



Елизарова Т.Г., Злотник А.А.,
Никитина О.В.

Моделирование одномерных
течений мелкой воды на
основе регуляризованных
уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Никитина О.В. Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 33. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-33>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, О.В.Никитина

Моделирование одномерных течений
мелкой воды на основе
регуляризованных уравнений

Москва – 2011

УДК 519.6

Елизарова Т.Г.¹, Злотник А.А.², Никитина О.В.³

Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений

Изложен вариант вывода регуляризованных уравнений для одномерных течений мелкой воды. Для них доказано энергетическое равенство. Приведена соответствующая разностная схема и даны примеры расчета известных в литературе одномерных задач о распаде разрыва (разрушении дамбы) в канале с выступом на дне, докритическом, транскритическом и сверхкритическом течениях над холмом, неподвижных водоемах, двойной волне разрежения над выступом, набегающей волны на берег, распаде разрыва в горизонтальном и наклонном каналах с сухим дном. Проанализированы сходимость и точность разностной схемы.

Ключевые слова: одномерные течения мелкой воды, регуляризованные уравнения, энергетическое равенство, численное моделирование

Elizarova Tatiana Gennadievna, Zlotnik Alexandr Anatolievich, Nikitina Olga Vjacheslavovna

Modeling of one-dimensional shallow water flows based on regularized equations

For one-dimensional shallow water flows, a version of regularized equations deriving is expounded. The energy equality is proved for them. A corresponding finite-difference scheme is presented and examples of computation of one-dimensional problems known in literature are given including a disintegration of discontinuity (dam break) in a channel with a wall, subcritical, transcritical, supercritical flows over a hump, basins at rest, double rarefaction wave over a step, tidal flow over a beach and a disintegration of discontinuity in a horizontal and slanted dry bed channels. Convergence and exactness of the finite-difference scheme are analyzed.

Keywords: one-dimensional shallow water flows, regularized equations, energy equality, numerical modeling

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00136) и Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт 14.740.11.0875).

¹ИПМ им. М.В. Келдыша

²РГСУ, Высшая школа экономики, МЭИ (ТУ)

³МЭИ (ТУ)

1 Введение

В монографиях [1]–[3] представлены системы квазигазодинамических (КГД) уравнений, которые продемонстрировали свою высокую эффективность в расчетах разнообразных течений сжимаемого газа. В статьях [4]–[6] на основе указанных моделей были построены регуляризованные уравнения для расчета течений в так называемом приближении мелкой воды. Это было сделано путем усреднения классических уравнений мелкой воды по малому интервалу времени. Регуляризованные уравнения могут также рассматриваться как частный случай баротропного приближения КГД систем [7, 8]. В тех же статьях [4]–[6] приведены примеры использования новых уравнений для построения разностных схем и расчетов задач о распаде разрыва (разрушении дамбы), двух задач о течении над неровностью дна и задачи о разрушении несимметричной дамбы.

Данный препринт продолжает указанную тематику и посвящен одномерным течениям. Сначала изложены специальная аппроксимация по времени уравнений мелкой воды и вариант построения регуляризованных уравнений мелкой воды. Для регуляризованных уравнений выведено энергетическое равенство (закон сохранения энергии), свидетельствующее об их диссипативном характере.

Приведена соответствующая разностная схема; при этом возможности схемы, предложенной ранее в [5, 6], расширены для течений над сухим дном.

Основная часть препринта посвящена результатам расчетов известных в литературе задач о распаде разрыва в канале с выступом на дне, задач о докритическом, транскритическом и сверхкритическом течениях над холмом, задач о неподвижных водоемах с сухим дном, задачи о двойной волне разрежения над выступом, задачи о набегании волны на берег, задач о распаде разрыва в горизонтальном и наклонном каналах с сухим дном. Перечисленные задачи охватывают основные интересные случаи одномерных течений в приближении мелкой воды. Для них приведены характерные графики решений, а также проанализированы погрешность и практические порядки сходимости разностной схемы.

2 Система одномерных уравнений мелкой воды и ее специальная аппроксимация по времени

Система одномерных по пространству *уравнений мелкой воды* состоит из уравнений баланса массы и импульса и имеет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{NS}}{\partial x} + hF. \quad (2.2)$$

Здесь $h > 0$ – глубина воды (измеряемая от отметки дна), u – ее скорость,

$$p = \frac{gh^2}{2}, \quad \Pi_{NS} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

– давление и вязкое напряжение Навье–Стокса, причем $g = \text{const} > 0$, $\mu = \mu(h) \geq 0$ – коэффициент вязкости (при $\mu = 0$ вязкость игнорируется), а F – плотность внешних сил. Обычно берут

$$F(x, t) = f(x, t) + F_0(x), \quad F_0 = -g \frac{db}{dx}, \quad (2.4)$$

где f – плотность внешних сил, а $b(x)$ – отметка дна. В дальнейшем будут использоваться также функции $H = h + b$ – уровень воды и hu – расход. Уравнения рассматриваются при $x \in \Omega := (0, L)$, $t > 0$. Ставятся начальные условия

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.5)$$

и берется $H_0(x) = h_0(x) + b(x)$ (либо используется эквивалентная постановка).

Усредним уравнения (2.1), (2.2) по отрезку времени $[t, t + \Delta t]$, где $\Delta t > 0$. Воспользовавшись обозначениями

$$\widehat{v}(x, t) := v(x, t + \Delta t), \quad \langle v \rangle(x, t) := \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v(x, \theta) d\theta,$$

получим

$$\frac{\widehat{h} - h}{\Delta t} + \frac{\partial \langle hu \rangle}{\partial x} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\widehat{hu} - hu}{\Delta t} + \frac{\partial \langle hu^2 + p \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle \Pi_{NS} \rangle}{\partial x} + \langle hF \rangle. \quad (2.7)$$

Аппроксимируем возникшие средние по времени следующим образом

$$\langle hu \rangle \approx hu + \tau \frac{\partial hu}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\langle hu^2 + p \rangle \approx hu^2 + p + \tau \frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\langle \Pi_{NS} \rangle \approx \Pi_{NS}, \quad (2.10)$$

$$\langle hF \rangle \approx \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) F, \quad (2.11)$$

где $\tau > 0$ – параметр релаксации (имеющий размерность времени). Далее выразим производную $\frac{\partial hu}{\partial t}$ в силу уравнения (2.2), отбросив в нем слагаемое с Π_{NS} :

$$\frac{\partial hu}{\partial t} \approx - \left[\frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial x} - hF \right]. \quad (2.12)$$

Введем функцию

$$w := \frac{\tau}{h} \left[\frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial x} - hF \right] \quad (2.13)$$

(имеющую размерность скорости) и перепишем первое усредненное равенство (2.6) согласно (2.8) и (2.12) в приближенном виде

$$\frac{\hat{h} - h}{\Delta t} + \frac{\partial h(u - w)}{\partial x} \approx 0. \quad (2.14)$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{\partial hu^2}{\partial t} = 2 \frac{\partial hu}{\partial t} u - \frac{\partial h}{\partial t} u^2 \quad (2.15)$$

и запишем

$$\frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial t} = 2 \frac{\partial hu}{\partial t} u - (u^2 - gh) \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тогда в силу приближенного равенства (2.12) и уравнения (2.1) получим

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial t} &\approx -2h w u + \tau(u^2 - gh) \frac{\partial hu}{\partial x} = \\ &= -h w u - u \left(h w - \tau u \frac{\partial hu}{\partial x} \right) - \tau g h \frac{\partial hu}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial x} = \frac{\partial hu}{\partial x} u + h u \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial gh}{\partial x} = h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} + u \frac{\partial hu}{\partial x}. \quad (2.17)$$

Применив эту формулу в среднем из слагаемых правой части (2.16), установим

$$\tau \frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial t} \approx -h w u - \tau h u \left[\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} - F \right] - \tau gh \frac{\partial hu}{\partial x}.$$

В силу приближенных равенств (2.9)–(2.11) и уравнения (2.1) это позволяет переписать второе усредненное равенство (2.7) в приближенном виде

$$\frac{\widehat{hu} - hu}{\Delta t} + \frac{\partial[h(u - w)u + p]}{\partial x} \approx \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) F, \quad (2.18)$$

где

$$\Pi := \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau h u \left[\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} - F \right] + \tau gh \frac{\partial hu}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Приближенные равенства (2.14), (2.18) в совокупности с формулами (2.13), (2.19) представляют собой специальную аппроксимацию уравнений мелкой воды на отрезке времени $[t, t + \Delta t]$. Ниже они используются для построения разностной схемы.

3 Регуляризованная система одномерных уравнений мелкой воды и энергетическое равенство для нее

Дифференциальный аналог построенной выше специальной аппроксимации по времени уравнений мелкой воды – *регуляризованная система одномерных уравнений мелкой воды* – выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial(0.5gh^2)}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) F, \quad (3.2)$$

где

$$j_m := h(u - w), \quad w = \frac{\tau}{h} \left[\frac{\partial(0.5gh^2 + hu^2)}{\partial x} - hF \right], \quad (3.3)$$

$$\Pi = \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau h u \left[\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} - F \right] + \tau gh \frac{\partial hu}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Отметим, что иным образом эта же система уравнений выводилась в [5, 6]. Она также является частным случаем баротропной модифицированной КГД

системы уравнений [8] в одномерном случае с учетом равенства

$$\begin{aligned} \tau u \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho F \right) + \tau \left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ = \tau h u \left[\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} - F \right] + \tau gh \frac{\partial hu}{\partial x} \end{aligned}$$

при $\rho = h$, $p(\rho) = 0.5g\rho^2$, $\gamma = 2$. Если же положить $\tau = 0$, то указанная система переходит в исходную систему уравнений мелкой воды (2.1)–(2.3).

Рассмотрим эту систему уравнений при краевых условиях

$$u|_{x=0,L} = 0, \quad w|_{x=0,L} = 0 \quad (3.5)$$

и выведем для нее энергетическое равенство (закон сохранения энергии). Для этого уравнение (3.1) умножим на $gh - 0.5u^2$ и результат проинтегрируем по Ω . Затем проинтегрируем по частям по x с учетом краевых условий (3.5) и получим:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(0.5gh^2)}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} 0.5u^2 - j_m \left(g \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.2) умножим на u и проинтегрируем результат по Ω . Затем проинтегрируем по частям по x с учетом краевых условий (3.5) и получим:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial hu}{\partial t} u - j_m u \frac{\partial u}{\partial x} + gh u \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx = \int_{\Omega} \left[-\Pi \frac{\partial u}{\partial x} + \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) F u \right] dx. \quad (3.7)$$

Сложим равенства (3.6) и (3.7) и с учетом формулы

$$\frac{\partial hu}{\partial t} u = 0.5 \frac{\partial hu^2}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial h}{\partial t} u^2$$

(варианта формулы (2.15)) выведем промежуточное равенство

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(0.5gh^2 + 0.5hu^2)}{\partial t} - g(j_m - hu) \frac{\partial h}{\partial x} + \Pi \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = \int_{\Omega} F \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) u dx.$$

Поскольку $j_m = h(u - w)$, то его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (0.5gh^2 + 0.5hu^2) dx + \int_{\Omega} \Psi(h, u) dx = \\ = \int_{\Omega} \left[F \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) u + \tau F \left(gh \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\Psi(h, u) := (w + \tau F) gh \frac{\partial h}{\partial x} + (\Pi + \tau hu F) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Отметим, что величины $w + \tau F$ и $\Pi + \tau huF$ не содержат слагаемых, явно зависящих от F .

Подставим в Ψ выражения для w и Π , см. (3.3) и (3.4), и перегруппируем слагаемые, используя формулу (2.17):

$$\begin{aligned}
\Psi(h, u) &= \tau \frac{\partial(0.5gh^2 + hu^2)}{\partial x} g \frac{\partial h}{\partial x} + \\
&+ \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau hu \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} + \tau gh \frac{\partial hu}{\partial x} \right] \frac{\partial u}{\partial x} = \\
&= \tau h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \frac{\partial gh}{\partial x} + \tau g \frac{\partial hu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} u + \\
&+ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \tau h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \frac{\partial(0.5u^2)}{\partial x} + \tau g \frac{\partial hu}{\partial x} h \frac{\partial u}{\partial x} = \\
&= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \tau g \left(\frac{\partial hu}{\partial x} \right)^2 + \tau h \left(\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \right)^2. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Преобразуем также второе слагаемое в правой части (3.8) и в итоге установим *энергетическое равенство*:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (0.5gh^2 + 0.5hu^2) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \tau \left[g \left(\frac{\partial hu}{\partial x} \right)^2 + h \left(\frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx = \\
&= \int_{\Omega} \left[F \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) u + \tau F h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \right] dx. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Оно является частным случаем энергетического равенства, выведенного для модифицированной баротропной КГД системы уравнений в [8].

Предположим теперь, что функция F имеет вид (2.4). Перепишем правую часть энергетического равенства (3.11) при $F = F_0$ в виде:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[F_0 \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) u + \tau F_0 h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \right] dx &= \int_{\Omega} F_0 h (u - w) dx + \\
&+ \int_{\Omega} F_0 \left[hw - \tau u \frac{\partial hu}{\partial x} + \tau h \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} \right] dx =: I_1 + I_2. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Преобразуем интеграл I_1 , проинтегрировав по частям с учетом краевых условий (3.5) и воспользовавшись уравнением (3.1):

$$I_1 = \int_{\Omega} -g \frac{db}{dx} h (u - w) dx = \int_{\Omega} gb \frac{\partial h(u - w)}{\partial x} dx = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} gbh dx.$$

Преобразуем интеграл I_2 с помощью формулы (2.17) (ср. с (3.10)):

$$I_2 = \int_{\Omega} \tau h F_0 \left(2 \frac{\partial(gh + 0.5u^2)}{\partial x} - F_0 \right) dx + \int_{\Omega} \tau h F_0 (-f) dx.$$

Подынтегральное выражение первого слагаемого I_2 можно скомбинировать с последним слагаемым второго интеграла в левой части энергетического равенства (3.11). Поскольку $F_0 = -g \frac{db}{dx}$ и $H = h + b$, то в итоге выводим более общее энергетическое равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (0.5gH^2 + 0.5hu^2) dx + \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \tau \left[g \left(\frac{\partial hu}{\partial x} \right)^2 + h \left(\frac{\partial (gH + 0.5u^2)}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx = \\ & = \int_{\Omega} \left[f \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) u + \tau f h \frac{\partial (gH + 0.5u^2)}{\partial x} \right] dx. \quad (3.13) \end{aligned}$$

При $f = 0$ оно аналогично использованному в [9]. Очевидно также, что при $f = 0$ из (3.13) следует энергетическое неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (0.5gH^2 + 0.5hu^2) dx \leq 0.$$

Эти результаты свидетельствуют о диссипативном характере рассмотренной регуляризованной системы уравнений мелкой воды.

4 Разностная схема

Построим явную двухслойную по времени и симметричную по пространству разностную схему. Полагаем, что F имеет вид (2.4). Воспользуемся равномерной сеткой по пространству с узлами $x_i = i\Delta x$, $0 \leq i \leq N$ и шагом $\Delta x = L/N$, на которой определены основные неизвестные величины h , u , а также заданные функции f , b . Используется также вспомогательная сетка по пространству с узлами $x_{i+1/2} = (i + 0.5)\Delta x$, $0 \leq i \leq N - 1$, на которой определены вспомогательные неизвестные величины j , w , Π . Необходимые значения h , u и f , b на вспомогательной сетке вычисляются с помощью симметричного усреднения:

$$\begin{aligned} h_{i+1/2} &= 0.5(h_i + h_{i+1}), \quad u_{i+1/2} = 0.5(u_i + u_{i+1}), \\ f_{i+1/2} &= 0.5(f_i + f_{i+1}), \quad b_{i+1/2} = 0.5(b_i + b_{i+1}) \end{aligned}$$

при $0 \leq i \leq N - 1$. Используется также неравномерная сетка по времени с узлами $0 = t_0 < \dots < t_K = t_{fin}$ и шагами $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Рассмотрим приближенные уравнения (2.14), (2.18) на каждом сегменте $[t_k, t_{k+1}]$ во внутренних узлах основной сетки по x ; теперь крышкой $\widehat{\cdot}$ помечаем величины, относящиеся к верхнему слою по времени. Применим центральную аппроксимацию производных по x по узлам вспомогательной сетки по x :

$$\frac{\widehat{h}_i - h_i}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\widehat{hu})_i - h_i u_i}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} + 0.5gh_{i+1/2}^2 - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2} - 0.5gh_{i-1/2}^2}{\Delta x} = \\ = \frac{\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}}{\Delta x} + h_i^* \left(f_i - g \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

при $1 \leq i \leq N-1$. После вычисления величин на верхнем слое \widehat{h} , \widehat{hu} полагаем (в предположении $\widehat{h} > 0$)

$$\widehat{u}_i := \frac{(\widehat{hu})_i}{\widehat{h}_i}. \quad (4.3)$$

В этих уравнениях используются следующие аппроксимации величин j_m и w , см. (2.13):

$$j_{m,i+1/2} = h_{i+1/2}(u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left[\frac{0.5gh_{i+1}^2 + h_{i+1}u_{i+1}^2 - 0.5gh_i^2 - h_i u_i^2}{\Delta x} + \right. \\ \left. + gh_{i+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} - h_{i+1/2} f_{i+1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

при $0 \leq i \leq N-1$, с центральной аппроксимацией производных по x по узлам основной сетки по x . Величина Π , см. (2.19), аппроксимируется аналогично:

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1/2} = \mu_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \\ + \tau_{i+1/2} h_{i+1/2} u_{i+1/2} \left[\frac{gh_{i+1} + 0.5u_{i+1}^2 - gh_i - 0.5u_i^2}{\Delta x} + g \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} - f_{i+1/2} \right] + \\ + \tau_{i+1/2} gh_{i+1/2} \frac{h_{i+1} u_{i+1} - h_i u_i}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $\tau_{i+1/2} := 0.5(\tau_i + \tau_{i+1})$, $0 \leq i \leq N-1$. Ниже в расчетах $f = 0$.

Кроме того, величина h^* вычисляется по формуле

$$h_i^* := 0.5(h_{i-1/2} + h_{i+1/2}) - \tau_i \frac{h_{i+1/2} u_{i+1/2} - h_{i-1/2} u_{i-1/2}}{\Delta x}. \quad (4.7)$$

Коэффициент вязкости μ и параметр регуляризации τ вычисляются по формулам

$$\mu_i = \frac{4}{3}\tau_i \frac{gh_i^2}{2}, \quad \tau_i = \alpha \frac{\Delta x}{c_i}, \quad c_i = \sqrt{gh_i}, \quad (4.8)$$

где c – это аналог скорости звука, а постоянная $0 < \alpha < 1$ – параметр. Для удовлетворения условию устойчивости типа Куранта шаг по времени на текущем временном слое выбирается в виде:

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta x}{c_{\max}}. \quad (4.9)$$

Здесь $c_{\max} := \max_{0 \leq i \leq N} c_i$, а постоянная Куранта $0 < \beta < 1$ – параметр. Величина c_{\max} , а поэтому и Δt , меняется от одного временного слоя к другому. Параметры схемы α, β подбираются экспериментально в каждом расчете.

Применение в формуле (4.7) усреднения $0.5(h_{i-1/2} + h_{i+1/2})$ вместо просто h_i не случайно [5]. Пусть $f = 0$. Если $H_i \equiv C$, $u_i \equiv 0$ ($0 \leq i \leq N$), то согласно уравнениям (4.4)–(4.6) имеем $w_{i+1/2} \equiv 0$, $j_{m,i+1/2} \equiv 0$, $\Pi_{i+1/2} \equiv 0$. Тогда из уравнений (4.1)–(4.3) получаем $\widehat{H}_i = H_i = C$, $\widehat{hu}_i = 0$ и $\widehat{u}_i = 0$ при $1 \leq i \leq N - 1$. Это важно для выполнения известного свойства "хорошей сбалансированности" схемы.

Для возможности обработки подобластей, где глубина h обращается в 0 (т.е. "сухого дна") в выписанную разностную схему должны быть внесены изменения. Функции \widehat{h}_i , \widehat{hu}_i по-прежнему вычисляются из уравнений (4.1), (4.2). Формула же (4.3) для \widehat{u} модифицируется следующим эмпирическим образом

$$\widehat{u}_i := \begin{cases} \frac{(\widehat{hu})_i}{\widehat{h}_i} & \text{при } \widehat{h}_i \geq \varepsilon \\ 0 & \text{при } \widehat{h}_i < \varepsilon \end{cases}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр, подбираемый экспериментально. При этом формулы для параметра регуляризации (4.8) и шага по времени (4.9) также модифицируются эмпирически:

$$\tau_i := \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{c_i} & \text{при } h_i \geq \varepsilon \\ \alpha \frac{\Delta x}{c_i + \gamma} & \text{при } h_i < \varepsilon \end{cases}, \quad \Delta t := \begin{cases} \beta \frac{\Delta x}{c_{\max}} & \text{при } h_{\max} \geq \varepsilon \\ \beta \frac{\Delta x}{c_{\max} + \gamma} & \text{при } h_{\max} < \varepsilon \end{cases},$$

где $h_{\max} := \max_{0 \leq i \leq N} h_i$. Параметр γ вычисляется по формуле $\gamma = \delta \max_{0 \leq x \leq L} h_0(x)$.

Ниже в расчетах брались значения $\varepsilon=0.001$, $\delta=0.1$.

5 Результаты расчетов

Кроме изучения поведения приближенных решений, в выполненных расчетах делается попытка исследования сходимости построенной разностной схемы при сгущении сетки по x .

Для случая, когда искомая функция v_{ex} (здесь $v = h, u, hu$) известна точно, для вычисления погрешности и порядка сходимости используются формулы

$$E_{ex}^{(N)}[v] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |v_{ex i} - v_i^{(N)}|, \quad p_{ex}^{(N)}[v] = \log_2 \frac{E_{ex}^{(N)}[v]}{E_{ex}^{(2N)}[v]}. \quad (5.1)$$

Здесь v_i и $v_i^{(N)}$ – точное и приближенное решения в узлах x_i сетки с N отрезками разбиения на финальный момент времени расчета t_{fin} . Величина $E_{ex}^{(N)}[v]$ представляет собой среднее значение модуля погрешности на сетке.

В противном случае сначала вычисляется приближенное решение $v^{(N_{\max})}$ на достаточно подробной сетке по x с N_{\max} отрезками разбиения (также на момент времени t_{fin}), и погрешности и порядок сходимости вычисляются по формулам

$$E^{(N)}[v] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left| v_{i \frac{N_{\max}}{N}}^{(N_{\max})} - v_i^{(N)} \right|, \quad p^{(N)}[v] = \log_2 \frac{E^{(N)}[v]}{E^{(2N)}[v]}. \quad (5.2)$$

Разумеется, здесь N_{\max} берется кратным $2N$. Эта методика имеет свои границы применимости, как показывает ее сравнение ниже с предыдущей в ряде задач. В частности, для справедливости приближенного равенства $E^{(N)}[v] \approx E_{ex}^{(N)}[v]$ обычно необходимо, чтобы $4N \leq N_{\max}$. Для анализа надежности этой методики она сравнивается с (5.1) при известном точном решении.

Отметим, что попытка использования вместо последних формул другие (связанные с правилом Рунге практической оценки погрешности)

$$\tilde{E}^{(N)}[v] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left| v_{2i}^{(2N)} - v_i^{(N)} \right|, \quad \tilde{p}^{(N)}[v] = \log_2 \frac{\tilde{E}^{(N)}[v]}{\tilde{E}^{(2N)}[v]} \quad (5.3)$$

часто приводит к недостоверным результатам, и от нее пришлось отказаться.

Ниже в таблицах верхний индекс (N) опускается.

5.1 Распад разрыва в канале с выступом

Изучается течение в канале длиной $L=1500$ м, в центральной части которого симметрично расположен выступ (высотой 8 м, длиной 375 м), а дно

остальной части плоское. В середине канала установлен щит. В начальный момент уровень $H_0(x)$ слева от щита равен 20 м, справа – 15 м, а течение отсутствует (т.е. скорость $u_0(x) = 0$). Щит мгновенно убирается в момент $t = 0$. Ставятся граничные условия свободного сноса для высоты и скорости:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0. \quad (5.4)$$

Данная задача решалась при $N=100, 200, 400, 800, 1600$. При $N=100, 200$ решение получается размытым, с сильно сглаженным скачком, но при $N \geq 400$ оно принимает должный вид. Результаты расчетов приведены на рис. 10 (все рисунки сгруппированы вместе в конце работы) для времен $t=15$ сек и $t=60$ сек при $N=400$; взяты значения параметров $\alpha = \beta = 0.5$. Достигнуто хорошее соответствие полученных результатов с полученными в [10] при $N=200$ (по иной разностной схеме). Отметим, что при попытке использования $\alpha \leq 0.1$ наблюдаются осцилляции решения на границах выступа; с увеличением α до 0.5 решение сглаживается.

В табл. 1 приведены также результаты исследования сходимости u и h по формулам (5.2) при сгущении сетки по x . С увеличением N погрешности убывают, а порядки сходимости и для u , и для h несколько возрастают (при этом для u порядок чуть ниже, чем для h), оба не превосходя 0.81.

N	100	200	400	800
$E[u]$	0.10	0.064	0.039	0.023
$E[h]$	0.15	0.092	0.054	0.031
$p[u]$	0.66	0.71	0.74	–
$p[h]$	0.69	0.77	0.81	–

Таблица 1: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=8000$ (распад разрыва в канале с выступом)

5.2 Течение над холмом

Рассматривается канал длиной $L=25$ м с плоским дном, за исключением невысокого холма параболической формы в середине области:

$$b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 \text{ м,} & 8 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

В начальный момент времени задан постоянный уровень воды: $H_0(x) \equiv C_H$, течение отсутствует. В качестве граничных условий слева задается значение расхода hu и условие свободного сноса для h , а справа – уровня H (вообще

говоря, до некоторого момента времени) и условие свободного сноса для u :

$$hu|_{x=0} = C_{hu}, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad H|_{x=L} = C_H, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (5.5)$$

Эта задача может показаться простой, но такова она лишь на первый взгляд. В ней в зависимости от значений параметров выделяются три типа течений: докритическое, транскритическое и сверхкритическое. Далее последовательно рассматриваются примеры течений всех типов. Приводятся результаты, полученные для финального времени $t_{fin}=200$ сек (к которому течения при выбранных значениях параметров становятся стационарными). Отметим, что для этих течений известно точное значение расхода на финальный момент времени: $hu \equiv C_{hu}$. Как правило, именно при расчете hu возникают сложности. Результаты, полученные при значениях параметров $\alpha=0.6$, $\beta=0.1$ и соответствующих N , являются достаточно хорошими, с малыми осцилляциями; они сравнимы с полученными по другим схемам в [11] (при $N=100$), [12] (при $N=300$) и [13, 14, 15] (при $N=200$).

5.2.1 Докритическое течение

Данный тип течений является простейшим из трех. Здесь берутся $C_H=2$ м, $C_{hu}=4.42$ м²/с. В финальный момент времени стационарным является почти ровный уровень воды с небольшой выемкой над холмом.

На рис. 2 приведены уровень H при $N=200$, а также расход hu при $N=100, 200, 400, 800, 1600$. В районе границ холма наблюдаются выбросы значений hu , затухающие с ростом N . При $N=800$ абсолютная погрешность расхода $E_{abs} := \max_{1 \leq i \leq N} |(hu)_i - C_{hu}|$ не превосходит 0.003, при $N=1600$ расход вычисляется весьма точно, кроме нескольких точек в районе границ холма, в которых абсолютная погрешность меньше 0.0015.

Результаты исследования сходимости hu с использованием его точного значения приведены в табл. 2 (применены формулы (5.1)). Погрешность быстро убывает, а порядок ведет себя немонотонно и достаточно высок (близок к 2) при умеренных $N \leq 400$, но с ростом N он заметно падает до значения 1.27. Для сравнения в табл. 3 приведены аналогичные расчеты по формулам (5.2). В ней порядок растет в отличие от предыдущей таблицы. Видно, что последние результаты по погрешности достаточно достоверны только при $N \leq N_{\max}/4$, а по порядку – соответственно при $N \leq N_{\max}/8$.

Кроме того, в табл. 3 приведены соответствующие расчеты по формулам (5.3). В данном случае погрешность получается заниженной, а порядок –

N	100	200	400	800	1600
$E_{ex}[hu]$	0.0012	0.00034	0.00009	0.000026	0.000011
$p_{ex}[hu]$	1.85	1.91	1.78	1.27	—

Таблица 2: Погрешности и порядки сходимости hu с использованием точного значения (докритическое течение над холмом)

N	100	200	400	800
$E[hu]$	0.0012	0.00033	0.000086	0.000018
$p[hu]$	1.87	1.93	2.26	—

Таблица 3: Погрешности и порядки сходимости hu при $N_{\max}=1600$ (докритическое течение над холмом)

скачущим относительно истинных из табл. 2 (хотя в целом порядок вычисляется неплохо).

N	100	200	400	800
$\tilde{E}[hu]$	0.00082	0.00023	0.000067	0.000018
$\tilde{p}[hu]$	1.80	1.81	1.89	—

Таблица 4: Погрешности и порядки сходимости hu по формулам (5.3) (докритическое течение над холмом)

В табл. 5 приведены значения погрешностей и порядков сходимости u и h . В них с ростом N погрешности довольно быстро убывают, а порядки несколько возрастают. Любопытно, что при небольших $N \leq 200$ порядки и для u , и для h заметно меньше, чем указанные выше для их произведения hu (значения же порядков для u и h при $N = 400$ могут не быть достоверными).

5.2.2 Транскритическое течение

Здесь берутся $C_H=0.66$ м, $C_{hu}=1.53$ м²/с. Для данного и следующего типов течений третье из краевых условий (5.5) модифицируется:

$$\begin{cases} H(L, t) = C_H, & 0 \leq t \leq 40 \text{ сек} \\ \frac{\partial h}{\partial x}(L, t) = 0, & t > 40 \text{ сек} \end{cases}.$$

В данном случае поведение стационарной высоты усложняется и наблюдается существенно более резкое изменение H (его значения слева и справа от холма сильно отличаются, а над холмом образуется зона плавного перехода).

На рис. 3 представлены уровень H при $N=200$ и расход hu при $N=100, 200, 400, 800, 1600$. Как и в случае докритического течения, в районе границ

N	100	200	400	800
$E[u]$	0.0039	0.0018	0.00079	0.00026
$E[h]$	0.0030	0.0015	0.00063	0.00021
$p[h]$	1.05	1.20	1.58	–
$p[u]$	1.08	1.21	1.58	–

Таблица 5: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=1600$ (докритическое течение над холмом)

холма наблюдаются выбросы значений hu , затухающие с ростом N . Так, $E_{abs} < 0.002$ при $N = 800$, $E_{abs} < 0.001$ при $N=1600$.

Анализ сходимости hu как по формулам (5.1), так и (5.2), см. табл. 6 и 7 соответственно, приводит к выводам, вполне аналогичным сделанным ранее для докритического случая. Более того, соответствующие порядки сходимости близки.

N	100	200	400	800	1600
$E_{ex}[hu]$	0.00065	0.00018	0.000048	0.000014	0.0000062
$p_{ex}[hu]$	1.87	1.88	1.76	1.21	–

Таблица 6: Погрешности и порядки сходимости hu с использованием точного значения (транскритическое течение над холмом)

N	100	200	400	800
$E[hu]$	0.00065	0.00018	0.000044	0.0000010
$p[hu]$	1.88	2.02	2.12	–

Таблица 7: Погрешности и порядки сходимости hu при $N_{\max}=1600$ (транскритическое течение над холмом)

Как ясно из табл. 8, сказанное выше об анализе сходимости hu относится и к анализу сходимости u , h .

5.2.3 Сверхкритическое течение

Здесь берутся $C_H=0.33$ м, $C_{hu}=0.18$ м²/с. В данном случае поведение стационарного решения еще более усложняется по сравнению с предыдущими и поведение H становится резко немонотонным (его график над холмом имеет узкую заостренную впадину).

Из рис. 4 ясно, что теперь расход считается хуже. В районе правой границы холма наблюдаются особенно резкие выбросы. Их амплитуда при $N=800$, 1600 не превышает 0.02 м; таким образом, E_{abs} примерно на порядок хуже, чем в двух предыдущих случаях.

N	100	200	400	800
$E[u]$	0.046	0.021	0.0088	0.0029
$E[h]$	0.0083	0.0037	0.0015	0.00051
$p[u]$	1.15	1.25	1.60	–
$p[h]$	1.17	1.26	1.60	–

Таблица 8: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=1600$ (транскритическое течение над холмом)

Картина сходимости для случая сверхкритического течения несколько отличается от полученной в двух предыдущих случаях. Порядок сходимости hu теперь отнюдь не убывает, а возрастает до 1.45 с ростом N , см. табл. 9. Соответствие же между результатами, полученными по формулам (5.1) и (5.2), а также характер сходимости u и h , см. табл. 10 и 11, аналогичны полученным в двух предыдущих случаях. Более того, порядки сходимости u и h довольно близки во всех трех случаях, а также между собой.

N	100	200	400	800	1600
$E_{ex}[hu]$	0.0011	0.00051	0.00024	0.00011	0.000040
$p_{ex}[hu]$	1.09	1.09	1.12	1.45	–

Таблица 9: Погрешности и порядки сходимости hu с использованием точного значения (сверхкритическое течение над холмом)

N	100	200	400	800
$E[hu]$	0.0010	0.00047	0.00020	0.000062
$p[hu]$	1.11	1.25	1.67	–

Таблица 10: Погрешности и порядки сходимости hu при $N_{\max}=1600$ (сверхкритическое течение над холмом)

5.3 Неподвижные водоемы

5.3.1 Водоем с холмом с сухим верхом

Эта задача является тестом на способность разностной схемы сохранять состояние покоя при наличии сухого дна. Длина канала $L=1$ м, а профиль его дна задается следующим образом:

$$b(x) = \max \{0, 0.25 - 5(x - 0.5)^2\}.$$

Начальные значения соответствуют состоянию покоя:

$$h_0(x) + b(x) = \max \{b(x), 0.1\} \text{ м, } u_0(x) = 0.$$

N	100	200	400	800
$E[u]$	0.013	0.0063	0.0028	0.0011
$E[h]$	0.0040	0.0018	0.00072	0.00028
$p[u]$	1.03	1.16	1.39	–
$p[h]$	1.17	1.31	1.35	–

Таблица 11: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=1600$ (сверхкритическое течение над холмом)

При этом уровень воды в середине канала ниже, чем вершина холма; таким образом, имеется сухое дно, см. рис. 5. Граничные условия таковы:

$$h|_{x=0,L} = 0.1 \text{ м}, \quad u|_{x=0,L} = 0.$$

Расчеты велись до момента времени $t=50$ сек при значениях параметров $\alpha=0.5$, $\beta=0.1$. На рис. 5 представлены результаты, полученные при $N=500$. Для сравнения отметим, что подобные результаты были получены по другим схемам в [12] при $N=300$ и [16] при $N=100$. Вода остается в состоянии покоя ($u = 0$) в течение всего времени расчета, лишь на границах сухого дна возникают небольшие осцилляции.

Погрешности и порядки сходимости u , h представлены в табл. 12 и 13. Все погрешности убывают, но происходит это с весьма хаотичным поведением порядков сходимости, которые демонстрируют резкое возрастание, а потом убывание как для u , так и для h . При этом их последние значения (при $N=1000$) оказываются близкими к 1. Сопоставление результатов табл. 12 и 13 между собой в целом приводит к тем же выводам, что и в предыдущей задаче.

N	250	500	1000	2000
$E_{ex}[u]$	0.0024	0.0018	0.00027	0.00015
$E_{ex}[h]$	0.00026	0.00017	0.000024	0.000012
$p_{ex}[u]$	0.42	2.74	0.89	–
$p_{ex}[h]$	0.62	2.82	1.01	–

Таблица 12: Погрешности и порядки сходимости u , h с использованием точного решения (водоем с холмом с сухим верхом)

5.3.2 Озеро Рурзее

В данной задаче $L=280$ м и профиль дна имеет достаточно сложный вид, соответствующий топографии реального озера Рурзее [10]. Как и в предыдущей задаче, присутствуют участки сухого дна, но теперь в окрестности левой и правой границ (а не в середине области), см. рис. 6. Эта

N	250	500	1000
$E[u]$	0.0023	0.0017	0.00014
$E[h]$	0.00025	0.00016	0.000012
$p[u]$	0.46	3.58	—
$p[h]$	0.66	3.68	—

Таблица 13: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=2000$ (водоем с холмом с сухим верхом)

задача позволяет проверить способность схемы сохранять состояние покоя при наличии как сложной топографии, так и сухого дна.

Расчеты велись до момента времени $t=10$ сек для значений параметров $\alpha=0.5$, $\beta=0.1$. Состояние покоя фактически сохраняется на протяжении всего времени расчета (рис. 6), но на негустой сетке ($N \leq 250$) присутствуют небольшие отклонения u от нуля, а также осцилляции при расчете h .

Исследование сходимости u , h представлено в табл. 14 и 15. Результаты заметно отличаются от полученных в предыдущем пункте. Порядок сходимости u по-прежнему скачет, но с гораздо меньшей амплитудой. Порядок же сходимости h , наоборот, стабилен и близок к 1. Сопоставление между собой результатов в табл. 14 и 15 для u приводит к прежним выводам, а для h свидетельствует о резком занижении погрешности во второй таблице и ошибочности (сильной завышенности) порядка сходимости при минимальном $N=250$.

N	250	500	1000	2000
$E_{ex}[u]$	0.046	0.013	0.0071	0.0016
$E_{ex}[h]$	1.06	0.51	0.26	0.13
$p_{ex}[u]$	1.79	0.93	2.14	—
$p_{ex}[h]$	1.05	0.99	1.03	—

Таблица 14: Погрешности и порядки сходимости u , h с использованием точного решения (озеро Рурзее)

N	250	500	1000
$E[u]$	0.044	0.012	0.0058
$E[h]$	0.061	0.012	0.0071
$p[u]$	1.90	1.03	—
$p[h]$	2.36	0.73	—

Таблица 15: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=2000$ (озеро Рурзее)

Отметим дополнительно, что при сужении расчетной области (например, до $25 \text{ м} \leq x \leq 260 \text{ м}$), когда сухое дно пропадает, абсолютная погрешность

как для h , так и для u чрезвычайно мала и остается на уровне погрешности округлений.

5.4 Двойная волна разрежения над выступом

Рассматривается канал длиной $L=25$ м. Его дно является плоским, за исключением невысокого выступа, расположенного в левой половине канала:

$$b(x) = \begin{cases} 1 \text{ м}, & 25/3 \text{ м} \leq x \leq 12.5 \text{ м} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

В начальный момент времени две волны одинакового постоянного уровня разбегаются в разные стороны от точки $x=50/3$ м в правой половине канала:

$$H_0(x) \equiv h_0(x) + b(x) = 10 \text{ м}, \quad h_0(x)u_0(x) = \begin{cases} -350 \text{ м}^2/\text{с}, & x \leq 50/3 \text{ м} \\ 350 \text{ м}^2/\text{с}, & x > 50/3 \text{ м} \end{cases}.$$

Ставятся граничные условия сноса (5.4).

При этом на момент времени $t=0.05$ сек образуется область сухого дна, которая растет с течением времени. Расчеты велись до момента времени $t_{fin}=0.65$ сек при значениях параметров $\alpha=0.1$, $\beta=0.001$. Рис. 7 демонстрирует процесс образования и увеличения области сухого дна на разные моменты времени. Результаты при $N=500$ хорошо согласуются с полученными в [12] и [17] при $N=300$.

Анализ сходимости по формулам (5.2) в табл. 16 показывает стабильный и высокий порядок сходимости u и существенно меньший, но растущий порядок сходимости h .

N	250	500	1000
$E[u]$	17.39	4.95	1.39
$E[h]$	0.033	0.020	0.0091
$p[u]$	1.81	1.84	—
$p[h]$	0.68	1.15	—

Таблица 16: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=2000$ (двойная волна разрежения над выступом)

5.5 Набегание волны на берег

Рассматривается канал длиной $L=500$ м. Профиль его дна моделирует наклонный берег и задается кусочно-линейной функцией вида

$$b(x) = \begin{cases} 1.4 - 0.001x \text{ м}, & x < 100 \text{ м} \\ 1.3 - 0.01x \text{ м}, & 100 \text{ м} \leq x \leq 200 \text{ м} \\ 0.3 - 0.001x \text{ м}, & x > 200 \text{ м} \end{cases}.$$

В начальный момент времени вода находится в состоянии покоя на уровне $H_0(x)=1.75$ м. В качестве граничных условий слева ставятся условия непроницаемой стенки, справа – условие сноса для u и динамическое условие для h :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad h(L, t) = 1 + 0.75 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

где $T=60$ мин. Так моделируется циклический прилив/отлив волны.

В данной задаче в уравнениях к F добавляется сила трения $F_{fric} = -\frac{g\eta^2 u|u|}{h^{4/3}}$ (с коэффициентом Маннинга $\eta = 0.03$). В разностной схеме она фигурирует в роли f в уравнении (4.2) (для нее используется простейшая аппроксимация), а также в выражениях (4.5), (4.6). В случае сухого дна в знаменателе формулы для F_{fric} величина h эмпирически модифицируется как $\max\{h, \varepsilon\}$ (с прежним $\varepsilon=0.001$, ср. с разделом 4).

Расчеты велись до времени $t_{fin}=54$ мин при значениях параметров $\alpha=0.1$, $\beta=0.2$. На рис. 8 представлен уровень воды для последовательных моментов времени $t=12, 24, 36, 48, 54$ мин. Результаты хорошо согласуются с полученными по другим схемам в [16] и [18] при $N=100$, за исключением последнего графика ($t=54$ мин), где наблюдается небольшое отклонение уровня на левой границе.

Анализ сходимости по формулам (5.2) в табл. 17 показывает убывание погрешности с убыванием порядка для u и ростом для h (однако значения порядков при $N=500$ могут не быть достоверными).

N	250	500	1000
$E[u]$	0.0039	0.0019	0.0011
$E[h]$	0.00042	0.00017	0.000058
$p[u]$	1.03	0.71	–
$p[h]$	1.31	1.56	–

Таблица 17: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=2000$ (набегание волны на берег)

Дополнительные расчеты нескольких, в частности, шести циклов приливов/отливов волны (т.е. до времени $t_{fin}=360$ мин) показали тот важный факт, что численное решение со временем не ухудшается и сохраняет периодическое поведение.

5.6 Распад разрыва в канале с плоским частично сухим дном

Данный тест представляет собой задачу о распаде разрыва в канале с плоским частично сухим дном. Длина области $L=50$ м. На расстоянии $50/3$ м от левого края области расположен щит. В начальный момент времени

высота воды слева от щита $h_0(x)=1$ м, справа – сухое дно (т.е. $h_0(x)=0$), а течение отсутствует. Щит мгновенно убирается в начальный момент. Ставятся граничные условия сноса (5.4).

Расчеты велись до момента времени $t_{fin}=3$ сек при параметрах $\alpha=\beta=0.1$. В данной задаче результаты можно сравнить с известным автомоделным решением (рис. 9). Достигается хорошая точность в вычислении уровня H , но имеются существенные погрешности в вычислении u на границе сухого дна.

В табл. 18 и 19 представлены результаты исследования сходимости. Первая из них показывает, что погрешность u несколько *возрастает* и стабилизируется – *не стремится к нулю*. Погрешность h убывает, но порядок убывания резко замедляется с ростом N .

Вторая таблица позволяет сделать вполне понятный, но поучительный вывод о том, что в такой ситуации результаты, полученные для u по формулам (5.2), совершенно недостоверны – они демонстрируют *убывание* погрешности и существенный рост порядка убывания. Об этой возможности не следует забывать в стандартных ситуациях, когда точное решение неизвестно. Погрешности же h в таблице довольно достоверные при умеренных $N \leq N_{\max}/8$, но соответствующие порядки в целом сильно завышены и растут (а не убывают) с ростом N .

N	250	500	1000	2000	4000	8000
$E[u]$	0.32	0.36	0.37	0.38	0.38	0.38
$E[h]$	0.0024	0.0016	0.0012	0.00090	0.00075	0.00066
$p[h]$	0.58	0.42	0.42	0.26	0.18	–

Таблица 18: Погрешности и порядки сходимости u , h с использованием точного решения (распад разрыва в канале с плоским частично сухим дном)

N	250	500	1000	2000	4000
$E[u]$	0.14	0.077	0.041	0.020	0.0067
$E[h]$	0.0026	0.0015	0.00090	0.00049	0.00019
$p[u]$	0.84	0.90	1.04	1.57	–
$p[h]$	0.78	0.75	0.88	1.38	–

Таблица 19: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=8000$ (распад разрыва в канале с плоским частично сухим дном)

5.7 Распад разрыва в канале с наклонным дном

Рассматривается канал длиной $L=122$ м, дно которого представляет собой наклонную плоскость:

$$b(x) = 0.61 - 0.005x \text{ м.}$$

В середине канала перпендикулярно основанию установлен щит, см. рис. 10. В начальный момент времени уровень воды слева от щита $H_0(x)=61$ м, справа – сухое дно, а течение отсутствует. Щит мгновенно убирается в начальный момент. Ставятся граничные условия сноса (5.4). В данной задаче снова учитывается сила трения F_{fric} , теперь с коэффициентом Маннинга $\eta=0.009$.

Расчеты велись до момента времени $t_{fin}=120$ сек при параметрах $\alpha=\beta=0.1$. В отличие от предыдущих расчетов представлены не мгновенные графики решений по пространству, а графики их зависимости от t для нескольких значений x (рис. 11). Следует отметить, что полученные графики по сравнению с результатами из [14] расположены чуть ниже.

В табл. 20 представлены результаты исследования сходимости в отсутствие точного решения. После анализа таблиц предыдущего теста результаты для u выглядят недостоверными, а для h им можно доверять, по-видимому, также лишь при $N \leq N_{\max}/8$, когда порядок сходимости близок к 1.

N	250	500	1000	2000
$E[u]$	0.0057	0.0023	0.00089	0.00033
$E[h]$	0.000083	0.000042	0.000022	0.0000085
$p[u]$	1.31	1.37	1.44	–
$p[h]$	1.003	0.90	1.39	–

Таблица 20: Погрешности и порядки сходимости u , h при $N_{\max}=4000$ (распад разрыва в канале с наклонным дном)

6 Заключение

В данной работе показано, что разработанный на основе регуляризованных уравнений мелкой воды численный алгоритм позволяет единообразно рассчитывать основные виды одномерных течений, включая транскритические течения и течения с областями сухого дна. Во всех примерах численное решение сходится к эталонному решению при сгущении сетки по пространству (кроме сходимости скорости в последних двух задачах при наличии сухого дна).

Установлен диссипативный характер самой регуляризованной системы уравнений мелкой воды.

Построенная явная двухслойная симметричная по пространству разностная схема формально имеет первый (а не второй) порядок аппроксимации на гладких решениях, что определяется наличием в ней регуляризирующих слагаемых, пропорциональных шагу сетки по пространству. Что же касается практического порядка сходимости для разнообразных задач и реально используемых сеток, то проведенные вычисления позволяют сделать, в частности, следующие выводы:

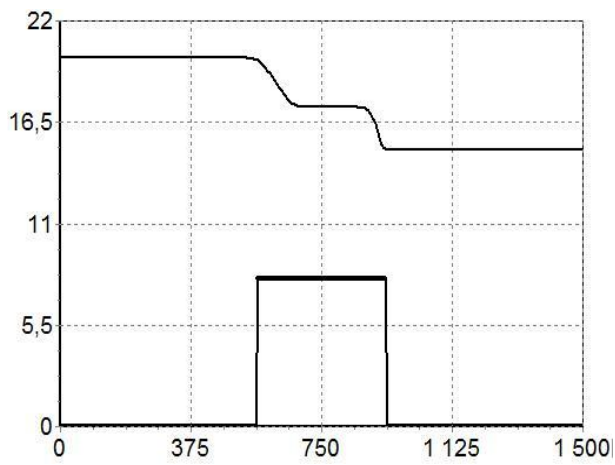
- 1) несмотря на то, что искомые высота h и скорость u определяются совместно, порядок для них часто различен (как и для расхода hu);
- 2) фактическое поведение порядка может быть очень различным: возрастающим, убывающим, резко скачкообразным;
- 3) в зависимости от задачи – включая задачи с выходом на стационарный режим – порядок может варьироваться в широких пределах (в проведенных расчетах – в диапазоне от 0.18 до 2.82);
- 4) в отсутствие точного решения практические способы вычисления порядка могут давать недостоверные результаты (и даже демонстрировать сходимость тогда, когда на самом деле ее нет).

Литература

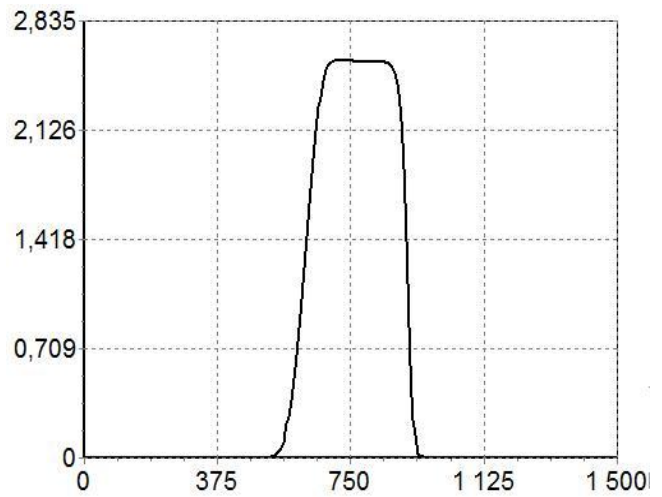
1. *Б.Н. Четверушкин*. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Т.Г. Елизарова*. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. *Ю.В. Шеретов*. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
4. *Т.Г. Елизарова, М.В. Афанасьева*. Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестн. Московского ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2010. № 1. С. 15–18.
5. *О.В. Булатов, Т.Г. Елизарова*. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.

6. *T.G. Elizarova, O.V. Bulatov.* Regularized shallow water equations and a new method of numerical simulation of the open channel // *Comp. Fluids* 46 (2011) 206–211.
7. *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
8. *А.А. Злотник.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. №2. С. 325–337.
9. *А.А. Злотник.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // *Доклады АН.* 2010. Т. 433. №6. С. 599–603.
10. *S. Noelle, N. Pankratz, G. Puppo, J.R. Natvig.* Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows // *J. Comp. Phys.* 213 (2006) 474–499.
11. *F. Benkhaldoun, M. Seaïd.* A simple finite volume method for the shallow water equations // *J. Comp. Appl. Math.* 234 (2010) 58–72.
12. *T. Gallouet, J.-M. Herard, N. Seguin.* Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography // *Comp. Fluids* 32 (2003) 479–513.
13. *K. Xu.* A well-balanced gas-kinetic scheme for the shallow-water equations with source terms. *J. Comp. Phys.* 178 (2002) 533–562.
14. *S.Q. Zhang, M.S. Ghidaoui, W.G. Gray, N.Z. Li.* A kinetic flux vector splitting scheme for shallow water flows // *Adv. Water Resources* 26 (2003) 635–647.
15. *R. Akoh, S. Ii, F. Xiao.* A multi-moment finite volume formulation for shallow water equations on unstructured mesh // *J. Comp. Phys.* 229 (2010) 4567–4590.
16. *Q. Liang, F. Marche.* Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms // *Adv. Water Resources* 32 (2009) 873–884.

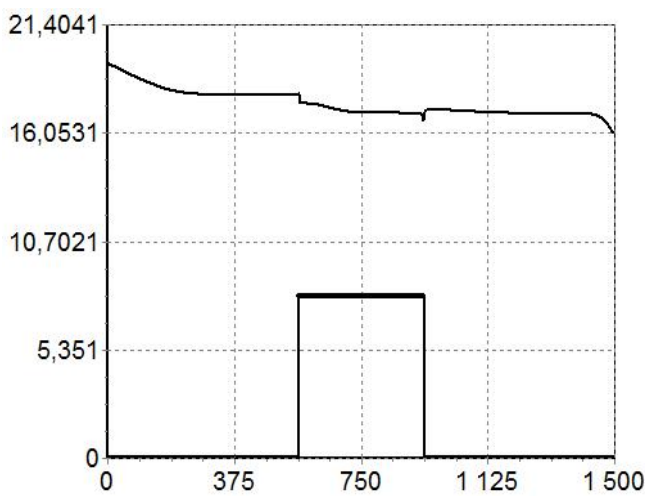
17. *J.M. Gallardo, C. Parés, M. Castro.* On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas // J. Comp. Phys. 227 (2007) 574–601.
18. *G. Kesserwani, Q. Liang.* Well-balanced RKDG2 solutions to the shallow water equations over irregular domains with wetting and drying // Comp. Fluids 39 (2010) 2040–2050.



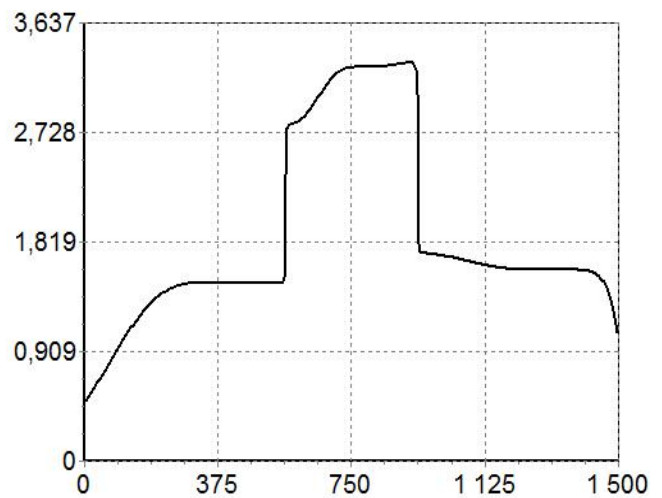
Уровень $H = h + b$ (при $t = 15$ сек)



Скорость u (при $t = 15$ сек)

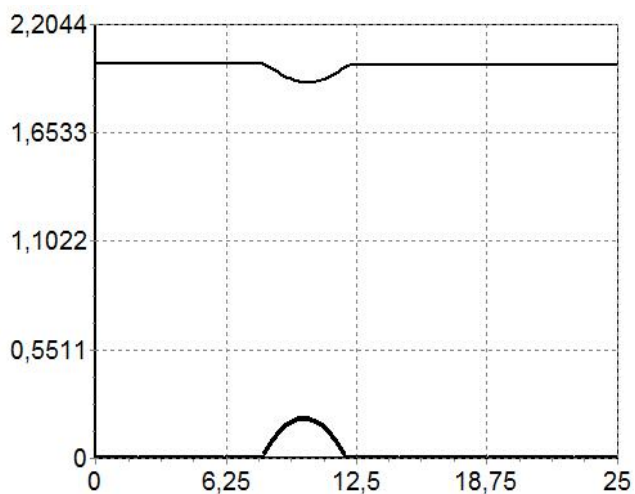


Уровень $H = h + b$ (при $t_{fin} = 60$ сек)

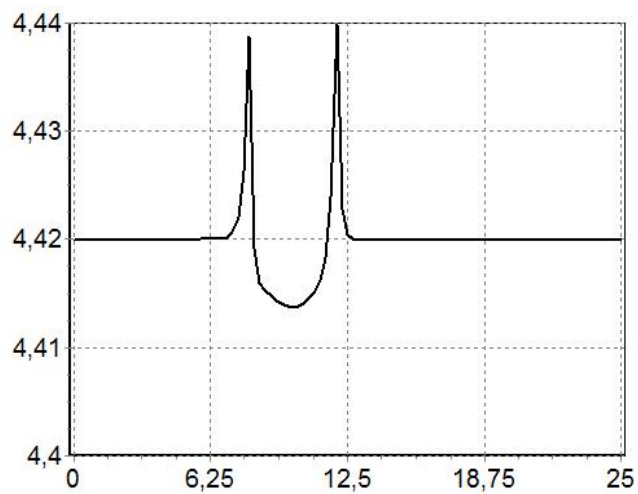


Скорость u (при $t_{fin} = 60$ сек)

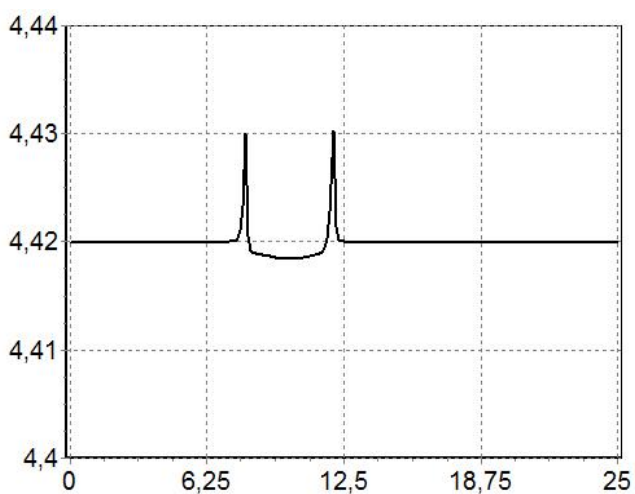
Рис. 1: Распад разрыва в канале с выступом, $N = 400$



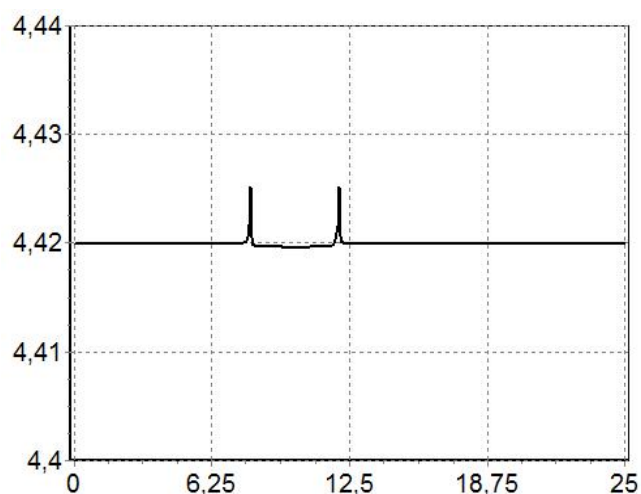
Уровень $H = h + b$ (при $N = 200$)



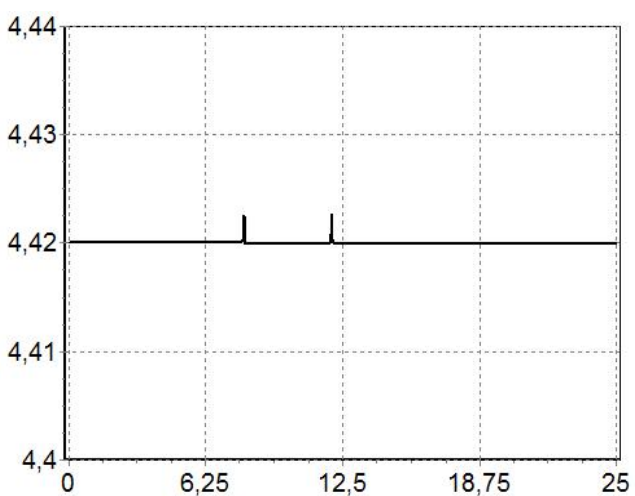
Расход hu (при $N = 100$)



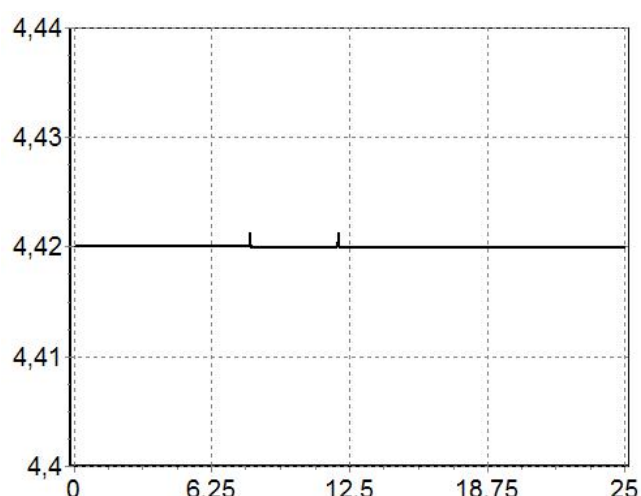
Расход hu (при $N = 200$)



Расход hu (при $N = 400$)

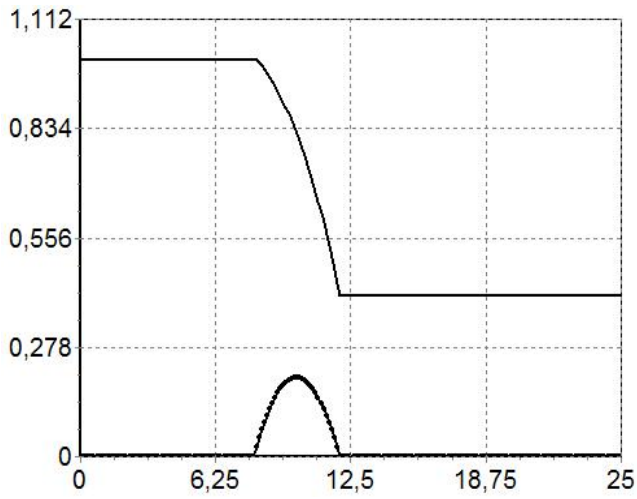


Расход hu (при $N = 800$)

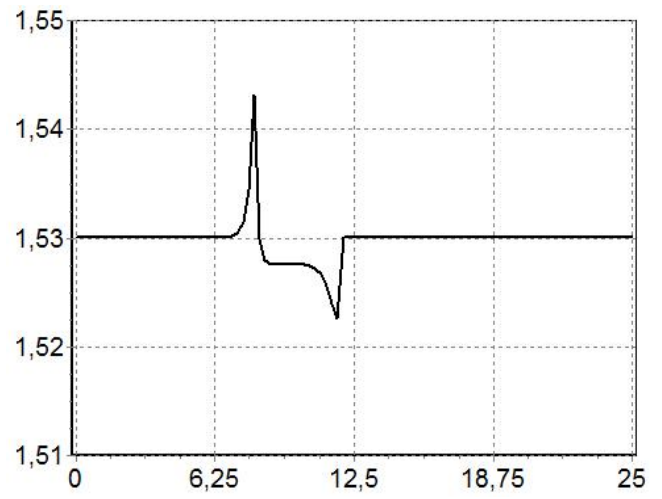


Расход hu (при $N = 1600$)

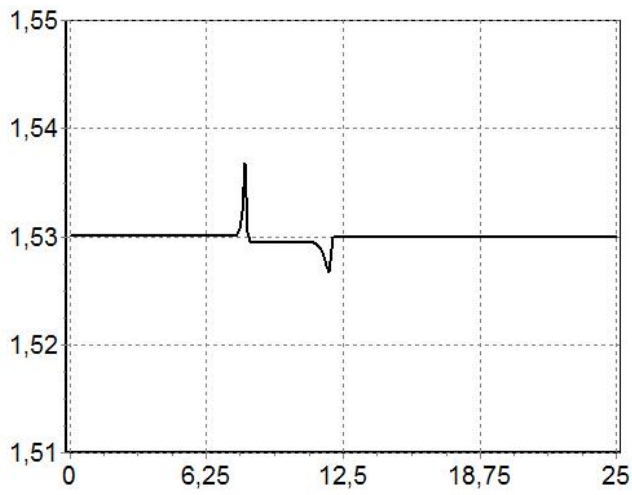
Рис. 2: Докритическое течение над холмом, $t_{fin} = 200$ сек



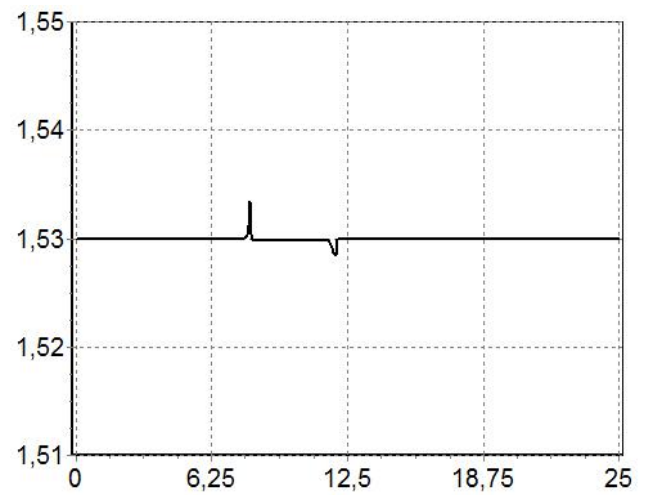
Уровень $H = h + b$ (при $N = 200$)



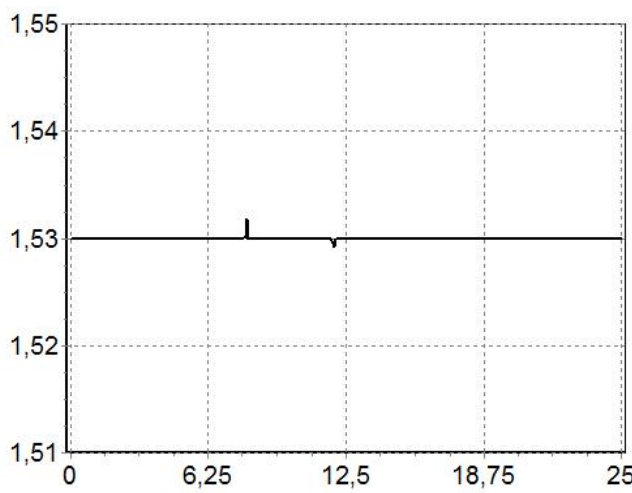
Расход hu (при $N = 100$)



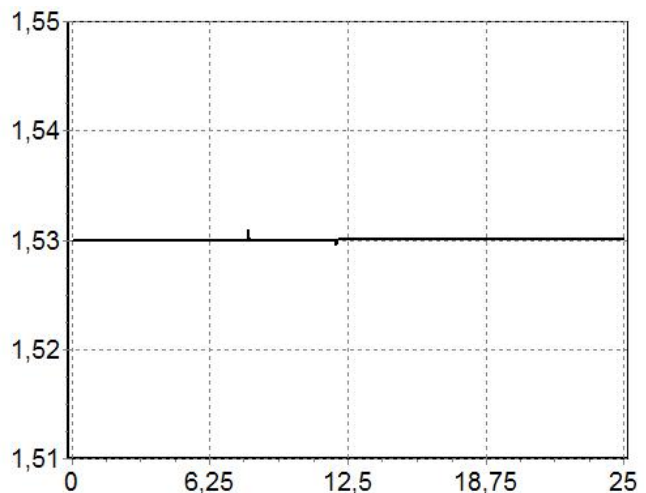
Расход hu (при $N = 200$)



Расход hu (при $N = 400$)

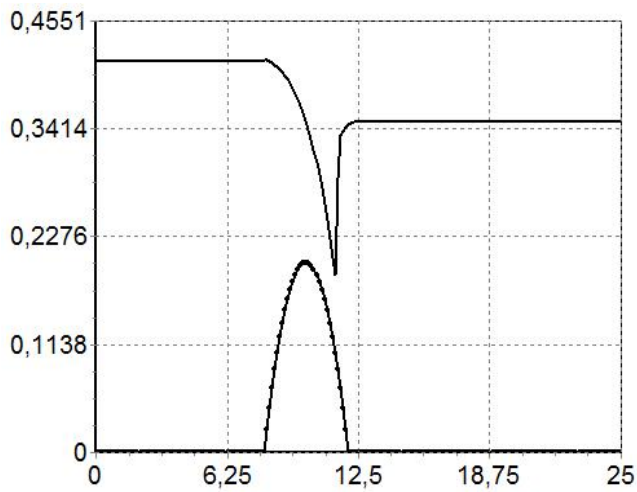


Расход hu (при $N = 800$)

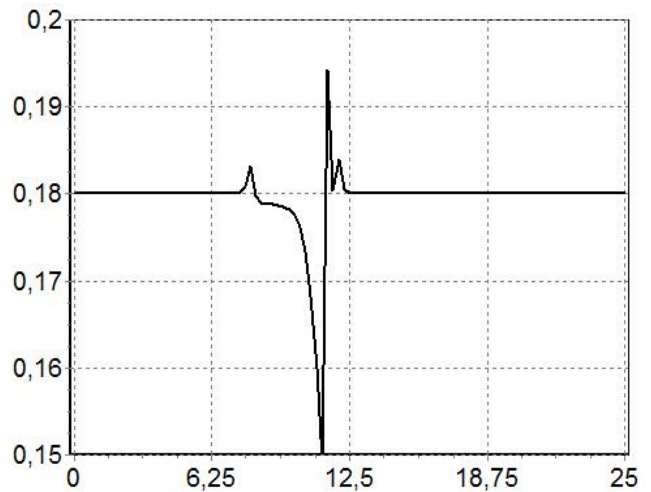


Расход hu (при $N = 1600$)

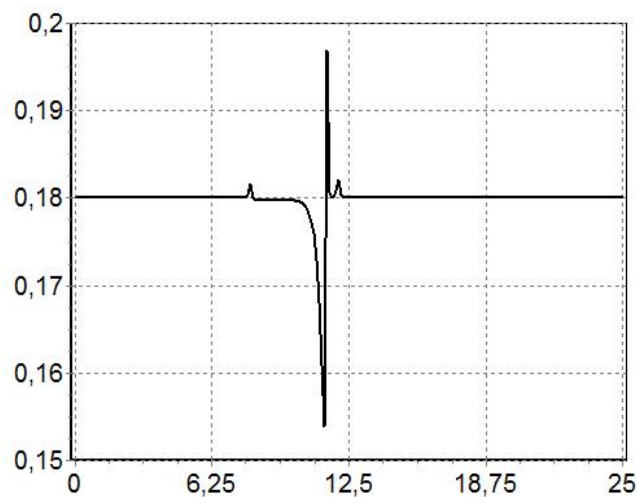
Рис. 3: Транскритическое течение над холмом, $t_{fin} = 200$ сек



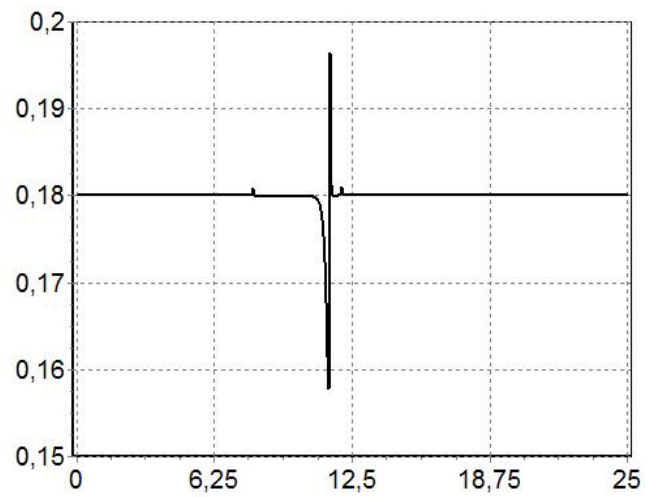
Уровень $H = h + b$ (при $N = 200$)



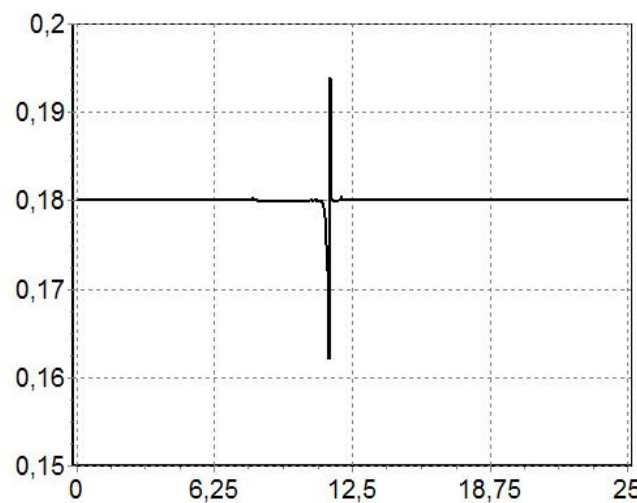
Расход hu (при $N = 100$)



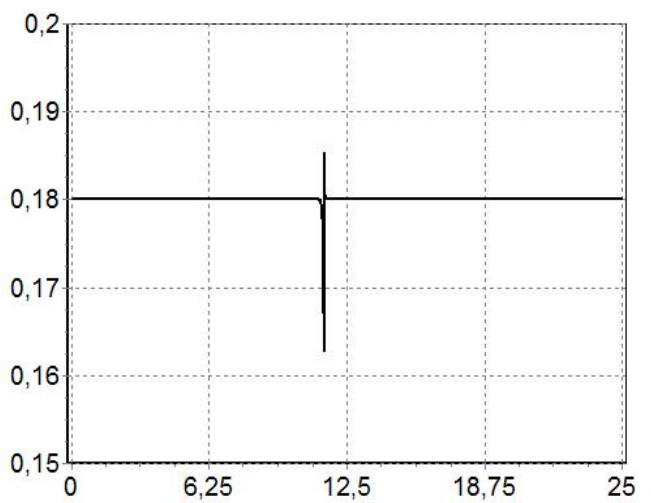
Расход hu (при $N = 200$)



Расход hu (при $N = 400$)

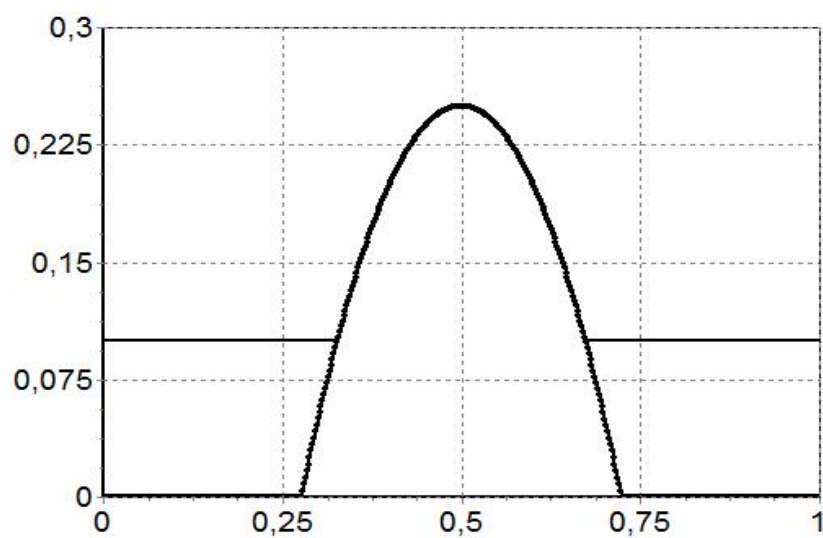


Расход hu (при $N = 800$)



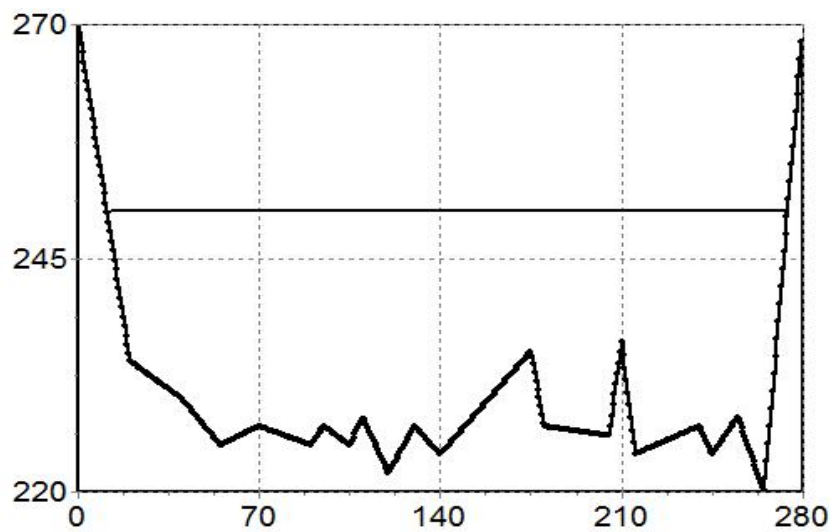
Расход hu (при $N = 1600$)

Рис. 4: Сверхкритическое течение над холмом, $t_{fin} = 200$ сек



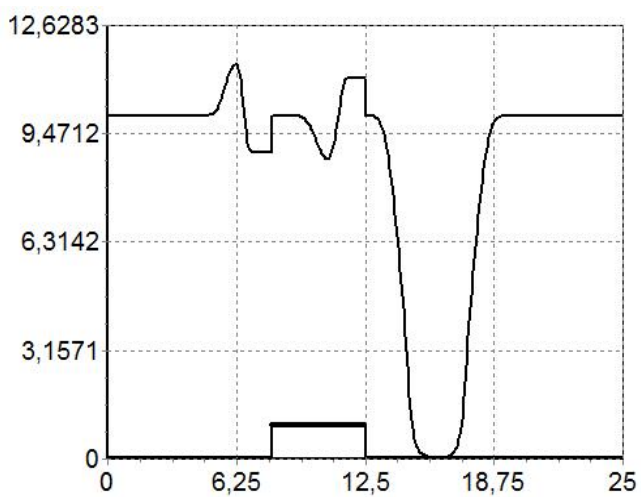
Уровень $H = h + b$ (при $N = 500$, $t_{fin} = 50$ сек)

Рис. 5: Водоем с холмом с сухим верхом

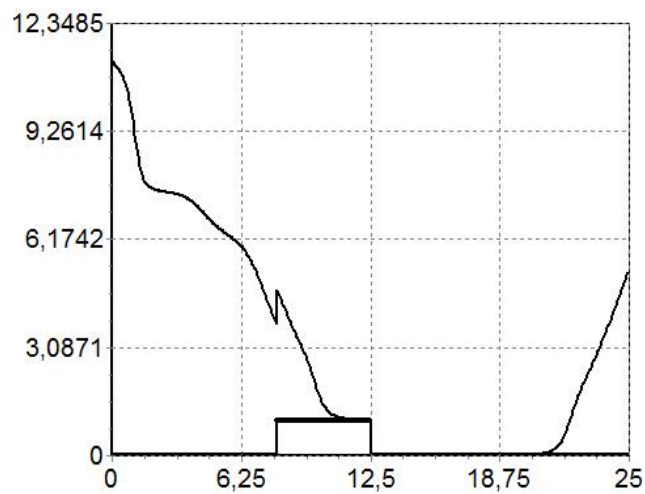


Уровень $H = h + b$ (при $N = 500$, $t_{fin} = 10$ сек)

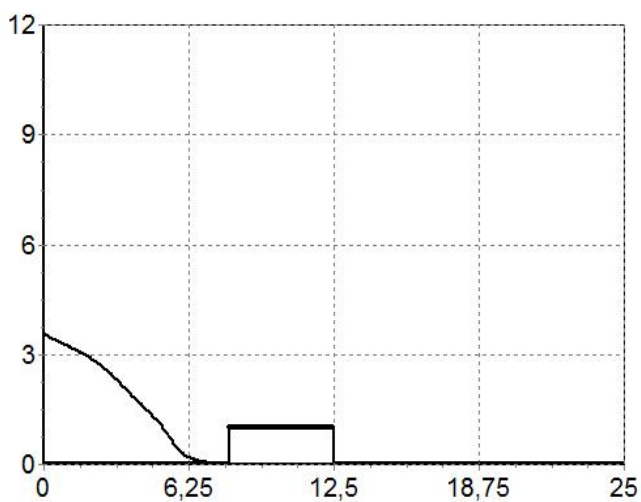
Рис. 6: Озеро Рурзее



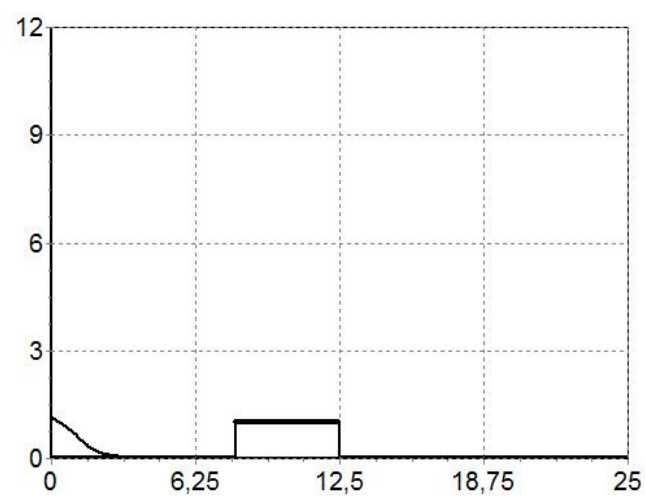
Уровень $H = h + b$ (при $t = 0.05$ сек)



Уровень $H = h + b$ (при $t = 0.25$ сек)

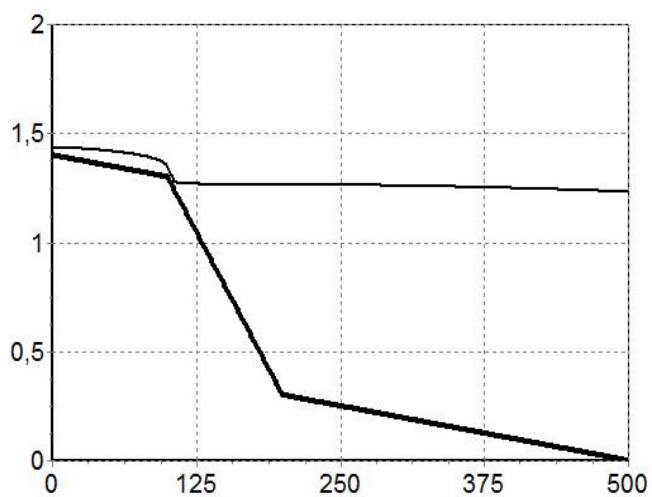


Уровень $H = h + b$ (при $t = 0.45$ сек)

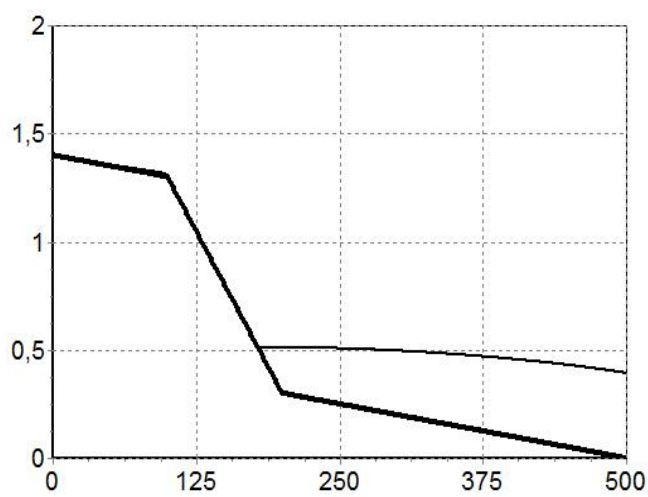


Уровень $H = h + b$ (при $t_{fin} = 0.65$ сек)

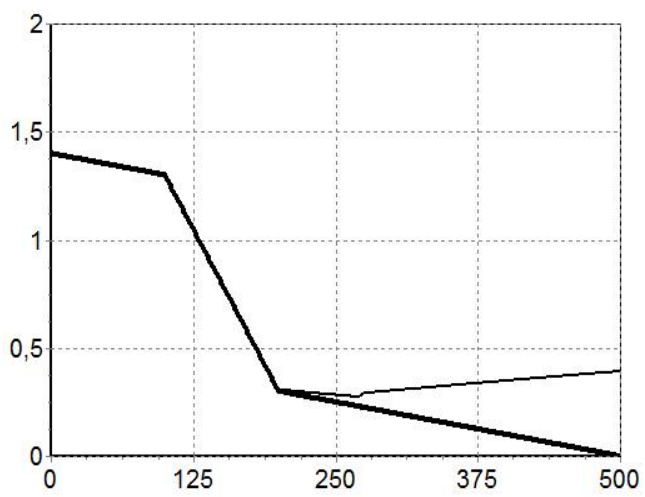
Рис. 7: Двойная волна, $N = 500$



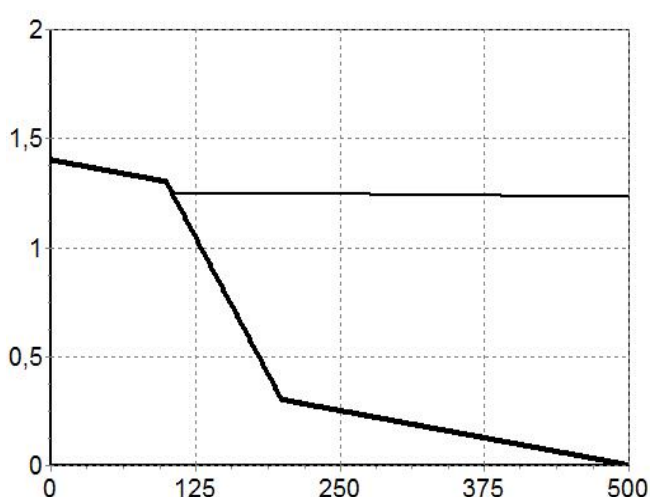
Уровень $H = h + b$ (при $t = 12$ мин)



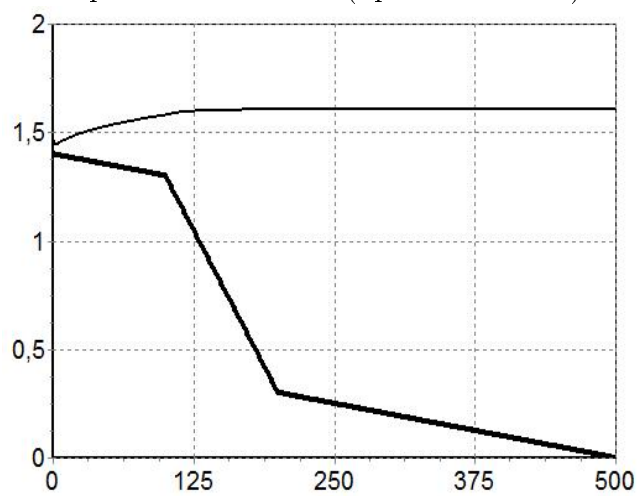
Уровень $H = h + b$ ($t = 24$ мин)



Уровень $H = h + b$ (при $t = 36$ мин)



Уровень $H = h + b$ (при $t = 48$ мин)



Уровень $H = h + b$ (при $t_{fin} = 54$ мин)

Рис. 8: Набегание волны на берег, $N = 500$

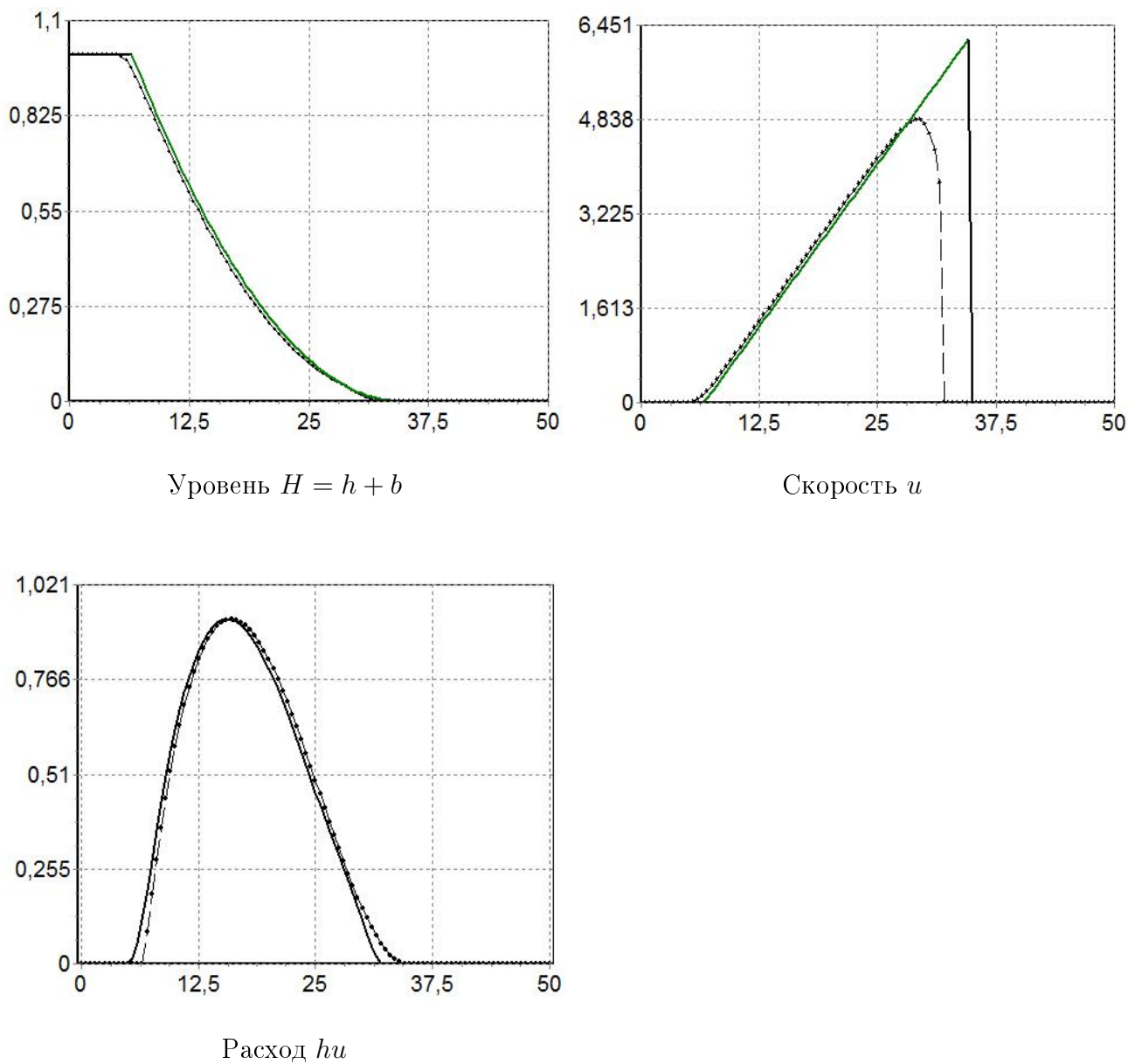


Рис. 9: Распад разрыва в канале с плоским частично сухим дном, $N = 500$, $t_{fin} = 3$ сек (сплошная линия – численное решение, пунктирная – аналитическое решение).

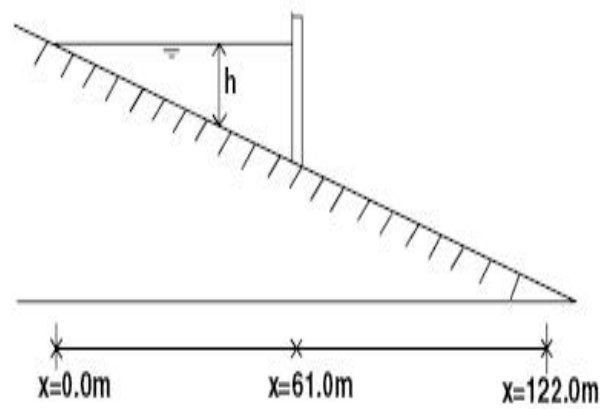
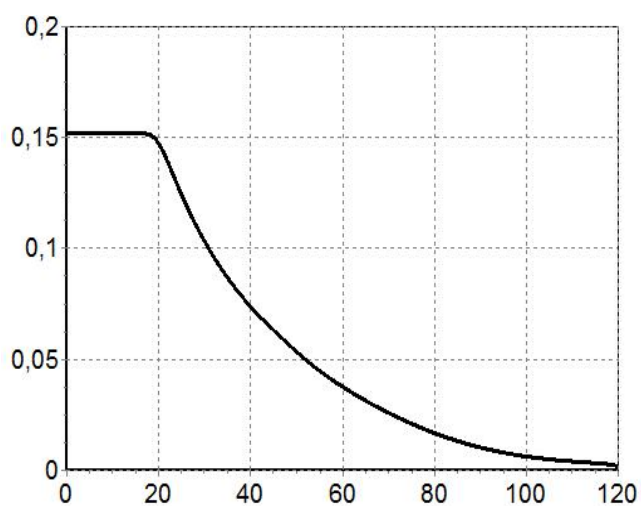
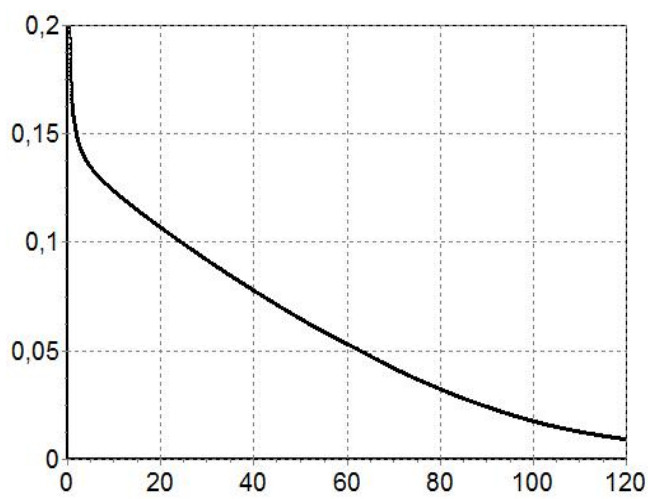


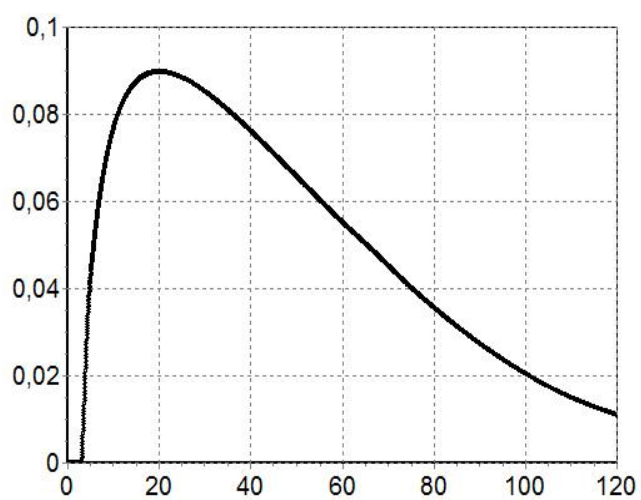
Рис. 10: Схема расчетной области в задаче о распаде разрыва в канале с наклонным дном



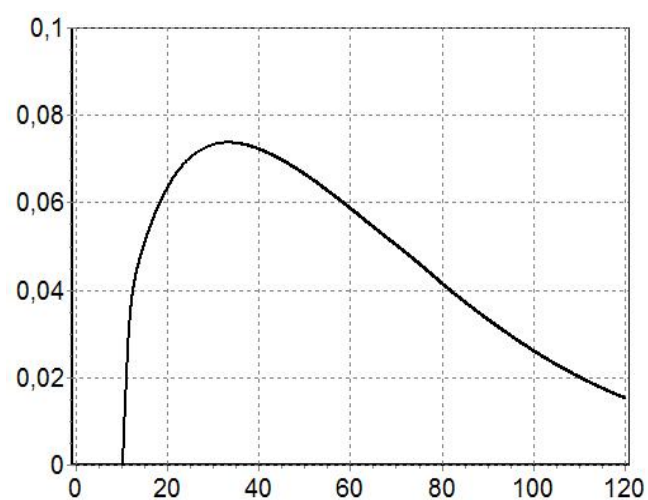
Глубина h (при $x=30.5$)



Глубина h (при $x=61.0$)



Глубина h (при $x=70.1$)



Глубина h (при $x=85.4$)

Рис. 11: Распад разрыва в канале с наклонным дном, графики зависимости от t для нескольких значений x при $N = 250$