_3, a_5 : 기저

• 행 vs 열 : A가 3x4라면

R^4의 부분공간

Nul A의 벡터의 총성분수는 A의 열 : 4

Col A 〃 A의 행 : 3 R^3의 subspace

• 행공간: 행렬 A의 행들의 선형결합으로 만들어진 공간

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

세워야함

$v_1 \; v_2 \; v_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$v = \text{row } A$

v가 A에 포함되나?

+

어떻게 스칼라곱해서 더해야 만들 수 있을까?

- 기저확인 - 일반방법 (보통방법)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 기저

-기저확인- 행공간 특화

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\1&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\1&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}\cdots\sim\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{ref}}$$

↳ 기초행연산 반복
(RREF)

-행공간 기저확인

① 행벡터를 열벡터 형태로 새행렬 만들고
선형독립 벡터 선택

② 원래행렬에 기본행 연산 적용 → REF, RREF로
만들고 0이 아닌행 선택

- 기본행 연산이 선형결합이기 때문에
  〃 을 해도 같은 행공간이 만들어지기 때문에

영공간

: 열 벡터가 선형독립 → 영공간은 $\vec{0}$ 만.

반대도 성립

열공간

$$\underset{m\times n}{A} \quad \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \text{ in Column Space}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$

$C(A) = \text{Span}(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)$

- 영공간, 열공간 기저 -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

기저인지는 모름.

$$C(A) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$N(A) = N(\mathrm{RREF}(A)) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$N(A) = N(\mathrm{RREF}(A)) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underset{\in\mathbb{R}}{\underline{x_3}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underset{\in\mathbb{R}}{\underline{x_4}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

영공간 : $\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

좌표 : 어떤 벡터공간 V 내의 모든 벡터 V를 고유하게 표현

내 기저를 생성집합으로 사용. 계수를 그대로 좌표로 사용가능
(고유함. 기저니) → span (Basic) 에서 계수 $c_1, c_2 \cdots$ 가
좌표

즉 기저가 아니면 안됨. 계수가 여러개 되니

ex) $\mathbb{R}^3$의 벡터 $V = (1,2,-5)$는

$\mathbb{R}^3$의 표준기저 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$에 대하여

$V = (1,2,-5) = e_1 + 2e_2 - 5e_3$ 임.

$\therefore [V]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$: 기저 $\mathcal{E}$에 대한 V의 좌표벡터

$\mathcal{E}$으로 벡터표현

전이행렬 : 어떤 좌표계의 좌표벡터 $[x]_\alpha$

↓

전이행렬 $P = [I]_\alpha^\beta$

↓

다른 좌표계의 좌표벡터 $[x]_\beta$

$$\therefore [x]_\alpha = P[x]_\beta = [I]_\beta^\alpha [x]_\beta$$

ex) 집합 $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$ 와 $\mathbb{R}^2$ 의 $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 일 때

두 기저 $\varepsilon, \beta = \{y_1, y_2\}$ 에 관하여 기저 B에서 기저 ε으로의

ε으로 B를 표현

전이행렬 $P = [I]_\beta^\varepsilon$ 는

$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$

$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$

$\rightarrow [y_1]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[y_2]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore P = [I]_\beta^\varepsilon = \left[[y_1]_\varepsilon, [y_2]_\varepsilon \right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

if $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ 일 때 위에 말을 표현하면

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \underbrace{[x]_\varepsilon = [I]_\beta^\varepsilon [x]_\beta = P[x]_\beta}_{} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\alpha=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$, $\beta=\{y_1,y_2,\cdots y_n\}$. α,β는 $\mathbb{R}^n$의

서로다른 순서기저.

$v\in\mathbb{R}^n$의 두좌표벡터 $[v]_\alpha$, $[v]_\beta$ 사이 관계생각.

$v=c_1y_1+c_2y_2+\cdots c_ny_n$ 이라 생각하면 $[v]_\beta=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$

이때, $[v]_\alpha=[c_1y_1+c_2y_2+\cdots c_ny_n]_\alpha=c_1[y_1]_\alpha+c_2[y_2]_\alpha+\cdots c_n[y_n]_\alpha$

이고 α에 관한 y_j의 좌표벡터를 $[y_j]_\alpha=\begin{bmatrix}p_{1j}\\\vdots\\p_{nj}\end{bmatrix}$라 하자.

α로 β표현.

행렬 P를 $P=[[y_1]_\alpha,[y_2]_\alpha,\cdots[y_n]_\alpha]=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}$라하면 다음성립.

$$[x]_\alpha=c_1\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\\vdots\\p_{n1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\\\vdots\\p_{n2}\end{pmatrix}\cdots c_n\begin{pmatrix}p_{1n}\\p_{2n}\\\vdots\\p_{nn}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=P[x]_\beta$$

$$\therefore P=[I]_\beta^\alpha=[[y_1]_\alpha,[y_2]_\alpha\cdots[y_n]_\alpha]$$

β에서 α로의 전이행렬 = 기저 α에 관한 β의 좌표벡터

α공간 에서의 위치를 빌려쓴거니 ← α공간으로 β를 표현 해줘야지

RREF3 전이행렬 구하기

① 계수행렬 + 첨가행렬 → rref 하면 첨가 부분이 전이행렬 P.
계수부분은 단위행렬 I

$\mathbb{R}^2$의 기저 $\alpha = \{(1,2), (3,0)\}$

$\beta = \{(2,1), (3,2)\}$

$u_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. $u_\beta = ?$

$[I]_\alpha^\beta$는

$$2a_1 + 3a_2 = 1 \qquad / \qquad 2b_1 + 3b_2 = 3$$
$$a_1 + 2a_2 = 2 \qquad / \qquad b_1 + 2b_2 = 0$$

계수가 같음. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{cc:cc} \text{계수} & & \text{첨가} & \\ \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc:cc} I & & P & \end{array}$$

전이행렬 $[I]_\alpha^\beta$

예시 2.

$\alpha = \{x_1 = (1,2,0), x_2 = (1,1,1), x_3 = (2,0,1)\}$

$\beta = \{y_1 = (3,-1,4), y_2 = (7,1,1), y_3 = (6,1,-4)\}$

$P = [I]_\beta^\alpha$ 는?

P → 전이행렬

$$\begin{array}{ccc:ccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc:ccc} & \alpha \to & & & \beta & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc:ccc} & I & & [y_1]_\alpha & [y_2]_\alpha & [y_3]_\alpha \end{array}$$

차원 3

좌표계를 구성하는 축의 개수: 기저의 크기

Span(S)의 dim은 S가 0이 아닌 벡터를 가지고 있으면
최소 1 ~ 최대 S의 기저의 크기 (집합의 크기는 원소수)

· 차원원리. 만약 W가 V의 부분공간이면 다음이 성립

$\dim W \le \dim V$

if $\dim V = \dim W$ then $V = W$

↳ $W = \mathrm{Span}(S) = V$로 이해. S는 W의 기저

랭크 = Span(S)의 차원. S로 생성하는 공간의 기저 벡터수

행렬 M에 대해 M의 행랭크 → 그 행렬의 행의 랭크 (Row M)
M의 열랭크 → 〃 열의 랭크 (Col M)

⇒ 임의 행렬에 행랭크 = 열랭크.

⇒ 행렬랭크 = 전치행렬의 랭크

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to$ rank 3.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$ rank 2

변환 · 어떤 공간의 벡터를 → 다른 공간으로 할당하는 함수

$\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로 변환 → $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Kernel

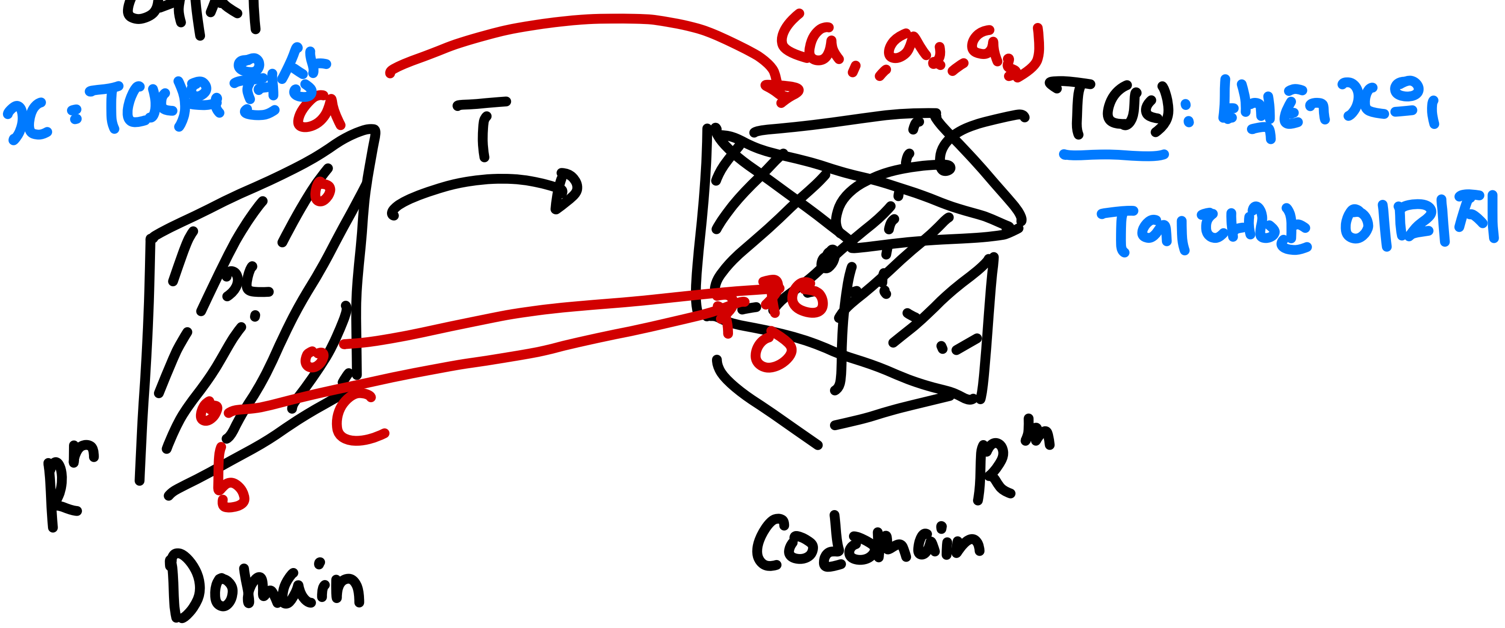
$$\mathrm{Ker}(T) = \{ v \in \mathrm{Domain} : \underline{T(v) = 0} \} \subseteq \mathrm{Domain}$$

v들의 집합

$T(v)=0$

v들의 상이 0으로 가면.

예시



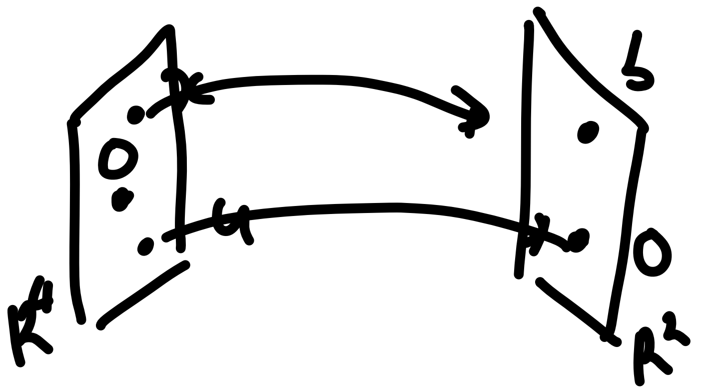
$$\mathrm{Ker}(T) : \{ b, c \}$$

○ 변환의 특수한 경우 = 변환이 행렬인 경우

행렬변환 : A가 $m \times n$

$$T_A(x) = Ax, \quad x \in R^n \text{ 인}$$

$$T_A : R^n \to R^m$$



ex) 다음의 행렬변환이 있을 때

T에 대한 u의 이미지인 T(u)는?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Au = \quad '' \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

○ T에대해 x의 이미지가 b . x는?

$$A \quad x \quad = \quad b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} . \quad x_1 = 2,\ x_2 = -1$$

[첨가행렬]

○ T의 범위 안에 C가 포함되는가? : T의 범위 = A의 열공간

$$Ax = C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \end{array}\right]$$ 해존재 X. 포함 X

• 선형변환 : $T: R^n \to R^m$ 가 임의의 벡터 $u, v \in R^n$ 와

정의역에 있는 벡터

임의의 스칼라 k에 대하여 다음조건 만족하는것.

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $T(ku) = kT(u) \quad (k \in R)$

ex) T가 선형변환이면 다음 만족

$T(0) = 0$

$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$

◦ 모든 선형 변환은 행렬 변환으로 표현 가능하다

= 위의 ①,② 만족시

$T(x) = Ax$ 성립

◦ 변환을 행렬로 표현 가능 : 선형

ㅇ 뜬금없는

대각합 : 행렬 대각선 합.

$tr : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

일때

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

그냥 이런게 있음.

$n \times n$ 정사각 행렬 A의 대각합 $tr(A)$는

$A_{11} + A_{22} + \cdots A_{ii}$ 합.

선형변환 → 행렬변환

임의의 선형변환, 벡터
= 모든 경우에

$T : R^n \to R^m$ 이 선형변환

- how -

임의의 벡터 x.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \overset{e_1}{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}} + x_2 \overset{e_2}{\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}} \cdots x_n \overset{e_n}{\boxed{\begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

이렇게 i번째 성분 하나만 1, 그외 모든 성분 0인 벡터

기본단위 벡터(표준기저) 라하며 e_i 로 표기

- how -

임의의 벡터 x.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \overset{e_1}{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}} + x_2 \overset{e_2}{\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}} \cdots x_n \overset{e_n}{\boxed{\begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$$

T가 선형 변환이라
정의했을에서

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n)$$

$$= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots x_nT(e_n)$$

$$= [T(e_1), T(e_2), \cdots T(e_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax$$

T의 표준행렬 A

$$[T(e_1), T(e_2), \cdots T(e_n)] = A$$

표준행렬 예시

선형변환 $T : R^2 \to R^3$ 가 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ 3x+y \end{bmatrix}$ 일 때

$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이므로

T의 표준행렬 A는 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

변환 전 벡터 VS 후 벡터

- 원래 벡터 - 이미지

① 단사: one-to-one

변환 $T: R^n \to R^m$ 가 $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$ 만족

(1:1 매칭)

판별: $Ax = b$ 에서 모든 b에 대해서

x가 같은 값일때 고유한 값을 가질 때

- $Ax = b$ 풀 때 해가 딱 1개 = 자유변수 존재 X

② 전사 (전체 전자) - Onto

변환 $T : R^n \to R^m$ 가 임의의 $w \in R^m$ 에 대해

$T(v) = w$ 인 $v \in R^n$ 가 존재하면 전사

계수상관 없이 존재만 하면됨. 계수 고려 X

즉 치역 = 공역

$f(x) = Y$

판별 : $T : R^n \to R^m$ 이고 행렬 변환이라면 $Ax = b$

- R^n 에 존재하는 모든 벡터(원상) : $x \in R^n$
- 변환행렬 A
- R^m 에 존재하는 모든 벡터(이미지) : $b \in R^m$

x와 b가 A에 대해 전사관계면

어떠한 b에 대해서도 $Ax = b$를 만족하는 x가 존재

- 역행렬 : 행렬 A로 변환되었을 때
  다시 원래 왔던 곳으로 돌아가게 하는 행렬
  역행렬이라 함. A^{-1}이라 표기

정방행렬만.

$n \times n$ 행렬 A와 크기가 같은 행렬 B가 다음 조건 만족 시

행렬 A를 가역이라 하고 행렬 B를 A의 역행렬이라

하고 A^{-1}로 표기

$$AB = I_n = BA$$

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad b = \begin{bmatrix} 17 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$Cb = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x$$

C는 A의 역행렬 A^{-1}

• 모든 행렬이 역행렬을 가지는 것은 아님.
($m \times n$, ⋯)

역행렬 존재 : 가역이라함

비존재시 : 비가역

정사각행렬만 ($n \times n$) 역행렬가짐.

행렬 1개당 딱 1개만 존재 (유일)

why → 아니면 차원이 바뀜.

$A^{-1}A = I$. 단위행렬 : 주대각선 1. 나머지 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬 정리 I ~ III : 다 동치조건.

III
→ 중 1개 만족하면 나머지도
→
: 다 만족 (필요충분조건)

Khan 아카데미 : 변환

- 변환 = just 함수. Vector 에서의 함수라 이해

- 선형변환 (T) ⟺ $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ 가 있을 때

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) \text{ 이고}$$

$$T(c\vec{a}) = cT(\vec{a}) \quad : c \in \mathbb{R}$$

직관적으로 아는법?

그 변환이 오직 다른 성분들의 선형결합만 포함하면 그것은 아마 선형변환.

성분이 서로 곱해지거나 제곱 등이면 그것은 아마 X.

◦ 행렬변환

행렬 $A \left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots \vec{v_n}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \cdots x_n\vec{v_n} \in \mathbb{R}^m$

$m \times n$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 변환

$v_1, v_2, \cdots v_n \in \mathbb{R}^m$

A: $m \times n$ 행렬

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$

↳ $\mathbb{R}^n$ 에서 $\mathbb{R}^m$ 으로의 Mapping 이나 변환.

◦ 행렬곱, 행렬 벡터곱은 항상 선형 변환

그래픽 프로세서, GPU 들이 이런거임. 행렬곱 잘하는거.

I_n : $n \times n$ 단위행렬 . $I_n\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x}$

선형변환 $T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots x_n\vec{e_n})$

$= T(x_1\vec{e_1}) + T(x_2\vec{e_2}) + \cdots T(x_n\vec{e_n})$

표준행렬

$= \left[T(\vec{e_1}) + T(\vec{e_2}) + \cdots T(\vec{e_n})\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax$

$x = tv \rightarrow x = x_0 + tv$ 로 보내는 변환이

선형변환인가.

$$T(x) = x_0 + x$$

$$T(x+x) = T(x) + T(x)$$

$$\downarrow$$

$$x_0 + 2x \neq 2(x_0 + x)$$ 아님.

09. 행렬식

※ 정방행렬만 가능 (n×n)

행렬식: 역행렬 구하는 식에서 (1)번 분모 부분

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2×2에서의 행렬식 $\det A = ad-bc$. 이게 다임.

따로 행렬식이라 한 이유: 약속을 하고보니 쓴데가 많아서

↓ 더 줄때.

가정이 들어가있음. (계속 많이)

why?. 특별한 정의가 있는게 아님.

① 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (a_{11} \neq 0)$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & ①\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & ②\ a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

↓

①,②중 1개가 0이 아니라는게 가정. 역행렬 if ①이 0이 아니면

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

$a_{13}a_{22}a_{31}$ ↓

$$a_{11}\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

• A가 가역 = 선형 방정식 3개.

$a_{11}\Delta \neq 0$. $a_{11}\Delta$를 3X3 행렬식이라 정의

↓

2차원 행렬식 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$으로 표현.

$$\Delta = a_{11}\cdot\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} - a_{12}\cdot\det\begin{bmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{bmatrix} + a_{13}\cdot\det\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}$$

↓ ✿ 새로운 기호 정의

그냥 빈칸이 A인데
내가 헷갈려서 A라 함

A_{11} : 1행과 1열을 지우는 4가지

$$\Delta = a_{11}\cdot\det A_{11} - a_{12}\cdot\det A_{12} + a_{13}\cdot\det A_{13}$$

행렬식 재귀적 정의

✿ 재귀. what?

$n \to n-1 \to n-2 \cdots$

계속가서 2x2 유리가 되도 까지 계산 = 재귀

점화식(재귀식)

$$2\times2 = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12}$$

$$3\times3 = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\cdot\det A_{13}$$

$$4\times4 = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13} - a_{14}\det A_{14}$$

$\cdots$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det A_{1j}$$

홀수 +, 짝수 -

열을 하나씩 줄임.

행렬식 구하기 ①: 여인자 전개.

$\det A$: 행렬식

여인자 $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ → 그냥 행렬식에서 +, - 부호 넣은거.

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

↓

지금까지는 첫행에서만 훑었는데

어느 행에 대해 열을 훑거나 : $\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots a_{in}C_{in}$

어느 열에 대해 행을 훑거나 : $\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots a_{nj}C_{nj}$

↓

행렬의 성분 중 0이 있으면 0니 그걸 가져와서 계산량↓ 가능

0이 많은 행 or 열을 고름.

$$3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\cancel{a_{31}}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

0

즉! 어느행이나 열로 시작하든 상관없음. 부호만 잘 지키면

그래서 밑으로 쪼개지는 줄이면서 0이 많은걸 선택

삼각행렬 : 주대각선기준 위 or 아래가 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$1 \times 2 \times 4$ $\qquad$ $4 \times 7 \times 9$

→ 만약 A가 삼각행렬 인 경우

detA는 A의 대각성분의 곱

삼각행렬이면 이러함, 직접 해보삼.

행렬식 - 행연산(기본행연산)으로 구하기

① 행렬 A에서 한행 K배해서 다른 행에 더한 행렬이 B는 $\det A = \det B$

② 행렬 A의 두행이 교환된 행렬이 B. $\det A = -\det B$

③ 행렬 A의 한행에 K배 곱한 B는 $\det A = \frac{1}{k} \det B$

행렬 A 기본행연산으로 삼각행렬 만들면 대각곱. 고려하면서 진행

$\det U \neq 0$: 가역 $\qquad$ $\det U = 0$ 비가역

in 삼각행렬

행렬 U가 REF. 주대각선에 0 있으면 비가역.

(삼각행렬)

행렬식 정리

① 전치행렬 적용시 :

if A가 $n \times n$행렬 $\det A^T = \det A$

※ 매우중요
② 행렬곱.

- A와 B가 $n \times n$ 행렬이면 $\det AB = (\det A)(\det B)$

$A_i(b)$ 기호: $n \times n$행렬 A, $b \in \mathbb{R}^n$

$A_i(b)$는 i번째 열을 벡터 b로 대체한것

열을 대체

- 크래머 공식 -

A가 가역 행렬이면 $(\det A \neq 0)$

어떠한 b에 대해서도 $Ax = b$는 고유한 해를 가지며

x는 아래와 같이 구할 수 있음.

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad i=1,2,\cdots n \left(x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

ex)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad A_1(b) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{24+16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{24+30}{2} = 27$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 27 \end{bmatrix}$$

◦ 대각 행렬 : 주대각선 제외 모든 원소 0.

크래머 공식 증명 궁금하면 PDF 봐.

유일한 해를 가진다 : $\det A \neq 0$

해를 식으로 표현하세요 : $x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}$ = 로 나타내주면 됨.

• 크래머 공식으로 역행렬 구하기

$$Ax = e_j \qquad x = A^{-1}e_j \; \rightarrow$$

$$x_i = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A}$$

$$x_i = A^{-1}(i,j)$$

$$\det A_i(e_j) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = C_{ji}$$ (여인자)

A^{-1} 에서는 i행 j열, A에서는 i열 j행

좌변 　　　　　　　　 우변

$$\mathrm{Adj}\,A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & \cdots & & C_{nn} \end{bmatrix}$$

수반행렬

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}\,A$$

* 가역행렬 $\Leftrightarrow$ rref가 단위행렬(I)일 때

선형종속, 행렬식 = 0, ... = 비가역

10주차 - 고유벡터

1. 행렬변환 많~~이 해야할 때 (ex: · 컴퓨터그래픽스 → 애니메이션
· 시뮬레이션 (동역학계))

· 고유 벡터 (Eigen vector)

$Ax = \lambda x$ → 특정행렬 만날 때 기본성질유지, 크기만 바뀜

람다(λ) is a scalar

Vector x를 행렬 A에 대한 고유벡터라 함

(0벡터는 제외)

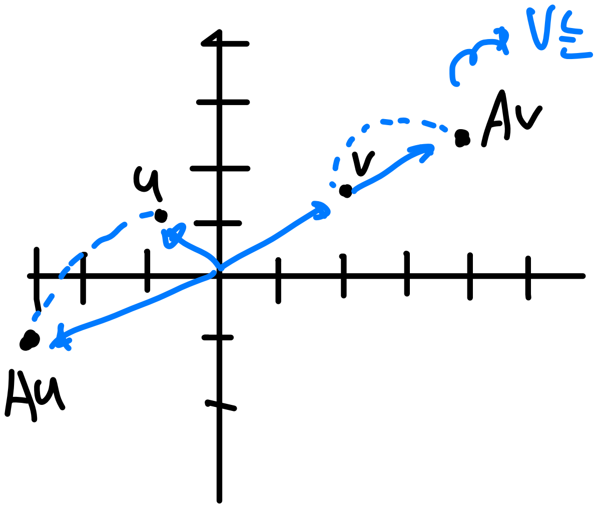
스칼라 λ를 고유값 (Eigen Value)라 함.

EX) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$Au = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4u$. u는 A의 고유벡터

$Av = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. v는 A의 고유벡터가 아님.

↳ 좀더 자세히



V는 고유벡터. 방향유지, 크기만 변화

ex) 7은 행렬 A의 고유값인가?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ → $A \cdot x = 7 \cdot x$

↓

$(A-7I)x = 0$. → 행렬 방정식의 해를 구해보면 됨!

λ가 7일 때

$(A-7I)x=0$. $A-7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ → 해 x는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → 해 = 고유벡터.

0이 아닌 해가 있다면 → 고유값O.

→ 한 행렬은 여러 고유값, 고유 벡터를 가질 수 있음.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$는 -4, 7을 고유벡터로 가짐.

• 고유공간 (Eigen Space)

: 여러 벡터들로 표현된 공간에 대해 어떤 행렬 A로 변환을 했을 때 변화가 없다면

이 공간을 A에 대한 고유공간이라 함

$(A-\lambda I)x = 0$.

위의 식을 만족하는 x들

※ 고유벡터는 0제외

but 고유공간은 공간정의에 따라 0벡터도 포함!

ex) A의 고유값이 2일 때 고유값 2에 대한 고유공간을 찾아라

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

「풀이

① $A-2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

② rref . $(A-2I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ 해

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ x_2 and x_3 is free

→ span하여 해공간 만든다

고유공간을 만드는 기저 $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

↓

고유공간을 찾으라하면 고유공간 만들 수 있는 기저 쓰면됨.

2. 고유벡터 정리

* 기말고사에는 증명문제 낸

오른거. 키워드 안들가면 점수 X

1. 삼각행렬의 주 대각의 성분들은 고유값들

ex) A가 3x3 이고 상부삼각행렬. (증명)

nxn 이어도 됨

주대각선 아래 다 0, 하부면 위가 0

①

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 \end{array} \end{array}$$

②

$(A-\lambda I)x = 0$ 을 만족하는 0이 아닌 x가 존재하기 위해서는 자유변수가 필요

why?

우변이 0으로 고정된 상태, x_1, x_2, x_3 모두 선행 변수면 → 해는 0이 됨.

○ 자유변수가 존재하기 위해서는? → 0으로 채워진 행이 필요.

첫행이 0이라면 $\lambda = a_{11}$, 두번째가 0이면 $\lambda = a_{22}$, 3번째행이면 $\lambda = a_{33}$

따라서 삼각행렬의 주 대각의 성분들이 고유값

뒤에 특성방정식이라는 걸로도 증명가능

2. 0이 고유값이면 A는 비가역 (고유값은 0도 됨!)

cf) $(A-\lambda I)x=0$ 이랑은 다르지. $Ax=0$.

◦ $Ax = 0x$. → $Ax = 0$

◦ $Ax = 0$ 에서 0이 아닌 x가 존재하려면

자유변수가 하나라도 존재해야함. → 비가역

3. 고유벡터 집합은 선형독립이다.

고유값이 다름. 벡터는 아직 모름.

$n \times n$ 행렬 A에 대해서 각기 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$에 대응하는 고유벡터 $v_1, v_2, \cdots v_n$가 있을 때

고유벡터집합 $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$은 선형독립. → 선형종속 일수 없음을 보여서 선형독립증명 (귀류법)

[증명]

$\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$이 선형종속 관계에 있다고 하자

또한 벡터 v_{p+1}를 제외한 다른 벡터들은 선형독립이라면

v_{p+1}를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현가능하다

⇒X⇐ (모순기호)

선형종속 X = 선형독립, 성립해야함.

아이 X ≠ 이는 ε 필요조건, 논의 …

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_pv_p = v_{p+1}$$

↓

[선형종속 인과관계 증명 중]

$$c_1v_1+c_2v_2+\cdots c_pv_p = v_{p+1}$$

$$\downarrow \times A$$

$$c_1Av_1+c_2Av_2+\cdots c_pAv_p = Av_{p+1}$$

$\downarrow$ $Av_k = \lambda_k v_k$ "조건절"

$$c_1\lambda_1v_1+\cdots+c_p\lambda_pv_p = \lambda_{p+1}v_{p+1}$$

: $v_{p+1} = c_1v_1 + \cdots c_pv_p$

$\lambda_{p+1}(c_1v_1+\cdots c_pv_p)$ 하고 넘기면.

$$\downarrow$$

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{p+1})v_1+\cdots c_p(\lambda_p-\lambda_{p+1})v_p = 0$$

$v_1, v_2 \cdots v_p$는 선형독립이라는 전제로 시작했기 때문에

$c_i(\lambda_i-\lambda_{p+1})$은 모두 0이 되야한다.

$$\downarrow$$

하지만 $\lambda_i - \lambda_{p+1}$은 0이 될수 없고 (각기 다른 고유값)

c_i가 0이 되야 한다.

$$\downarrow$$

$$c_1v_1+\cdots c_pv_p = v_{p+1} = 0$$

→ v_{p+1}이 반드시 0인데 고유벡터는 0이 아님. 모순!

↓

그러므로 $n \times n$ 행렬 A에 대해서 각기 다른 고유값 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$에 대응하는 고유벡터 $v_1, \cdots v_n$가 있다면

$\{v_1, \cdots, v_n\}$는 선형종속 불가능 → 선형독립

4. 고유벡터 k배 벡터도 고유벡터

▫ 행렬 A에 대하여 x가 고유값 λ에 대한 고유벡터이면
스칼라 k를 곱해 얻을 수 있는 벡터 kx도 λ에 대한 고유벡터이다.

[증명]

$$Ax = \lambda x$$

↳ $kAx = kAx$ → $A(kx) = \lambda(kx)$

$kAx = k\lambda x$

3. 고유값 찾기

고유값 판별, A의 고유벡터냐? 여부 . . . 문제가 있다.

행렬 A의 고유값을 찾아라! or

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

고유값은 $(A-\lambda I)x=0$ 에서, 0이 아닌 x가 존재할수 있는 λ들.

$(A-\lambda I)$가 비가역이어야함. 0이 아닌 x 존재

= 행렬식이 0이어야 비가역.

① $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$

ad-bc

② $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$= (2-\lambda)(-6-\lambda) - 3 \cdot 3$

$= \lambda^2 + 4\lambda - 21$

$= (\lambda - 3)(\lambda + 7)$ $\lambda = 3, -7$

- 요약 -

고유값 찾기 → $A-\lambda I$ 가 비가역이 되는 λ찾기 → $\det(A-\lambda I)=0$ 만족 λ찾기

쉽게 계산하려면?

삼각행렬로 만들고 주대각선의 곱으로 행렬식 계산

삼각행렬로 변환하여 det A 구하기

용어사용 조심. 가역행렬이다 ≠ 역행렬.

$$A=\begin{bmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&0\\0&-6&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&0\\0&-2&0\\0&-6&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=U_1$$

행교환

~의 역행렬 이 아니면 틀린 말

$\det A=$
$(-1)^1(1)(-2)(-1)=-2$

4. 특성방정식

λ가 n×n 행렬 A의 고유값 일때

필요충분조건으로

$\det(A-\lambda I)=0$ 성립. → 행렬 A의 특성방정식이라 함.

$$A=\begin{bmatrix}5&-2&6&-1\\0&3&-8&0\\0&0&5&4\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\quad \det(A-\lambda I)\begin{bmatrix}5-\lambda&-2&6&-1\\0&3-\lambda&-8&0\\0&0&5-\lambda&4\\0&0&0&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

A의 특성방정식: $(5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda)=0$
방정식.

A가 n×n 행렬이면 $\det(A-\lambda I)$는 n차 다항식이라

특성 다항식이라 부름 : 항만 전개하면 $\lambda^4+\sim\sim\sim+1$ 은 다항식!

o 대수적 중복도 : 고유값 중복도

ex) $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda-6)(\lambda+2)$

고유값 0의 중복도 = 4. 6의 중복도 1, -2의 중복도 1

(가)

$(A-\lambda I)X = 0$ 의 영공간

$A-\lambda I = B$ 라하면

B의 열들은 B의 영공간이 $\vec{0}$ 을 지니는 경우에 대해서만

서로 선형독립

$A-\lambda I_n$ 은 선형종속인 열을 가져야함 ⇔ 가역성X ⇔ 행렬식 = 0

- 고유벡터 있다면
- 해 존재

필요충분조건

if and only if

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff \det(\lambda I - A) = 0$$

고유공간 $E_\lambda = N(\lambda I_n - A)$ 즉 이 행렬의 영공간일뿐임.

- 가역성을 지니지 않은 행렬만이 자명하지 않은 영공간 가짐.

= 행렬식이 0인 행렬만이 〃

[3x3 행렬 고유값]

○ 보통 3x3 행렬에서 정수해를 다루고

정답은 마지막 인수(!) . (제수중하나)

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

$$= (\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

1, 3, 9, 27 중 하나

보통 마지막 인수의 범위

또는

실수인 고유값은 없다.

○ 사루스의 법칙

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & j & g & h \end{matrix}$$

$$aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

[3x3 행렬 고유벡터/공간]

11주차 · 거듭제곱 & 분해

- 고유값을 구하는 다른방법 - 거듭제곱법

※ 만약 A가 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$을 서로 다른 고유값으로 갖는 $n \times n$ 행렬이라 가정하면 일반성을 잃지 않고 고유값을 크기순으로 배열가능.

일반성 : 어떠한 경우에도

$$\underline{|\lambda_1|} > |\lambda_2| > |\lambda_3| \cdots > |\lambda_n|$$

크기가 가장큰 고유값 λ_1을 우세한 고유값이라 함.

↓

각 고유값에 대응하는 고유벡터가 $v_1, v_2, \cdots v_n$이라하면
↳ 선형독립

$$Av_i = \lambda_i v_i \ (i = 1, 2, \cdots n)$$

(고유벡터집합)
□ 선형독립관계 n차원 벡터가 n개있으니 R^n의 기저 ($\mathrm{span}(v_i)$)

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots c_n v_n \text{ 이 성립}$$

(x는 R^n의 임의의 벡터)

↓ 양변에 행렬 A곱

$$Ax = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \cdots c_n A v_n$$

$\downarrow \; Av_i = \lambda_i v_i$

$$Ax = c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots c_n\lambda_n v_n$$

if 행렬 A를 K번 곱한다면?

$$A^k x = c_1 A^k v_1 + c_2 A^k v_2 + \cdots c_n A^k v_n$$

$\downarrow$ λ_1^k를 앞에 빼내줌

$$A^k x = \lambda_1^k \{ (c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n \}$$

Ex) λ_1은 가장 큰 고유값. K가 점점 커지면 $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$.

$x \in R^n$.

$A^k x \underset{\text{대략 같다.}}{\approx} c_1 \lambda_1^k v_1$ 이 가능해짐.

- A를 계속 곱하면 A의 고유벡터에 다다른다.

$\downarrow$ if K를 하나 더 증가하면

$$A(A^k x) \approx \lambda_1 (c_1 \lambda_1^k v_1)$$

$$A(A^k x) \approx \lambda_1 (A^k x)$$

A를 엄청 많이 K번 곱하다면 A를 1번 곱한것이 λ_1을 곱한것과 거의 같아진다.

- K가 커질수록 $A^k x$는 A에 대한 고유벡터가 된다.

$$A(A^k x) \approx \lambda_1 (A^k x)$$

$$\Downarrow$$

※ u_k는 $A^k x$의 벡터성분중 가장 큰값

$x_k = \frac{1}{u_k} A^k x$라 정의하자

K제곱이랑 헷갈X.

$$A(x_k) \approx \lambda_1 (x_k)$$

[깔끔히 한건 계산 쉽게하려고]

특정 인덱스용 아래첨자

※ $\frac{1}{u_k} A^k x$의 원래 가장 큰 성분값은 1이됨.

여기에 λ_1을 곱했으니 $\lambda_1(x_k)$의 가장큰값이 λ_1임

即 A를 계속 곱하면 고유벡터에 다다르고

이 때 가장 큰 절대값(크기)이 고유값

<요약>

Step1. X_0의 가장큰성분 1로만듦.

Step2 : 다음 K회 반복

- Ax_k 계산
- u_k 선택 (Ax_k에서 절대값 가장큰거) → 수렴하는 u_k = 고유값.
- $x_{k+1} = \frac{1}{u_k} A^k x$

x_k = 고유벡터.

끝!

고유벡터 응용 : 동역학계 (Dynamical System)

- 동역학계 : 시간에 따라 움직임 과정

  ex) $x_{k+1} = Ax_k \ (k=1,2,\cdots)$

- 고유값, 고유벡터는 동역학계의 이산적 변화를 분석하는데 활용가능

PDF보다. Step은. (과정) . 예시있음.
대충 25분? ~ 55분? 사이 내용. 영상도 보고.

근의공식 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

LU Factorization (분해 중 하나)

$Ax=b$. 선형대수에서 정말 많이 쓰임.

but A가 더럽게 크고 복잡하면 고된 연산 요구

↓ Ax를 효과적으로 구할 방법 고안

즉 A를 계산하기 좋게 바꿔서 푸는 방법: 분해

▣ 분해 (Factorization or Decomposition 이라 부름)

이 분해의 철학: 주어진 행렬을 0이 많이 포함된 행렬로 바꾸는 것

▣ LU factorization

$$A = LU$$

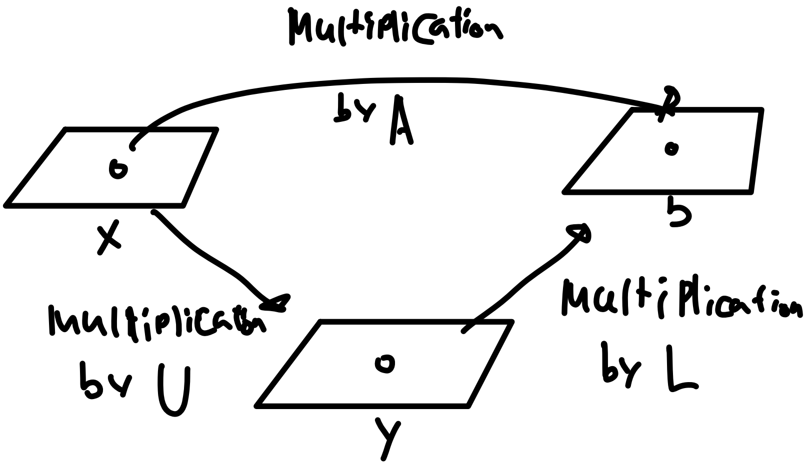
L은 정규하삼각행렬: 즉 대각선 $=1$. 즉 대각선 위는 0.

U는 REF형태: 선행성분 아래 다 0 (선행성분이 꼭 1일 필요 X)

↓

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

상세설명



$$Ax = b$$

$$\left.\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}\right]$$ L, U에 0이 많아서 이게 더 빠름.

가우스 조던 소거법

$$[A \ b] \text{ to } [I \ \ X]$$

⇓ 분해

$$[L \ \ b] \ \ [I \ y] \qquad [U \ y] \ [I \ \ X]$$

$Ly = b$에 대한 해 $\qquad$ $Ux = y$에 대한 해

「예시 PDF 봐」 영상 1시간 쯤?

LU 구하는 방법

Step 1. U 행렬 찾기 (REF 만들기)

- A의 첫 열에서 시작해서 마지막 열까지 반복
  - 열의 첫번째 선행성분 아래 다 0으로 만들기
    ($kr_i + r_j : r_j$ 행연산)

Step 2 L 행렬 찾기 : A에서 U로 가는 과정에서 선행변수가 결정될때 그 열의 성분을 기억

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$\div 2 \quad \div 3 \quad \div 2 \quad \div 5$

Step 2-2 L 행렬 찾기

◦ 각 열을 선행성분으로 나누어주고 나머지 모두 0

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

13. 대각화 & 직교

LU Factorization은 $Ax=b$

만약 $A^k x_0 = x_k$에서는? → 대각화(고유분해) 사용

○ 대각화 개념

얘는 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$ 이어도 됨. 주대각선은 대각선만 고려.

대각행렬: 주대각선 제외 성분 모두 0인 정사각 행렬

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(3,-1,6)$$

대각행렬 계속 곱하면?

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad D^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad D^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix}$$

· 대각화: 어떤 행렬을 분해하여 대각행렬을 만들 수 있다면

$Ax=b$, 특히 $A^k x_0 = x_k$의 연산이 용이

$$A = PDP^{-1}$$

어떤 행렬 A = 가역행렬 P, 대각 행렬 D로 분해하는 것이 대각화

즉 행렬 A의 대각화가 가능하려면

$P^{-1}AP = D$를 만드는 가역 행렬 P가 존재해야함.

이 조건을 만족하는 행렬 A를 대각화 가능한 행렬이라 함.

P는 대각화하는 행렬이나 함.

◦ 대각화 정리

① 닮은 행렬

A가 대각화 가능행렬 = A가 대각행렬과 닮았다.

A, B가 n×n 행렬일때

$P^{-1}AP = B$를 만족시키는 가역행렬 P가 존재하면

A는 B와 닮음이라 함.

A를 $P^{-1}BP$로 변환하는 것을 닮음 변환이라 함.

닮음은 동일한 특성 방정식, 고유값, 중복도를 가짐.

증명 in PDF

② 대각화 정리

A가 if and only if

n×n 행렬 $A = PDP^{-1}$이 표현가능하면 $\Longleftrightarrow$ 필요충분조건으로

* P의 열은 A의 선형독립 고유벡터(n)개 이며

증명중요.

$A = PDP^{-1}$이라 가정

⇒ 전개

이때 D의 주대각 성분들은 A의 고유값임

• 대각화 방법

Step1. n×n 행렬 A의 고유벡터 찾기

고유벡터끼리 선형독립 → 시험에서 선형독립인 이유 등도 써놔라

Step2. A의 선형독립인 고유벡터 n개 → 행렬 P

Step3. P에 상응하는 고유값들로 행렬 D 구성

가능여부

1. n×n 행렬이 n개의 선형독립인 고유벡터 가지고 있으면 대각화 가능

2. n×n 행렬이 고유한 고유값 n개 가지고 있으면 대각화 가능

= n개 고유벡터가 선형독립이란 뜻

○ 직교

$Ax=b$를 만족하는 완벽한 A가 없다면 → 근사 해 사용

$Ax \approx b$: Ax로 만들어진 벡터와 실제 b와의 차이가 가장 작도록 하는 A를 찾는 것

↓

공간의 모든 벡터가 벡터 b와 수직으로 만날 이런 상황을 직교라 함.

↓

얼마나 같은 방향으로 가고있니?

내적 : $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots u_nv_n = \|u\|\|v\| \cos\theta$

두 벡터가 90°로 만나면? $\cos 90° = 0$

$u \cdot v = 0$ 이면 두 벡터는 직교이다. (2,3차원 말고 그 이상도 $u \cdot v = 0$ 이면)

W 내 모든 벡터와 직교

○ 직교보공간 : R^n 공간 W에 직교하는 모든 벡터들의 집합을 W의 직교보공간 이라 부른다.

$W^{\perp}$ ($W^{\perp}$는 R^n의 부분공간)

R^n의 벡터 $x_1, x_2, \ldots x_k$ 에 대하여

$S = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ 이면

S의 서로 다른 임의의 두 벡터가 모두 직교 하면 S를 직교집합 이라 함

$\mathbb{R}^n$의 영이 아닌 벡터들의 집합 $S = \{x_1, \ldots x_k\}$ 가 직교집합 이면 S는 선형독립

$\mathbb{R}^n$의 기저집합 S가 직교집합이면 직교기저라 함.

$\mathbb{R}^n$의 부분공간 W에 대하여 $\{u_1, u_2, \dots u_p\}$가 직교기저이면

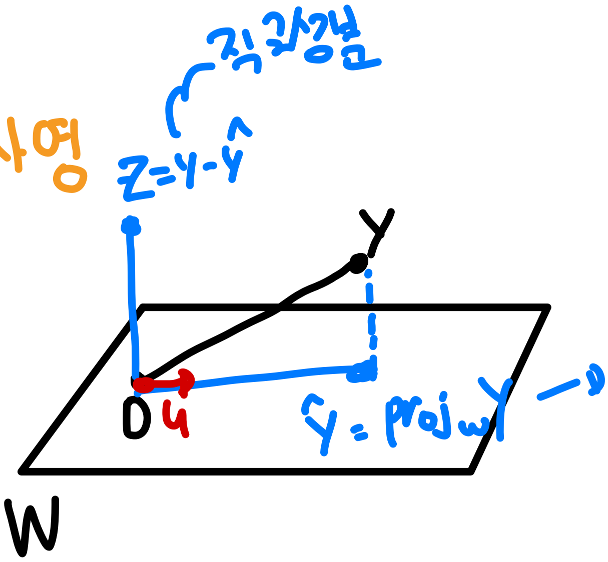
$y = c_1u_1 + \dots c_pu_p$ $(y \in W)$ 에 대해

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} \quad (j = 1, 2, \dots p)$$ 이 성립

→ PDF 보기

$\{u_1, u_2, u_3\}$ 직교기저일때 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$를 이용해 선형결합으로 표현

◦ 정사영



W공간에 프로젝션 해줌

$proj_w y$

y 벡터를

u는 기저벡터 → 벡터공간이 1차원일때 내용 PDF 보기

• 정규직교집합: 단위벡터 집합 이면서 직교집합인 것

↓ 본인 내적의 값 1

$v_1 \cdot v_1 = 1$

↓

$v_1 \cdot v_2 = 0$

$v_2 \cdot v_3 = 0$

$v_1 \cdot v_3 = 0$

⋮

PDF 추가내용 O

• 정규직교집합 정리

1. : m×n 행렬 U의 열들이 정규직교집합이려면

$U^TU=I$와 필요충분조건

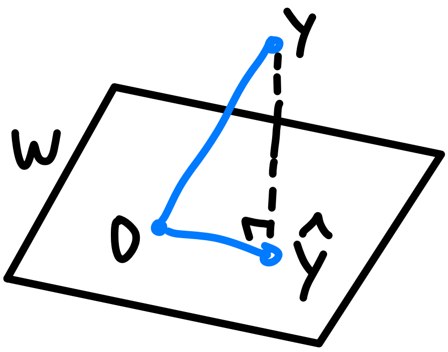
2. m×n 행렬 U의 열들이 정규직교집합이려면

$\mathbb{R}^n$의 x, y에 대해 다음 성립

$\|Ux\|=\|x\|$, $(Ux)\cdot(Uy)=x\cdot y$

$(Ux)\cdot(Uy)=0$ if and only if $x\cdot y=0$

Vector 공간이 선X



정사영 직교성분

$y = z_1 + z_2$

예제 복붙 개많고
어려워서 PPT보자

벡터공간 (2차원

정사영 구하는 식 외워

$$\hat{y} = \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 + \cdots + \frac{y\cdot u_p}{u_p\cdot u_p}u_p$$

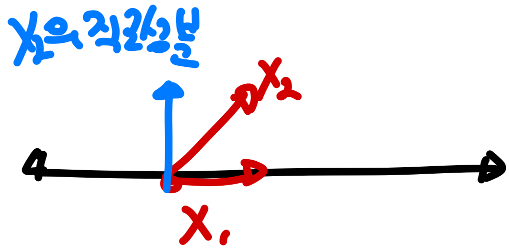
Gram-Schmidt Process

직교기저(정규 직교 기저) 구하는 법

기저벡터 x_1 하나로 만들 수 있는 1차원 부분공간 W_1

기저벡터 x_1, x_2로 만들 수 있는 2차원 부분공간 W_2

x_2의 직교성분 $(x_2 - proj_{W_1} x_2)$



3차원은 x_1, x_2, x_3 ... 반복

$(x_3 - proj_{W_2} x_3)$

증명문제 과정 중요. 예상적인 2문제 ± 1?

$\angle 4/2_2$ $\quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = \quad u \cdot v = 32$$