

**Домашно по Ламбда смятане и теория на
доказателствата**

Светослав Илиев 2-ри курс специалност КН

1 Задачи

Задача 1.1 (1т.) Да се дефинира формално с индукция операция "преименуване на свързана променлива", която по даден терм $M \in \Lambda$, променлива $x \in V$ и променлива $y \in FV(M) \cup BV(M)$, дефинира нов терм M_y^x , който представлява резултата от заменянето на всички свързани срещания на x в M с y

Решение:

Дефинираме функцията $bvrename$ индуктивно с индукция по терма M
 $bvrename(M, x, y)$

- 1) $M \equiv z \in V : bvrename(z, x, y) = z$
- 2) $M = M_1 M_2 : bvrename(M, x, y) = bvrename(M_1, x, y)(bvrename(M_2, x, y))$
- 3) $M = \lambda_z M' :$
 - 3.1) $z \equiv x : bvrename(\lambda_x M', x, y) = \lambda_y (bvrename'(M', x, y))$
 - 3.2) $z \neq x : bvrename(\lambda_z M', x, y) = \lambda_z (bvrename(M', x, y))$

Дефинираме $bvrename'(M, x, y)$:

- 1) $x \equiv z \in V$
 - 1.1) $z \equiv x : bvrename'(x, x, y) = y$
 - 1.2) $z \neq x : bvrename'(z, x, y) = z$
- 2) $M = M_1 M_2$
 $bvrename'(M.x.y) = bvrename'(M_1, x, y)(bvrename'(M_2, x, y))$
- 3) $M = \lambda_z M'$
 - 3.1) $z \equiv x : bvrename'(\lambda_x M', x, y) = \lambda_y (bvrename'(M', x, y))$
 - 3.2) $z \neq x : bvrename'(\lambda_z M', x, y) = \lambda_z (bvrename'(M', x, y))$

Задача 1.18 Да се дефинират следните комбинатори и с помощта на индукция да се докаже формално тяхната коректност:

- (1 т.) c_s , такъв че $c_s c_n \stackrel{\beta}{=} c_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$
- (2 т.) c_+ , такъв че $c_+ c_m c_n \stackrel{\beta}{=} c_{m+n} m, n \in \mathbb{N}$
- (2 т.) c_* , такъв че $c_* c_m c_n \stackrel{\beta}{=} c_{mn}$ за $m, n \in \mathbb{N}$
- (2 т.) c_{exp} , такъв че $c_{exp} c_m c_n \stackrel{\beta}{=} c_{m^n}$ за $m, n \in \mathbb{N}$

Решение:

- 1) $c_s = \lambda_{n,f,x} f(nfx)$

Ще докажем коректността на c_s с индукция по n :

- 1) $n = 0 : c_s c_0 \stackrel{\beta}{=} (\lambda_{n,f,x} f(nfx))(\lambda_{f,x} x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(\lambda_{f,x} x)(fx) \stackrel{\beta}{=}$

$$\stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x}(fx) \equiv c_1$$

2) Нека е изпълнено, че $c_s c_{n-1} = c_n$

$$3) \lambda_{n,f,x} f(nfx)(c_n) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(c_n fx) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(f^n x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{n+1} x \equiv c_{n+1}$$

2) $c_+ = \lambda_{m,n,f,x} m f(nfx)$

Ще докажем коректността на c_+ :

1) $m = 0; n = 0$:

$$c_+ c_0 c_0 \stackrel{\beta}{=} (\lambda_{m,n,f,x} n f(mfx))(\lambda_{f,x} x)(\lambda_{f,x} x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} x) f(\lambda_{f,x} x)(fx) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} x) f(x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} \equiv c_0$$

2) $c_+ c_m c_n$:

$$c_+ c_n c_m \stackrel{\beta}{=} (\lambda_{m,n,f,x} n f(mfx))(\lambda_{f,x}(f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x)) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} f^n x) f(f^m x) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} f^n(f^m x)) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{m+n} \equiv c_{m+n}$$

3) $c_* = \lambda_{m,n,f} m(nf)$

Ще докажем коректността на c_* :

1) $m = 0; n = 0$:

$$c_* c_0 c_0 \stackrel{\beta}{=} \lambda_{m,n,f} m(nf)(\lambda_{f,x} x)(\lambda_{f,x} x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} x)((\lambda_{f,x} x) f) \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} x)(\lambda_x x) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} x \equiv c_0$$

2) $c_* c_m c_n$:

$$(\lambda_{m,n,f} m(nf))(c_m)(c_n) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{m,n,f}(\lambda_{f,x} f^m x)((\lambda_{f,x} f^n x) f) \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} f^m x)((\lambda_{f,x} f^n x) f) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_x f^n x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)^m x) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x f^{nm} x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{nm} x \equiv c_{nm}$$

3) $c_{exp} = \lambda_{m,n,f} n m f$

Ще докажем коректността на c_{exp} :

$$\lambda_{m,n,f} n m f(c_m)(c_n) \stackrel{\beta}{=} \lambda_{m,n,f} n m f(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^n x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_f((\lambda_{f,x} f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x) f) \stackrel{\eta}{=} \\ \stackrel{\eta}{=} (\lambda_{f,x} f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x) \stackrel{\beta}{=} \lambda_x(\lambda_{f,x} f^m x)^n x \stackrel{\eta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)^n \equiv f^{m^n}$$

Задача 2.1(3 т.) Да се докаже, че типовите променливи α не са обитаеми

Решение: Нека допуснем, че $\alpha \in TV$ е обитаем тип \implies съществува $M : \alpha$, където $M \in \Lambda^*$, $FV(M) = \emptyset$, $\alpha \in TV$

$$FV(M) = \emptyset \implies M \equiv \lambda_x N, \quad N \in \Lambda$$

$$\lambda_x N : \alpha$$

От допускането получаваме $\vdash \lambda_x N : \alpha$

От Лемата за обръщането получаваме, че:

$$\vdash \lambda_x N : \alpha \implies \exists \rho, \sigma : \rho \Rightarrow \sigma \equiv \alpha$$

но $\alpha \in TV$ \nmid

Задача 2.9(2 т.) Да се докаже, че \supseteq е частична наредба, т.е. е рефлексивна и транзитивна релация.

Решение:

1) Рефлексивна: $\alpha \supseteq \alpha$

Дефинираме субституция ξ : $\alpha\xi = \alpha$

2) Транзитивна: $\alpha \supseteq \beta, \beta \supseteq \gamma \implies \alpha \supseteq \gamma$

$$\alpha \supseteq \beta \implies \exists \xi_1 : \alpha\xi_1 = \beta$$

$$\beta \supseteq \gamma \implies \exists \xi_2 : \beta\xi_2 = \gamma$$

Дефинираме ξ : $\xi = \xi_1 \circ \xi_2$

$$\alpha\xi = (\alpha\xi_1)\xi_2 = \beta\xi_2 = \gamma \implies \alpha \supseteq \gamma$$

Задача 3.1 Да се реализира програма, която позволява дефиниране на доказателства в някоя от следните системи:

•(8 т.) Хилбертова система H[mic]

Решение:

Във файла HilbertSystem.py