

Verjetnost in statistika - zapiski s predavanj

prof. Drnovška

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2022/23

Kazalo

0.0.1	Poissonova porazdelitev	1
0.0.2	Geometrijska porazdelitev	1
0.0.3	Pascalova ali negativna binomska porazdelitev	2
0.0.4	Hipergeometrijska porazdelitev	2
0.0.5	Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke	3
0.0.6	Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a, b]$	4
0.0.7	Normalna ali Gaussova porazdelitev	4
0.0.8	Eksponentna porazdelitev	5
0.0.9	Porazdelitev gama	5
0.0.10	Porazdelitev $\chi^2(n)$	6
0.0.11	Cauchyjeva porazdelitev	6
0.1	Slučajni vektorji	7
0.1.1	Diskretne porazdelitve	9
0.1.2	Zvezne porazdelitve	10
0.2	Neovdisnost slučajnih spremenljivk	14
0.3	Funkcije slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev	17
0.4	Matematično upanje oz. pričakovana vrednost	23
0.5	Disperzija, kovarianco in korelacijski koeficient	29
0.6	Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje	33
0.7	Višji momenti in vrstilne karakteristike	37
0.8	Rodovne funkcije	39
0.9	Momentno rodovna funkcija	42
0.10	Šibki in krepki zakon velikih števil	45
0.11	Centralni limitni izrek	47

1	Statistika	51
1.1	Osnovni pojmi	51
1.2	Vzorčne statistike in cenilke	52
1.3	Metode za pridobivanje cenilk	56
1.3.1	Metoda momentov	56
1.3.2	Metoda maksimalne zanesljivosti (oz. največjega ver- jetja)	57
1.4	Intervalsko ocenjevanje parametrov	60
1.5	Preizkušanje statističnih hipotez	64
1.5.1	test Z	64

0.0.1 Poissonova porazdelitev

$Poi(\lambda), \lambda > 0$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$$

\Rightarrow to je res porazdelitev ($p_i \geq 0, \sum p_i = 1$)

Primer. Število klicev v telefonskem omrežju v časovni enoti

Binomska, velik n , majhen $p \Rightarrow$ Poissonova

Lahko modeliramo z binomsko porazdelitvijo $Bin(n, p)$, kjer je n število naročnikov in p verjetnost, da se posameznik odloči za klic v časovni enoti. Ker je n velik in p majhen, je to približno $Poi(\lambda)$, kjer je $\lambda = np$ (v praksi ni za vse ista)

Primer. Število napačnih črk v knjigi

(Veliko črk v knjigi, malo verjetno, da se zmotimo.)

Lahko modeliramo z $Bin(n, p)$, kjer je n število vseh črk v knjigi, p je verjetnost, da si izberemo napačno črko

Ker je n velik, p pa majhen, lahko to aproksimiramo s $Poi(\lambda)$, kjer je $\lambda = np$. Raje vzamemo $Poi(\lambda)$ kot $Bin(n, p)$, ker je preprostejša

0.0.2 Geometrijska porazdelitev

$Geo(p), p \in (0, 1)$

Ponavljamo poskus, v katerem opazujemo dogodek A s $P(A) = p, q = 1 - p$. ($X = k$) je dogodek, da se A zgodi prvič v k -ti ponovitvi

$$p_k = P(A = k) = p \cdot q^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Primer. Mečemo kocko, X je število metov, da pade šestica prvič. Potem je $X \sim Geo(\frac{1}{6})$

0.0.3 Pascalova ali negativna binomska porazdelitev

$Pas(m, p)$, $m \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

Ponavljamo poskus, v katerem nas zanima dogodek A s $P(A) = p$. ($X = k$) je dogodek, da se A zgodi m -tič v k -ti ponovitvi poskusa. Torej $Pas(1, p) = Geo(p)$

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \quad k = m, m+1, \dots$$

(A se zgodi $(m-1)$ -krat, \bar{A} pa $(k-m)$ -krat)

DN: Enakost $\sum_{k=m}^{\infty} p_k = 1$ analitično preverimo z $(m-1)$ -kratnim odvajanjem geometrijske vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$$

oz. z direktno uporabo binomske vrste:

$$(1-q)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} q^j$$

Primer. Mečemo kocko, X je število potrebnih metov, da pade šestica m -krat. Potem je $X \sim Pas(m, \frac{1}{6})$

0.0.4 Hipergeometrijska porazdelitev

$Hip(n; M, N)$, $0 < M < N, n, M, N \in \mathbb{N}, n \leq \min\{M, N-M\}$

V posodi je N kroglic, od tega M belih, ostale črne. Slučajno izberemo n kroglic (brez vračanja). X je število belih kroglic med izbranimi kroglicami. Torej ($X = k$) je dogodek, da je med izbranimi n kroglicami k belih

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\binom{m}{k} \cdots k \text{ belih}$$

$$\binom{N-m}{n-k} \cdots \text{ostale črne}$$

$$\binom{n}{N} \cdots \text{izberemo } n \text{ izmed } N$$

Ker je $\{(X = k)\}^n$ popoln sistem dogodkov, je jasno, da je $\sum_{k=0}^n p_k = 1$
Torej velja binomska identiteta

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k} = \binom{N}{n}$$

- verjetnostni dokaz

Primer. V ribniku je N rib, od tega M krapov. Ulovimo n rib. Naj bo X število ulovljenih krapov. Potem je $X \sim Hip(n; M, N)$

Če je $n \ll \min\{M, N - M\}$, potem je $Hip(n; M, n) \approx Bin(n, \frac{M}{N})$:

$$p_k = \frac{\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{k!} \frac{(N-m)(N-m+1)\cdots(N-m-n+k+1)}{(n-k)!}}{\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}} \approx$$

$$\stackrel{k \leq m}{\underset{n \leq N}{\approx}} \frac{\frac{M^k}{k!} \frac{(N-m)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Intuicija: vzemanje kroglic, $n \ll \min\{M, N - M\}$

Če je $n \ll \min\{M, N - M\}$, ne naredimo velike napake, če kroglice vračamo. Tedaj je število belih izvlečenih kroglic binomsko porazdeljeno: $X \sim Bin(n, \frac{M}{N})$

0.0.5 Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Definicija 0.1 (Zvezna porazdelitev). Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena (zvezna), če obstaja nenegativna integrabilna funkcije p_X , imenovana gostota porazdelitve, da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Analogija z diskretnimi porazdelitvami: $F_X(x) = \sum_{n: X_n \leq x} p_k$, $X : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots \\ p_1 & \cdots \end{pmatrix}$

Tedaj je F_X zvezna funkcija. V točkah, kjer je p_X zvezna, je F_X zvezno odvedljiva in velja $F_X'(x) = p_X(x)$

Ker je $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$, je $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) dt = 1$

Za $x_1 < x_2$ velja

$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2-) - F_X(x_1+) = \int_{-\infty}^{x_2} p_X(t) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} p_X(t) dt$$

Pomembnejše zvezne porazdelitve:

0.0.6 Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a, b]$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{če } a < x < b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{če } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{če } a < x < b \\ 1 & \text{če } x \geq b \end{cases}$$

Primer. Slučajno izberemo X na $[0, 1]$

0.0.7 Normalna ali Gaussova porazdelitev

$N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$N(0, 1)$: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - standardizirana normalna porazdelitev

σ velik:

σ majhen:

Porazdelitvena funkcija:

$$\begin{aligned}
F(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt = \\
u &= \frac{t-\mu}{\sigma}, du = \frac{dt}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 \dots + \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \dots \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Laplaceova integralaska formula pravi, da je $Bin(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$ za velik n :

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - \frac{1}{2} \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)^2$$

Primer. Sistolični krvni tlak

verjetnost, da ima slučajno oseba krvni tlak med 120 in 130 mmHg

0.0.8 Eksponentna porazdelitev

$$Exp(\lambda), \lambda > 0$$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{če } x \geq 0 \\ 0 & \text{če } x \leq 0 \end{cases}$$

Primer. Radioaktivni razpad

$F(x)$ je verjetnost, da se radioaktivni razpad zgodi pred trenutkom $x \in \mathbb{R}^+$

0.0.9 Porazdelitev gama

$$\Gamma(b, c), b, c > 0$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Očitno je $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty p(x) dx &= \frac{c^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{b-1} e^{-cx} dx = \\ t = cx, dt &= c dx \\ &= \frac{c^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty (cx)^{b-1} e^{-cx} c dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(b)} \cdot \Gamma(b) = 1 \end{aligned}$$

- je porazdelitev

0.0.10 Porazdelitev $\chi^2(n)$

(hi-kvadrat), $n \in \mathbb{N}$, n je število prostorskih stopenj

$$\begin{aligned} \chi^2(n) &= \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ p(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned}$$

0.0.11 Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan x - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Primer. Slučajna spremenljivka, ki ni niti zvezno niti diskretno porazdeljena
Vržemo kovanec, če pade grbc, postavimo $X = 1$, če pade cifra, pa naj bo X

slučajno izbrano stevilo na $[0, 2]$
 Izračunamo porazdelitveno funkcijo:

$$F(x) = P(X \leq x) \stackrel{x \in [0, 2]}{=} P(\text{grb}) \cdot P(X \leq x \mid \text{grb}) + P(\text{cifra}) \cdot P(X \leq x \mid \text{cifra})$$

Če je $0 \leq x \leq 1$, potem je

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$$

Če je $1 \leq x \leq 2$, potem je

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{če } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{če } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4} & \text{če } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{če } x \geq 2 \end{cases}$$

Ker F ni zvezna funkcija, X ni zvezno porazdeljena
 Ker F ni odsekoma konstantna, X ni diskretno porazdeljena

0.1 Slučajni vektorji

Definicija 0.2 (Slučajni vektor). Naj bo (Ω, Φ, P) verjetnostni prostor. Slučajni vektor je n -terica slučajnih spremenljivk $x = (x_1 \cdots x_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ z lastnostjo, da je množica

$$(X_1 \leq x_1 \cdots X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1 \cdots X_n(\omega) \leq x_n\}$$

dogodek za vse n -terice $x = (x_1 \cdots x_n)$, se pravi v Φ za $\forall x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$

Definicija 0.3 (Porazdelitvena funkcija). Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $X = (X_1 \cdots X_n)$ je funkcija, definirana z

$$F_X(x) = F_{(X_1 \cdots X_n)}(x_1 \cdots x_n) := P(X_1 \leq x_1 \cdots X_n \leq x_n)$$

Torej $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

F_X ima podobne lastnosti kot v primeru $n = 1$

Očitno je $0 \leq F_X(x) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}^n$, glede na vsako spremenljivko je F_X naraščajoča in z desne zvezna, velja še:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = 1$$

Definicija 0.4 (Robna porazdelitev). Če pošljemo v ∞ samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno funkcijo slučajnega podvektorja, npr.

$$\lim_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = F_{X_1}(x_1)$$

ali pa

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = F_{X_1 \dots X_{n-1}}(x_1 \cdots x_{n-1})$$

Takim porazdelitvam rečemo robne (marginalne) porazdelitve

Oglejmo si dvorazsežni primer ($n = 2$):

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

za $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$(X \leq x, Y \leq y) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}$$

dogodek

Porazdelitvena funkcija $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana z

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &:= P(X \leq x, Y \leq y) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= P(Y \leq y) = F_Y(y) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= P(X \leq x) = F_X(x) \end{aligned}$$

Izrazimo $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$ s porazdelitveno funkcijo $F(X, Y) = F$. To bo posplošitev formule

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ki smo jo imeli v primeru $n = 1$

$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ slučajni vektor

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P((x, y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])$$

Izrazimo z $F_{(X,Y)} = F$ verjetnost $P(a < X < b, c < Y < d)$. To bo posplošitev formule $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Najprej vzemimo posebni primer:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b, Y \leq d) &= P((X \leq b, Y \leq d) \setminus (X \leq a, Y \leq d)) = \\ &= P(X \leq b, Y \leq d) - P(X \leq a, Y \leq d) = F(b, d) - F(a, b) \end{aligned}$$

V splošnem primeru pa imamo

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= P((a < X \leq b, Y \leq d) \setminus (a < X \leq b, Y \leq c)) = \\ &= P(a < X \leq b, Y \leq d) - P(a < X \leq b, Y \leq c) = \\ &\stackrel{\text{fiks. } y}{=} (F(b, d) - F(a, d)) - (F(b, c) - F(a, c)) \end{aligned}$$

Torej je

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Najpomembnejša razreda večrazsežnih porazdelitev sta

0.1.1 Diskretne porazdelitve

Definicija 0.5. Slučajni vektor $X = (X_1 \cdots X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diskretno porazdeljen, če je njegova zaloga vrednosti končna/števna množica točk v \mathbb{R}^n . Omejimo se na $n = 2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Naj bo $\{x_1, x_2 \dots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in $\{y_1, y_2 \dots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke Y . Potem je zaloga vrednosti vektorja (X, Y) vsebovana v $\{(x_i, y_j) : i = 1, 2 \dots j = 1, 2 \dots\}$.

Definiramo verjetnostno funkcijo $p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j) \ i = 1, 2 \dots j = 1, 2 \dots$

Ker je $\{(X = x_i, Y = y_j)\}_{ij}$ popoln sistem dogodkov, je $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P(X = x_i) = P(\cup_j (X = x_i, Y = y_j)) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} \ i = 1, 2 \dots$$

$$\text{če je } Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}, \text{ je}$$

$$q_j = P(Y = y_j) = P(\cup_i (X = x_i, Y = y_j)) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \ j = 1, 2 \dots$$

Primer. Met dveh kock: X število pik na 1. kocki, Y na 2.

0.1.2 Zvezne porazdelitve

Definicija 0.6. Slučajni vektor $X = (X_1 \dots X_n)$ je zvezno porazdeljen, če obstaja integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, imenovana gostota porazdelitve, da je

$$F_X(x) = F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(t_1 \dots t_n) dt_n \text{ za } \forall x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ker je $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_X(x_1 \dots x_n) = 1$, je

$$\vdots \\ x_n \rightarrow \infty$$

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} p_X(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n = 1$$

Za vsako Borelovo množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (najmanjša σ -algebra z vsemi odprtimi pravokotniki) je

$$P(X \in A) \equiv P((x_1 \dots x_n) \in A) = \int \dots \int_A p_X(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

Omejimo se na $n = 2$: $F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y p_{(X,Y)}(u, v) dv$
 Robni porazdelitvi sta:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \text{(brez utemeljevanja)} \\ = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, v) dv$$

ki ima gostoto

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dy$$

in

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \\ = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, v) du$$

ki ima gostoto

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dx$$

(ekvivalentno vsoti v diskretnem primeru).

Najpomembnejša dvorazsežna zvezna porazdelitev je normalna:

$$N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho), \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y > 0, \rho \in (-1, 1) \\ p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)} \\ (\mu_x, \mu_y) \text{ premik, } (\sigma_x, \sigma_y) \text{ razteg} \\ N(0, 0, 1, 1, \rho) : p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}$$

Nivojnice, izohipse se: $x^2 - 2\rho xy + y^2 = c$

- $\rho = 0$: krožnica
- $\rho \in (-1, 1)$: elipsa

Robni porazdelitvi sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \dots = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2}$$

torej $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$. Podobno $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

Primer. Krvni tlak, X je sistolični, Y je diastolični krvni tlak
 $\mu_x = 120, \mu_y = 75, \rho = 0.7$

Dvoražsežna normalna porazdelitev je poseben primer večražsežne normalne porazdelitve $N(\mu, A)$, kjer je $\mu = (\mu_1 \dots \mu_n)^T$ in A pozitivno definitna matrika.

Gostota v točki $x = (x_1 \dots x_n)^T$ je

$$p(X) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A (x-\mu)}$$

$$(x - \mu)^T A (x - \mu) = \langle A(x - \mu), x - \mu \rangle$$

Za dokaz enakosti

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx_1 \dots dx_n = 1$$

izračunajmo integral

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A (x-\mu)} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

$N(\mu, A), \mu \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivna definitna matrika, t.j. sebi adjungirana matrika, za katero velja

$$x^T A x = \langle A x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$$

V točki $x = (x_1 \dots x_n)^T$ je

$$p(x) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)}$$

Izračunajmo integral

$$\begin{aligned} & \int \underbrace{\dots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)} dx = \\ & y = x - \mu \implies dy = dx \\ & = \int \underbrace{\dots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}y^T A y} dy \end{aligned}$$

Ker je A pozitivna definitna matrika, obstaja ortogonalna matrika U in diagonalna matrika $D = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, da je $A = U^T D U$

$$\begin{aligned} & = \int \underbrace{\dots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}y^T U^T D U y} dy = \\ & z = U y, y = U^T z, dy = |\det U^T| dz = dz \\ & = \int \underbrace{\dots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}z^T D z} dz = \\ & = \int \underbrace{\dots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2)} dz_1 \dots dz_n = \\ & = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 z_1^2} dz_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_n z_n^2} dz_n = \end{aligned}$$

Ker je $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda z^2} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$ - $z \in \mathbb{R}$ - s pomočjo Γ funkcije, Bronsterin, sledi iz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

Gostota za $N(0, \sigma)$, $\lambda := \frac{1}{\sigma^2}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

Torej je $\int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} p(x) dx = 1$

Dvorazsežni primer je posebni primer

$$A = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} - \frac{\rho^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

$K = A^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ -\rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$ kovariančna matrika (slučajnemu vektorju X, Y)

0.2 Neovdisnost slučajnih spremenljivk

Definicija 0.7 (Neodvisnost). Slučajne spremenljivke $x_1, x_2 \cdots x_n$ v slučajnem vektorju $x = (x_1 \cdots x_n)$ so neodvisne, če je

$$F_X(x_1 \cdots x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n) \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

oziroma

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \cdots X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

oziroma dogodki $(X_1 \leq x_1) \cdots (X_n \leq x_n)$ so neodvisni

Oglejmo si dvorazsežni diskretni primer

Trditev 0.8. Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen vektor:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), p_i = P(X = x_i), q_j = P(Y = y_j)$$

Potem sta X in Y neodvisni $\iff p_{ij} = p_i \cdot q_j \forall i, j$

Dokaz. $F \equiv F_{(X,Y)}$ porazdelitvena funkcija vektorja (x, y)
 (\Rightarrow)

$$\begin{aligned}
p_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} P(X = x_i, Y = y_j) = \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i, y_j - h < Y \leq y_j) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (F_X(x_i)F_Y(y_j) - F_X(x_i - h)F_Y(y_j) - F_X(x_i)F_Y(y_j - h) - F_X(x_i - h)F_Y(y_j - h)) = \\
&\stackrel{\text{neodv.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (F_X(x_i) - F_X(x_i - h))(F_Y(y_j) - F_Y(y_j - h)) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i) \cdot P(y_j - h < Y \leq y_j) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} P(y_j - h < Y \leq y_j) = \\
&= P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot q_j
\end{aligned}$$

(\Leftarrow)

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = P(\cup_{i:x_i \leq x} \cup_{j:y_j \leq y} (X = x_i, Y = y_j)) = \\
&\stackrel{\text{disjunktni}}{=} \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) = \\
&\stackrel{\text{predpostavka}}{=} \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} p_i q_j = \\
&= \left(\sum_{i:x_i \leq x} p_i \right) \left(\sum_{j:y_j \leq y} q_j \right) = \\
&= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)
\end{aligned}$$

■

Torej sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki

Trditev 0.9. Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektore z gostoto $p(x, y)$. Potem sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki $\iff p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ za (skoraj) vse $x, y \in \mathbb{R}$

Dokaz. (ideja): X in Y sta neodvisni, če $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Če parcialno odvajamo po x in po y , dobimo $p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$. Obratno dobimo z integriranjem po x in po y ■

Primer. $(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
& X \sim N(\mu_x, \sigma), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \\
& X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni} \iff \rho = 0 \\
& p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2} = p_X(x) \cdot p_Y(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N(0, 0, 1, 1, \rho) : x^2 - 2\rho xy + y^2 = c - \text{ovojnica} \\
& \rho = 0 : x^2 + y^2 = c - \text{krožnica}
\end{aligned}$$

Trditev 0.10. Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor. Potem sta X in Y neodvisni $\iff p_{(X,Y)}(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ za neki integrabilni funkciji f in g

Dokaz. (\Rightarrow) jasno na zadnji trditvi
 (\Leftarrow)

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dy \stackrel{\text{predpostavka}}{=} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \text{ in} \\
p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dx \stackrel{\text{predpostavka}}{=} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx
\end{aligned}$$

Ker je $\iint_{\mathbb{R}^2} p_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1$, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1 \text{ predpostavka}$$

Zato je $p_X(x) \cdot p_Y(y) = f(x) \cdot g(y) = p_{(X,Y)}(x, y)$, kar pomeni neodvisnost po prejšnji trditvi ■

Izrek 0.11. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni \iff za vsaki Borelovi množici $A, B \subseteq \mathbb{R}$ velja

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

t.j. dogodka $(X \in A)$ in $(Y \in B)$ sta neodvisna
(Borelova σ -algebra: najmanjša σ -algebra z odprtimi množicami)

Dokaz. (\Leftarrow)

$$\begin{aligned} A &= (-\infty, x], B = (-\infty, y] \\ P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \in (-\infty, x], Y \in (-\infty, y]) = \\ &= P(x \in (-\infty, x]) \cdot P(Y \in (-\infty, y]) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ &\implies F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned}$$

(\Rightarrow) izpustimo ■

0.3 Funkcije slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev

Naj bo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $Y := f \circ X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tudi slučajna spremenljivka.

$f \circ X = f(X)$
saj je množica

$$\begin{aligned} (Y \leq y) &\equiv \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \leq y\} = \\ &= \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in (-\infty, y]\} = \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}((-\infty, y])\} = \\ &= \{X \in f^{-1}((-\infty, y])\} \end{aligned}$$

dogodek, ker je $f^{-1}((-\infty, y])$ zaprta množica, torej Borelova.

y je funkcija slučajne spremenljivke X .

Naj bo f strogo naraščajoča funkcija z zalogo vrednosti (a, b) , kjer je $-\infty \leq a < b \leq \infty$

Vzemimo $y \in (a, b)$. Potem je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y \leq y) = P(f \circ X \leq y) = \\ &\text{f naraščajoča} \rightarrow \text{obrnjljiva} \\ &= P(X \leq f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

kjer je $f^{-1} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ inverzna funkcija k funkciji f

če je $y \geq b$ je $F_Y(y) = 1$

če je $y \leq a$ je $F_Y(y) = 0$

Če je še f zvezno odvedljiva in X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, potem je y tudi zvezno porazdeljena z gostoto Φ

$$\Phi_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))'$$

za $y \in (a, b)$, če je $y \notin (a, b)$, je $p_Y(y) = 0$

Podobno ravnamo v primeru, ko je f strogo padajoča ((a, b) zaloga vrednosti)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(f \circ X \leq y) = P(X \geq f^{-1}(y)) = \\ &= 1 - P(X \leq f^{-1}(y)) = 1 - F_X(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Primer. $X \sim N(0, 1)$, $f(x) = kx + n$, $k \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$

Vzemimo, da je $k > 0$. Definiramo $Y = f(X)$. Tedaj je

$$p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-n}{k}\right) \cdot \frac{1}{k}$$

po formuli (prej).

$$y = kx + n \implies x = \frac{y-n}{k} = f^{-1}(y)$$

To je enako

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-n}{k}\right)^2} \frac{1}{k}$$

torej je $Y \sim N(n, k)$

Če je $k < 0$, potem je $p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-n}{k}\right) \cdot \frac{1}{-k}$, torej za poljuben $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $Y \sim N(n, |k|)$

Primer. $X \sim N(0, 1)$, $f(x) = x^2$. Tedaj ima $Y = f(X) = X^2$ porazdelitveno funkcijo

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$$

za $y \leq 0$ in

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{\text{soda}}{\text{under}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

za $y \geq 0$

Gostota za Y pa je

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F'_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

kar je $\chi^2(1)$, saj je

$$\chi^2(n) : p_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

za $x > 0$, sicer $p_X(x) = 0$

Trditev 0.12. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, f in $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji, potem sta tudi $U = f(X)$ in $V = g(Y)$ neodvisni slučajni spremenljivki

Dokaz.

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u, v) &= P(f(x) \leq u, g(y) \leq v) = P(X \in f^{-1}((-\infty, u]), Y \in g^{-1}((-\infty, v])) = \\ &= P(f^{-1}((-\infty, u]) \text{ in } g^{-1}((-\infty, v]) \text{ zaprti}) \implies \text{Borelovi} \\ &\stackrel{\text{Borelov izrek}}{=} P(X \in f^{-1}((-\infty, u])) \cdot P(Y \in g^{-1}((-\infty, v])) = \\ &= P(f(X) \leq u) \cdot P(g(Y) \leq v) = F_U(u) \cdot F_V(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Izrek 0.13. Naj bo $X = (X_1 \cdots X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ slučajni vektor in $f = (f_1 \cdots f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $Y = f \circ X \equiv f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tudi slučajni vektor (brez dokaza).

Y je funkcija slučajnega vektorja X in ima m komponent $Y = (Y_1 \cdots Y_m)$. Porazdelitvena funkcija za Y_j , ($j = 1, 2 \cdots m$) je

$$F_{Y_j}(y) = P(f_i(x_1 \cdots x_n) \leq y) = P((x_1 \cdots x_n) \in f_j^{-1}((-\infty, y])) \text{ množica v } \mathbb{R}^n$$

Če je $X = (X_1 \cdots X_n)$ zvezno porazdeljena, je torej

$$F_{Y_j}(y) = \int \underbrace{\cdots}_{f^{-1}((-\infty, y])} \int p_X(x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Primer. $n = 2, m = 1$, $(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno porazdeljen

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(f(x, y) \leq z) = P((X, Y) \in f^{-1}((-\infty, z])) = \\ &= \iint_{x+y \leq z} p_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p_{(X,Y)}(x, y) dy \end{aligned}$$

od tod sledi, da je gostota slučajne spremenljivke Z

$$p_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, z-x) dx$$

Če sta še X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx - \text{konvolucija funkcij } p_X \text{ in } p_Y$$

Vzemimo posebni primer $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$, torej

$$p_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ za } x > 0 \text{ in } 0 \text{ sicer}$$

za $p_Y(y)$ podobno.

Po zadnji formuli je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx = 0$ za $z \leq 0$, sicer je za $z > 0$

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} (z-x)^{\frac{m}{2}-1+\frac{n}{2}-1+1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{z-x}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\
x &= tz \quad dx = z dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{m}{2}-1+\frac{n}{2}-1+1} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\
\rightarrow B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m+n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{m+n}{2}-1}
\end{aligned}$$

Torej $X + Y \sim \chi^n(m+n)$
Dokazali smo

Trditev 0.14. Naj bosta neodvisni slučajni spremenljivki $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$. Potem je $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

Posledica 0.15. Če so X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene $N(0, 1)$, potem je $Y := X_1^2 + \dots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$

Dokaz. Vemo, da je $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ in da so X_1^2, \dots, X_n^2 neodvisne spremenljivke. Potem je po trditvi + indukciji $Y \sim \chi^2(1 + \dots + 1) = \chi^2(n)$ ■

Oglejmo si transformacijo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (u, v)$, ki preslika zvezno porazdeljen slučajni vektor (x, y) v zvezno porazdeljen slučajni vektor (u, v) , torej $U = u(x, y), V = v(x, y)$
 Označimo še $A_{u,v} = (-\infty, u] \times (-\infty, v]$
 Potem je

$$F_{(U,V)}(u, v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(U,V)}(s, t) ds dt$$

Pot drugi strani pa je

$$F_{(U,V)}(u, v) = P((U, V) \in A_{u,v}) = P((X, Y) \in f^{-1}(A_{u,v})) = \iint_{f^{-1}(A_{u,v})} p_{(X,Y)}(x, y) dx dy$$

Privzemimo še, da je f zvezno odvedljiva bijekcija. Potem je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \rightarrow (x, y)$ tudi zvezno odvedljiva. Z zamenjavo spremenljivk $x = X(u, v), y = Y(u, v)$ v zadnjem integralu dobimo

$$F_{(U,V)}(u, v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(X,Y)}(x(s, t), y(s, t)) \cdot |J(s, t)| dx ds$$

kjer je

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} (u, v)$$

Jacobijeva determinanta.

Zaradi 0.3 imamo torej $p_{(U,V)}(u, v) = p_{(X,Y)}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)|$

Oglejmo si poseben primer

Primer. $U = X, V = v(x, y)$ oz $X = U, Y = y(u, v)$

Tedaj je $p_{(U,V)}(u, v) = p_{(X,Y)}(u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right|$

Gostota spremenljivke V je $\int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right| dv = p_V(v)$

Pišimo $Z = V$, torej je $Y = y(x, z)$, saj je $U = X$

Potem prepišemo $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, y(x, z)) \left| \frac{\partial y}{\partial z}(x, z) \right| dx$

Primer.

1. $Z = X + Y \implies Y = Z - X$, torej je $y(x, z) = z - x$, $\frac{\partial y}{\partial z}(x, z) = 1$

$$p_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, z-x) \cdot 1 dx$$

2. $Z = X \cdot Y \implies Y = \frac{Z}{X}$, torej je $y(x, z) = \frac{z}{x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}(x, z) = \frac{1}{x}$

$$p_{X \cdot Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, \frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx$$

Če sta še X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je

$$p_{X \cdot Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(\frac{z}{x}) \cdot \frac{1}{|x|} dx$$

0.4 Matematično upanje oz. pričakovana vrednost

V primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ je matematično upanje oz. pričakovana vrednost vsota $E(X) := \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$

V posebnem primeru $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ je $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ - povprečje števil $x_1 \cdots x_n$

expected value, expectation, mean value

Naj bo X diskretno porazdeljena slučajna spremenljivka z neskončno zalogo vrednosti:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

X ima matematično upanje oz. pričakovano vrednost, če je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$. Tedaj je matematično upanje definirano kot $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$

Naj bo sedaj X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X . Potem ima X matematično upanje, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x) dx < \infty$. Tedaj je matematično upanje slučajne spremenljivke X enako $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx$

Primer.

$$1. X \sim Ber(p) \text{ oz. } X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} q = 1 - p, E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$2. X \sim Poi(\lambda), \text{ torej } p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} k = 0, 1 \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$3. \text{ Enakomerna porazdelitev na } [a, b]$$

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{če } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$4. X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$U = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies du = \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \mu \quad (1)$$

Ker je v predzadnjem koraku 1. funkcija (v integralu) liha, 2. pa je gostota porazdelitve $N(0, 1)$

$$5. \text{ Cauchyjeva porazdelitev } p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\text{Nima matematičnega upanja, saj je } \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\infty} = \infty$$

$$6. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \text{ je pogojno konvergentna vrsta, t.j. konvergira, a ne absolutno}$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$x_k \cdot p_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$p_k := \frac{1}{2^k} \text{ npr. ker je vsota } 1$$

$$x_k := \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2^k$$

Ta porazdelitev nima matematičnega upanja, ker vrsta ne konvergira absolutno

Trditev 0.16. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija

- (a) Če je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$ potem je $E(f \circ X) \equiv E(f(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \cdot p_k$ (če le to matematično upanje obstaja)
- (b) Če je X zvezno porazdeljena z gostoto p_X , potem je $E(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$

Dokaz. (samo (a)):

$$f \circ X : \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

npr če $f(x_1) = f(x_3) \implies \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots \\ p_1 + p_3 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$
 $(E(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{f(x)}(x) dx = \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$ - substitucija $y = f(x)$ v integralu) ■

Posledica 0.17. Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje $\iff X$ ima matematično upanje. Tedaj velja $|E(X)| = E(|X|)$

Dokaz. (samo diskreten primer):

$$E(|X|) \stackrel{\text{trd. } f(x)=|x|}{=} \sum_i |x_i| \cdot p_i \geq \left| \sum_i x_i \cdot p_i \right| = |E(X)|$$

■

Posledica 0.18. Za $\forall a \in \mathbb{R}$ in vsako slučajno spremenljivko X z matematičnim upanjem velja $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ (homogenost)

Dokaz. $f(x) = a \cdot x$, trditev (od prej) ■

Podobno kot zadnjo trditev se dokaže

Trditev 0.19. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in (X, Y) slučajni vektor

- (a) Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen $p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$ (če le vrsta (oz. končna vsota) absolutno konvergira)

(b) Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen z gostoto $p(X, Y)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)p_{(X,Y)}(x, y)dy$ (če le integral absolutno konvergira)

Posledica 0.20. Če slučajni spremenljivki X in Y imata matematično upanje, potem ga ima tudi $X + Y$ in velja $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (aditivnost)

Dokaz. (samo zvezen primer):

$$\begin{aligned} E(X, Y) &\stackrel{f(x,y)=x+y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (x + y)p_{(X,Y)}(x, y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y)dy = E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

■

Posledica 0.21. Za slučajne spremenljivke $X_1 \cdots X_n$, ki imajo matematično upanje, velja $E(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$ z $\forall a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X+Y}(x)dx \stackrel{?}{=} E(X) + E(Y) \text{ ni očitno iz tega}$$

Primer. 1. Če ima X matematično upanje, potem $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

$$2. X_k \sim Ber(p), \text{ t.j. } X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1 - p$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n \implies E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n \cdot p$$

Posebej to (v 2. zgledu) velja v primeru, ko so $\{X_k\}_{i=1}^n$ neodvisne. To velja tudi za Bernoullijevo zaporedje ponovitev poskusa: opazujemo dogodek A s $P(A) = p$. X je frekvenca dogodka A v n ponovitvah poskusa. Potem je $X \sim Bin(n, p)$ in $X = X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $(X_k = 1)$ dogodek, da se A zgodi v k -ti ponovitvi poskusa, sicer je $(X_k = 0)$. Po zgornjem je $E(X) = n \cdot p$.

Do tega lahko pridemo tudi direktno:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot p_k = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \stackrel{j=k-1}{=} \\
&= np \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} \right) = np(p+q)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

Trditev 0.22 (Cauchy-Schwartzova neenakost). Če obstajata $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, potem obstaja tudi $E(X, Y)$ in velja $E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$. Enačaj velja samo v primeru $|Y| = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}} |X|$ z verjetnostjo 1

Dokaz. Ker za nenegativna realna števila velja neenakost

$$u \cdot v \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \iff (u - v)^2 \geq 0$$

za nenegativni slučajni spremenljivki U in V velja neenakost

$$U \cdot V \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

Enakost velja samo v točkah $\omega \in \Omega$, za katere je $U(\omega) = V(\omega)$

Če vstavimo $U = a \cdot |X|$ in $V = \frac{1}{a}|Y|$ za $a > 0$, dobimo $|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2}(a^2 Y^2 + \frac{1}{a^2} Y^2)$ in zato je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \frac{1}{2}(a^2 E(X^2) + \frac{1}{a^2} E(Y^2)) \text{ za } \forall a > 0 \quad (2)$$

Če vstavimo $a^2 = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}}$ na desni strani dobimo

$$\frac{1}{2}(\sqrt{E(Y^2) + E(X^2)} + \sqrt{E(X^2 + E(Y^2))}) = \sqrt{E(X^2) + E(Y^2)}$$

Torej je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$$

Enakost v neenakosti velja $\iff a|X| = \frac{1}{a}|Y|$, torej $|Y| = a^2|X| = \frac{E(Y^2)}{E(X^2)}|X|$ z verjetnostjo 1 ■

Posledica 0.23. Če obstaja $E(X^2)$, potem obstaja $E(X)$ in velja $(E(X))^2 \leq E(X^2)$

Dokaz. $Y = 1$, t.j. $Y : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$E(|X \cdot 1|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot 1^2} \quad (E(|X|))^2 \leq E(X^2)$$

■

Trditev 0.24. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, ki imata matematični upanji. Potem ima matematično upanje tudi $X \cdot Y$ in velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dokaz. (samo zvezem primer):

$$E(X \cdot Y) \stackrel{\text{trd}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p_{(X,Y)}(x,y) dx dy \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} \iint_{\mathbb{R}} x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy = E(X) \cdot E(Y)$$

■

Definicija 0.25 (Nekoreliranost). Slučajni spremenljivki X in Y sta nekorelirani, če velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, sicer sta korelirani.

Po trditvi iz neodvisnosti sledi nekoreliranost. Obratno pa ne velja:

Primer.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \cos(U) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y = \sin(U) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0, E(Y) = \frac{1}{3}$$

$$X \cdot Y = \sin(U) \cdot \cos(U) = 0 \Rightarrow E(X \cdot Y) = 0 \Rightarrow X \text{ in } Y \text{ sta nekorelirani slučajni spremenljivki}$$

X \ Y	0	1	Σ
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
Σ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\Rightarrow \text{nista neodvisni, npr}$$

$$\frac{1}{3} = P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

Trditev 0.26. $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$

Potem sta X in Y neodvisni \iff nekorelirani
 $\iff E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

0.5 Disperzija, kovarianco in korelacijski koeficient

Definicija 0.27 (Disperzija). Naj obstaja $E(X^2)$. Disperzija oz. varianca slučajne spremenljivke X je $D(X) \equiv \text{var}(X) := E((X - E(X))^2)$

Disperzija meri razpršenost slučajne spremenljivke X okoli $E(X)$

Ker je $E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$, je $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Lastnosti disperzije:

- $D(X) \geq 0$ in $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$, t.j. X je izrojena slučajna spremenljivka
- $D(a \cdot X) = a^2 D(X)$ $a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ velja: $E((X - a)^2) \geq D(X)$. Enakost velja le v primeru $a = E(X)$

Dokaz.

$$E((X - a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2E(X)a + a^2 = (a - E(X))^2 + E(X^2) - (E(X))^2$$

Enakost velja samo za $a = E(X)$ ■

Definicija 0.28 (Standardna deviacija). Standardna deviacija ali standardni odklon slučajne spremenljivke X je $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$

Zanjo velja $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$

Primeri nekaterih $E(X)$ in $D(X)$

1. enakomerna diskretna porazdelitev: $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

$$E(X) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2$$

2. Binomska porazdelitev $\text{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1), q = 1 - p$

$$E(X) = n \cdot p, D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

3. Poissonova porazdelitev $Poi(\lambda), \lambda > 0$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

4. Geometrijska porazdelitev $geo(p), p \in (0, 1), q = 1 - p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$$

5. Pascalova porazdelitev $Pas(m, p), m \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

$$E(X) = \frac{m}{p}, D(X) = \frac{mq}{p^2}$$

6. Enakomerna zvezna porazdelitev Ed na $[a, b]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. Normalna porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma$$

8. Porazdelitev gama $\gamma(b, c)$

$$E(X) = \frac{b}{c}, D(X) = \frac{b}{c^2}$$

9. Porazdelitev $\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$$E(X) = n, D(X) = 2n$$

10. Eksponentna porazdelitev $Exp(\lambda), \lambda > 0 = \gamma(1, \lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Preverimo, da je $D(X) = \sigma^2$ za $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \implies x - \mu = \sigma t, dx = \sigma dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$u = t, dv = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$du = dt, v = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-te^{-\frac{1}{2}t^2} |_{-\infty}^{\infty}) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2$$

Definicija 0.29 (Kovarianca). Kovarianca slučajnih spremenljivk $K(X, Y) \equiv \text{Cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

Ker je

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

je $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Lastnosti:

1. $K(X, X) = D(X)$
2. $K(X, Y) = 0 \iff X$ in Y sta neodvisni
3. K je simetrična in bilinearna funkcija:
 - $K(X, Y) = K(Y, X)$
 - $K(aX + bY, Z) = aK(X, Z) + bK(Y, Z) \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. Če obstajata $D(X)$ in $D(Y)$, potem obstaja tudi $K(X, Y)$. Tedaj velja $|K(X, Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
 To sledi iz Cauchy-Schwartzove neenakosti ($|E(U \cdot V)| \leq \sqrt{E(U^2) \cdot E(V^2)}$) za slučajni spremenljivki $X - E(X)$ in $Y - E(Y)$. Enačaja v neenakosti velja $\iff Y - E(Y) \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X))$ z verjetnostjo 1
5. Če X in Y imata disperziji, potem jo ima tudi $X + Y$ in velja $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)$
 če sta X in Y nekorelirani (posebej neodvisni), potem je $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Dokaz. Sledi iz enakosti

$$(X + Y - E(X + Y))^2 = ((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 = (X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X))(Y - E(Y))$$

$$D(X + Y) = E((X - E(X))^2) + E((Y - E(Y))^2) + E(2(X - E(X))(Y - E(Y))) = D(X) + D(Y)$$

■

6. Posplošitev: $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) + 2 \sum_{i < j} K(X_i, X_j)$
 Če so $X_1 \dots X_n$ paroma nekorelirani (posebej neodvisni), potem je
 $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n)$

Primer. $\text{Bin}(n, p)$ je vsota $X = X_1 + \dots + X_n$, kjer je $X_i \sim \text{Ber}(p)$, t.j.

$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, ki so neodvisne

Zato je $D(X) = D(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot D(X_1) = n \cdot p \cdot q$, saj je $D(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = p - p^2 = pq$

Definicija 0.30 (Standardizacija slučajne spremenljivke). Standardizacija slučajne spremenljivke X je slučajna spremenljivka $X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

Zanjo velja:

- $E(X_s) = 0$
- $D(X_s) = \frac{1}{\sigma(X)^2} \cdot D(X - E(X)) = \frac{1}{\sigma(X)^2} D(X) = 1$

Primer.

$$X \sim N(\mu, \sigma) \implies X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Definicija 0.31 (Korelacijski koeficient). Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_s \cdot Y_s)$$

Lastnosti:

1. $r(X, Y) = 0 \iff X$ in Y sta nekorelirani
2. $r(X, Y) \in [-1, 1]$, kar sledi iz lastnosti (4) za kovarianco
3. • $r(X, Y) = 1 \iff Y = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1

- $r(X, Y) = -1 \iff Y = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1

Tedaj imamo linearno zvezo med X in Y

Primer.

$$(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) \quad \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y \in [0, \infty], \rho \in [-1, 1]$$

Trdimo, da je $r(X, Y) = \rho$

$$(X_s, Y_s) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$$

$$r(X, Y) = E(X_s \cdot Y_s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbb{R}} xy e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dx dy$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2\rho xy + y^2 &= (x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2)y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2} dx = \\ &= E(N(\rho y, \sqrt{1-\rho^2})), \text{ ker je } p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \\ &= \rho \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = D(N(0, 1)) = 1\right) \implies = \rho \end{aligned}$$

Torej sta X in Y nekorelirani $\overset{\text{v splošnem}}{\iff} \rho = 0 \overset{\text{ta primer}}{\iff} X, Y$ neodvisni

Kakšna je gostota, če je ρ blizu 1? $\rho \uparrow 1 : \rho \downarrow -1 :$

gostota je skoraj skoncentrirana na neki premici, torej med X in Y obstaja skoraj linearna zveza

0.6 Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje

Izberimo si dogodek B s $P(B) > 0$

Definicija 0.32. Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na B je $F_X(X | B) := P(X \leq x | B) = \frac{P(X \leq x \wedge B)}{P(B)}$

Ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija

A Diskreten primer

Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor z verjetnostno funkcijo $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$

Za pogoj B vzemimo $B = (Y = y_j)$ pri nekem j , torej $q_j = P(Y = y_j)$. Potem je pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ $F_X(X | Y = y_j) := \frac{P(X \leq x | Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{1}{q_j} \sum_{j: x_j \leq x} p_{ij}$

Če vpeljemo pogojno verjetnostno funkcije $p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$, $F_X(X | Y = y_j) = \sum_{i: x_i \leq x} p_{i|j}$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$E(X | Y = y_j) := \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_i \cdot p_{ij}$$

Regresijska funkcija $\ell(y_j) = E(X | Y = y_j)$, ki je definirana na zalogi vrednoti slučajne spremenljivke Y

Definirajmo novo slučajno spremenljivko $E(X | Y) = \ell(y)$, ki ji rečemo pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y

$$\text{Ta ima shemo } E(X | Y) = \begin{pmatrix} \ell(y_1) & \ell(y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X | Y = y_1) & \dots \\ q_1 & \dots \end{pmatrix}$$

Zanjo velja

$$E(X | Y) = \sum_j \ell(y_j) \cdot q_j = \sum_j \sum_i x_i \cdot p_{ij} = \sum_i x_i (\sum_j p_{ij}) = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$$

kjer je $p_i = P(X = x_i)$

Kaj dobimo, če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

Tedaj je $p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_i \cdot q_j}{q_j} = p_i$ in $\ell(y_j) = E(E(X | Y = y_j)) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$, torej je regresijska funkcija kar konstanta $E(X)$ oz. je $E(X | Y)$ izrojena slučajna spremenljivka z vrednostjo $E(X)$

Primer. Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Poi(\lambda)$ z $\lambda > 0$. Iz vsakega jajca se z verjetnostjo $p \in (0, 1)$ izvali piščanec, neodvisno od drugih jajc. Naj bo K število piščancev. Določimo $E(K | N)$, $E(K)$ in $E(N | K)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(K = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\ell(n) = E(K \mid N = n) = E(\text{Bin}(n, p)) = n \cdot p$$

torej je $E(K \mid N) = \ell(n) = p \cdot N$

$$E(K \mid N) = \begin{pmatrix} p \cdot 0 & p \cdot 1 & p \cdot 2 & \dots \\ P(N=0) & P(N=1) & P(N=2) & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(K) = E(E(K \mid N)) = E(p \cdot N) = p \cdot E(N) = p \cdot \lambda$$

$$\begin{aligned} P(K = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(K = k \mid N = n) \cdot P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(qk)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda} \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Torej je $K \sim \text{Poi}(p \cdot \lambda)$

$$\begin{aligned} P(N = n \mid K = k) &= \frac{P(N = n, K = k)}{P(K = k)} = \frac{P(K = k \mid N = n) \cdot P(N = n)}{P(K = k)} = \\ &= \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{pk! e^{p\lambda}}{(p\lambda)^k} = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-q\lambda} \quad n = k, k+1, \dots \end{aligned}$$

To je za k premaknjena Poissonova porazdelitev: $k + \text{Poi}(q\lambda)$

Potem je $\psi(k) = E(N \mid K = k) = E(k + \text{Poi}(q\lambda)) = k + q \cdot \lambda$ in zato

je $E(N \mid K) = \psi(k) = k \cdot q + \lambda$

Preizkus: $E(E(N \mid K)) = E(k + q \cdot \lambda) = p\lambda + q\lambda = \lambda = E(N)$ (ok)

Regresijsko premico je vpeljal Golten (1822-1911)

B Zvezni primer

Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x, y)$.

Vzemimo $B = (y < Y \leq y + k)$ za nek $y \in \mathbb{R}, k > 0$.

Potem je $F_X(X \mid y < Y \leq y + k) = P(x \leq x \mid y < Y \leq y + k) = \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + k)}{P(y < Y \leq y + k)} = \frac{F_{(X,Y)}(x, y+k) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+k) - F_Y(y)}$

Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$ je limita, če obstaja:

$$F_X(x \mid Y = y) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(x \mid y < Y \leq y+h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_{(X,Y)}(x, y+h) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

Denimo sedaj, da sta $p_{X,Y}$ in p_Y zvezni funkciji. Tedaj je $F_X(X \mid Y =$

$$y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^x p_{(X,Y)}(x, v) dv$$

Če vpeljemo pogojno gostoto $p_X(x \mid Y = y) := \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$, je torej

$$F_{(X,Y)}(x \mid Y = y) = \int_{-\infty}^x p_X(u \mid y) du$$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na dogodek ($Y = y$) je

$$E(X | Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x|y)dx = \frac{1}{p_Y(y)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} xp_{(X,Y)}(x, y)dx$$

Vpeljimo regresijsko funkcijo $l(y) := E(X | Y = y)$, definirano na zalogi vrednosti slučajne spremenljivke Y . Tako dobimo novo slučajno spremenljivko $E(X | Y) := l(y)$: pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y .

Kot v diskretnem primeru se pokaže enakost $E(E(X | Y)) = E(X)$

Primer. $(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$

Robna gostota za Y je $N(\mu_y, \sigma_y)$

Zato je pogojna gostota

$$p_X(x | y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)} \stackrel{\text{D.N.}}{=} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(2\pi)(1 - \rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} - \rho \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)$$

torej je $N(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2})$

Eksponent: $\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \sigma_x^2 (x - (\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)))^2$

$\implies l(y) = E(X | Y = y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$ - 1. parameter

$= \alpha + \beta y : \beta = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \alpha = \mu_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \mu_y$

Torej je $E(x | y) = \alpha + \beta y$

Primer. Meritev onesnaženosti zraka

Slučajna spremenljivka X meri koncentracijo ogljikovih delcev (v $\mu g/m^3$),

Y pa koncentracijo ozona (v $\mu l/l = ppm$)

Podatki kažejo, da ima (X, Y) približno dvorazsežno normalno porazdelitev, $\mu_x = 10.7, \sigma_x^2 = 29, \mu_y = 0.1, \sigma_y^2 = 0.02, \rho = 0.72$

Koncentracija ozona je škodljiva zdravju, če je ≥ 0.3

Denimo, da naprava za merjenje ozona odpove, koncentracija škodljivih delcev je $X = 200$

a kolikšna je pričakovana koncentracija ozona?

b kolikšna je verjetnost, da je stopnja ozona zdravju škodljiva

a

$$E(Y | X = x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) = 0.1 + 0.72 \sqrt{\frac{0.02}{29}}(20 - 10.7) \doteq 0.28$$

b Pogojna porazdelitev $Y | X = x$ je $N(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}) = N(0.28, 0.1)$

$$P(Y > 0.3 \mid X = 20) = 1 - P(Y \leq 0.3 \mid X = 20) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{0.3 - 0.28}{0.1}\right) \doteq 0.42$$

0.7 Višji momenti in vrstilne karakteristike

Definicija 0.33 (Momenti). Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. Moment reda k glede na točko a je $m_k(a) := E((X - a)^k)$ (če obstaja)

Za a običajno vzamemo

1. $a = 0$: $z_k := m_k(0) = E(X^k)$ začetni moment reda k
2. $a = E(X)$: $m_k := m_k(E(X))$ centralni moment reda k

Očitno je $z_1 = E(X)$, $m_2 = D(X)$

Trditev 0.34. Če $\exists m_n(a)$, potem obstajajo tudi momenti $m_k(a)$ za vse $k < n$

Dokaz. (V zveznem primeru):

$$\begin{aligned} E((X-a)^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k p_X(x) dx = \int a - 1^{a+1} (X-a)^k p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \leq \\ &\leq 1 + E((X-a)^k) < \infty \end{aligned}$$

■

Trditev 0.35. Če obstaja začetni moment z_n , potem obstajajo $m_n(a)$ glede na poljubno točko $a \in \mathbb{R}$

Dokaz.

$$E((X-a)^n) \leq E((|X| + |a|)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(a)^{n-k} \cdot E(|X|^k) < \infty$$

■

Centralne momente lahko izrazimo z začetnimi:

$$\begin{aligned} m_n(a) &= E((X-a)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} E(X^k) \\ a = E(X) &\implies m_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k \end{aligned}$$

Asimetrija slučajne spremenljivke X je $A(X) := E(X_s^3) = E((\frac{X-E(X)}{\sigma_x})^3) = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} m_2 = \sigma^2 = D(X)$

$A(N(\mu, \sigma)) = 0$, ker $A(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Sploščenost (kurtozis) $K(X) := E(X_s^4) = \frac{m_4}{m_2^2}$

$K(N(\mu, \sigma)) = 3$

Ce momenti ne obstajajo (npr. že $E(X)$ ne), potem si lahko pomagamo z vrstilnimi karakteristikami

Definicija 0.36 (Mediana). Mediana slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja $P(X \leq x) \leq \frac{1}{2}$ in $P(X \geq x) \leq \frac{1}{2}$ (in $P(X < x) = 1 - F(x-)$)

Če je F porazdelitvena funkcija za X , je to ekvivalentno s pogojem $F(x-) \leq \frac{1}{2} \leq F(x)$

Če je X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, dobimo $F(X) = \frac{1}{2}$ oz. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dx = \frac{1}{2}$

Te vrednosti (lahko jih je več) označimo z $X_{\frac{1}{2}}$

Primer.

- $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
 $x_{\frac{1}{2}} = 1, E(X) = \frac{4}{5}$

- $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$
Mediane so $[0, 1]$

-

- $X \sim N(0, 1)$
 $x_{\frac{1}{2}} = \mu = E(X)$

Definicija 0.37 (Kvantil). Kvantil reda p ($p \in (0, 1)$) je vsaka vrednost x_p , za katero velja $P(X \leq x_p) \geq p$ in $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$
Ekvivalentno je $F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj $F(x_p) = p$ t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = p$

- Kvartili: $X_{\frac{1}{4}}, X_{\frac{2}{4}}, X_{\frac{3}{4}}$
- Percentili: $X_{\frac{1}{100}}, X_{\frac{2}{100}}, \dots, X_{\frac{99}{100}}$

Primer. Telesna višina odraslih moških

Definicija 0.38 ((Semiinter)kvartilni razmik). $s := \frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$

je nadomestek (analog) za standardno deviacijo

Primer.

- $X \sim N(0, 1)$
 $x_{\frac{1}{2}} = 0$
 $\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} p(t) dt = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{tabelca}} x_{\frac{1}{4}} \doteq -0.67$
 $\xrightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} \doteq 0.67 \implies s = 0.67, \sigma(x) = 1$

- X naj ima Cauchyjevo porazdelitev
 $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
 $x_{\frac{1}{2}} = 0$
 Momenti ne obstajajo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{x=-\infty}^{x_{\frac{1}{4}}} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\pi} \arctan x_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \\ \arctan x_{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{4} \implies x_{\frac{1}{4}} = -1 \\ \xrightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} &= 1, s = 1 \end{aligned}$$

0.8 Rodovne funkcije

Definicija 0.39. Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$p_k = P(X = k) k = 0, 1, 2 \dots p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \dots s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta absolutno konvergira.

Očitno je $G_X(0) = p_0, G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Ker je $s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, je $G_X(s) = E(s^X)$

Za $s \in [-1, 1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq P_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Zato je vrsta konvergentna, če je $|s| \leq 1$. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1

Primer.

- $X \sim \text{geo}(p)$, $p \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} p_k &= P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ G_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^{k-1} \\ &= ps \frac{1}{1 - qs} \end{aligned}$$

konvergira, ko $|qs| < 1 \Leftrightarrow |s| < \frac{1}{|q|} =: R$

- $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \end{aligned}$$

$$R = \infty \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Iz teorije Taylorjevih vrst sledi

Izrek 0.40 (O eniličnosti). Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y . Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za $\forall s \in [-1, 1] \Leftrightarrow P(X = k) = P(Y = k)$ za vse $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedaj velja $P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^k(0)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_k = P(X = k)$$

Naj ima rodovna funkcija G_X slučajne spremenljivke X konvergenčni radij $R > 1$. Potem za $\forall s \in (-R, R)$ velja $G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1}$

Če postavimo $s = 1$, dobimo $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

Izrek 0.41. Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$ in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^n(1-) \equiv \lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1))$$

Dokaz. Za $\forall s \in [0, 1]$ je $G_X^n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} =$

$$= E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1) \cdot s^{X-n})$$

Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$\lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) =$$

$$\stackrel{\text{Abelova lema}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \lim_{s \nearrow 1} k(k-1) \cdot (k-n+1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) p_k = E(X(X-1) \cdots (X-n+1))$$

■

Posledica 0.42.

$$E(X) = G_X'(1-)$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G_X^{(2)}(1-) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1-))^2$$

Izrek 0.43. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnikoma funkcijama G_X in G_Y . Potem je $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$ za $s \in [-1, 1]$

Dokaz. $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \stackrel{\text{izrek}}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$, saj sta s^X in s^Y neodvisni slučajni spremenljivki

■

Posplošitev 0.44. Če so X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne slučajne spremenljivke, potem je za vse $s \in [-1, 1]$ $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s)$. Če so X_1, X_2, \dots, X_n enako porazdeljene in neodvisne, potem je

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = (G_X(s))^n$$

Izrek 0.45. Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke N, X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N , X_n pa rodovno funkcijo G_X . Potem ima slučajna spremenljivka $S := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rodovno funkcijo enako $G_S = G_N \circ G_X$ oz. $G_S(s) = G_N(G_X(s))$ za $s \in [-1, 1]$

To je posplošitev formule dd: $P(N = n) = 1, G_N(s) = 1 \cdot s^n = s^n$

Dokaz. Zaradi neodvisnosti imamo $P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = k, N = n) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, X_1 + \dots + X_n = k) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k)$$

Zato je

$$G_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S = k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot (G_X(s))^n = G_N(G_X(s))
\end{aligned}$$

za vse $s \in [-1, 1]$ ■

Posledica 0.46. Pri predpostavkah iz izreka velja Waldova enakost:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

Dokaz.

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)) \forall s \in [-1, 1] \quad (3)$$

$$E(S) = G'_S(1-) = G'_N(G_X(1-)) \cdot G'_X(1-) = E(N) \cdot E(X) \quad (4)$$
■

Primer. Kokoš, jajca, piščanci

N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$

K je število piščancev

Definiramo $X_i = 1$ dogodek, da se iz i-tega jajca izvali piščanec, sicer $X_i = 0$.

Potem je $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $q = 1 - p$ in X_i so neodvisne slučajne spremenljivke.

Očitno je $K = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Ker je $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ in $G_X(s) = q \cdot s^0 + p \cdot s = q + ps$, je po izreku $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q+ps-1)} = e^{\lambda(ps-p)} = e^{\lambda p(s-1)} \forall s \in [-1, 1]$, zato je $K \sim Poi(\lambda p)$

0.9 Momentno rodovna funkcija

Definicija 0.47 (Momentno rodovna funkcija). Momentno rodovna funkcija je $M_X(t) = E(e^{tX})$ za $t \in \mathbb{R}$, za katere obstaja matematično upanje

V primeru zvezne porazdelitve je $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$

To je Laplaceova transformacija funkcije p_X

V diskretnem primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ je $M_X(t) = \sum_i e^{tx} p_i$

V posebnem primeru, ko ima X nenegative celoštevilске vrednosti, je $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p_i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i (e^t)^i = G_X(e^t) \quad (M_X(t) = E((e^t)^X) = G_X(e^t))$$

$$G_X(s) = E(s^X)$$

Očitno je $M_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

Primer.

$$X \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ker je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx$ gostota za $N(0, 1)$

Izrek 0.48. Naj bo $M_X(t) < \infty$ (obstaja, $< \infty$ zato, ker je $e^t > 0$) za $\forall t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z M_X , vsi začetni momenti obstajajo, $z_k = E(X^k) = M_X^k(0)$ za $\forall k \in \mathbb{N}$ in velja $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$ za $\forall t \in (-\delta, \delta)$

Dokaz. (bistvo)

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{t \cdot X}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{X^k}{k!}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \end{aligned}$$

■

Trditev 0.49. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$, $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

Dokaz. $M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{(at)X} \cdot e^{bt}) = e^{bt} M_X(at)$

■

Izrek 0.50. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

Dokaz. $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \stackrel{e^{tX}, e^{tY} \text{ neodvisni}}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

■

Trditev 0.51. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Potem je $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$

Dokaz. Ker je

$$U := \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0, 1)$$

(standardizacija), je

$$X = \sigma_x \cdot U + \mu_x$$

in zato je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot M_U(\sigma_x t)$$

po zadnji trditvi. Potem je

$$M_U(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

za Y velja podobno. Po zadnjem izreku je

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_y^2 t^2}{2} + \mu_y t} = \\ &= e^{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)t^2}{2} + (\mu_x + \mu_y)t} \end{aligned}$$

Po izreku je

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$$

■

Opomba. Če bi vedeli, da je $X + Y$ porazdeljena normalno, bi “samo” izračunali parametra

Primer.

$$X \sim N(0, 1), M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} t^{2k}$$

Po drugi strani je $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{j!} t^j \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Primerjamo koeficiente:

- lihi koeficienti: $z_{2k-1} = 0 \quad k \in \mathbb{N}$
- sodi koeficienti:

$$\begin{aligned} \frac{z_{2k}}{(2k)!} &= \frac{1}{k! 2^k} \implies z_{2k} = \frac{(2k)!}{k! 2^k} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!! \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

0.10 Šibki in krepki zakon velikih števil

Definicija 0.52 (Verjetnostna konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verjetnostno konvergira proti slučajni spremenljivki X , če za $\forall \epsilon > 0$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$ oz. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$

Definicija 0.53 (Skoraj gotova konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ skoraj gotovo konvergira proti slučajni spremenljivki X , če velja $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$

Tukaj je $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall k (\in \mathbb{N}) \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} =$$

$$= \{\cap_{k \in \mathbb{N}} \cup_{m \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq m} \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} \quad (5)$$

Opomba. Števne unije in preseki \implies smo v σ -algebri, torej je to res dogodek

Trditev 0.54. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = 1$

Dokaz. Označimo $c_m := (|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = \cap_{n=m}^{\infty} (|x_n - X| < \epsilon)$.

Potem je $c_1 \subseteq c_2 \subseteq \dots$

je c_m za $\epsilon = \frac{1}{k}$ in $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_m$ (preseki)

Torej je $1 = P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq (\cup_{m=1}^{\infty} c_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m)$

Od tod sledi $\lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m) = 1$ ■

Posledica 0.55. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ verjetnostno konvergira.

Dokaz. Izberemo $\epsilon > 0$. Potem velja

$$P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } \forall n \geq m) \leq P(|X_m - X| < \epsilon)$$

Če uporabimo trditev, dobimo $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$ (leva stran). ■

Opomba. Obratna implikacija ne velja

Definicija 0.56. Naj bo $X_1, X_2, X_3 \dots$ zaporedje slučajnih spremenljivk, ki imajo matematično upanje. Definirajmo $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$

Potem je $E(Y_n) = 0$

Za $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja šibki zakon velikih števil (ŠZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} (|y| < \epsilon) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| < \epsilon)$ Za $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja krepki zakon velikih števil (KZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ skoraj gotovo, torej $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$

Če velja KVZŠ, potem velja ŠVZŠ

Primer. Mečemo kocko, X_k je # pik v k-tem metu. Potem je $E(X_k) = \frac{7}{2}$ in $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{7}{2}$

Ali konvergira $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2}$ skoraj gotovo? (Da)

Izrek 0.57.

a Neenakost Markova: če slučajna spremenljivka X ima matematično upanje, potem je $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ za $\forall a > 0$

b Neenakost Čebiševa: če slučajna spremenljivka X ima disperzijo, potem je $P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{a^2}$ za $\forall a > 0$ (pomembno za $a \geq 1$, ker je verjetnost ≤ 1)

oz. če pišemo $\epsilon = a \cdot \sigma(x) \implies P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$ za $\forall \epsilon > 0$

Dokaz. (samo zvezni primer)

a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_x(x) dx \geq \int_{\{|x| \geq a\}} |x| p_x(x) dx \geq$$

$$|a| \int_{\{|x| \geq a\}} p_x(x) dx = a \cdot P(|X| \geq a)$$

b

$$P((X - E(X)) \geq \epsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \stackrel{(a) \text{ za } X - E(X)}{\leq} \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} = \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

■

Izrek 0.58 (Markov). Če za zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, potem velja ŠZVŠ. Tukaj je $S_n := X_1 + \dots + X_n$

Dokaz. V neenakosti Čebiševa vzamemo $X = \frac{S_n}{n}$

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{P(S_n)}{n^2 \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Če vzamemo $Y_n = \frac{|S_n - E(S_n)|}{n}$, je $P(|Y_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

oz. $P(|Y_n| < \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Zato $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej velja ŠZVŠ za zaporedje $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ■

Posledica 0.59 (Izrek Čebišev). Če so X_1, X_2, \dots, X_n paroma nekorelirane slučajne spremenljivke in $\sup_{n \in \mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja ŠVZŠ

Dokaz. Ker je $D(S_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) \leq n \cdot c$, je $\frac{D(S_n)}{n^2} \leq \frac{n \cdot c}{n^2} = \frac{c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, zato po izreku Markova velja ŠZVŠ ■

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$, $E(X_n) = p$, $E(S_n) = n \cdot p$

Po izreku Čebiševa velja ŠZVŠ: $P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\implies P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

S_n je frekvenca dogodka, $\frac{S_n}{n}$ je relativna frekvenca, $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ verjetnostno

To je Bernoullijev zakon velikih števil iz 1713

Izrek 0.60 (Kolmogorov). Če za neodvisne slučajne spremenljivke $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n^2} < \infty$, potem velja KZVŠ, t.j. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$. Posebej je pogoj za vrsto izpolnjen, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$

Po izreku Kolmogorova velja KVZŠ, t.j. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ skoraj gotovo. To splošuje Bernoullijev zakon

0.11 Centralni limitni izrek

Definicija 0.61. Naj bo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk s končnimi disperzijami. Definiramo $S_n := X_1 + \dots + X_n$ in standardizirajmo: $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$, torej $E(Z_n) = 0$, $D(Z_n) = 1$

Za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja centralni limitni izrek, če je $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)} \forall x \in \mathbb{R}$, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Pracimo, da $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ po porazdelitvi konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi.

Izrek 0.62 (Centralni limitni izrek (CLI, osnovna verzija)). Naj bodo X_1, X_2, \dots neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem zanje velja centralni limitni zakon, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokazal je Ljapunov (1900), s tem je posplošil Laplaceov izrek iz leta 1812. V dokazu bomo uporabili

Izrek 0.63 (O zveznosti rodovne funkcije). Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ slučajnih spremenljivk velja:

$M_{Z_n}(t) \rightarrow M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ za vse $t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$
Potem $F_{Z_n}(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz. CLI v primeru, ko X_n imajo momentno rodovno funkcijo

$M_X(t) = E(e^{tX_n})$ na neki okolici točke 0

Naj bo $E(X_n) = \mu$, $D(X_n) = \sigma^2$ in $U_n := X_n - \mu = X_n - E(X_n)$. Torej je $E(U_n) = 0$ in $D(U_n) = \sigma^2$ ter $M_U(t) = 1 + tE(U_n) + \frac{t^2}{2!}E(U_n^2) + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n)}{n} = 0$)

Ker je $D(S_n) \stackrel{\text{neodvisne}}{=} D(X_1) + \dots + D(X_n) = n \cdot \sigma^2$ in $E(S_n) = n \cdot \mu = E(X_1) + \dots + E(X_n)$, je $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (\sum_{i=1}^n U_i)$

Potem je $M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1 + \dots + U_n)}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_1}) \dots E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_n}) = \stackrel{\text{enaki}}{=} (M_U(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n = (1 + \frac{t^2}{2n}\sigma^2 + o(\frac{1}{n}))^n$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty \equiv o(\frac{1}{n} \rightarrow 0)} e^{\frac{t^2}{2}}$

Lema 0.64. Če $X_n \rightarrow X$, potem $(1 + \frac{X_n}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^X$

Po prejšnjem izreku: $F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)}(x)$

$\epsilon > 0 : x - \epsilon \leq x_n \leq x + \epsilon$ za dovolj velik n

$$\implies \left(1 + \frac{x - \epsilon}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x + \epsilon}{n}\right)^n$$

$$\implies \left(1 + \frac{x - \epsilon}{n}\right)^n \rightarrow e^{x-\epsilon}$$

$$\implies \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \rightarrow e^x$$

$$\implies \left(1 + \frac{x + \epsilon}{n}\right)^n \rightarrow e^{x+\epsilon}$$

■

V splošnem se CLI dokaže s pomočjo karakterističnih funkcij:

naj bo X slučajna spremenljivka, $\ell_X(t) := E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))$ $t \in \mathbb{R}$

za razliko od momentno rodovnih funkcij karakteristične funkcije vedno od-
stajajo

v zveznem primeru je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx$ - Fourierova transformacija funkcije $p_X(x)$

$X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne, enako porazdeljene

$$\mu := E(X_n), \sigma := \sigma(X_n)$$

$$E(S_n) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} E(X_1) + \dots + E(X_n) = n\mu$$

$$D(S_n) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} D(X_1) + \dots + D(X_n) = n\sigma^2$$

$X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\bar{Z}_n := \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \implies Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Po CLI za velike n velja $Z_n \approx N(0, 1)$, zato je $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ oz. $S_n \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

Če so X_1, X_2, \dots porazdeljene normalno $N(\mu, \sigma)$, potem je $Z_n \sim N(0, 1)$, torej $F_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Primer. Laplaceova formula je poseben primer CLI:

$X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $X_n = 1$ je dogodek, da se dogodek A (s $P(A) = p$) zgodi v n-ti ponovitvi poskusa, sicer je $X_n = 0$

$E(X_n) = p$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ frekvenca dogodka A v prvih n ponovitvah

$S_n \sim \text{Bin}(n, p)$, $E(S_n) = np$, $D(S_n) = npq$, ker je $D(X_1) = pq$

$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \stackrel{\text{CLI}}{\approx} N(0, 1)$, če je n velik

$$\begin{aligned} P(S_n \leq X) &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

kjer je

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

verjetnostni integral

$$\begin{aligned} P(\alpha < S_n \leq \beta) &= \\ &= P(S_n \leq \beta) - P(S_n \leq \alpha) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Laplaceova aproksimacijska formula

Primer. Teža vrečke kostanja je porazdeljena približno normalno, saj je vsota tež posameznih kostanjev, ki so neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke

$X_n \dots$ teža n-tega kostanja, $S_n = X_1 + \dots + X_n \approx$ normalno - aditiven efekt

Primer.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$$
$$E(X_1) = 0, D(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$
$$S_1 = X_1, Z_1 = \frac{X_1 - E(X_1)}{\sigma(X_1)} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = x_1\sqrt{3}$$
$$S_2 = X_1 + X_2, Z_2 = \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma(S_2)} = \frac{X_1 + X_2 - E(X_1 + X_2)}{\sigma(X_1 + X_2)}$$
$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3, Z_3 = \frac{S_3 - E(S_3)}{\sigma(S_3)}$$

1 Statistika

1.1 Osnovni pojmi

Kot vedo statistiko razdelimo na:

1. opisno statistiko: zbiranje, razvrščanje, prikazovanje podatkov, računanje osnovnih količin
2. analitično statistiko: upraba podatkov pri sklepanju glede zakonitosti danega področja

Definicija 1.1 (Populacija). Populacija je končna ali neskončna množica elementov, pri katerih merimo ali opazujemo neko količino

Primer.

- (a) kontrole kvalitete: populacija je množica (serija) izdelka, npr. dnevna proizvodnja, merimo lastnosti izdelkov, npr. življensko dobo
- (b) testiranje seb: populacija je množica vseh zaposlenih v državi, merimo npr. starost, višino place ...

Matematični pogled: na verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}) imamo slučajno spremenljivko X .

Praviloma ne moremo izmeriti cele populacije, ampak meritve opravimo na relativno majhnem delu populacije, na vzorcu. Le-ta mora biti reprezentativen, izbran nepristransko in dovolj velik.

Matematični pogled: vzorec velikosti n je slučajni vektor $(x_1 \cdots x_n)$, kjer so

komponente enako porazdeljene kot slučajna spremenljivka X in med seboj neodvisne.

Vrednost tega slučajnega vektorja pri enem naboru n meritev je realizacija vzorca: $(x_1 \cdots x_n)$: to so konkretni podatki, ki jih analiziramo. Pri opisni statistiki predstavimo in obdelamo te podatke.

Iz teh vzorčnih podatkov želimo oceniti nekatere lastnosti populacije, kot sta:

1. sredina populacije μ , t.i. matematično upanje slučajne spremenljivke X
2. povprečni odklon σ od sredine populacije, t.i. Standardna deviacija slučajne spremenljivke X

Ocene za μ so:

- vzorčno povprečje: $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
- vzorčni modus: najpogostejša vrednost v vzorcu
- vzorčna mediana: srednja vrednost v vzorcu, urejenem po velikosti

Ocene za σ so:

- vzorčni razmak: razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo v vzorcu
- vzorčna disperzija: $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- popravljena vzorčna disperzija: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} s_0^2$

1.2 Vzorčne statistike in cenilke

Definicija 1.2 (Vzorčna statistika). Naj bo $(X_1, X_2 \cdots X_n)$ vzorec t.i. slučajni vektor, kjer so $X_1 \cdots X_n$ enako porazdeljene kot slučajna spremenljivka X in med seboj neodvisne.

Vzorčna statistika je simetrična funkcija vzorca $y = g(X_1, X_2 \cdots X_n)$, kjer je g simetrična funkcija n spremenljivk

Praviloma vzorčna statistika ocenjuje vrednost nekega parametra ξ . Tedaj je y cenilka za parameter.

y je odvisna od n , zato pišemo tudi $y_n = g(X_1 \cdots X_n)$.

Definicija 1.3 (Nepriistranskost, doslednost). Če je $E(Y) = \xi$, je Y nepriistranska cenilka za parameter ξ

Cenilka $Y = Y_n$ je dosledna, če $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ verjetnostno, t.i. $\forall \epsilon > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) = 0$ oz. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| < \epsilon) = 1$

Definicija 1.4 (Standardna napaka). Standardna napaka vzorčne statistike Y je standardna deviacija slučajne spremenljivke Y : $SE(Y) := \sigma(Y)$

Definicija 1.5 (Vzorčno povprečje). Naj bo X slučajna spremenljivka na populaciji, ki ima matematično upanje $E(X) = \mu$ in standardno deviacijo $\sigma(X) = \sigma$. Naj bo $(X_1 \cdots X_n)$ vzorec. Definirajmo vzorčno povprečje

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

ki je vzorčna statistika.

Je cenilka za \bar{X} , ki je nepristranska:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \cdots + E(X_n)) = \frac{1}{n}n \cdot \mu = \mu$$

Po ŠZVŠ (izreku Čebiševa) je to dosledna cenilka za μ .

Ker je

$$D(\bar{X}) \stackrel{\text{neodv}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2}n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

je standardna napaka

$$SE(Y) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- čim večji n , boljše oceni parameter μ

Po CLI je pri velikem n slučajna spremenljivka $Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$

porazdeljena približno $N(0, 1)$ oz. \bar{X} je porazdeljen približno $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Če je X normalno porazdeljena $N(\mu, \sigma)$, potem je \bar{X} porazdeljen $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ za vsak n

Trditev 1.6. Naj bo Y_n cenilka za ξ . Če je $E(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ in $D(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, potem je $Y = Y_n$ dosledna cenilka za ξ

Dokaz. Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Dokazati moramo $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) = 0$

Ker je $E(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$: $|E(Y_n) - \xi| < \frac{\epsilon}{2}$ zato je dogodek

$$\begin{aligned} (|Y_n - \xi| \geq \epsilon) &\subseteq (|Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - \xi| \geq \epsilon) \text{ za } \forall n \subseteq \\ &\stackrel{n \geq n_0}{\subseteq} (|Y_{n_0} - E(Y_{n_0})| + |E(Y_{n_0}) - \xi| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Torej je za $n \geq n_0$

$$P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{D(Y_n)}{\epsilon^2} \cdot 4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (doslednost)}$$

Neenakost Čebiševa: $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$

Tako imamo doslednost cenilke: $P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ■

Primer. Porazdelitev χ^2 , n število prostorskih stopenj

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Modus = $n - 2$, $E(X) = n$, $D(X) = 2n$

Mediana $\approx n \cdot (1 - \frac{2}{9n})^3$

Definicija 1.7 (Vzorčna disperzija). Naj bo X slučajna spremenljivka na populaciji. Vzorcna disperzija je definirana s

$$s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

popravljen vzorčna disperzija pa je

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Kako sta porazdeljeni, če je $X \sim N(\mu, \sigma)$?

Raje vzemimo vzorčno statistiko: $\chi^2 := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{\sigma^2} s_0^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2$

Ni lahko izračunati, da je $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$

Ideja izpeljave je $\chi^2 = Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2$ za $Z_i \sim N(0, 1)$ in med seboj neodvisne.

Potem uporabimo trditve iz verjetnosti: $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, torej $E(\chi^2) = n-1$, $D(\chi^2) = 2(n-1)$. Od tod sledi

$$E(s_0^2) = E\left(\frac{\sigma^2}{n} \chi^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} E(\chi^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

torej s_0^2 ni nepristranska za σ^2 , je pa asimptotično nepristranska, t.i. $E(s_0^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$

Podobno je $E(s^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} E(\chi^2) = \sigma^2$, torej je s^2 nepristranska cenilka za σ^2

Ker je $D(s_0^2) = \frac{\sigma^4}{n^2} D(\chi^2) = \frac{\sigma^4 2(n-1)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $D(s^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, iz trditve sledi, da sta s_0^2 in s^2 dosledni cenilki za σ^2

Studentova t-porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

kjer je $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ Beta funkcija

$$n = 1 : \quad \frac{1}{\pi}(1 + x^2)^{-1} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \text{Cauchyjeva porazdelitev}$$

$$\text{ko gre } n \rightarrow \infty, \text{ gre } \sqrt{n}B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \sqrt{2\pi} \text{ in } (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} = ((1 + \frac{x^2}{n})^n)^{-\frac{n+1}{2n}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$$

torej je pri velikih n gostota približno $N(0, 1)$

$$n = 2 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}B(1, \frac{1}{2})}(1 + \frac{x^2}{2})^{-\frac{3}{2}}$$

za $n \geq 2$ je $E(X) = 0$

$$n = 3 : \quad c \cdot (1 + \frac{x^2}{2})^{-2} \approx \frac{1}{x^4} \text{ za velike } x$$

$$\text{za } n \geq 3 \text{ je } D(X) = \frac{n}{n-2} > 1$$

Leta 1908 jo je odkril W.S. Gosset, statistik v pivovarni guinness v Dublinu. Student je njegov prevdonim.

Pri normalni porazdelitvi slučajne spremenljivke $X \sim N(\mu, \sigma)$ je vzorčno povprečje \bar{X} porazdeljeno $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, torej je $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ porazdeljena $N(0, 1)$. Če poznamo σ , potem bomo znali povedati, kako dobra ocena za μ je \bar{X} (\rightarrow intervali zaupanja).

Kako ravnati, če σ ne poznamo?

Lahko jo ocenimo s $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$, tako da potem vzorčna statistika $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{n}$ ni več porazdeljena po $N(0, 1)$, niti približno normalna, razen če je n velik in je s potem skoraj konstanta σ .

Kako je porazdeljena vzorčna statistika T ?

Ker je $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, je $\frac{Z}{T} = \frac{S}{\sigma} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}$, torej je $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}}$

Izkaže se, da sta $Z \sim N(0, 1)$ in $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Od tod lahko izračunamo, da ima T Studentovo porazdelitev z $n-1$ prostorskimi stopnjami:

$$p_T(t) = \frac{1}{(n-1)B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

1.3 Metode za pridobivanje cenilk

1.3.1 Metoda momentov

Definicija 1.8 (Vzročni moment). Naj bo $(X_1, X_2 \dots X_n)$ vzorec velikosti n , torej $X_1 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene kot slučajna spremenljivka X . Začetni moment reda k je $z_k = E(X^k)$. Definiramo k -ti vzročni moment $z_k := \frac{X_1^k + \dots + X_n^k}{n}$. Le ta je nepristranska cenilka za z_k : $E(Z_k) = \frac{1}{n}(E(X_1^k) + \dots + E(X_n^k)) = z_k$. Z_k je tudi dosledna cenilka za z_k .

Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametrov $\xi_1 \dots \xi_n$: $p(X; \xi_1 \dots \xi_m)$. Naj odstavljajo začetni momenti $z_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x; \xi_1 \dots \xi_n) dx$, $k = 1, 2 \dots m$. Denimo, da iz teh m enačb lahko izrazimo parametre: $\xi_k = \phi_k(z_1, z_2 \dots z_m)$, $k = 1 \dots m$ za neko funkcijo ϕ_k . Potem je $c_k := \phi_k(z_1 \dots z_m)$ cenilka za parameter ξ_k , $k = 1 \dots m$.

Primer. Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$, kjer sta μ in σ neznana parametra. Potem je $z_1 = E(X) = \mu$, $z_2 = E(X^2) = E(X^2) - (E(X))^2 + (E(X))^2 = D(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2$ ($m = 2$)

Iz teh dveh enačb izrazimo parametra μ in σ : $\mu = z_1$, $\sigma^2 = z_2 - \mu^2 = z_2 - z_1^2$. Cenilka za μ je $Z_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, cenilka za σ^2 je $Z_2 - Z_1^2 = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} - \bar{X}^2$. To je enako

$$\begin{aligned} S_0^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \end{aligned}$$

Torej bodimo že znani cenilke za parametra μ in σ^2

Primer. Naj bo X porazdeljena enakomerno na $[a, b]$, kjer sta a in b neznana parametra. Iščemo cenilki za a in b . Po metodi momentov moramo izračunati 2 začetna momenta

$$\begin{aligned} z_1 &= E(X) = \frac{a+b}{2} \\ z_2 &= E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; a, b) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

Iz 1. enačbe dobimo $b = 2z_1 - a$, kar vstavimo v 2. enačbo

$$\begin{aligned} 3z_2^2 &= b^2 + ab + a^2 = 4z_1^2 - 4z_1a + a^2 + 2az_1 - a^2 + a^2 \\ \implies 3z_2 &= 4z_1^2 - 2z_1a + a^2 \\ a^2 - 2az_1 + (4z_1^2 - 3z_2) &= 0 \\ D &= 4z_1^2 - 4(4z_1^2 - 3z_2) = 12(z_2 - z_1^2) \\ a_{1,2} &= \frac{1}{2}(2z_1 \pm \sqrt{D}) = z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} = z_1 \pm \sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \end{aligned}$$

Ker je $a < b$, je torej

$$\begin{aligned} a &= z_1 - \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \\ b &= z_1 + \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \end{aligned}$$

Cenilka za a je

$$A := Z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{Z_2 - Z_1^2} \quad A := Z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{Z_2 - Z_1^2} = Z_1 - S_0\sqrt{3} \text{ po prejšnjem primeru } = \bar{X}$$

Cenilka za b je $B = \bar{X} + S_0\sqrt{3}$ Denimo da imamo konkreten vzorec $-2, 0, 1, 2, 4$ ($n = 5$)

$$\bar{X} = \frac{-2+0+1+2+4}{5} = 1$$

$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5}((-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2) = 4$ Vzorčna vrednost za A je $\bar{X} - S_0\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} \doteq -2.46$, vzorčna vrednost za B je $\bar{X} + S_0\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} \doteq 4.46$

1.3.2 Metoda maksimalne zanesljivosti (oz. največjega verjetja)

Definicija 1.9 (Funkcija zanesljivosti). Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametra ξ , torej $p(x; \xi)$. Funkcija zanesljivosti (likelihood function) je

$$L(x_1 \cdots x_n; \xi) = p(x_1; \xi) \cdots p(x_n; \xi)$$

Pri danih $x_1 \cdots x_n$ izberimo tak ξ_{max} , da ima L tam maksimum. Ta vrednost parametra je odvisna od $x_1 \cdots x_n$, torej $\xi_{max} = \phi(x_1, x_2 \cdots x_n)$ za neko funkcijo ϕ . Tako dobimo cenilko $c := \phi(x_1 \cdots x_n)$ za parameter ξ

Primer.

$$p(x; \lambda) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

λ je neznan parameter, ki ga ocenjujemo

$$L(x_1 \cdots x_n; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-(x_1 + \cdots + x_n)}$$

Poiskati moramo λ_{max} , pri katerem je dosežen maksimum funkcije L (oz. maksimum funkcije $\ln(L)$)

$$\begin{aligned} \ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda) &= n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda)) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \implies \lambda_{max} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Ker je $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$, je v λ_{max} maksimum.

Cenilka za λ je $c := \frac{1}{\bar{X}}$

Isto cenilko dobimo z metodo momentov:

$$z_1 = E(X) = \frac{0}{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{D.N.}}{=} \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\bar{x}}$$

cenilka za λ je $c := \frac{1}{\bar{X}}$

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ, σ neznana parametra, ki ju ocenjujemo

$$\begin{aligned}
 L(x_1 \cdots x_n; \mu, \sigma) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_n - \mu}{\sigma})^2} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2} \\
 \ln L &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \cdot \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) \\
 \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L &= -\frac{1}{2\sigma^2}(2(x_1 - \mu)(-1) + \cdots + 2(x_n - \mu)(-1)) = \frac{1}{\sigma^2}(x_1 - \mu + \cdots + x_n - \mu) = 0 \\
 x_1 + \cdots + x_n - n\mu &= 0 \implies \mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x} \\
 \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) = 0 \\
 \implies \sigma^2 &= \frac{1}{n}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) = \\
 &= \frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2) = s_0^2
 \end{aligned}$$

Cenilka za μ je \bar{X} , cenilka za σ^2 je $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Primer. $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$, $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} q = 1 - p, p$ neznan parameter

$$\begin{aligned}
 P(X = x) &= p^x (1 - p)^{1-x} \quad x \in \{0, 1\} \\
 L(x_1 \cdots x_n; p) &= p^{x_1} (1 - p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n} (1 - p)^{1-x_n} = \\
 &= p^{x_1 + \cdots + x_n} (1 - p)^{n - (x_1 + \cdots + x_n)} \\
 x &:= x_1 + \cdots + x_n \implies L(x_1 \cdots x_n; p) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x \in \{0, 1 \cdots n\} \\
 \ln L &= x \ln p + (n - x) \ln(1 - p) \\
 \frac{\partial}{\partial p} \ln L &= \frac{x}{p} - \frac{n - x}{1 - p} = 0 \\
 \implies x(1 - p) &= (n - x)p \implies x - xp = np - xp \implies p = \frac{x}{n} = \bar{x}
 \end{aligned}$$

Cenilka za p je $P := \bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

Ker je

$$E(P) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \cdots + E(X_n)) = p$$

je P nepristranska cenilka

Ker je

$$D(P) = \frac{1}{n^2}(D(X_1 + \cdots + D(X_n))) = \frac{1}{n^2}nD(X_1) = \frac{1}{n}D(X_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

po trditvi sledi, da je \bar{X} dosledna cenilka za P

1.4 Intervalsko ocenjevanje parametrov

Definicija 1.10 (Interval zaupanja). Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametra ξ . Interval $[A, B]$ (odvisen le od $(x_1 \cdots x_n)$ in ne do ξ) je interval zaupanja za parameter ξ , pri stopnji tveganja $\alpha \in (0, 1)$, če je

$$P(\xi \in [A, B]) = 1 - \alpha \text{ oz. } P(\xi \notin [A, B]) = \alpha$$

Za α običajno vzamemo vrednost 0.05 (ali 0.01)

A in B sta vzorčni statistiki, $1 - \alpha$ je stopnja zaupanja

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo, μ pa je neznan parameter.

Slučajna spremenljivka $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

Pri dani stopnji tveganja α najdemo $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ oz. $P(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$ oz. $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

Pogoj $|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni: $|\bar{X} - \mu| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} A &:= \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \\ &< \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =: B \end{aligned}$$

$[A, B]$ je interval zaupanja za μ pri stopnji tveganja α

Konkreten zgled: imejmo vzorec velikosti $n = 36$, za katerega izračunamo $\bar{x} = 2.6$ in $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.3$. Predpostavimo, da imamo $X \sim N(\mu, \sigma)$ in predpostavimo, da je $\sigma := s = 0.3$ (kar pogosto naredimo, če je n razmeroma velik). Vzemimo $\alpha = 0.05$. Iz tabele razberemo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, torej $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$. Tedaj je vzorčna vrednost za A enaka

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.6 - 1.96 \frac{0.3}{\sqrt{36}} = 2.5$$

vzorčna vrednost za B je $\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7$

Interval zaupanja za μ je $[2.5, 2.7]$, t.j.

$$P(\mu \in [2.5, 2.7]) = 1 - \alpha = 0.95$$

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ in σ sta neznana.

Iščemo interval zaupanja za μ .

Slučajna spremenljivka $T := \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim Student(n-1)$

Pri danem tveganju α izberemo $t_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ oz.

$$P(T > t_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Sedaj imamo podobno situacijo kot v primeru 1.

Pogoj $|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni

$$A := \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =: B$$

Konkreten zgled: življenska doba žarnic v vzorcu je 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, 9.6 (v dneh), $n = 7$. Predpostavimo normalni model $N(\mu, \sigma)$ z neznanima parametroma μ in σ

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 10.0$$

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.283$$

Vzemimo $\alpha = 0.05$, iz tabele za $Student(5)$ razberemo $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.45$

Vzorčna vrednost za A je $a = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 9.74$

Vzorčna vrednost za B je $b = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 10.26$

Interval zaupanja za μ je $[9.74, 10.26]$, kar zapišemo kot $\mu = 10.0 \pm 0.26$,

Verjetnost, da je $\mu \in [9.74, 10.26]$ je 0.95

Primer. Pri normalni porazdelitvi $N(\mu, \sigma)$ ocenjujemo parameter σ . Vzorčna statistika

$$\chi^2 := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 S$$

je porazdeljena po $\chi^2(n-1)$

Izberimo c_1 in c_2 da je

$$P(\chi^2 < c_1) = \frac{\alpha}{2} = P(\chi^2 > c_2)$$

oz.

$$P(c_1 < \chi^2 < c_2) = 1 - \alpha$$

Pogoj $c_1 < \chi^2 < c_2$ pomeni

$$\begin{aligned}
c_1 &< \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 < c_2 \iff \\
&\iff \frac{1}{c_1} > \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} > \frac{1}{c_2} \iff \\
&\iff B := \frac{(n-1)s^2}{c_1} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{c_2} =: A
\end{aligned}$$

$[A, B]$ je interval zaupanja za σ^2 pri stopnji tveganja α

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{c_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \\
B &= \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2
\end{aligned}$$

Primer. Žarnice iz prejšnjega primera:

$$n = 7, (n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0.481, \alpha = 0.059$$

$$\begin{aligned}
&\chi^2(6) : c_1 = 1.24, c_2 = 14.45 \\
a &= \frac{1}{14.45} 0.481 = 0.033, b = \frac{1}{1.24} 0.481 = 0.388 \\
&\implies P(0.033 < \sigma^2 < 0.388) = 0.95 \\
&P(0.182 < \sigma < 0.623) = 0.95
\end{aligned}$$

$[0.182, 0.623]$ je interval zaupanja za σ pri stopnji tveganja 0.05

Primer. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1 - p, p$ neznan parameter, ki ga ocenjujemo

$(x_1 \cdots x_n)$ vzorec. Potem je $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ in $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ je nepristranska in dosledna cenilka za p . Po CLI (Laplaceovi formuli) je pri velikih n $Z := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$ oz. $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{pq}} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$ oz. $\bar{X} \sim N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$

Pri danem $\alpha > 0$ izberimo $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

Pogoj $|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni $|S - np| < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{npq}$ oz. $|\bar{X} - p| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$

Če na desni strani naredimo aproksimacijo $\bar{X} \approx p$, dobimo pogoj

$$|\bar{X} - p| < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}}$$

od koder dobimo interval zaupanja za p :

$$\begin{aligned} A &:= \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \\ B &:= \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \\ A &< p < B \end{aligned}$$

Primer. Predsedniške volitve v ZDA leta 2000:

Anketa na 2207 volivcev: $n = 2207, \alpha = 0.05 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

George Bush: 47%, Algore: 44%, Ralph Nader: 2%

Določimo intervale zaupanja

$$p_{Bush} = 0.47 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.47(1 - 0.47)}{2207}} \doteq 0.47 \pm 0.02$$

Interval zaupanja za p_{Bush} je $[0.45, 0.49]$

$$p_{Algore} = 0.44 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.44 \cdot 0.56}{2207}} \doteq 0.44 \pm 0.02$$

Interval zaupanja za p_{Algore} je $[0.42, 0.46]$

$$p_{Nader} = 0.02 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{2207}} \doteq 0.02 \pm 0.006$$

Odstopanje:

$$\begin{aligned} z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{n}} &< 2 \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ x(1 - x) &\leq \frac{1}{4} \iff x - x^2 \leq \frac{1}{4} \iff \\ \iff 0 &\leq x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

1.5 Preizkušanje statističnih hipotez

Definicija 1.11 (Statistična hipoteza). Statistična hipoteza je vsaka domneva o porazdelitvi slučajne spremenljivke X na populaciji

Definicija 1.12 (Enostavnost hipoteze). Hipoteza je enostavna, če natanko določa porazdelitev, sicer je sestavljena

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo, μ je neznan parameter

$H(\mu = 0)$ je primer enostavne hipoteze. Če σ ne poznamo, je to sestavljena hipoteza

Vedno preizkušamo eno ničelno hipotezo H_0 nasproti alternativni hipotezi H_1

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo

$H_0(\mu = 0) : H_1(\mu \neq 0)$

Za H_0 običajno vzamemo enostavno hipotezo, za katero upamo, da jo bomo zavrnili

Hipoteza je lahko pravilna ali nepravilna. Ideal je sprejeti pravilno in zavrniti nepravilno. Odločiti se moramo na osnovi vzorca. Če vzorčni podatki preveč odstopajo od hipoteze, potem niso konsistentni z njo oz. so razlike značilne (signifikantne); tedaj hipotezo zavrnemo

Vnaprej določimo stopnjo značilnosti $\alpha \in [0, 1]$, to je verjetnost, da zavrnemo pravilo hipotezo. Običajno je $\alpha = 0.05$ ali $\alpha = 0.01$. Take teste imenujemo testi značilnosti

Primeri testov značilnosti

1.5.1 test Z

$X \sim N(\mu, \sigma)$, σ znan parameter

Ničelna domneva je $H_0(\mu = \mu_0)$, kjer je μ_0 damo realno število

Pri predpostavki $H_0(\mu = \mu_0)$ je $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ porazdeljena $N(0, 1)$, saj je $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Vzemimo $H_1(\mu \neq \mu_0)$. Tedaj H_0 zavrnemo, če vzorčna vrednost za Z leži na kritičnem območju

$$K_\alpha = (-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

kjer je α stopnja značilnosti in $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$