Домашно по Ламбда смятане и теория на доказателствата

Светослав Илиев 2-ри курс специалност КН

1 Задачи

Задача 1.1 (1т.) Да се дефинира формално с индукция операция "преименуване на свързана променлива", която по даден терм $M \in \Lambda$, променлива $x \in V$ и промелива $y \in FV(M) \cup BV(M)$, дефинира нов терм M^x_y, който представлява резултата от заменянето на всички свързани срещания на x в M с y

Решение:
Дефинираме функцията $bvrename$ индуктивно с индукция по терма M
$bvrename(M, x, y)$
1) $M \equiv z \in V : bvrename(z, x, y) = z$
2) $M = M_1M_2 : bvrename(M, x, y) = bvrename(M_1, x, y)(bvrename(M_2, x, y))$
3) $M = \lambda_z M'$:
  3.1) $z \equiv x : bvrename(\lambda_x M', x, y) = \lambda_y(bvrename'(M', x, y))$
  3.2) $z \not\equiv x : bvrename(\lambda_z M', x, y) = \lambda_z(bvrename(M', x, y))$

Дефинираме $bvrename'(M, x, y)$:
1) $x \equiv z \in V$
  1.1) $z \equiv x : bvrename'(x, x, y) = y$
  1.2) $z \not\equiv x : bvrename'(z, x, y) = z$
2) $M = M_1M_2$
  $bvrename'(M.x.y) = bvrename'(M_1, x, y)(bvrename'(M_2, x, y))$
3)$M = \lambda_z M'$
  3.1) $z \equiv x : bvrename'(\lambda_x M', x, y) = \lambda_y(bvrename'(M', x, y))$
  3.2) $z \not\equiv x : bvrename'(\lambda_z M', x, y) = \lambda_z(bvrename'(M', x, y))$

Задача 1.18 Да се дефинират следните комбинатори и с помощта на индукция да се докаче формално тяхната коректност:

- **(1 т.)** c_s, такъв че $c_s c_n \overset{\beta}{=} c_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$
- **(2 т.)** c_+, такъв че $c_+ c_m c_n \overset{\beta}{=} c_{m+n} m, n \in \mathbb{N}$
- **(2 т.)** c_*, такъв че $c_* c_m c_n \overset{\beta}{=} c_{mn}$ за $m, n \in \mathbb{N}$
- **(2 т.)** c_{exp}, такъв че $c_{exp} c_m c_n \overset{\beta}{=} c_{m^n}$ за $m, n \in \mathbb{N}$

Решение:
1) $c_s = \lambda_{n,f,x} f(nfx)$
Ще докажем коректността на c_s с индукция по n :
  1) $n = 0 :\ c_s c_0 \overset{\beta}{=} (\lambda_{n,f,x} f(nfx))(\lambda_{f,x} x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(\lambda_{f,x} x)(fx) \overset{\beta}{=}$

$\overset{\beta}{=} \lambda_{f,x}(fx) \equiv c_1$

2) Нека е изпълнено, че $c_s c_{n-1} = c_n$

3) $\lambda_{n,f,x} f(nfx)(c_n) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(c_n fx) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f(f^n x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{n+1} x \equiv c_{n+1}$

2) $\quad c_+ = \lambda_{m,n,f,x} mf(nfx)$

Ще докажем коректността на c_+ :

1) $m = 0; n = 0$:

$c_+ c_0 c_0 \overset{\beta}{=} (\lambda_{m,n,f,x} nf(mfx))(\lambda_{f,x} x)(\lambda_{f,x} x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} x) f(\lambda_{f,x} x)(fx) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} x) f(x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} \equiv c_0$

2) $c_+ c_m c_n$:

$c_+ c_n c_m \overset{\beta}{=} (\lambda_{m,n,f,x} nf(mfx))(\lambda_{f,x} f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} f^n x) f((\lambda_{f,x} f^m x) fx) \overset{\beta}{=}$

$\overset{\beta}{=} \lambda_{f,x}(\lambda_{f,x} f^n x) f(f^m x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^n (f^m x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{m+n} x \equiv c_{m+n}$

3) $\quad c_* = \lambda_{m,n,f} m(nf)$

Ще докажем коректността на c_* :

1) $m = 0; n = 0$:

$c_* c_0 c_0 \overset{\beta}{=} \lambda_{m,n,f} m(nf)(\lambda_{f,x} x)(\lambda_{f,x} x) \overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} x)((\lambda_{f,x} x) f) \overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} x)(\lambda_x x) \overset{\beta}{=}$

$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} x \equiv c_0$

2) $c_* c_m c_n$:

$(\lambda_{m,n,f} m(nf))(c_m)(c_n) \overset{\beta}{=} \lambda_{m,n,f}(\lambda_{f,x} f^m x)((\lambda_{f,x} f^n x) f) \overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} f^m x)((\lambda_{f,x} f^n x) f) \overset{\beta}{=}$

$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_x f^n x) \overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)^m x) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)(\lambda_x f^n x).......(\lambda_x f^n x)(\lambda_x f^n x) x) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)(\lambda_x f^n x).......(\lambda_x f^n x)(f^n x)) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)(\lambda_x f^n x).......(\lambda_x f^n x)(f^n(f^n x))) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(\lambda_x f^n x)(\lambda_x f^n x).......(\lambda_x f^n x)(f^n(f^n(f^n x)))) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x(f^n(f^n.....(f^n(f^n(f^n(f^n x))))).....) \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} \lambda_f(\lambda_x f^{nm} x) \overset{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{nm} x \equiv c_{nm}$

Запомняме, че от $(\lambda_x f^n x)^m x$ можем да изведем f^{nm}

4) $\quad c_{exp} = \lambda_{m,n,f} nmf$

Ще докажем коректността на c_{exp} :

$\lambda_{m,n,f} nmf(c_m)(c_n) \overset{\beta}{=} \lambda_{m,n,f} nmf(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^n x) \overset{\beta}{=} \lambda_f((\lambda_{f,x} f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x) f) \overset{\eta}{=}$

$\overset{\eta}{=} (\lambda_{f,x} f^n x)(\lambda_{f,x} f^m x) \overset{\beta}{=} \lambda_x(\lambda_{f,x} f^m x)^n x \overset{\eta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)^n \overset{\beta}{=}$

$\stackrel{\beta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^m x).....(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^m x) \stackrel{\beta}{=}$
$\stackrel{\beta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^m x).....(\lambda_x (\lambda_{f,x} f^m x)^m x) \stackrel{\beta}{=}$
$\stackrel{\beta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^m x).....(f^{mm} x) \stackrel{\beta}{=}$
$\stackrel{\beta}{=} (\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^m x).....(f^{m^2} x) \stackrel{\beta}{=}$
$\stackrel{\beta}{=} \lambda_{f,x} f^{m^n} x \equiv c_{exp}$

Задача 2.10(1 т.) Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ и произволен тип τ е вярно, че $\vdash c_n : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau$

Решение: Ще го докажем с индукция по n:

n = 0:

$\Gamma = \{x : \tau; f : \tau \Rightarrow \tau\}$

От 1) От дефиницията за типов извод знаем, че:

$\Gamma \vdash f : \tau \Rightarrow \tau$

$\Gamma \vdash x : \tau$

$x : \tau \vdash \lambda_f x : (\tau \Rightarrow \tau) \implies \tau$

След прилагане на 3) за x получаваме:

$\vdash \lambda_{f,x} x : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau$

n = 1:

$\Gamma = \{x : \tau; f : \tau \Rightarrow \tau\}$

От 1) От дефиницията за типов извод знаем, че:

$\Gamma \vdash f : \tau \Rightarrow \tau$

$\Gamma \vdash x : \tau$

От 2) от дефиницията получавам $\Gamma \vdash fx : \tau$

След двойно прилагане на 3) веднъж за f и веднъж за x получаваме:

$\vdash \lambda_{f,x} fx : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau$

Допускаме, че е вярно за n= k-1

n=k

Знаем, че чрез многократно прилагане на апликацията можем да получим $\Gamma \vdash f^{k-1}x : \tau$ чрез прилагане на апликацията още веднъж ще получим $\Gamma \vdash f^k x : \tau$

Отнвово след двукратно прилагане на 3) от дефиницията получаваме:

$\vdash \lambda_{f,x} f^k x : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau$

Задача 2.9(2 т.) Да се докаже, че $\supseteq$ е частична наредба, т.е. е рефлексивна и транзитивна релация.

Решение:

1)Рефлексивна: $\alpha \supseteq \alpha$

Дефинираме субституция ξ: $\alpha\xi = \alpha$

2)Транзитивна: $\alpha \supseteq \beta$, $\beta \supseteq \gamma \implies \alpha \supseteq \gamma$

$\alpha \supseteq \beta \implies \exists \xi_1 : \alpha\xi_1 = \beta$

$\beta \supseteq \gamma \implies \exists \xi_2 : \beta\xi_1 = \gamma$

Дефинираме $\xi : \xi = \xi_1 \circ \xi_2$

$\alpha\xi = (\alpha\xi_1)\xi_2 = \beta\xi_2 = \alpha \implies \alpha \supseteq \gamma$

Задача 3.1 Да се реализира програма, която позволява дефиниране на доказателства в някоя от следните системи:

- **(8 т.)** Хилбертова система H[mic]

Решение:

Във файла HilbertSystem.py