# Verjetnost in statistika - zapiski s predavanj prof. Drnovška

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2022/23

## Kazalo

**Posledica 0.1.** Slučajna spremenljivka $X$ ima matematično upanje $\iff$ $X$ ima matematično upanje. Tedaj velja $|E(X)| = E(|X|)$

*Dokaz.* (samo diskreten primer):

$$E(|X|) \overset{\text{trd.} f(x)=|x|}{=} \sum_i |x_i| \cdot p_i \geq |\sum_i x_i \cdot p_i| = |E(X)|$$

■

**Posledica 0.2.** Za $\forall a \in \mathbb{R}$ in vsako slučjano spremenljivko $X$ z matematičnim upanjem velja $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ (homogenost)

*Dokaz.* $f(x) = a \cdot x$, trditev (od prej) ■

Podobno kot zadnjo trditev se dokaže

**Trditev 0.3.** Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $(X, Y)$ slučajni vektor

(a) Naj bo $(X, Y)$ diskretno porazdeljen $p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \sum_i \sum_i f(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$ (če le vrsta (oz. končna vsota) absolutno konvergira)

(b) Naj bo $(X, Y)$ zvezno porazdeljen z gostoto $p(X, Y)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)p_{(X,Y)}(x, y)dy$ (če le integral absolutno konvergira)

**Posledica 0.4.** Če slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ imata matamatično upanje, potem ga ima tudi $X + Y$ in velja $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (aditivnost)

*Dokaz.* (samo zvezen primer):

$$\begin{aligned}
E(X, Y) &\overset{f(x,y)=x+y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (x + y)p_{(X,Y)}(x, y)dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} ydy \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

■

**Posledica 0.5.** Za slučajne spremenljivke $X_1 \cdots X_n$, ki imajo matematično upanje, velja $E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$ z $\forall a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X+Y}(x)dx \overset{?}{=} E(X) + E(Y) \text{ ni očitno iz tega}$$

*Primer.* 1. Če ima $X$ matematično upanje, potem $E(X-E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

2. $X_k \sim Ber(p)$, t.j. $X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1-p$

$$X = X_1 + \cdots + X_n \implies E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n \cdot p$$

Posebej to (v 2. zgledu) velja v primeru, ko so $\{X_k\}_{i=1}^n$ neodvisne. To velja tudi za Bernoullijevo zaporedje ponovitev poskusa: opazujemo dogodek A s $P(A) = p$. $X$ je frekvenca dogodka A v n ponovitvah poskusa. Potem je $X \sim Bin(n,p)$ in $X = X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $(X_k = 1)$ dogodek, da se A zgodi v k-ti ponovitvi poskusa, sicer je $(X_k = 0)$. Po zgornjem je $E(X) = n \cdot p$. Do tega lahko pridemo tudi direktno:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \overset{j=k-1}{=} \\ &= np(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j}) = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

**Trditev 0.6** (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** Če obstajata $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, potem obstaja tudi $E(X,Y)$ in velja $E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$. Enačaj velja samo v primeru $|Y| = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}}|X|$ z verjetnostjo 1

*Dokaz.* Ker za nenegativa realna števila velja neenakost

$$u \cdot v \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \iff (u-v)^2 \geq 0$$

za nenegativni slučajni spremenljivki $U$ in $V$ velja neenakost

$$U \cdot V \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

Enakost velja samo v točkah $\omega \in \Omega$, za katere je $U(\omega) = V(\omega)$
Če vstavimo $U = a \cdot |X|$ in $V = \frac{1}{a}|Y|$ za $a > 0$, dobimo $|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2}(a^2 Y^2 + \frac{1}{a^2} Y^2)$ in zato je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \frac{1}{2}(a^2 E(X^2) + \frac{1}{a^2} E(Y^2)) \text{ za } \forall a > 0 \tag{1}$$

Če vstavimo $a^2 = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}}$ na desni strani dobimo

$$\frac{1}{2}(\sqrt{E(Y^2)+E(X^2)} + \sqrt{E(X^2+E(Y^2))}) = \sqrt{E(X^2)+E(Y^2)}$$

Torej je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$$

Enakost v neenakosti velja $\iff a|X| = \frac{1}{a}|Y|$, torej $|Y| = a^2|X| = \frac{E(Y^2)}{E(X^2)}|X|$ z verjetnostjo 1 ■

**Posledica 0.7.** Če obstaja $E(X^2)$, potem obstaja $E(X)$ in velja $(E(X))^2 \leq E(X^2)$

*Dokaz.* $Y = 1$, t.j. $Y : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$

$$E(|X \cdot 1|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot 1}/^2 \qquad\qquad (E(|X|))^2 \leq E(X^2)$$

■

**Trditev 0.8.** Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni slučajni spremenljivki, ki imata matematični upanji. Potem ima matematično upanje tudi $X \cdot Y$ in velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

*Dokaz.* (samo zvezem primer):

$$E(X \cdot Y) \overset{\text{trd}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p_{(X,Y)}(x,y)dxdx \overset{\text{neodvisnost}}{=} = \iint_{\mathbb{R}} x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X$$

■

**Definicija 0.9** (Nekoreliranost)**.** Slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ sta nekorelirani, če velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, sicer sta korelirani.

Po trditvi iz neodvisnosti sledi nekoreliranost. Obratno pa ne velja:

*Primer.*

$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$X = cos(U) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$Y = sin(U) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$E(X) = 0, E(Y) = \dfrac{1}{3}$

$X \cdot Y = sin(U) \cdot cos(U) = 0 \implies E(X \cdot Y) = 0 \implies$ X in Y sta nekorelirani slučajni spremenlj

| X \Y | 0 | 1 | Σ |
|---|---|---|---|
| -1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| -1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $\sum$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\implies$ nista neodvisni, npr

$\frac{1}{3} = P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

**Trditev 0.10.** $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$
Potem sta $X$ in $Y$ neodvisni $\iff$ nekorelirani
$\iff E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

## 0.1 Disperzija, kovarianco in korelacijski koeficient

**Definicija 0.11** (Disperzija)**.** Naj obstaja $E(X^2)$. Disperzija oz. varianca slučajne spremenljivke $X$ je $D(X) \equiv var(X) := E((X - E(X))^2)$

Disperzija meri razpršenost slučajne spremenljivke $X$ okoli $E(X)$
Ker je $E((X-E(X))^2) = E(X^2-2E(X)X+(E(X))^2) = E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$, je $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Lastnosti disperzije:

- $D(X) \geq 0$ in $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$, t.j. X je izrojena slučajna spremenljivka
- $D(a \cdot X) = a^2 D(X)$ $a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ velja: $E((X - a)^2) \geq D(X)$. Enakost velja le v primeru $a = E(X)$

*Dokaz.*

$$E((X-a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2E(x)|a| + a^2 = \quad = (a - E(X))^2 + E(X^2) -$$

Enakost velja samo za $a = E(X)$ ■

**Definicija 0.12** (Standardna deviacija)**.** Standardna deviacija ali standardni odklon slučajne spremenljivke $X$ je $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$

Zanjo velja $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$
Primeri nekaterih $E(X)$ in $D(X)$

1. enakomerna diskretna porazdelitev: $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

$$E(X) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{2} - (\frac{x_1 + \cdots + x_n}{2})^2$$

2. Binomska porazdelitev $Bin(n,p), n \in \mathbb{N}, p \in (0,1), q = 1-p$

$$E(X) = n \cdot p, D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

3. Poissonova porazdelitev $Poi(\lambda), \lambda > 0$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

4. Geometrijska porazdelitev $geo(p), p \in (0,1), q = 1-p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$$

5. Pascalova porazdelitev $Pas(m,p), m \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$

$$E(X) = \frac{m}{p}, D(X) = \frac{mq}{p^2}$$

6. Enakomerna zvezna porazdelitev $Ed$ na $[a,b]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. Normalna porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma$$

8. Porazdelitev gama $\gamma(b, c)$

$$E(X) = \frac{b}{c}, D(X) = \frac{b}{c^2}$$

9. Porazdelitev $\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$$E(X) = n, D(X) = 2n$$

10. Eksponentna porazdelitev $Exp(\lambda), \lambda > 0 = \gamma(1, \lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Preverimo, da je $D(X) = \sigma^2$ za $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x - \mu = \sigma t, dx = \sigma dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} =$$

$$u = t, dv = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$
$$du = dt, v = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(-te^{-\frac{1}{2}t^2}|_{-\infty}^{\infty}) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \qquad = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2$$

**Definicija 0.13** (Kovarianca)**.** Kovarianca slučajnih spremnljivk $K(X, Y) \equiv Cov(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

Ker je

$E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY-E(Y)X-E(X)Y+E(X)E(Y)) = E(XY)-E(X)E(X)-E($

je $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Lastnosti:

1. $K(X,X) = D(X)$
2. $K(X,Y) = 0 \iff X$ in $Y$ sta neodvisni
3. $K$ je simetrična in bilinearna funkcija:
    - $K(X,Y) = K(Y,X)$
    - $K(aX + bY, Z) = aK(X,Z) + bK(Y,Z) \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. Če obstajata $D(X)$ in $D(Y)$, potem obstaja tudi $K(X,Y)$. Tedaj velja $|K(X,Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
   To sledi iz Cauchy-Schwartzove neenakosti ($|E(U \cdot V)| \leq \sqrt{E(U^2) \cdot E(V^2)}$) za slučajni spremenljivki $X - E(X)$ in $Y - E(Y)$. Enačaj v neenakosti velja $\iff Y - E(Y) \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X))$ z verjetnostjo 1
5. Če X in Y imata disperziji, potem jo ima tudi $X+Y$ in valja $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X,Y)$
   če sta $X$ in $Y$ nekorelirani (posebej neodvisni), potem je $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

   *Dokaz.* Sledi iz enakosti

   $$(X + Y - E(X+Y))^2?((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 = (X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2($$
   $$D(X+Y) = E((X - E(X))^2) + E((Y - E(Y))^2) + E(2(X - E(X))(Y - E(Y))) = D(X)$$

   ■
6. Posplošitev: $D(X_1 + \cdots + X_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n) + 2\sum_{i<j} K(X_i, X_j)$
   Če so $X_1 \cdots X_n$ paroma nekorelirani (posebej neodvisni), potem je $D(X_1 + \cdots + X_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n)$

*Primer.* $Bin(n,p)$ je vsota $X = X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $X_i \sim Ber(p)$, t.j. $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, ki so neodvisne
Zato je $D(X) = D(X_1 + \cdots + X_n) = n \cdot D(X_1) = n \cdot p \cdot q$, saj je $D(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = p - p^2 = pq$

**Definicija 0.14** (Standardizacija slučajne spremenljivke)**.** Standardizacija skučajne spremenljivke $X$ je slučajna spremenljivka $X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

Zanjo velja:

- $E(X_s) = 0$
- $D(X_s) = \frac{1}{\sigma(x)^2} \cdot D(X - E(X)) = \frac{1}{\sigma(X)^2} D(X) = 1$

*Primer.*

$$X \sim N(\mu, \sigma) \implies X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

**Definicija 0.15** (Korelacijski koeficient)**.** Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$ je

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_s \cdot Y_s)$$

Lastnosti:

1. $r(X, Y) = 0 \iff X$ in $Y$ sta nekorelirani
2. $r(X, Y) \in [-1, 1]$, kar sledi iz lastnosti (4) za kovarianco
3. - $r(X, Y) = 1 \iff Y = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1
   - $r(X, Y) = -1 \iff Y = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1

   Tedaj imamo linearno zvezo med $X$ in $Y$

*Primer.*

$$(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)\ \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y \in [0, \infty], \rho \in [-1, 1]$$

Trdimo, da je $r(X, Y) = \rho$

$$(X_s, Y_s) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$$
$$r(X, Y) = E(X_s \cdot Y_s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - p^2}} \iint\limits_{\mathbb{R}} xye^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy' y^2)} dxdy$$

$$x^2 - 2\rho xy + y^2 = (x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2)y^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x - \rho y)^2} dx =$$
$$= E(N(\rho y, \sqrt{1 - \rho^2})),\ \text{ker je } p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} =$$
$$= \rho\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$
$$= (\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} = D(N(0, 1)) = 1) \implies = \rho$$

Torej sta X in Y nekorelirani $\overset{\text{v splošnem}}{\Longleftrightarrow} \rho = 0 \overset{\text{ta primer}}{\Longleftrightarrow} X, Y$ neodvisni
Kakšna je gostota, če je $\rho$ blizu 1? $\rho \uparrow 1 : \rho \downarrow -1 :$
gostota je škoraj skoncentriranaña neki premici, torej med X in Y obstaja skoraj linearna zveza

## 0.2 Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje

Izberimo si dogodek B s $P(B) > 0$

**Definicija 0.16.** Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremnljivke X glede na B je $F_X(X \mid B) := P(X \leq x \mid B) = \frac{P(X \leq x \wedge B)}{P(B)}$

Ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija

A Diskreten primer
Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor z verjetnostno funkcijo $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_i) i, j = 1, 2 \cdots$
Za pogoj B vzemimo $B = (Y = y_j)$ pri nekem j, torej $q_j = P(Y = Y_j)$
Potem je pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede $F_X(X \mid Y = y) := \frac{P(X \leq x | Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{1}{q_j} \sum_{j : x_j \leq x} p_{ij}$
Če vpeljemo pogojno verjetnostno funkcije $P_{i|j} = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$, $F_X(X \mid Y = y_j) = \sum_{i : x_i \leq X} p_{i|j}$
Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$E(X \mid Y = y_j) := \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_j \cdot p_{ij}$$

Regresijska funkcija $\ell(y_j) = \sum(X \mid Y = y_j)$, ki je definirana na zalogi vrednoti slučajne spremenljivke Y
Definirajmo novo slučajno spremenljivko $E(X \mid Y) = \ell(y)$, ki ji rečemo pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede slučajne spremenljivke Y
Ta ima shemo $E(X \mid Y) = \begin{pmatrix} \ell(y_1) & \ell(y_2) & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X \mid Y = y_1) & \cdots \\ q_1 & \cdots \end{pmatrix}$
Zanjo velja

$$E(X \mid Y) = \sum_j \ell(y_j) \cdot q_j ? \sum_j \sum_i x_i \cdot p_{ij} =\sim_i x_i (\sum_j p_{ij}) = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$$

kjer je $p_i = P(X = x_i)$
Kaj dobimo, če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

Tedaj je $p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_i \cdot q_j}{q_j} = p_i$ in $\ell(y_j) = E(E(X \mid Y = y_j)) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$, torej je regresijska funkcija kar konstanta $E(X)$ oz. je $E(X \mid Y)$ izrojena slučajna spremenljivka z vrednostjo $E(X)$

*Primer.* Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Poi(\lambda)$ z $\lambda > 0$. Iz vsakega jajca se z verjetnostjo $p \in (0, 1)$ izvali piščanec, neodvisno od drugih jajc. Naj bo K število piščancev Dolocino $E(K \mid N), E(K) in E(N \mid K)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \; n = 0, 1, 2 \cdots$$

$$P(K = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \; k = 0, 1 \cdots n$$

$$\ell(n) = E(K \mid N = n) = E(Bin(n, p)) = n \cdot p$$

torej je $E(K \mid N) = \ell(n) = p \cdot N$

$$E(K \mid N) = \begin{pmatrix} p \cdot 0 & p \cdot 1 & p \cdot 2 & \cdots \\ P(N = 0) & P(N = 1) & P(N = 2) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$E(K) = E(E(K \mid N)) = E(p \cdot N) = p \cdot E(N) = p \cdot \lambda$$

$$P(K = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(K = k \mid N = n) \cdot P(N \leq n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(qk)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda} \; k = 0, 1 \cdots n$$

Torej je $K \sim Poi(p \cdot \lambda)$

$$P(N = n \mid K = k) = \frac{P(N = n, K = k)}{P(K = k)} = \frac{P(K = k \mid N = n) \cdot P(N = n)}{P(K = k)} =$$

$$= \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{pk! e^{p\lambda}}{(p\lambda)^k} = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-q\lambda} n = k, k+1 \cdots$$

To je za k premaknjena Poissonova porazdelitev: $k + Poi(q\lambda)$
Potem je $\psi(k) = E(N \mid K = k) = E(k + Poi(qk)) = k + q \cdot \lambda$ in zato je $E(N \mid K) = \psi(k) = k \cdot q + \lambda$
Preizkus: $E(E(N \mid K)) = E(k + q \cdot \lambda) = p\lambda + q\lambda = \lambda = E(N)$ (ok)
Regresijsko premico je vpeljal Golten (1822-1911)

B Zvezni primer

Naj bo $(X,Y)$ zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$.
Vzemimo $B = (y < Y \leq y+k)$ za nek $y \in \mathbb{R}, k > 0$.
Potem je $F_X(X \mid y < Y \leq y+k) = P(x \leq x \mid y < Y \leq y+k) = \frac{P(X \leq x, y<Y \leq y+k)}{P(y<Y\leq y+k)} = \frac{F_{(X,Y)}(x,y+k) - F_{(X,Y)}(x,y)}{F_Y(y+k)-F_Y(y)}$
Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y=y)$ je limita, če obstaja:

$$F_X(x \mid Y=y) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(x \mid y < Y \leq y+h) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{F_{(X,Y)}(x,y+h) - F_{(X,Y)}(x,y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

Denimo sedaj, da sta $p_{X,Y}$ in $p_Y$ zvezni funkciji. Tedaj je $F_X(X \mid Y = y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{(X,Y)}(x,y)}{F_Y'(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p_{(X,Y)}(x,v)dv$
Če vpeljemo pogojno pogojno gostoto $p_X(x \mid Y=y) := \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$, je torej

$$F_{(X,Y)}(x \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u \mid y)du$$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y=y)$ je

$$E(X \mid Y=y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x|y)dx = \frac{1}{p_Y(y)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)}(x,y)dx$$

Vpeljimo regresijsko funkcijo $l(y) := E(X \mid Y=y)$, definirano na zalogi vrednosti slučajne spremenljivke Y. Tako dobimo novo slučajno spremenljivko $E(X \mid Y) := l(y)$: pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na slucajno spremenljivko Y.
Kot v diskretnem primeru se pokaže enakost $E(E(X \mid Y)) = E(X)$

*Primer.* $(X,Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$
Robna gostota za Y je $N(\mu_y, \sigma_y)$
Zato je pogojna gostota

$$p_X(x \mid y) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_y(x)} \overset{\text{D.N.}}{=\cdots=} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{(2\pi)(1-\rho^2)}} exp(-\frac{1}{2(1-\rho)^2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \rho\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)$$

torej je $N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y), \sigma_x\sqrt{1-\rho^2})$
Eksponent: $\frac{1}{2(1-\rho^2)}\sigma_x^2(x - (\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)))^2$
$\implies l(y) = E(X \mid Y=y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)$ - 1. parameter
$= \alpha + \beta y : \beta = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \alpha = \mu_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \mu_y$
Torej je $E(x \mid y) = \alpha + \beta y$

*Primer.* Meritev onesnaženosti zraka
Slučajna spremenljivka X meri koncentracijo ogljikovih delcev (v $\mu g/m^3$), Y pa koncentracijo ozona (v $\mu l/l = ppm$)
Podatki kažejo, da ima (X,Y) približno dvorazsežno normalno porazdelitev, $\mu_x = 10.7, \sigma_x^2 = 29, \mu_y = 0.1, \sigma_y^2 = 0.02, \rho = 0.72$
Koncentracija ozona je škodljiva zdravju, če je $\geq 0.3$
Denimo, da naprava za merjenje ozona odpove, koncentracija škodljivih delcev je $X = 200$

a kolikšna je pričakovana koncentracija ozona?

b kolikšna je verjetnost, da je stopnja ozona zdravju skodljiva

a

$$E(Y \mid X = x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) = 0.1 + 0.72\sqrt{\frac{0.02}{29}(20 - 10.7)} \doteq 0.28$$

b Pogojna porazdelitev $Y \mid X = x$ je $N(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_x\sqrt{1-\rho^2}) = N(0.28, 0.1)$

$$P(Y > 0.3 \mid X = 20) = 1 - P(Y \leq 0.3 \mid X = 20) = 1 - F_{N(0,1)}(\frac{0.3 - 0.28}{0.1}) \doteq 0.42$$

## 0.3 Višji momenti in vrstilne karakteristike

**Definicija 0.17** (Momenti)**.** Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. Moment reda k glede na točko a je $m_k(a) := E((X-a)^k)$ (če obstaja)

Za a obicajno vzamemo

1. $a = 0$: $z_k := m_k(0) = E(X^k)$ začetni moment reda k
2. $a = E(X)$: $m_k := m_k(E(X))$ cenralni moment reda k

Ocitno je $z_1 = E(X), m_2 = D(X)$

**Trditev 0.18.** Če $\exists m_n(a)$, potem obstajaj tudi moment $m_k(a)$ za vse $k < n$

*Dokaz.* (V zveznem primeru):

$$E((X-a)^k) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k p_X(x)dx = \int a - 1^{a+1}(X-a)^k p_X(x)dx + \int_{(-\infty,a-1)\cup(a+1,\infty)}(x-a)^k p_X(x)d$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx + \int_{(-\infty,a-1)\cup(a+1,\infty)}(x-a)^k p_X(x)dx \leq$$
$$\leq 1 + E((X-a)^k) < \infty$$

■

**Trditev 0.19.** Če obstaja zacetni moment $z_n$, potem obstaja $m_n(a)$ glede na poljubno točko $a \in \mathbb{R}$

*Dokaz.*

$$E((X-a)^n) \leq E((|X|+|a|)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E(a)^{n-k} \cdot E(|X|^k) < \infty$$

■

Centralne momente lahko izrazimo z začetnimi:

$$m_n(a) = E((X-a)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} E(X^k)$$

$$a = E(X) \implies m_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

Asimetrija slučajne spremenljivke X je $A(X) := E(X_s^3) = E((\frac{X-E(X)}{\sigma_x})^3) = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$ $m_2 = \sigma^2 = D(X)$
$A(N(\mu,\sigma)) = 0$, ker $A(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$
Sploščenost (kurtozis) $K(X) := E(X_s^4) = \frac{m_4}{m_2^2}$
$K(N(\mu,\sigma)) = 3$
Ce momenti ne obstajajo (npr. že $E(X)$ ne), potem si lahko pomagamo z vrstilnimi karakteristikami

**Definicija 0.20** (Mediana)**.** Mediana slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja $P(X \leq x) \leq \frac{1}{2}$ in $P(Y \geq x) \geq \frac{1}{2}(1 - P(X < x) = 1 - F(x-))$

Če je F porazdelitvena funkcija za X, je to ekvivalentno s pogojem $F(x-) \leq \frac{1}{2} \leq F(x)$
Če je X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, dobimo $F(X) = \frac{1}{2}$ oz. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dx = \frac{1}{2}$

Te vrednosti (lahko jih je več) označimo z $X_{\frac{1}{2}}$

*Primer.*

- $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
  $x_{\frac{1}{2}} = 1, E(X) = \frac{4}{5}$
- $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$
  Mediane so $[0, 1]$
-
- $X \sim N(0, 1)$
  $x_{\frac{1}{2}} = \mu = E(X)$

**Definicija 0.21** (Kvantil)**.** Kvantil reda p ($p \in (0, 1)$) je vsaka vrednost $x_p$, za katero velja $P(X \leq x_p) \geq p$ in $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$
Ekvivalentno je $F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj $F(x_p) = p$ t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = p$

- Kvartili: $X_{\frac{1}{4}}, X_{\frac{2}{4}}, X_{\frac{3}{4}}$
- Percentili: $X_{\frac{1}{100}}, X_{\frac{2}{100}}, \cdots X_{\frac{99}{100}}$

*Primer.* Telesna višina odraslih moških

**Definicija 0.22** ((Semiinter)kvartilni razmik)**.** $s := \frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$

je nadomestek (analog) za standardno deviacijo

*Primer.*

- $X \sim N(0, 1)$
  $X_{\frac{1}{2}} = 0$
  $\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} p(t)dt = \frac{1}{4} \xRightarrow{\text{tabelca}} x_{\frac{1}{4}} \doteq -0.67$
  $\xRightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} \doteq 0.67 \implies s = 0.67, \sigma(x) = 1$
- $X$ naj ima Cauchyjevo porazdelitev
  $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
  $x_{\frac{1}{2}} = 0$
  Momenti ne obstajajo

$$\int_{-\infty}^{x_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan x|_{x=-\infty}^{x_{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{\pi} arctan x_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$arctan x_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \implies x_{\frac{1}{4}} = -1$$
$$\xRightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} = 1, s = 1$$

## 0.4 Rodovne funkcije

**Definicija 0.23.** Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :
$p_k = P(X = k) k = 0, 1, 2 \cdots \; p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} = 1$
Rodovna funkcija skučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdots s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta absolutno konvergira.

Očitno je $G_X(0) = p_0, G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
Ker je $s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$, je $G_X(s) = E(s^X)$
Za $s \in [-1, 1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq P_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Zato je vrsta konvergentna, če je $|s| \leq 1$. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1

*Primer.*

- $X \sim geo(p)$, $p \in (0, 1)$

$$p_k = P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \; k = 1, 2, 3 \cdots$$
$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^{k-1}$$
$$= ps \frac{1}{1 - qs}$$

  konvergira, ko $|qs| < 1 \Leftrightarrow |s| < \frac{1}{|q|} =: R$

- $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

$R = \infty \ \forall s \in \mathbb{R}$

Iz teorije Taylorjevih vrst sledi

**Izrek 0.24** (O eniličnosti)**.** Naj imata X in Y rodovni funkciji $G_X$ in $G_Y$. Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za $\forall s \in [-1, 1] \leftrightarrow P(X = k) = P(Y = k)$ za vse $k = 0, 1, 2 \cdots$
Tedaj velja $P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^k(0)$

$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, $p_k = P(X = k)$
Naj ima rodovna funkcija $G_X$ slučajne spremenljivke X konvergenčni radij R $> 1$. Potem za $\forall s \in (-R, R)$ velja $G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1}$
Če postavimo $s = 1$, dobimo $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

**Izrek 0.25.** Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$ in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^n(1-) \equiv \lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-N+1))$$

*Dokaz.* Za $\forall s \in [0, 1)$ je $G_X^n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} =$

$$= E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1) \cdot s^{X-n})$$

Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$\lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) =$$

$$\stackrel{\text{Abelova lema}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} lim_{s \nearrow 1} k(k-1) \cdot (k-n+1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) p_k = E(X(X-1) \cdots (X-n+1))$$

■

**Posledica 0.26.**

$$E(X) = G_X'(1-)$$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G_X^{(2)}(1-) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1-))^2$

**Izrek 0.27.** Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnima funkcijama $G_X$ in $G_Y$. Potem je $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$ za $s \in [-1, 1]$

*Dokaz.* $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \stackrel{\text{izrek}}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$, saj sta $s^X$ in $s^Y$ neodvisni slučajni spremenljivki ■

*Posplo"sitev* 0.28. Če so $X_1, X_2 \cdots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, potem je za vse $s \in [-1,1] G_{X_1+\cdots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot \cdots \cdot G_{X_n}(s)$.
Če so $X_1, X_2 \cdots X_n$ enako porazdeljene in neodvisne, potem je

$$G_{X_1+\cdots+X_n}(s) = (G_X(s))^n$$

**Izrek 0.29.** Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $N, X_1, X_2 \cdots X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo $G_N, X_n$ pa rodovno funkcijo $G_X$. Potem ima slučajna spemenljivka $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rodovno funkcijo enako $G_S = G_N \circ G_X$ oz. $G_S(s) = G_N(G_X(s))$ za $s \in [-1,1]$

To je posplošitev formule dd: $P(N = n) = 1, G_N(s) = 1 \cdot s^n = s^n$

*Dokaz.* Zaradi neodvisnosti imamo $P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = k, N = n) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, X_1 + \cdots + X_n = k) \overset{\text{neodvisnost}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \cdots + X_n = k)$$

Zato je

$$G_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S = k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \cdots + X_n = k) \cdot s^k =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) (\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n = k) \cdot s^k) =$$

$$\overset{G_{X_1+\cdots+X_n}(s)^{\text{neodvisnost}}(G_X(s)^n)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot (G_X(s))^n = G_N(G_X(s))$$

za vse $s \in [-1,1]$ ∎

**Posledica 0.30.** Pri predpostavkah iz izreka velja Waldova enakost:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

*Dokaz.*

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)) \forall s \in [-1,1] \tag{2}$$
$$E(S) = G_s^{'}(1-) = G_N^{'}(G_X(1-)) \cdot G_X^{'}(1-) = E(N) \cdot E(X) \tag{3}$$

∎

*Primer.* Kokoš, jajca, piščanci
N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$
K je število piščancev
Definiramo $X_i = 1$ dogodek, da se iz i-tega jajca izvali piščanec, sicer $X_i = 0$.
Potem je $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1 - p$ in $X_i$ so neodvisne slučajne spremenljivke.
Očitno je $K = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
Ker je $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ in $G_X(s) = q \cdot s^0 + p \cdot s = q + ps$, je po izreku $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q+ps-1)} = e^{\lambda(ps-p)} = e^{\lambda p(s-1)} \forall s \in [-1, 1]$, zato je $K \sim Poi(\lambda p)$

## 0.5 Momentno rodovna funkcija

**Definicija 0.31** (Momentno rodovna funkcija)**.** Momentno rodovna funkcija je $M_X(t) = E(e^{tX})$ za $t \in \mathbb{R}$, za katere obstaja matematično upanje

V primeru zvezne porazdelitve je $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$
To je Laplaceova transformacija funkcije $p_X$
V diskretnem primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$ je $M_X(t) = \sum_i e^{tx} p_i$

V posebnem primeru, ko ima X nenegative celoštevilske vrednosti, je $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p_i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i (e^t)^i = G_X(e^t) \; (M_X(t) = E((e^t)^X) = G_X(e^t))$$

$$G_X(s) = E(s^X)$$

Očitno je $M_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

*Primer.*

$$X \sim N(0, 1)$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R}$$

ker je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$ gostota za $N(0, 1)$

**Izrek 0.32.** Naj bo $M_X(t) < \infty$ (obstaja, $< \infty$ zato, ker je $e^t > 0$) za $\forall t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z $M_X$, vsi začetni momenti obstajajo, $z_k = E(X^k) = M_X^k(0)$ za $\forall k \in \mathbb{N}$ in velja $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$ za $\forall t \in (-\delta, \delta)$

*Dokaz.* (bistvo)

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = E(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{x^k}{k!}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} t^k$$

■

**Trditev 0.33.** $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at), a \neq 0, b \in R$

*Dokaz.* $M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{(at)X} \cdot e^{bt}) = e^{bt} M_X(at)$ ■

**Izrek 0.34.** Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

*Dokaz.* $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \overset{e^{tX},\, e^{tY} \text{ neodvisni}}{=}$
$= E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ ■

**Trditev 0.35.** Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $X \sim N(\mu_x, \sigma_x), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Potem je $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$

*Dokaz.* Ker je

$$U := \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0,1)$$

(standardizacija), je

$$X = \sigma_x \cdot U + \mu_x$$

in zato je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot M_U(\sigma_x t)$$

po zadnji trditvi. Potem je

$$M_U(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \; \forall t \; in \mathbb{R}$$

za $Y$ velja podobno. Po zadnjem izreku je

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2}+\mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_y^2 t^2}{2}+\mu_y t} =$$

$$= e^{\frac{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)t^2}{2}+(\mu_x+\mu_y)t}$$

Po izreku je

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$$

■

*Opomba.* Če bi vedeli, da je $X + Y$ porazdeljena normalno, bi "samo" izračunali parametra

*Primer.*

$$X \sim N(0, 1), M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} t^{2k}$$

Po drugi strani je $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{j!} t^j \; \forall t \in \mathbb{R}$
Primerjamo koeficiente:

- lihi koeficienti: $z_{2k-1} = 0 \; k \in \mathbb{N}$
- sodi koeficienti:

$$\frac{z_{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{k!2^k} \implies z_{2k} = \frac{(2k)!}{k!2^k} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!! \; k \in \mathbb{N}$$

## 0.6 Šibki in krepki zakon velikih števil

**Definicija 0.36** (Verjetnostna konvergenca)**.** Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verjetnostno konvergira proti skučajni spremenljivki X, če za $\forall \epsilon > 0$ velja $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$
oz. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$

**Definicija 0.37** (Skoraj gotova konvergenca)**.** Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo konvergira proti skučajni spremenljivki X, če velja P(p $\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$
Tukaj je $(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall k (\in \mathbb{N}) \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} =$$

$$= \{\cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\geq m} \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} \tag{4}$$

*Opomba.* Števne unije in preseki $\implies$ smo v $\sigma-$algebri, torej je to res dogodek

**Trditev 0.38.** Če $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ skoraj gotovo, potem za $\forall\epsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = 1$

*Dokaz.* Označimo $c_m := (|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = \cap_{n=m}^{\infty}(|x_n - X| < \epsilon)$.
Potem je $c_1 \subseteq c_2 \subseteq \cdots$
je $c_m$ za $\epsilon = \frac{1}{k}$ in $(\lim_{n\to\infty} X_n = X) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_m$ (presek)
Torej je $1 = P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) \subseteq= (\cup_{m=1}^{\infty} c_m) = \lim_{m\to\infty} P(c_m)$
Od tod sledi $\lim_{m\to\infty} P(c_m) = 1$ ∎

**Posledica 0.39.** Če $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ skoraj gotovo, potem $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ verjetnostno konvergira.

*Dokaz.* Izberemo $\epsilon > 0$. Potem velja

$$P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } \forall n \geq m) \leq P(|X_m - X| < \epsilon)$$

Če uporabimo trditev, dobimo $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$ (leva stran). ∎

*Opomba.* Obratna implikacija ne velja

**Definicija 0.40.** Naj bo $X_1, X_2, X_3 \cdots$ zaporedje slučajnih spremenljivk, ki imajo matematično upanje. Definirajmo $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n}$
Potem je $E(Y_n) = 0$
Za $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja šibki zakon velikih števil (ŠZVŠ), kadar $Y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ verjetnostno, torej za $\forall\epsilon > 0 \lim_{n\to\infty}(|y| < \epsilon) = 1 = \lim_{n\to\infty}(|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| < \epsilon)$ Za $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja krepki zakon velikih števil (KZVŠ), kadar $Y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ skoraj gotovo, torej $P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$
Če velja KVZŠ, potem velja ŠVZŠ

*Primer.* Mečemo kocko, $X_k$ je # pik v k-tem metu. Potem je $E(X_k) = \frac{7}{2}$ in $Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{7}{2}$
Ali konvergira $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{7}{2}$ skoraj gotovo? (Da)

**Izrek 0.41.**

a Neenakost Markova: če slučajna spremenljivka X ima matematično upanje, potem je $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ za $\forall a > 0$

b Neenakost Čebiševa: če slučajna spremenljivka X ima disperzijo, potem je $P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{a^2}$ za $\forall a > 0$ (pomembno za $a \geq 1$, ker je verjetnost $\leq 1$)
oz. če pišemo $\epsilon = a \cdot \sigma(x) \implies P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$ za $\forall \epsilon > 0$

*Dokaz.* (samo zvezni primer)

a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_x(x) dx \geq \int_{\{x:|x|\geq a\}} |x| p_x(x) dx \geq$$
$$|a| \int_{\{x:|x|\geq a\}} p_x(x) dx = a \cdot P(|X| \geq a)$$

b

$$P((X - E(X)) \geq \epsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \overset{\text{(a) za X-E(X)}}{\leq} \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} = \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

∎

**Izrek 0.42** (Markov)**.** Če za zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, potem velja ŠZVŠ. Tukaj je $S_n := X_1 + \cdots + X_n$

*Dokaz.* V neenakosti Čebiševa vzamemo $X = \frac{S_n}{n}$

$$P(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon) \leq \frac{P(S_n)}{n^2\epsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Če vzamemo $Y_n = \frac{|S_n - E(S_n)|}{n}$, je $P(|Y_n| \geq \epsilon) \overset{n\to\infty}{\to} 0$
oz. $P(|Y_n| < \epsilon) \overset{n\to\infty}{\to} 1$
Zato $Y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ verjetnostno, torej velja ŠZVŠ za zaporedje $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ∎

**Posledica 0.43** (Izrek Čebišev)**.** Če so $X_1, X_2 \cdots X_n$ paroma nekorelirane slučajne spremenljivke in $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem za $\{X_n\}_{n\in\infty}$ velja ŠVZŠ

*Dokaz.* Ker je $D(S_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n) \leq n \cdot c$, je $\frac{D(S_n)}{n^2} \leq \frac{n \cdot c}{n^2} = \frac{c}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, zato po izreku Markova velja ŠZVŠ ∎

*Primer.* $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq, E(X_n) = p, E(S_n) = n \cdot p$
Po izreku Čebiševa velja ŠZVŠ: $P(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0$

$$\implies P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \epsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

$S_n$ je frekvenca dogodka, $\frac{S_n}{n}$ je relativna frekvenca, $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{n \to \infty}{\to} p$ verjetnostno
To je Bernoulijev zakon velikih števil iz 1713

**Izrek 0.44** (Kolmogorov)**.** Če za neodvisne slučajne spremenljivke $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n^2} < \infty$, potem velja KZVŠ, t.j. $P(\lim_{n \to \infty} \frac{S - n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$. Posebej je pogoj za vrsto izpolnjen, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

*Primer.* $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$
Po izreku Kolmogorova velja KVZŠ, t.j. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{n \to \infty}{\to} p$ skoraj gotovo.
To posplošuje Bernoullijev zakon

## 0.7 Centralni limitni izrek

**Definicija 0.45.** Naj bo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk s končnimi disperzijami. Definiramo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ in standardizirajmo: $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$, torej $E(Z_n) = 0, D(Z_n) = 1$
Za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja centralni limitni izrek, če je $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) \overset{n \to \infty}{\to} F_{N(0,1)} \forall x \in \mathbb{R}$, t.j.

$$P(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x) \overset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Pracimo, da $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ po porazdelitvi konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi.

**Izrek 0.46** (Centralni limitni izrek (CLI, osnovna verzija))**.** Naj bodo $X_1, X_2 \cdots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem zanje velja centralni limitni zakon, t.j

$$P(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x) \overset{n \to \infty}{\to} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dx \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokazal je Ljapunov (1900), s tem je posplošil Laplaceov izrek iz leta 1812.
V dokazu bomo uporabili

**Izrek 0.47** (O zveznosti rodovne funkcije)**.** Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ slučajnih spremenljivk velja:
$M_{Z_n}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ za vse $t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$
Potem $F_{Z_n}(x) \to F_{N(0,1)}(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

*Dokaz.* CLI v primeru, ko $X_n$ imajo momentno rodovno funkcijo $M_X(t) = E(e^{tX_n})$ na neki okolici točke 0
Naj bo $E(X_n) = \mu, D(X_n) = \sigma^2$ in $U_n := X_n - \mu = X_n - E(X_n)$. Torej je $E(U_n) = 0$ in $D(U_n) = \sigma^2$ ter $M_U(t) = 1 + tE(U_n) + \frac{t^2}{2!}E(U_n^2) + o(t^2) =$
$= 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)$ $(\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{n} = 0)$
Ker je $D(S_n) \overset{\text{neodvisne}}{=} D(X_1) + \cdots + D(X_n) = n \cdot \sigma^2$ in $E(S_n) = n \cdot \mu = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$, je $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} =$
$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{n=0}^{n} U_i\right)$
Potem je $M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1+\cdots+U_n)}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_1}) \cdot \cdots \cdot E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_n}) =$
$\overset{\text{enaki}}{=} (M_U(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n = (1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))^n$
$\overset{n\to\infty \equiv o(\frac{1}{n}\to 0)}{\to} e^{\frac{t^2}{2}}$

**Lema 0.48.** Če $X_n \to X$, potem $(1 + \frac{X_n}{n})^n \overset{n\to\infty}{\to} e^x$

Po prejšnjem izreku: $F_{Z_n}(x) \overset{n\to\infty}{\to} F_{N(0,1)}(x)$ ■