Pluralismo
Compromiso
Inclusión

UCEN

Estamos comprometidos con la Región de Coquimbo

Probabilidades y Estadística

- Asignatura: Probabilidades y Estadística
- Carrera : Ingeniería Civil Industrial
- Profesora: Nelson Quinteros Soto

  Ing. Civil Mecánico

  Mg. Docencia para la educación superior

  Correo Institucional: nelson.quinteros@alumnos.ucentral.cl

Unidad 3: Inferencia Estadística

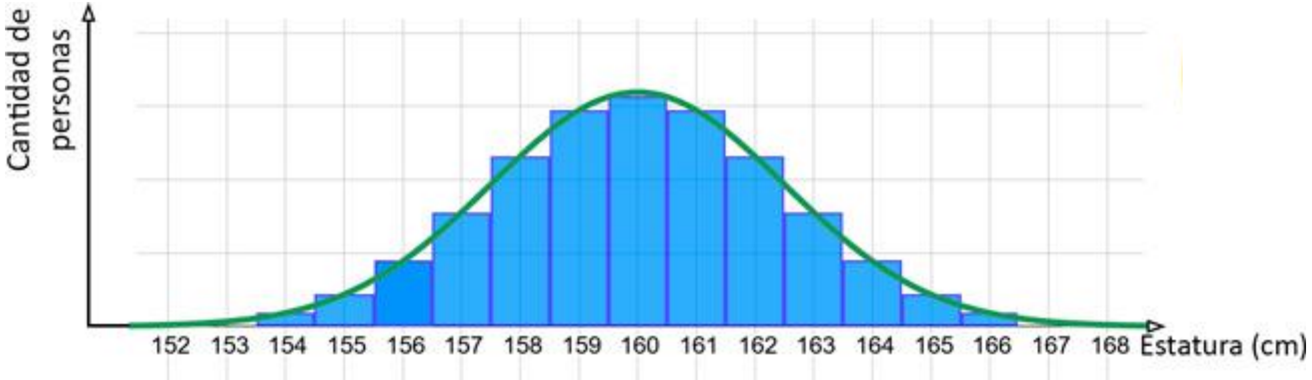
- **Muestra Aleatoria**
- **Parámetro**
- **Estimador y sus propiedades**
- Método de Máxima Verosimilitud
- **Distribuciones Continuas: Normal, T-Student, Cuadrado, F-Snedecor**
- **Prueba para Media con varianza conocida**
- Prueba para Media con varianza desconocida
- Prueba para igualdad de varianzas
- Prueba para proporciones
- Test de Bondad de Ajuste
- Test de proporciones múltiples

Distribución Normal

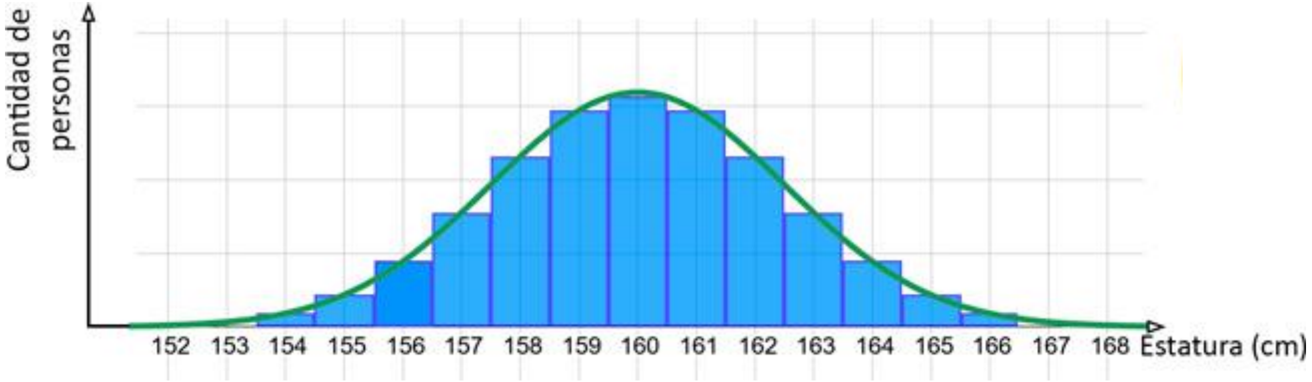
La distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, es la **distribución de probabilidad** individual más importante. La distribución normal nos permite crear modelos de muchísimas variables y fenómenos, como por ejemplo, la estatura de los habitantes de un país, la temperatura ambiental de una ciudad, los errores de medición y muchos otros fenómenos naturales, sociales y hasta psicológicos.

Distribución Normal

¿Qué pasaría si se realiza una encuesta en una ciudad a personas adultas consultando su estatura? A partir de los resultados obtenidos, se puede elaborar un histograma que tendría la siguiente forma:



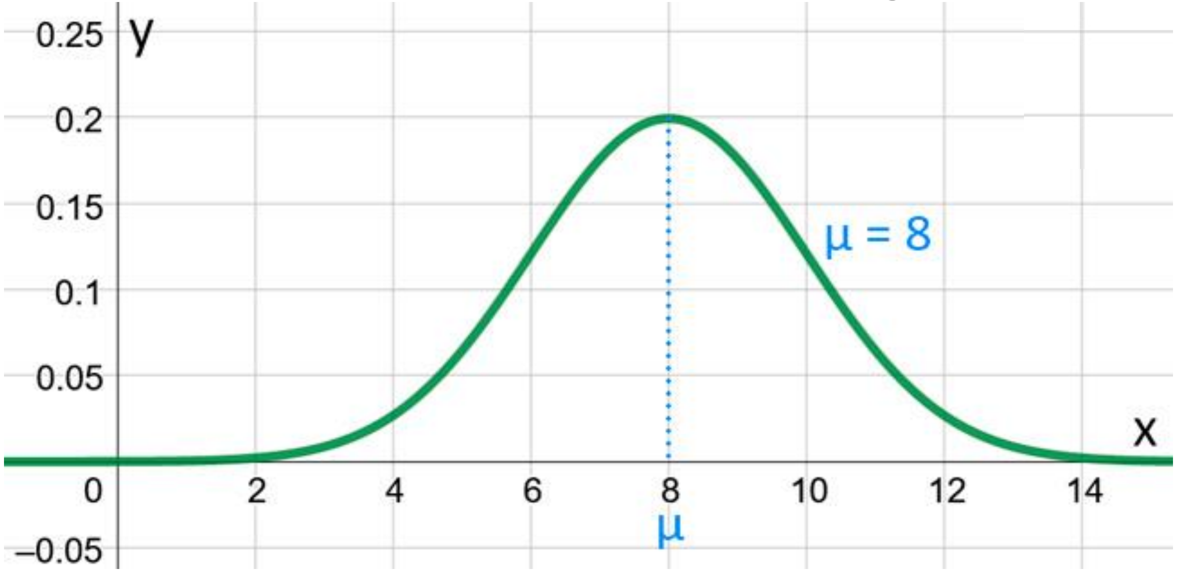
Distribución Normal



Como vemos, el histograma tiene **forma de campana**, una característica importante de la distribución normal.

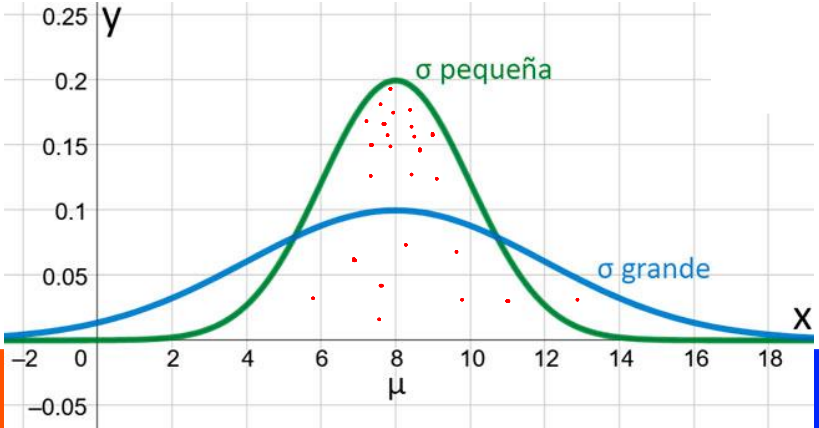
Distribución Normal

Un parámetro muy importante es la **media (μ)** y siempre estará al centro de la curva con forma de campana. Por ejemplo, aquí tenemos la gráfica de una distribución normal con **media igual a 8.**

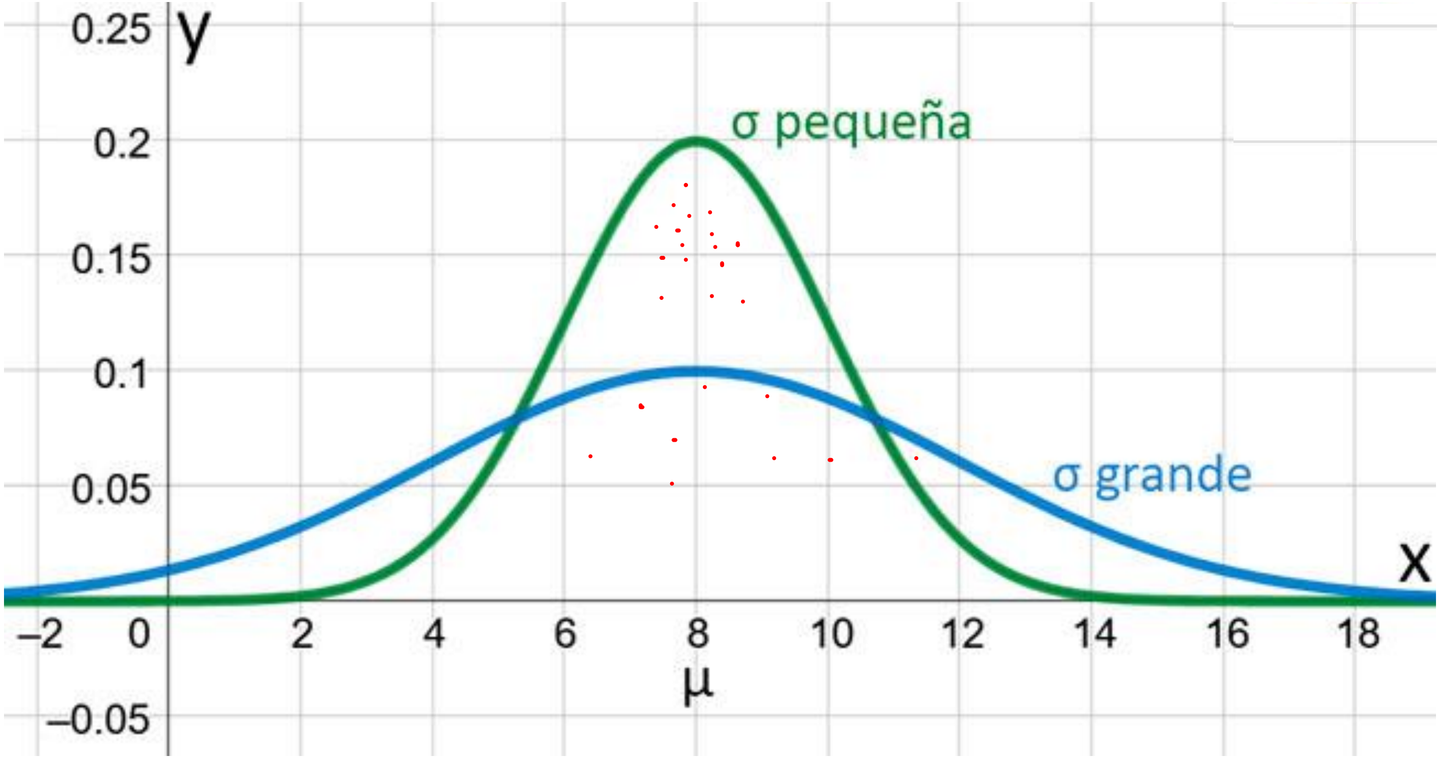


Distribución Normal

Además de la media, existe otro parámetro muy importante, se trata de la **desviación estándar**, representada con la letra griega **σ.** La desviación estándar es la medida de variabilidad más utilizada y nos indica que tan dispersos se encuentran los datos. Por ejemplo, aquí veremos dos curvas normales, una con desviación estándar pequeña, y otra con desviación estándar grande. Cuando la desviación estándar es pequeña, los datos tienen una dispersión baja y se agrupan alrededor de la media. En cambio, cuando la desviación estándar es alta, los datos tienen una dispersión alta y se alejan de la media.



Distribución Normal



Distribución Normal

Características de la distribución normal

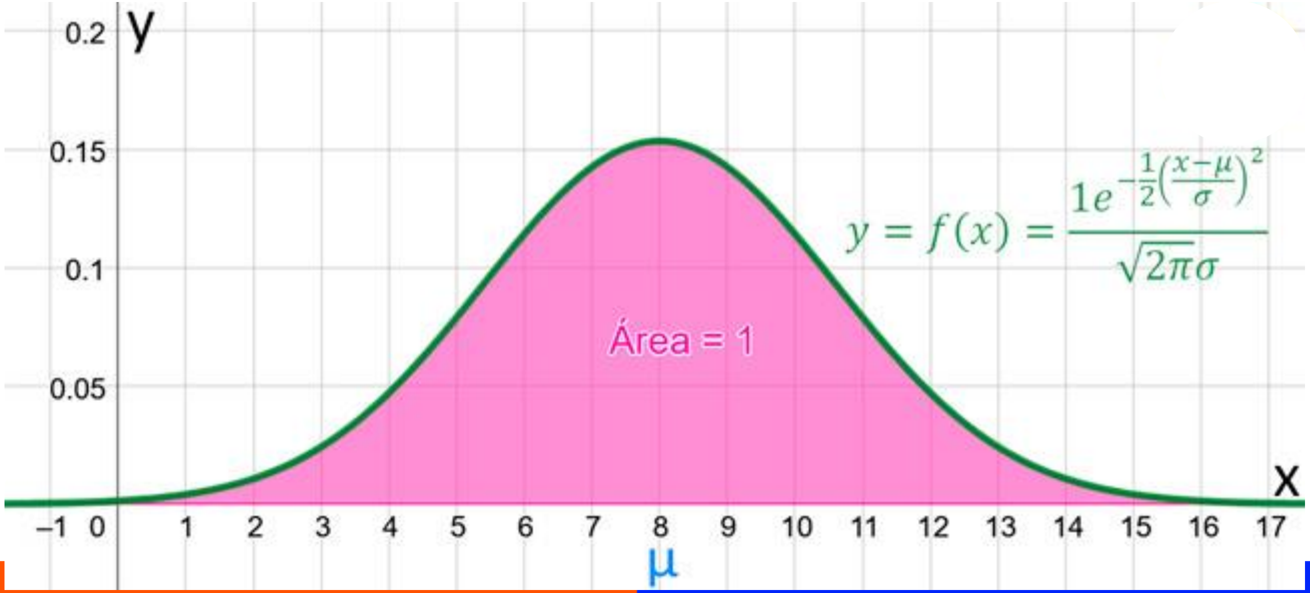
Existe una función matemática con forma de campana que tiene la siguiente definición:

$$y = f(x) = \frac{1e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Distribución Normal

Características de la distribución normal

Si se grafica esta función, se obtiene como resultado la **curva normal:**



Distribución Normal

Características de la distribución normal

Además, tiene las siguientes características:

- Toma en cuenta la **media(μ) y la desviación estándar(σ).**
- El **área bajo la curva** es igual a 1.
- Es **simétrica** respecto al centro, o a la media.
- 50% de los valores son mayores que la media, y 50% de los valores son menores que la media.
- La **media es igual a la mediana y a la moda.**
- Tiene una asíntota en y = 0 (eje x).

Distribución Normal

Características de la distribución normal

Algunos otros ejemplos de variables con distribución normal:

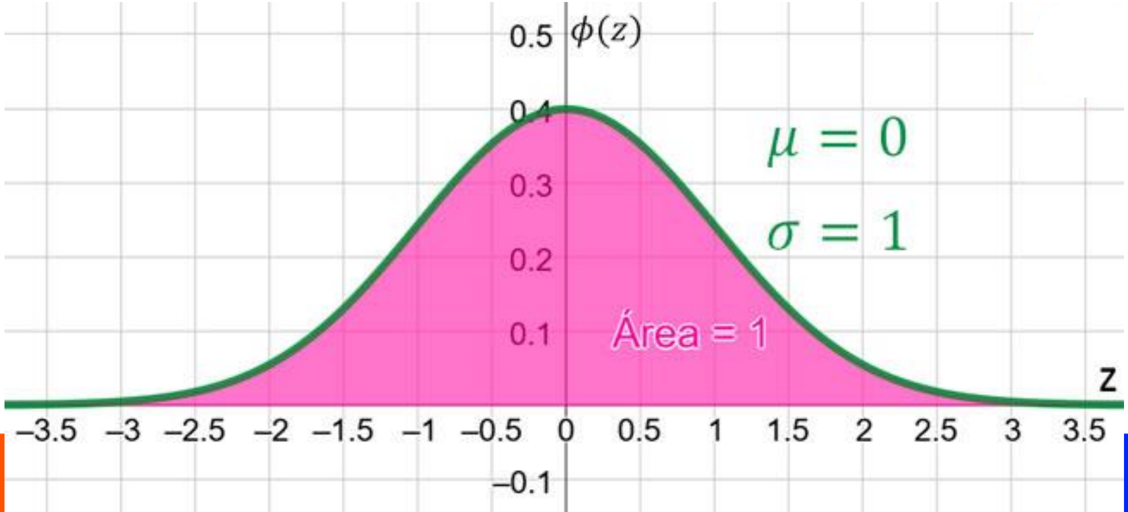
- Notas en un examen.
- Errores de medida.
- Presión sanguínea.
- Tamaño de las piezas producidas por una máquina.

Para encontrar las probabilidades o cantidad de datos entre determinados valores de la variable, se calcula el área bajo la curva normal, que se encuentra en la tabla z o tabla de áreas bajo la curva normal estandarizada.

Distribución Normal

La distribución normal estándar

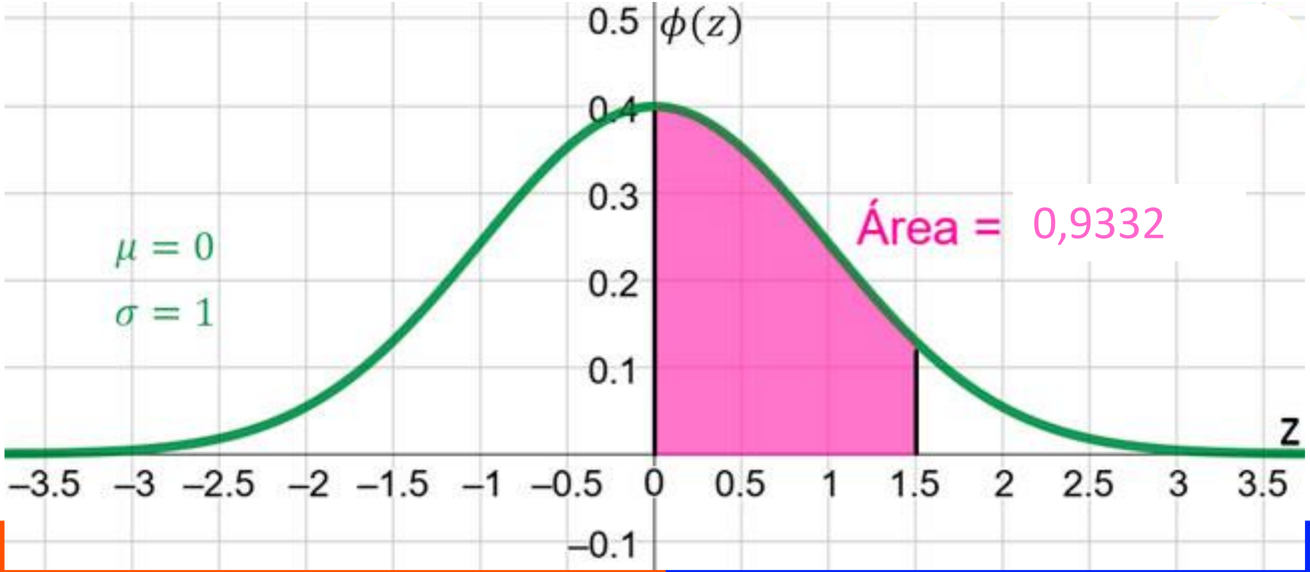
La distribución normal estándar, es aquella distribución normal que tiene una **media igual a cero,** y una **desviación estándar igual a uno.** Veamos la función densidad normal estandarizada, que trabaja con la variable estandarizada z en el eje horizontal:



Distribución Normal

La distribución normal estándar

Por ejemplo, si se desea encontrar la probabilidad de que la variable estandarizada z, tome un valor entre 0 y 1,50; hay que encontrar el área bajo la curva entre z = 0 y z = 1,50.

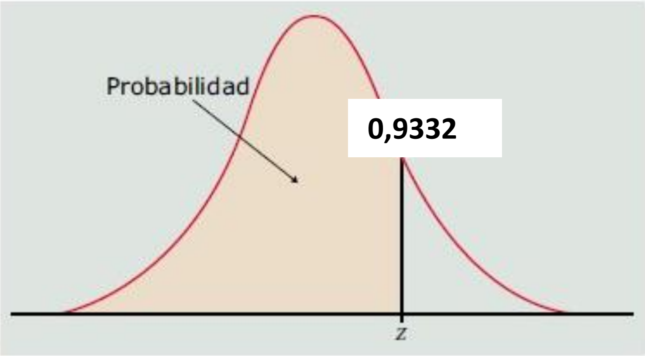


Distribución Normal

La distribución normal estándar

Para calcular el valor de esta área, se utiliza la tabla z y se busca el valor de 1,50:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

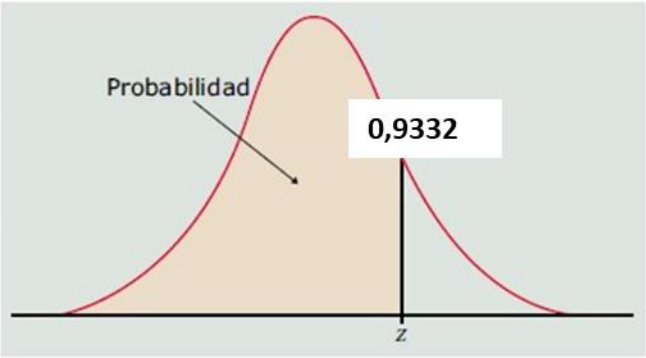
$\mu = media$

$\sigma = desviación\ estándar$

Distribución Normal

Como vemos, el valor del área bajo la curva es de 0,9332, y esa sería la probabilidad de que la variable estandarizada z, tome un valor comprendido entre 0 y 1,50.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$\mu = media$

$\sigma = desviación\ estándar$

Distribución Normal

¿Y si mi distribución normal no es estandarizada?

En la mayoría de problemas, cuando se analizan diferentes variables x, la distribución normal no tiene la forma estandarizada, es decir, la media no es cero y la desviación estándar no es uno. En esos casos, se convierten los valores de la variable (x) a z, es decir, se estandarizan los valores de la variable (x).

Distribución Normal

¿Y si mi distribución normal no es estandarizada?

La **fórmula de la variable estandarizada «z»,** la cual **indica cuántas desviaciones estándar se aleja el valor x de la media,** es la siguiente:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Tipificación

Y luego, con los valores de z, se utiliza la tabla y se calculan las áreas bajo la curva, porcentajes o probabilidades.

Distribución Normal

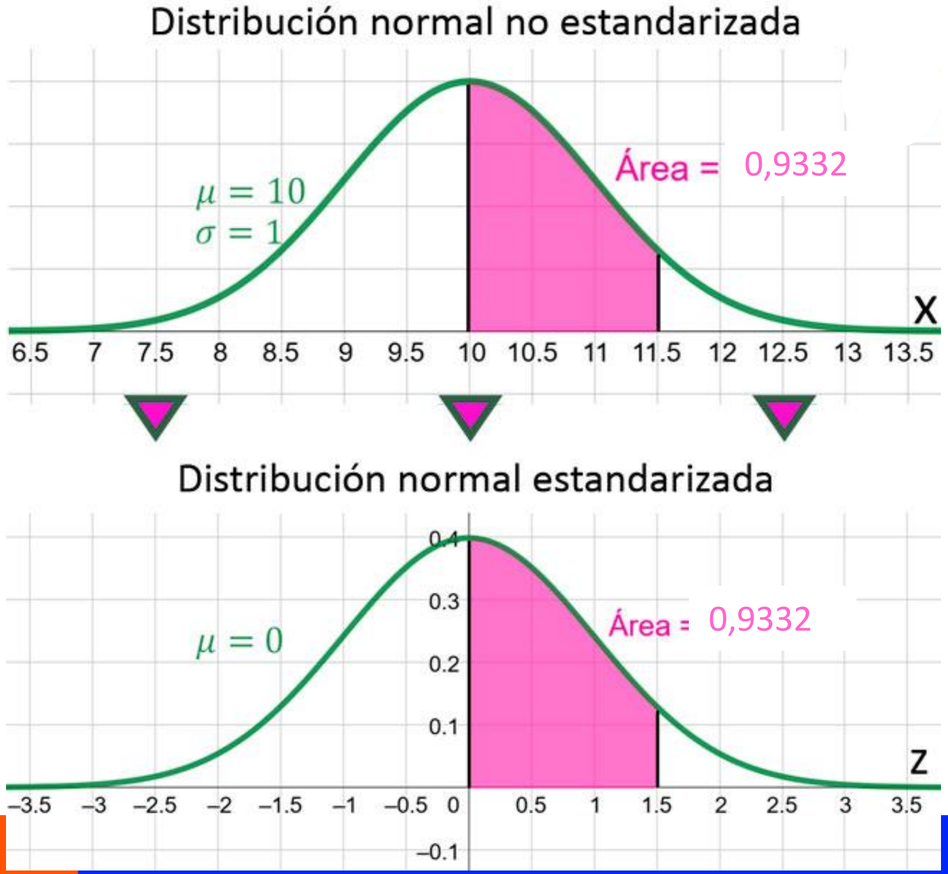
Por ejemplo, si tenemos una variable aleatoria continua X con una distribución normal no estandarizada, con media igual a 10 y desviación estándar igual a 1, y el problema pide calcular la probabilidad de que la variable X tome un valor entre 10 y 11,50, hay que estandarizar los valores de la variable X aplicando la fórmula de z:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{11{,}50 - 10}{1} = \frac{1{,}50}{1} = 1{,}50$$

Distribución Normal

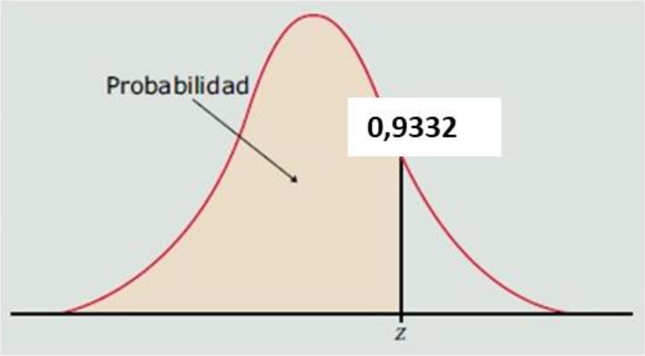
Por ejemplo, Ahora, veamos la gráfica de esta distribución normal:



Distribución Normal

Por ejemplo, Y usando la tabla z, se calcula el área bajo la curva. **Cuando z es igual a 1,50, el área bajo la curva es de 0,9332.**

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

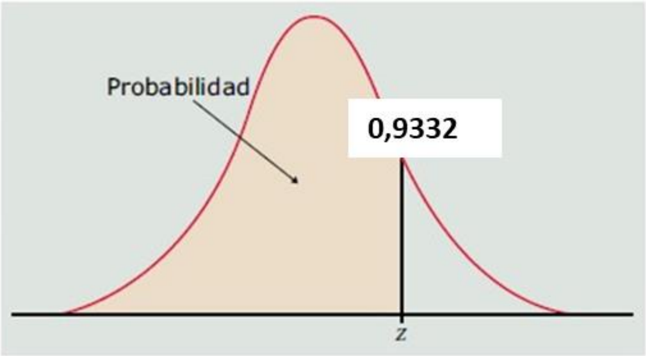
$\mu = media$

$\sigma = desviación\ estándar$

Distribución Normal

Por ejemplo, Podemos concluir que la probabilidad de que la variable estandarizada z, tome un valor comprendido entre 10 y 11,50 es de 0,9332.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$\mu = media$

$\sigma = desviación\ estándar$

Distribución Normal

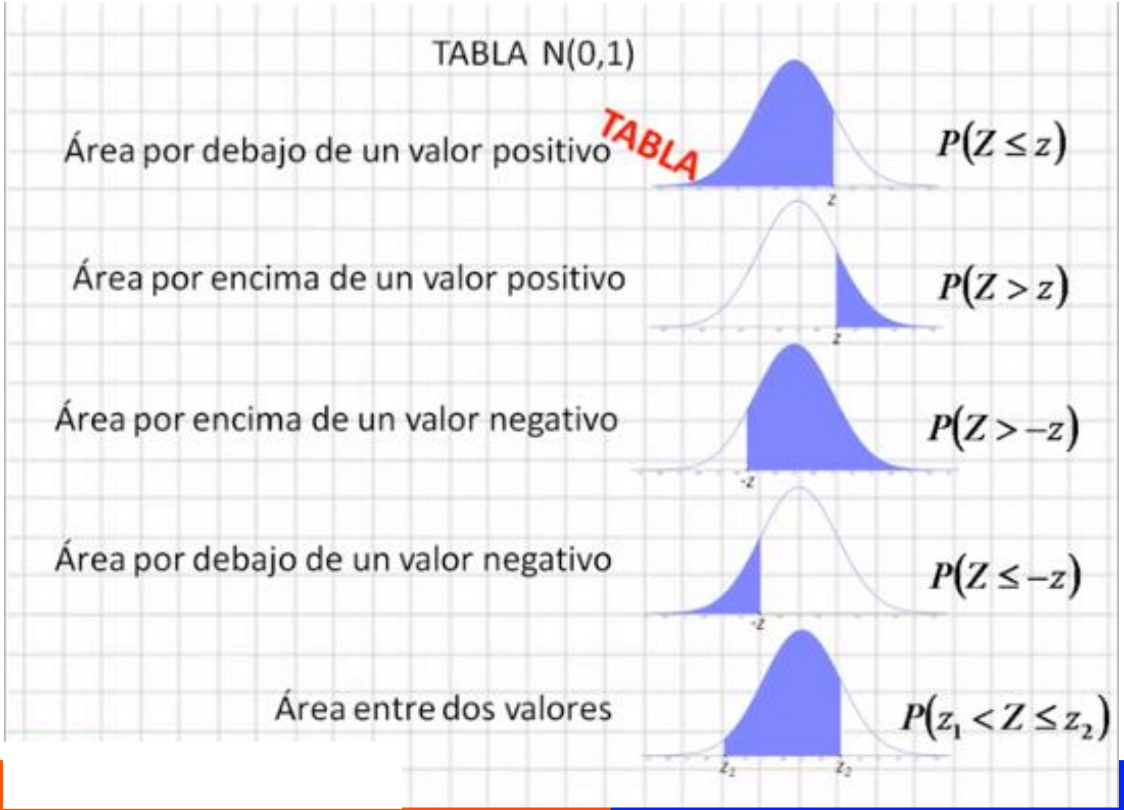
Ejercicio: las estaturas de los alumnos de un colegio se distribuyen normalmente con un promedio de 144 cm y una desviación estándar de 12 cm. Si se quiere conocer el porcentaje de alumnos del colegio que tienen una estatura promedio menor o igual que 156 cm:

Distribución Normal

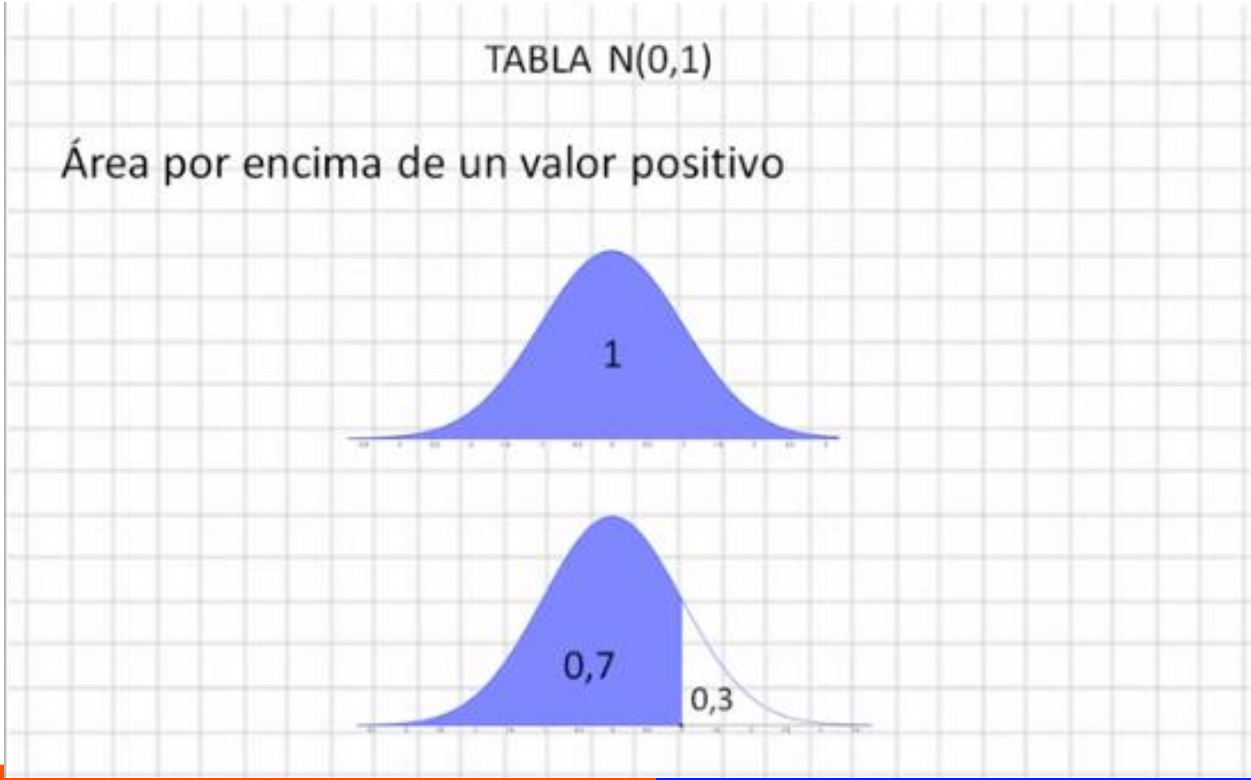
Ejercicio: las estaturas de los alumnos de un colegio se distribuyen normalmente con un promedio de 144 cm y una desviación estándar de 12 cm. Si se quiere conocer el porcentaje de alumnos del colegio que tienen una estatura promedio menor o igual que 156 cm:

- *Se busca en la tabla el valor de área bajo la curva del intervalo]-oo,1], que es igual a 0,841. Esto significa que el 84,1% de los datos es menor o igual a que Z=1 y que la probabilidad de escoger un elemento con estas características es 0,841.*
- *Como Z=1 es equivalente a X=156 cm, entonces se concluye que el 84,1% de los alumnos tienen una estatura menor o igual que 156 cm, es decir, P(X≤156)=0,841.*

¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?



¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?



¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?

TABLA N(0,1)

Área por encima de un valor positivo

$$P(Z > z) \quad = \quad 1 \quad - \quad P(Z \leq z)$$

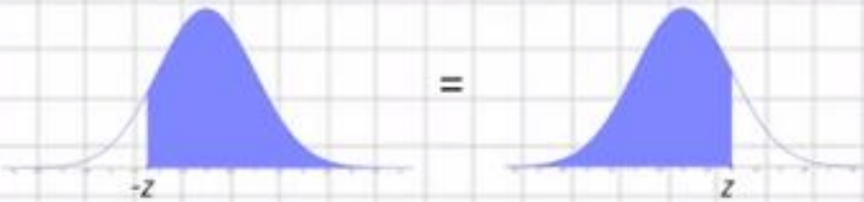
TABLA

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$

¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?

TABLA N(0,1)

Área por encima de un valor negativo



$$P(Z > -z) \quad = \quad P(Z \leq z)$$

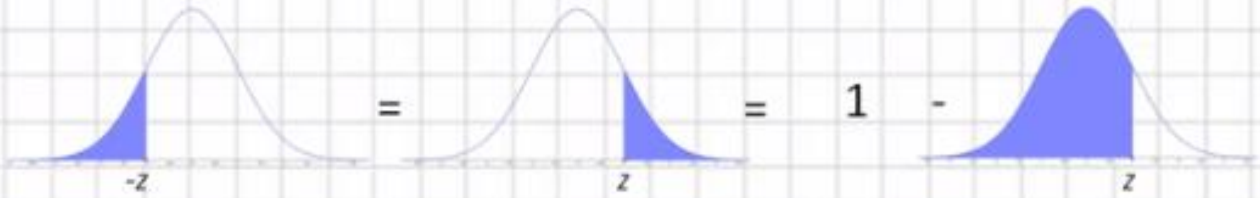
TABLA

$$P(Z > -z) = P(Z \leq z)$$

¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?

TABLA N(0,1)

Área por debajo de un valor negativo

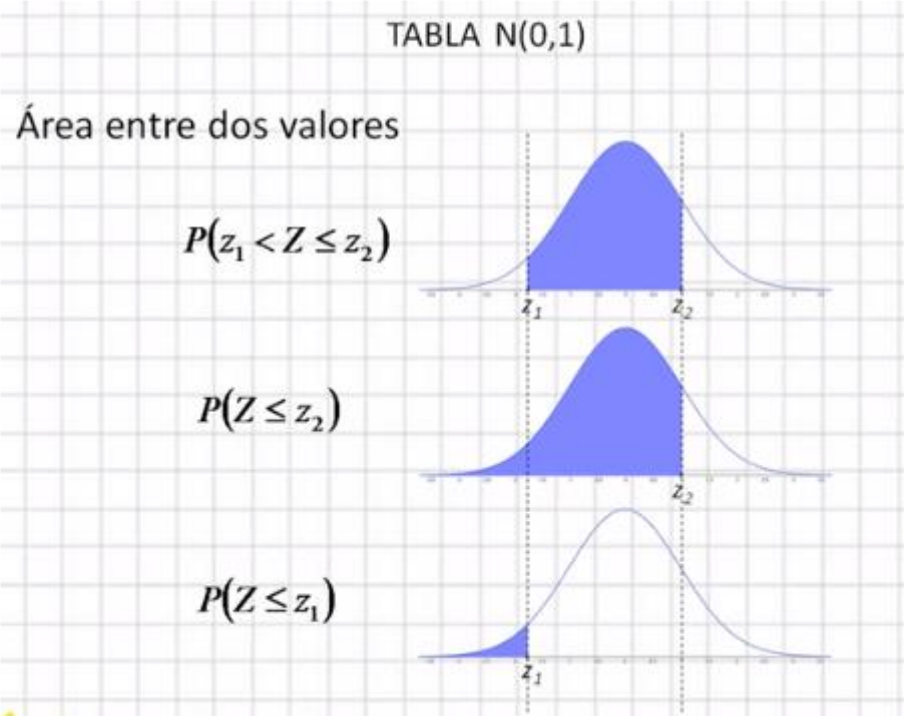


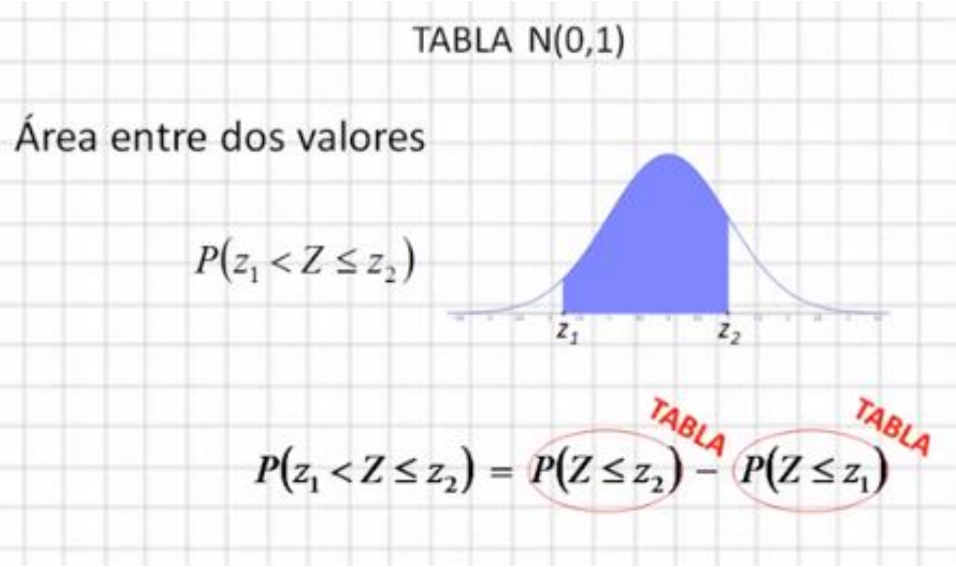
$$P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$

TABLA

$$P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$

¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?





¿Cómo usar la tabla de Distribución Normal?

TABLA N(0,1)

$P(Z \leq z)$ TABLA

$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$

$P(Z > -z) = P(Z \leq z)$

$P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$

$P(z_1 < Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$

Estamos comprometidos con la Región de Coquimbo

Comisión Nacional de Acreditación CNA-Chile

4 AÑOS ACREDITADA

GESTIÓN INSTITUCIONAL
DOCENCIA DE PREGRADO
VINCULACIÓN CON EL MEDIO

DESDE DICIEMBRE 2017
HASTA DICIEMBRE 2021

www.ucentral.cl