

Verjetnost in statistika - zapiski s predavanj

prof. Drnovška

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2022/23

Kazalo

1	Verjetnost	1
1.1	Neformalni uvod v verjetnost	1
1.2	Aksiomatična definicija verjetnosti	3
1.3	Pogojna verjetnost	7
1.4	Zaporedja neodvisnih ponovitev poskusa	11
1.4.1	Aproksimacijski formuli za $P_n(k)$	11
1.4.2	Poissonova formula	11
1.4.3	Laplaceova lokalna formula	12
1.4.4	Laplaceova integralska formula	13
1.5	slučajne spremenljivke	15
1.5.1	Diskretna slučajna spremenljivka	17
1.5.2	Enakomerna diskretna porazdelitev	18
1.5.3	Binomska porazdelitev	18
1.5.4	Poissonova porazdelitev	18
1.5.5	Geometrijska porazdelitev	19
1.5.6	Pascalova ali negativna binomska porazdelitev	19
1.5.7	Hipergeometrijska porazdelitev	20
1.5.8	Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke	21
1.5.9	Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a, b]$	22
1.5.10	Normalna ali Gaussova porazdelitev	22
1.5.11	Eksponentna porazdelitev	23
1.5.12	Porazdelitev gama	23
1.5.13	Porazdelitev $\chi^2(n)$	24
1.5.14	Cauchyjeva porazdelitev	24
1.6	Slučajni vektorji	25

1.6.1	Diskretne porazdelitve	27
1.6.2	Zvezne porazdelitve	28
1.7	Neovdisnost slučajnih spremenljivk	32
1.8	Funkcije slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev	35
1.9	Matematično upanje oz. pričakovana vrednost	40
1.10	Disperzija, kovarianco in korelacijski koeficient	46
1.11	Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje	51
1.12	Višji momenti in vrstilne karakteristike	54
1.13	Rodovne funkcije	57
1.14	Momentno rodovna funkcija	60
1.15	Šibki in krepki zakon velikih števil	62
1.16	Centralni limitni izrek	65
2	Statistika	68
2.1	Osnovni pojmi	68
2.2	Vzorčne statistike in cenilke	70
2.3	Metode za pridobivanje cenilk	73
2.3.1	Metoda momentov	73
2.3.2	Metoda maksimalne zanesljivosti (oz. največjega verjetja)	75
2.4	Intervalsko ocenjevanje parametrov	77
2.5	Preizkušanje statističnih hipotez	81
2.5.1	test Z	81
2.5.2	test T : $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ neznan	82
2.5.3	Studentov primerjalni test	84

1 Verjetnost

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Začetki verjetnosti (kot vede) so v 17. stoletju, motivacija igre na srečo

17. stol: Fermat, Pascal, Bernoulli

18. in 19 stol: Laplace, Poisson, Čebišev, Markov

20. stol: Kolmogorov (okoli 1930), utemeljitelj sodobnega verjetnostnega računa

Definicija 1.1 (Dogodek). Izvajamo poskus, opazujemo nek pojav, ki se lahko zgodi in ga imenujemo dogodek

Primer. Met poštene kocke, dogodek je npr. pade šestica, ali npr. pade sodo število pik

Definicija 1.2 (Frekvenca). Poskus ponovimo n -krat. Opazujemo dogodek A .

Naj bo $K_n(A)$ frekvenca dogodka A , t.j. število tistih ponovitev, pri katerih se je dogodek A zgodil.

Relativna frekvenca je $f_n(A) = \frac{K_n(A)}{n} \in [0, 1]$

Dokazati je mogoče, da zaporedje $\{f_n(A)\}$ konvergira, recimo h $p \in [0, 1]$.

Statistična definicija verjetnosti: $P(A) := p$.

Pogosto verjetnost lahko določimo vnaprej:

Klasična definicija verjetnosti: $P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov za dogodek } A}{\text{število vseh izidov}}$ pri pogoj, da imajo vsi izidi enake možnosti

Primer. met kocke:

$$P(\text{pade šestica}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{pade sodo število pik}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Primer. Kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh kock znaša vsota pik 7?

Možne vsote: 2, 3, 4, ..., 7, ..., 12: 11 možnosti

Ali je $P(\text{vsota } 7) = \frac{1}{11}$? Ne, ker te vsote nimajo enakih možnosti:

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 = 1 + 2$$

Vsi možni izidi so $\{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\} = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$

$$(1, 1) \quad (1, 2) \quad \dots \quad (1, 6)$$

$$(2, 1) \quad (2, 2) \quad \dots \quad (2, 6)$$

\vdots

$$(6, 1) \quad (6, 2) \quad \dots \quad (6, 6)$$

$$P(\text{vsota } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Če je vseh izidov neskončno, si lahko pomagamo z geometrijsko definicijo verjetnosti

Primer. Osebi se dogovorita za sestanek med 10. in 11. uro; čas prihoda je slučajen. Vsak čaka največ 20 minut, najdlje do 11. ure; če v tem času drugega ni, odide. Kolikšna je verjetnost srečanja?

Začnimo čas šteti ob 10. uri. Naj bo x čas prihoda 1. osebe, y pa čas prihoda druge osebe

Možni izidi so kvadrat $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$

Ugodni izidi so $|x - y| \leq \frac{1}{3}$

$$1. \ x \geq y : x - y \leq \frac{1}{3} \text{ oz. } x - \frac{1}{3} \leq y$$

$$2. \ x \leq y : y - x \leq \frac{1}{3} \text{ oz. } y \leq x + \frac{1}{3}$$

$$P(\text{srečanje}) = \frac{\text{ploščina označenega lika}}{\text{ploščina kvadrata}} = \frac{1 - (\frac{2}{3})^2}{1} = \frac{5}{9}$$

Primer. Slučajno razporedimo n kroglic v m posod, kjer je $m > n$. Kolikšna je verjetnost, da so vse kroglice v prvih n posodah, v vsaki ena?

Obravnavajmo 3 variante:

1. kroglice razlikujemo

Vsi izidi: $m \cdot m \cdots m = m^n$ variacije

Ugodni izidi: $n \cdot (n - 1) \cdots 1 = n!$ permutacija

$$\implies P(A) = \frac{n!}{m^n}$$

2. kroglic ne razlikujemo

n kroglic, $m - 1$ črtic $\implies (m + n - 1)$ mest

Vsi izidi: $\binom{m+n-1}{n}$ kombinacije s ponavljanjem

Ugodni izidi: 1

$$P(A) = \frac{1}{\binom{m+n-1}{n}}$$

3. kroglic ne razlikujemo, v vsaki posodi je kvečjemu ena

Število vseh izidov je $\binom{m}{n}$

Ugoden izid je samo eden

$$\text{Torej je } P(A) = \frac{1}{\binom{m}{n}}$$

V kvantni mehaniki so kroglice različni delci, posode so energetska stanja

V primeru (a) imamo Maxwell-Boltzmanovi statistiki, velja za molekule plina

V primeru (b) imamo Bose-Einsteinovo statistiko, velja za bozone (npr. fotoni)

V primeru (c) imamo Fermi-Diracovo statistiko, velja za fermione (npr. elektroni); zanje velja Diracovo izključitveno načelo: v vsakem stanju je največ en delec

1.2 Aksiomatična definicija verjetnosti

Kolmogorov (okoli 1930)

Definicija 1.3 (Dogodek). Imamo prostor vseh dogodkov Ω (možna oznaka je G). Dogodki so nekatere (ne nujno vse) podmnožice $A \subseteq \Omega$

Primer. Met kocke: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dogodki so vse podmnožice, $\{6\} \cdots$ dogodek, da pade šestica, $\{2, 4, 6\} \cdots$ dogodek, da pade sodo število pik

Računanje z dogodki

1. Vsota dogodkov oz. unija dogodkov: $A + B$ oz. $A \cup B$: dogodek, da se zgodi vsaj eden od A in B
2. Produkt dogodkov oz. presek dogodkov: $A \cdot B$ oz. $A \cap B$: dogodek, da se zgodita oboje dogodka A in B
3. Nasprotni dogodek oz. komplement dogodka: $\bar{A} = A^C$

Pravila za računanje z dogodki:

- idempotentnost: $A \cup A = A = A \cap A$
- komutativnost: $A \cap B = B \cap A$ in $A \cup B = B \cup A$
- asociativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributivnost: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ oz. $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$, $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
- deMorganova zakona: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
še več: $(\cup_{i \in I} A_i)^C = \cap_{i \in I} A_i^C$, $(\cap_{i \in I} A_i)^C = \cup_{i \in I} A_i^C$

Definicija 1.4 (σ -algebra). Neprazna družina podmnožic dogodkov F v Ω je σ -algebra, če velja:

1. $A \in F \implies A^C \in F$ (zaprtost za komplement)
2. $A_1, A_2, \dots \in F \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (zaprtost za števne unije)

Če v 2) zahtevamo manj:

$A, B \in F \implies A \cup B \in F$ (šibkejši pogoj) pravimo, da je F algebra

V algebri imamo zaprtost za končne unije, t.j. $A_1 \cdots A_n \in F \implies \cup_{i=1}^n A_i \in F$ (zaradi indukcije). Ker je $\cap_i A_i^C = (\cup_i A_i)^C$ (deMorgan), je algebra zaprta za končne preseke, σ -algebra pa za števne preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^C$, je algebra zaprta za razlike dogodkov.

Vsaka algebra vsebuje $\{\emptyset, \Omega\}$: ker je neprazna, obstaja dogodek $A \in F$, potem je $A^C \in F$ in zato je

$$\Omega = A \cup A^C \in F, \emptyset = A \cap A^C \in F$$

Najmanjša (σ) -algebra je $F = \{\emptyset, \Omega\}$, največja (σ) -algebra je potenčna množica $P(\Omega)$

Primer. Izberimo $\emptyset \neq A \subsetneq \Omega$. Najmanjša σ -algebra, ki vsebuje $\{1\}, \{2\}, \{3\} \dots$ je $P(\mathbb{N})$, saj je $A = \cup_{k \in A} \{k\}$ za $\forall k \subseteq \mathbb{N}$ (končna sli števna unija)
Najmanjša algebra F , ki vsebuje $\{1\}, \{2\}, \{3\} \dots$ je enaka algebri

$$g = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ je končna ali } A^C \text{ je končna}\}$$

Dokazujemo g je algebra:

1. zaprtost za komplemente: $A \in g \implies$

(a) bodisi A je končna množica $\implies A = (A^C)^C \implies A^C \in g$
(zaprtost za komplement)

(b) bodisi je A^C končna množica $\implies A^C \in g$

2. $A, B \in g \xrightarrow{?} A \cup B \in g$

(a) $A \cup B$ je končna $\implies (A \cup B) \in g$ (vse končne množice)

(b) $A \cup B$ ni končna \implies vsaj ena izmed A in B ni končna, recimo A je neskončna.

Toda $A \in G \implies A^C$ je končna množica.

Ker je $(A \cup B)^C \subseteq A^C$ in A^C je končna, je $(A \cup B)^C$ tudi končna množica, torej $A \cup B \in g$

$A \in g$:

- A je končna: $A = \cup_{k \in A} \{k\} \in F$ (končna unija)
- A^C je končna: $A^C = (\cup_{k \in A^C} \{k\})^C \in F$ (končna unija)

$$\implies g \in F$$

Ker je F najmanjša algebra, ki vsebuje $\{1\}, \{2\} \dots$, je tukaj enačaja, torej $g = F$

Ker npr. množica sodih števil ni v $g \in F$, je $g \notin P(\mathbb{N})$, torej g ni σ -algebra

Definicija 1.5 (Nezdružljivost dogodkov). Dogodka A in B sta nezdružljiva ali disjunktna, če je $A \cap B = \emptyset$

Definicija 1.6 (Popoln sistem dogodkov). Zaporedje $\{A_i\}_i$ (končno ali števno mnogo) je popoln sistem dogodkov, če $\Omega = \cup_i A_i$ in $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$

Definicija 1.7 (Verjetnost). Naj bo F σ -algebra na Ω . Verjetnost na (Ω, F) je preslikava $P : F \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostmi:

1. $P(A) \geq 0 \forall A \in F$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1, A_2 \dots$ velja

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

števna aditivnost (verjetnostne preslikave)

Lastnosti preslikave P :

1. $P(\emptyset) = 0$

Dokaz. v 3) vstavimo $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$:

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset) = k \cdot P(\emptyset) \implies \\ \implies (k-1)P(\emptyset) &= 0 \implies P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

■

2. P je končno aditivna, t.j. za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1 \dots A_n$ velja

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Dokaz. v 3) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$:

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \text{ (zaradi } P(\emptyset) = 0 \text{)}$$

■

3. P je monotona, t.j. iz $A \subseteq B$ ($A, B \in F$) sledi $P(A) \subseteq P(B)$, še več:
 $A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Dokaz. Ker je $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, je po b) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ ■

4. $P(A^C) = 1 - P(A)$ za $A \in F$

Dokaz.

$$\begin{aligned} B = \Omega &\implies P(A^C) = P(\Omega \setminus A) = \\ &\stackrel{c)}{=} P(\Omega) - P(A) \stackrel{2)}{=} 1 - P(A) \end{aligned}$$

■

5. P je zvezna, t.j.

(a) iz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots A_i \in F$ sledi $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$

(b) iz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots B_i \in F$ sledi $P(\cap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i)$

Definiramo

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 \\ C_i &= A_i - A_{i-1} \text{ za } i \geq 2 \end{aligned}$$

Potem $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$ in $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$
Torej imamo

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\cup_{i=1}^{\infty} C_i) = \\ &\stackrel{3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(C_i) = \\ &\stackrel{b)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i) \end{aligned}$$

Dokaz. Dokazujemo ii): iz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ sledi $B_1^C \subseteq B_2^C \subseteq \dots$ in zato po (i)

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i^C) \stackrel{a)}{=} 1 - \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i)$$

Toda

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = P((\cap_{i=1}^{\infty} B_i)^C) \stackrel{d)}{=} 1 - P(\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

Od tod sledi zelena enakost

$$P(\cap_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(B_i)$$

■

(Ω, F, P) verjetnostni prostor

Primer. (končni ali števeni verjetnostni prostor)

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ končna ali števna množica, paroma različni,

$F = P(\Omega)$, $A = \cup_{i \in A} \{w_i\}$ končna ali števna unija

$\{w_1\}, \{w_2\}, \dots$ so popoln sistem dogodkov

če je $p_i := P(\{w_i\})$, je $P(A) = \sum_{i:w_i \in A} p_i$ in $\sum_i p_i = 1 = P(\Omega)$

Poseben primer: Ω ima n elementov in $p_i = \frac{1}{n}$, $P(A) = \frac{\text{moč}(A)}{n}$

To je klasična definicija verjetnosti

(Ω, Φ, P)

Primer. (Nestevni neskončni verjetnostni prostor)

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

$\Phi :=$ najmanjša σ -algebra, ki vsebuje vse odprte pravokotnike $(a, b) \times (c, d)$, $a, b, c, d \in (0, 1)$

npr. elipse: $\frac{1}{n}$ radij, za $\forall n$ vzamemo kvadrate v elipsi, izberemo unijo

$=$ najmanjša σ -algebra, ki vsebuje vse zaprte pravokotnike $[a, b] \times [c, d]$, $a, b, c, d \in [0, 1]$ - Borelova σ -algebra

Izkaže se, da $\Phi \neq P(\Omega)$

Verjetnost P definiramo na pravokotnikih s $P((a, b) \times (c, d)) = (b - a)(d - c)$

Ni lahko videti, da je to možno razširiti do števno aditivne preslikave na $P(\Omega)$

Verjetnostna preslikava P (na Φ) se imenuje Lebesgueova mera

To je geometrijska definicija verjetnosti:

$$\square = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \times (c - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n})$$

1.3 Pogojna verjetnost

Definicija 1.8 (Pogojna verjetnost). Fiksirajmo dogodek B s $P(B) > 0$.

Pogojna verjetnost dogodka A pri pogoju B je

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Primer. V posodi sta 2 beli in ena črna kroglica. Slučajno izberemo eno kroglico, jo vrnemo v posodo in potem ponovno izberemo kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo v drugo izbrali belo kroglico, če smo v prvo izbrali belo

kroglico? $\Omega = \begin{matrix} B_1 B_1 & B_1 B_2 & B_1 \check{C} \\ B_2 B_1 & B_2 B_2 & B_2 \check{C} \\ \check{C} B_1 & \check{C} B_2 & \check{C} \check{C} \end{matrix}$

$$P(\text{prvič bela}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{drugič bela} \mid \text{prvič bela}) = \frac{P(\text{prvič in drugič bela})}{P(\text{prvič bela})} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

Iz definicije sledi $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$

Za poljubne dogodke A, B, C velja

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cap C)) &= P(B \cap C) \cdot P(A \mid B \cap C) = \\ &= P(C) \cdot P(B \mid C) \cdot P(A \mid B \cap C) \end{aligned}$$

oz. "lepše"

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

To posplošimo na n dogodkov $A_1, A_2 \dots A_n$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \dots P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \\ &= P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i \mid \cap_{j=1}^{i-1} A_j) \end{aligned}$$

Desna stran:

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

Imejmo poskus v dveh korakih (fazah). V 1. koraku se zgodi natanko en dogodek iz popolnega sistema dogodkov $H_1, H_2 \dots$ (končno/števno mnogo). V drugem koraku nas zanima dogodek A . Izrazimo $P(A)$ z verjetnostmi $P(H_1), P(H_2 \dots)$ in $P(A \mid H_1), P(A \mid H_2) \dots$.

Ker je $A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_i H_i) = \cup_i (A \cap H_i)$ in ker so $\{A \cap H_i\}_i$ paroma nezrdužljivi dogodki (zaradi H_i), je

$$P(A) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

To je formula o popolni verjetnosti

Primer. Na srečolovu je n srečk, od tega je m dobitnih ($m < n$). Ali imamo pred začetkom srečolova večje možnosti za dobiček, če izbiramo prvi ali drugi?
 H_1 : prvi dobi, H_2 : prvi ne dobi, A : drugi zadane

$$\begin{aligned} P(\text{prvi dobi}) &= \frac{m}{n} \\ P(\text{drugi dobi}) &= P(\text{prvi dobi}) \cdot P(\text{drugi dobi} \mid \text{prvi dobi}) + \\ &+ P(\text{prvi ne dobi}) \cdot P(\text{drugi dobi} \mid \text{prvi ne dobi}) = \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{m}{n-1} = \dots = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Pri dvofaznem poskusu nas zanima

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum_i P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}$$

- Bayesova formula

Primer. Test s poligrafom (= detektor laži)

Resnicoljub opravi test s poligrafom z verjetnostjo 0.95. Z enako verjetnostjo poligraf prepozna lažnivca. Izmed 1000 oseb, med katerimi je natanko en lažnivec, slučajno izberemo eno osebo, katero poligraf proglasi za lažnivca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je ta oseba res lažnivec?

Naj bo L dogodek, da je oseba lažnivec.

Naj bo L_p dogodek, da poligraf za osebo pravi, da je lažnivec. Potem je

$$\begin{aligned} P(L_p \mid L) &= 0.95 \text{ in } P(L_p^C \mid L^C) = 0.95 \text{ oz.} \\ P(L_p \mid L^C) &= 0.05 \\ P(L) &= 0.001 \end{aligned}$$

Iščemo verjetnost $P(L \mid L_p)$

$H_1 = L, H_2 = L^C, A = L_p$

$$\begin{aligned} P(L \mid L_p) &= \frac{P(L) \cdot P(L_p \mid L)}{P(L) \cdot P(L_p \mid L) + P(L^C) \cdot P(L_p^C \mid L^C)} = \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.95}{0.001 \cdot 0.95 + 0.999 \cdot 0.05} = \frac{95}{5050} \doteq 0.02 = \frac{1}{50} \end{aligned}$$

Matematično ekvivalenten problem je presejalni test, npr. program DORA. (Pogojna) verjetnost, da je oseba bolna, če je test pozitiven, je majhna.

Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Če je $P(B) > 0$, potem lahko ta pogoj zapišemo kot $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A | B)$

Definicija 1.9 (Neodvisnost). A in B sta neodvisna, če $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dogodki $\{A_i\}_i$ so neodvisni, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_n}$ velja

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n})$$

Če zahtevamo le za $n = 2$, t.j. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, $i \neq j$, tedaj so dogodki paroma neodvisni

Očitno iz neodvisnosti sledi paroma neodvisnost. Obratno ne velja

Primer.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, P(\{k\}) = \frac{1}{4} \text{ za } k = 1, 2, 3, 4 \text{ npr. met tetraedra}$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \{1\}$$

$$\implies P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$\implies A, B, C \text{ so paroma neodvisni}$$

$$A \cap B \cap C = \{1\}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$\implies \text{niso neodvisni}$$

Trditev 1.10. Naj bosta A in B neodvisna dogodka. Potem sta neodvisna tudi A in B^C . Prav tako tudi A^C in B ter A^C in B^C (komplementiranje ohranja neodvisnost)

Dokaz. Ker je $A \cap B^C = A \setminus (A \cap B)$ je

$$P(A \cap B^C) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$\stackrel{A, B \text{ neodvisna}}{=} P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^C)$$

podobno za ostale kombinacije ■

1.4 Zaporedja neodvisnih ponovitev poskusa

Definicija 1.11. Imejmo zaporedje n neodvisnih ponovitev poskusa, določenega v verjetnostnem prostoru (Ω, Φ, P) , v katerem je možen A s $P(A) = p \in (0, 1)$. Potem je $q := P(A^C) = 1 - p$

Z $A_n(k)$ označimo dogodek, da se v k ponovitvah poskusa A zgodi natanko n -krat, $k = 0, 1, \dots, n$

Pokažimo, da je njegova verjetnost $P_n(k) := P(A_n(k)) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ - Bernoullijeva formula

$A_n(k)$ je disjunktna unija $\binom{n}{k}$ dogodkov, da se A zgodi na predpisanih k mestih, A^C pa na preostalih $(n - k)$ mestih. Verjetnost le teh je produkt p -jev in q -jev: $p^k q^{n-k}$. Od tod sledi Bernoullijeva formula

Primer. Kaljivost semen je 95%. Kolikšna je verjetnost, da izmed 1000 semen vzkali točno 950 semen?

A = seme ne vzkali

$$P(A) = p = 0.05, q = 0.95$$

$$P_{1000}(50) = \binom{1000}{50} 0.05^{50} \cdot 0.95^{950} \doteq 0.05779$$

Brez računalja je to težko izračunati tudi če uporabimo Stirlingovo formulo na $n!$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Tukaj \sim pomeni: $a_n \sim b_n$ če $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Torej je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 1$

1.4.1 Aproksimacijski formuli za $P_n(k)$

1.4.2 Poissonova formula

Če je n velik in k majhen, je $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, kjer je $\lambda = np$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
 P_n(k) &\stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
 &= \frac{\lambda}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \approx \\
 &\frac{n-i}{n} \rightarrow 1, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1 \\
 &\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

■

Primer. Kaljivost semen

$$\begin{aligned}
 P_{1000}(50) &\doteq \frac{50^{50}}{50!} e^{-50} = \frac{1}{50!} \left(\frac{50}{e}\right)^{50} = \\
 &\stackrel{\text{Stirling}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi 50}} = \frac{1}{10\sqrt{\pi i}} \doteq 0.05642
 \end{aligned}$$

1.4.3 Laplaceova lokalna formula

Če je n velik, potem je $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$

Kasneje (2. semester) bomo dokazali splošnejši izrek (centralni limitni izrek)

Narišimo zaporedje $\{P_n(k)\}_{k=0}^n$, n fiksni

$$\begin{aligned}
 P_n(0) &= q^n \\
 P_n(1) &= npq^{n-1} \\
 P_n(2) &= \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}
 \end{aligned}$$

Pomaknjena in raztegnjena funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned}
P_n(k) &\leq P_n(k+1)? \\
\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} &\leq \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1} \\
\frac{q}{n-k} &\leq \frac{p}{k+1} \iff kq + q \leq np - kp \iff \\
&\iff k(p+q) + q \leq np \iff k+q \leq np
\end{aligned}$$

Neenakost se obrne pri $k \approx np$

Primer. Kaljivost semen

$$\begin{aligned}
p = 0.05, q = 0.95, k = 50 &\implies np = 50 \\
P_{1000}(50) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 0.95}} = \frac{1}{\sqrt{95\pi}} \doteq 0.05788
\end{aligned}$$

1.4.4 Laplaceova integralska formula

Zanima nas dogodek $B_n(k_1, k_2)$, da se v n ponovitvah poskusa dogodek A zgodi vsaj k_1 -krat in manj kot k_2 -krat, $0 \leq k_1 < k_2 \leq n+1$

Ker je

$$B_n(k_1, k_2) = A_n(k_1) \cup A_n(k_1 + 1) \cup \dots \cup A_n(k_2 - 1)$$

(disjunktna unija), je

$$P_n(k_1, k_2) := P(B_n(k_1, k_2)) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |A_n(k)| = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} P_n(k)$$

Po Laplaceovi lokalni formuli je

$$\begin{aligned}
P_n(k_1, k_2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} e^{-\frac{(k-nq)^2}{2npq}} = \\
&\doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} e^{-\frac{1}{2}x_k^2} \Delta x_k
\end{aligned}$$

kjer je

$$x_k := \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\implies \Delta x_k := x_{k-1} - x_k = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

To je integralaska (Riemannova) vsota za funkcijo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
 $P_n(k_1, k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2-1} f(x_k) \Delta x_k$ na intervalu $a = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$
 Za velik n torej velja:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Laplaceova integralska formula

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - verjetnostni integral

Vpeljimo verjetnostni integral

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Φ je liha funkcija, zvezno odvedljiva in strogo naraščajoča

$\Phi(0) = 0$ in $\Phi(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Pokažimo, da je $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$. S pomočjo Γ funkcije imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ x &= \frac{t^2}{2}, dx = t dt, dt = \frac{dx}{t} = \frac{dx}{\sqrt{2x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Laplaceova formula se glasi:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Primer. Kaljivost semen

Kolikšna je verjetnost, da vzkali več kot 950 semen v zavojčku s 1000 semeni

A: seme ne vzkali, $p = P(A) = 0.05, q = 0.95, n = 1000 \implies np = 1000$

$$\begin{aligned} P_{1000}(0, 50) &= \Phi\left(\frac{50 - 50}{\sqrt{50 \cdot 0.95}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 50}{\sqrt{50 \cdot 0.95}}\right) \doteq \\ &\doteq \Phi(7.36) \approx 0.500 \end{aligned}$$

- verjetnost, da ne vzkali manj kot 50 semen

1.5 slučajne spremenljivke

Danemu poskusu priredimo določeno številsko količino, katere verjetnost je odvisna od slučajna

Primer.

1. Met kocke, število pik
2. Streljanje v tarčo, razdalja zadetka od središča tarče

Definicija 1.12 (Slučajna spremenljivka). Realna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (Ω, Φ, P) je funkcije $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je za $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ v Φ , se pravi dogodek

Oznaka: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$ (ali $\{X \leq x\}$)

Definicija 1.13 (Porazdelitvena funkcija). Porazdelitvena funkcija $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcija, definirana s predpisom $F_X(x) = P(X \leq x) \equiv P((X \leq x))$

Dogovor: $P((X \leq x)) \leftrightarrow P(X \leq x)$

Lastnosti porazdelitvene funkcije $F_X \equiv F$:

1. $0 \leq F(X) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ (verjetnost)
2. F je naraščajoča funkcija, t.j. iz $x_1 < x_2$ sledi $F(x_1) \leq F(x_2)$

Dokaz. sledi iz $(X \leq x_1) \subseteq (X \leq x_2) \quad /P()$ ■

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Dokaz. limita $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ obstaja, ker je F naraščajoča in navzgor omejena z 1.

Vzemimo strogo naraščajoče zaporedje $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, ki je neomejeno. Potem je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = \\ \cup_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n) &= \Omega : \\ (\subseteq) &: \text{logično} \\ (\supseteq) : \omega \in \Omega &\implies \exists n \in \mathbb{N} : X(\omega) = x_n \\ &\implies \omega \in (X \leq x_n) \\ P \text{ je zvezna} &\stackrel{=}{=} P(\cup_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n)) = P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

Drugo pokažemo podobno (namesto \cup je \cap) ■

4. F je zvezna z desne, t.j. $F(X+) = F(X) \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz. obstoj limite ni problematičen: $F(x+) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x+h) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$, kjer je $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ strogo naraščajoče zaporedje z limito x

$\{(X \leq x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je padajoče zaporedje s presekom

$$\begin{aligned} \{(X \leq x_n)\} &= \cap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\} = \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = (X \leq x) : \\ (\supseteq) &: \text{očitno} \\ (\subseteq) : \omega \in \Omega &\implies \text{za vsak } n \text{ izpolnjeno} \implies \text{lim obstaja} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x+) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = \\ &= P(\cap_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n)) = P(X \leq x) = F(x) \end{aligned}$$

■

5. $F(X-) = P(X < x) \neq F(x)$ v splošnem

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P((X \leq x_2) \setminus (X \leq x_1)) = \\ &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1) \\ P(x_1 < X < x_2) &= P(X < x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2-) - F(x_1) \\ P(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1-) \\ P(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1-) \end{aligned}$$

Opomba. V nekaterih učbenikih je porazdelitvena funkcija definirana z $F(x) = P(X < x)$ - zvezna z leve

Najpomembnejša razreda slučajnih spremenljivk sta

1.5.1 Diskretna slučajna spremenljivka

Definicija 1.14 (Diskretna slučajna spremenljivka). Slučajna spremenljivka $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je diskretno porazdeljena, če je njena zaloga vrednosti končna ali števna množica. Naj bo $\{x_1, x_2, \dots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X .

Vpeljimo verjetnostno funkcijo $p_n := P(X = x_n)$ $n = 1, 2, \dots$. Potem je

$$\sum_n p_n = P(\cup_n (X = x_n)) = P(\Omega) = 1$$

in

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\cup_{n: x_n \leq x} (X = x_n)) = \\ &\text{paroma nezdružljivi dogodki} \\ &= \sum_{n: x_n \leq x} P(X = x_n) = \sum_{n: x_n \leq x} p_n \end{aligned}$$

npr. naj bodo $x_1 < x_2 < x_3$ v zalogi vrednosti slučajne spremenljivke X
 F je odsekoma konstantna

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Pomembnejše diskretne porazdelitve:

1.5.2 Enakomerna diskretna porazdelitev

na n točkah

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Primer. Met kocke, $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

1.5.3 Binomska porazdelitev

$Bin(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, n -krat ponovimo poskus, gledamo dogodek A z verjetnostjo $P(A) = p$, X je frekvenca dogodka A v n ponovitvah

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$
$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Primer. n -krat vržemo kocko. X je frekvenca šestice. $X \sim Bin(n, \frac{1}{6})$

1.5.4 Poissonova porazdelitev

$Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$$

\Rightarrow to je res porazdelitev ($p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$)

Primer. Število klicev v telefonskem omrežju v časovni enoti

Binomska, velik n , majhen $p \Rightarrow$ Poissonova

Lahko modeliramo z binomsko porazdelitvijo $Bin(n, p)$, kjer je n število naročnikov in p verjetnost, da se posameznik odloči za klic v časovni enoti. Ker je n velik in p majhen, je to približno $Poi(\lambda)$, kjer je $\lambda = np$ (v praksi ni za vse ista)

Primer. Število napačnih črk v knjigi
 (Veliko črk v knigi, melo verjetno, da se zmotimo.)
 Lahko modeliramo z $Bin(n, p)$, kjer je n število vseh črk v knjigi, p je verjetnost, da si izberemo napačno črko
 Ker je n velik, p pa majhen, lahko to aproksimiramo s $Poi(\lambda)$, kjer je $\lambda = np$
 Raje vzamemo $Poi(\lambda)$ kot $Bin(n, p)$, ker je preprostejša

1.5.5 Geometrijska porazdelitev

$Geo(p)$, $p \in (0, 1)$

Ponavljamo poskus, v katerem opazujemo dogodek A s $P(A) = p$, $q = 1 - p$.
 ($X = k$) je dogodek, da se A zgodi prvič v k -ti ponovitvi

$$p_k = P(A = k) = p \cdot q^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Primer. Mečemo kocko, X je število metov, da pade šestica prvič. Potem je $X \sim Geo(\frac{1}{6})$

1.5.6 Pascalova ali negativna binomska porazdelitev

$Pas(m, p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$

Ponavljamo poskus, v katerem nas zanima dogodek A s $P(A) = p$. ($X = k$) je dogodek, da se A zgodi m -tič v k -ti ponovitvi poskusa. Torej $Pas(1, p) = Geo(p)$

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \quad k = m, m+1, \dots$$

(A se zgodi $(m-1)$ -krat, \bar{A} pa $(k-m)$ -krat)

DN: Enakost $\sum_{k=m}^{\infty} p_k = 1$ analitično preverimo z $(m-1)$ -kratnim odvajanjem geometrijske vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$$

oz. z direktno uporabo binomske vrste:

$$(1 - q)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} q^j$$

Primer. Mečemo kocko, X je število potrebnih metov, da pade šestica m -krat. Potem je $X \sim Pas(m, \frac{1}{6})$

1.5.7 Hipergeometrijska porazdelitev

$Hip(n; M, N)$, $0 < M < N, n, M, N \in \mathbb{N}, n \leq \min\{M, N - M\}$
V posodi je N kroglic, od tega M belih, ostale črne. Slučajno izberemo n kroglic (brez vračanja). X je število belih kroglic med izbranimi kroglicami. Torej ($X = k$) je dogodek, da je med izbranimi n kroglicami k belih

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1 \dots n$$

$\binom{m}{k} \dots k$ belih
 $\binom{N-m}{n-k} \dots$ ostale črne
 $\binom{n}{N} \dots$ izberemo n izmed N

Ker je $\{(X = k)\}^n$ popoln sistem dogodkov, je jasno, da je $\sum_{k=0}^n p_k = 1$
Torej velja binomska identiteta

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k} = \binom{N}{n}$$

- verjetnostni dokaz

Primer. V ribniku je N rib, od tega M krapov. Ulovimo n rib. Naj bo X število ulovljenih krapov. Potem je $X \sim Hip(n; M, N)$

Če je $n \ll \min\{M, N - M\}$, potem je $Hip(n; M, n) \approx Bin(n, \frac{M}{N})$:

$$p_k = \frac{\frac{M(M-1)\cdots(M_k+1)}{k!} \frac{(N-m)(N-m+1)\cdots(N-m-n+k+1)}{(n-k)!}}{\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}} \approx$$

$$\stackrel{k \leq m}{\stackrel{n \leq N}{\approx}} \frac{\frac{M^k}{k!} \frac{(N-m)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Intuicija: vzemanje kroglic, $n \ll \min\{M, N - M\}$

Če je $n \ll \min\{M, N - M\}$, ne naredimo velike napake, če kroglice vračamo. Tedaj je število belih izvlečenih kroglic binomsko porazdeljeno: $X \sim \text{Bin}(n, \frac{M}{N})$

1.5.8 Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Definicija 1.15 (Zvezna porazdelitev). Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena (zvezna), če obstaja nenegativna integrabilna funkcije p_X , imenovana gostota porazdelitve, da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Analogija z diskretnimi porazdelitvami: $F_X(x) = \sum_{n: X_n \leq x} p_k$, $X : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots \\ p_1 & \cdots \end{pmatrix}$

Tedaj je F_X zvezna funkcija. V točkah, kjer je p_X zvezna, je F_X zvezno odvedljiva in velja $F_X'(x) = p_X(x)$

Ker je $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$, je $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) dt = 1$

Za $x_1 < x_2$ velja

$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2-) - F_X(x_1+) = \int_{-\infty}^{x_2} p_X(t) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} p_X(t) dt$$

Pomembnejše zvezne porazdelitve:

1.5.9 Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a, b]$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{če } a < x < b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{če } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{če } a < x < b \\ 1 & \text{če } x \geq b \end{cases}$$

Primer. Slučajno izberemo X na $[0, 1]$

1.5.10 Normalna ali Gaussova porazdelitev

$N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$N(0, 1)$: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - standardizirana normalna porazdelitev

σ velik:

σ majhen:

Porazdelitvena funkcija:

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \\ u &= \frac{t-\mu}{\sigma}, du = \frac{dt}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 \dots + \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Laplaceova integralaska formula pravi, da je $Bin(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$ za velik n :

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - \frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right)^2$$

Primer. Sistolični krvni tlak

verjetnost, da ima slučajno oseba krvni tlak med 120 in 130 mmHg

1.5.11 Eksponentna porazdelitev

$$Exp(\lambda), \lambda > 0$$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{če } x \geq 0 \\ 0 & \text{če } x \leq 0 \end{cases}$$

Primer. Radioaktivni razpad

$F(x)$ je verjetnost, da se radioaktivni razpad zgodi pred trenutkom $x \in \mathbb{R}^+$

1.5.12 Porazdelitev gama

$$\Gamma(b, c), \quad b, c > 0$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Očitno je $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty p(x) dx &= \frac{c^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{b-1} e^{-cx} dx = \\ t = cx, dt &= c dx \\ &= \frac{c^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty (cx)^{b-1} e^{-cx} c dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(b)} \cdot \Gamma(b) = 1 \end{aligned}$$

- je porazdelitev

1.5.13 Porazdelitev $\chi^2(n)$

(hi-kvadrat), $n \in \mathbb{N}$, n je število prostorskih stopenj

$$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

1.5.14 Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x =$$
$$= \frac{1}{\pi} \arctan x - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Primer. Slučajna spremenljivka, ki ni niti zvezno niti diskretno porazdeljena. Vržemo kovanec, če pade grb, postavimo $X = 1$, če pade cifra, pa naj bo X slučajno izbrano število na $[0, 2]$. Izračunamo porazdelitveno funkcijo:

$$F(x) = P(X \leq x) \stackrel{x \in [0,2]}{=} P(\text{grb}) \cdot P(X \leq x \mid \text{grb}) + P(\text{cifra}) \cdot P(X \leq x \mid \text{cifra})$$

Če je $0 \leq x \leq 1$, potem je

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$$

Če je $1 \leq x \leq 2$, potem je

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{če } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{če } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4} & \text{če } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{če } x \geq 2 \end{cases}$$

Ker F ni zvezna funkcija, X ni zvezno porazdeljena

Ker F ni odsekoma konstantna, X ni diskretno porazdeljena

1.6 Slučajni vektorji

Definicija 1.16 (Slučajni vektor). Naj bo (Ω, Φ, P) verjetnostni prostor. Slučajni vektor je n -terica slučajnih spremenljivk $x = (x_1 \cdots x_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ z lastnostjo, da je množica

$$(X_1 \leq x_1 \cdots X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1 \cdots X_n(\omega) \leq x_n\}$$

dogodek za vse n -terice $x = (x_1 \cdots x_n)$, se pravi v Φ za $\forall x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$

Definicija 1.17 (Porazdelitvena funkcija). Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $X = (X_1 \cdots X_n)$ je funkcija, definirana z

$$F_X(x) = F_{(X_1 \cdots X_n)}(x_1 \cdots x_n) := P(X_1 \leq x_1 \cdots X_n \leq x_n)$$

Torej $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

F_X ima podobne lastnosti kot v primeru $n = 1$

Očitno je $0 \leq F_X(x) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}^n$, glede na vsako spremenljivko je F_X naraščajoča in z desne zvezna, velja še:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{(X_1 \cdots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = 1$$

Definicija 1.18 (Robna porazdelitev). Če pošljemo v ∞ samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno funkcijo slučajnega podvektorja, npr.

$$\lim_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{(X_1 \cdots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = F_{X_1}(x_1)$$

ali pa

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \dots x_n) = F_{X_1 \dots X_{n-1}}(x_1 \dots x_{n-1})$$

Takim porazdelitvam rečemo robne (marginalne) porazdelitve

Oglejmo si dvorazsežni primer ($n = 2$):

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

za $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$(X \leq x, Y \leq y) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}$$

dogodek

Porazdelitvena funkcija $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana z

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &:= P(X \leq x, Y \leq y) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= P(Y \leq y) = F_Y(y) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= P(X \leq x) = F_X(x) \end{aligned}$$

Izrazimo $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$ s porazdelitveno funkcijo $F(X, Y) = F$.

To bo posplošitev formule

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ki smo jo imeli v primeru $n = 1$

$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ slučajni vektor

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P((x, y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])$$

Izrazimo z $F_{(X,Y)} = F$ verjetnost $P(a < X < b, c < Y < d)$. To bo posplošitev formule $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Najprej vzemimo posebni primer:

$$\begin{aligned}
P(a < X \leq b, Y \leq d) &= P((X \leq b, Y \leq d) \setminus (X \leq a, Y \leq d)) = \\
&= P(X \leq b, Y \leq d) - P(X \leq a, Y \leq d) = F(b, d) - F(a, b)
\end{aligned}$$

V splošnem primeru pa imamo

$$\begin{aligned}
P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= P((a < X \leq b, Y \leq d) \setminus (a < X \leq b, Y \leq c)) = \\
&= P(a < X \leq b, Y \leq d) - P(a < X \leq b, Y \leq c) = \\
&\stackrel{\text{fiks. } Y}{=} (F(b, d) - F(a, d)) - (F(b, c) - F(a, c))
\end{aligned}$$

Torej je

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Najpomembnejša razreda večrazsežnih porazdelitev sta

1.6.1 Diskretne porazdelitve

Definicija 1.19. Slučajni vektor $X = (X_1 \cdots X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diskretno porazdeljen, če je njegova zaloga vrednosti končna/števna množica točk v \mathbb{R}^n . Omejimo se na $n = 2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Naj bo $\{x_1, x_2 \cdots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in $\{y_1, y_2 \cdots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke Y . Potem je zaloga vrednosti vektorja (X, Y) vsebovana v $\{(x_i, y_i) : i = 1, 2 \cdots j = 1, 2 \cdots\}$.

Definiramo verjetnostno funkcijo $p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j) i = 1, 2 \cdots j = 1, 2 \cdots$

Ker je $\{(X = x_i, Y = y_j)\}_{ij}$ popoln sistem dogodkov, je $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P(X = x_i) = P(\cup_j (X = x_i, Y = y_j)) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} \quad i = 1, 2 \cdots$$

$$\text{če je } Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}, \text{ je}$$

$$q_j = P(Y = y_j) = P(\cup_i (X = x_i, Y = y_j)) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \quad j = 1, 2 \cdots$$

Primer. Met dveh kock: X število pik na 1. kocki, Y na 2.

1.6.2 Zvezne porazdelitve

Definicija 1.20. Slučajni vektor $X = (X_1 \cdots X_n)$ je zvezno porazdeljen, če obstaja integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, imenovana gostota porazdelitve, da je

$$F_X(x) = F_{(X_1 \cdots X_n)}(x_1 \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(t_1 \cdots t_n) dt_n \text{ za } \forall x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ker je $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_X(x_1 \cdots x_n) = 1$, je

$$\vdots \\ x_n \rightarrow \infty$$

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} p_X(t_1 \cdots t_n) dt_1 \cdots dt_n = 1$$

Za vsako Borelovo množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (najmanjša σ -algebra z vsemi odprtimi pravokotniki) je

$$P(X \in A) \equiv P((x_1 \cdots x_n) \in A) = \int \cdots \int_A p_X(t_1 \cdots t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

Omejimo se na $n = 2$: $F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y p_{(X,Y)}(u, v) dv$

Robni porazdelitvi sta:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \text{(brez utemeljevanja)} \\ &= \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, v) dv \end{aligned}$$

ki ima gostoto

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dy$$

in

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \\ &= \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, v) du \end{aligned}$$

ki ima gostoto

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)dx$$

(ekvivalentno vsoti v diskretnem primeru).

Najpomembnejša dvorazsežna zvezna porazdelitev je normalna:

$$N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho), \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y > 0, \rho \in (-1, 1)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)}$$

(μ_x, μ_y) premik, (σ_x, σ_y) razteg

$$N(0, 0, 1, 1, \rho) : p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}$$

Nivojnice, izohipse se: $x^2 - 2\rho xy + y^2 = c$

- $\rho = 0$: krožnica
- $\rho \in (-1, 1)$: elipsa

Robni porazdelitvi sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy = \dots = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}$$

torej $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$. Podobno $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

Primer. Krvni tlak, X je sistolični, Y je diastolični krvni tlak
 $\mu_x = 120, \mu_y = 75, \rho \doteq 0.7$

Dvorazsežna normalna porazdelitev je poseben primer večrazsežne normalne porazdelitve $N(\mu, A)$, kjer je $\mu = (\mu_1 \cdots \mu_n)^T$ in A pozitivno definitna matrika.

Gostota v točki $x = (x_1 \cdots x_n)^T$ je

$$p(X) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A (x-\mu)}$$

$$(x - \mu)^T A (x - \mu) = \langle A(x - \mu), x - \mu \rangle$$

Za dokaz enakosti

$$\int \cdots_{\mathbb{R}^n} \int p(x) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

izračunajmo integral

$$\int \cdots_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)} dx_1 \cdots dx_n = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

$N(\mu, A)$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivna definitna matrika, t.j. sebi adjungirana matrika, za katero velja

$$x^T A x = \langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$$

V točki $x = (x_1 \cdots x_n)^T$ je

$$p(x) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)}$$

Izračunajmo integral

$$\begin{aligned} & \int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)} dx = \\ & y = x - \mu \implies dy = dx \\ & = \int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}y^T A y} dy \end{aligned}$$

Ker je A pozitivna definitna matrika, obstaja ortogonalna matrika U in diagonalna matrika $D = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$, da je $A = U^T D U$

$$\begin{aligned}
&= \int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}y^T U^T D U y} dy = \\
z &= U y, y = U^T z, dy = |\det U^T| dz = dz \\
&= \int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}z^T D z} dz = \\
&= \int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2)} dz_1 \cdots dz_n = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 z_1^2} dz_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_n z_n^2} dz_n =
\end{aligned}$$

Ker je $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda z^2} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$ - $z \in \mathbb{R}$ - s pomočjo Γ funkcije, Bronsterin, sledi iz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} dx = 1$$

Gostota za $N(0, \sigma)$, $\lambda := \frac{1}{\sigma^2}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1}} \cdots \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

Torej je $\int \underbrace{\cdots}_{\mathbb{R}^n} \int p(x) dx = 1$

Dvoražšnji primer je posebni primer

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \\
\det A &= \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} - \frac{\rho^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}
\end{aligned}$$

$K = A^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ -\rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$ kovariančna matrika (slučajnemu vektorju X, Y)

1.7 Neovdisnost slučajnih spremenljivk

Definicija 1.21 (Neodvisnost). Slučajne spremenljivke $x_1, x_2 \cdots x_n$ v slučajnem vektorju $x = (x_1 \cdots x_n)$ so neodvisne, če je

$$F_X(x_1 \cdots x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n) \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

oziroma

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \cdots X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

oziroma dogodki $(X_1 \leq x_1) \cdots (X_n \leq x_n)$ so neodvisni

Oglejmo si dvorazsežni diskretni primer

Trditev 1.22. Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen vektor:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), p_i = P(X = x_i), q_j = P(Y = y_j)$$

Potem sta X in Y neodvisni $\iff p_{ij} = p_i \cdot q_j \forall i, j$

Dokaz. $F \equiv F_{(X,Y)}$ porazdelitvena funkcija vektorja (x, y)
(\Rightarrow)

$$\begin{aligned} p_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} P(X = x_i, Y = y_j) = \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i, y_j - h < Y \leq y_j) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (F_X(x_i)F_Y(y_j) - F_X(x_i - h)F_Y(y_j) - F_X(x_i)F_Y(y_j - h) - F_X(x_i - h)F_Y(y_j - h)) = \\ &\stackrel{\text{neodv.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (F_X(x_i) - F_X(x_i - h))(F_Y(y_j) - F_Y(y_j - h)) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i) \cdot P(y_j - h < Y \leq y_j) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} P(x_i - h < X \leq x_i) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} P(y_j - h < Y \leq y_j) = \\ &= P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot q_j \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = P(\cup_{i:x_i \leq x} \cup_{j:y_j \leq y} (X = x_i, Y = y_j)) = \\
&\stackrel{\text{disjunktni}}{=} \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) = \\
&\stackrel{\text{predpostavka}}{=} \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} p_i q_j = \\
&= (\sum_{i:x_i \leq x} p_i) (\sum_{j:y_j \leq y} q_j) = \\
&= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)
\end{aligned}$$

■

Torej sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki

Trditev 1.23. Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektore z gostoto $p(x, y)$. Potem sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki $\iff p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ za (skoraj) vse $x, y \in \mathbb{R}$

Dokaz. (ideja): X in Y sta neodvisni, če $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Če parcialno odvajamo po x in po y , dobimo $p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$. Obratno dobimo z integriranjem po x in po y ■

Primer. $(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
&X \sim N(\mu_x, \sigma), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \\
&X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni} \iff \rho = 0 \\
&p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2} = p_X(x) \cdot p_Y(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&N(0, 0, 1, 1, \rho) : x^2 - 2\rho xy + y^2 = c - \text{ovojnica} \\
&\rho = 0 : x^2 + y^2 = c - \text{krožnica}
\end{aligned}$$

Trditev 1.24. Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor. Potem sta X in Y neodvisni $\iff p_{(X,Y)}(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ za neki integrabilni funkciji f in g

Dokaz. (\Rightarrow) jasno na zadnji trditvi
 (\Leftarrow)

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)dy \stackrel{\text{predpostavka}}{=} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \text{ in}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)dx \stackrel{\text{predpostavka}}{=} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Ker je $\iint_{\mathbb{R}^2} p_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1$, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1 \text{ predpostavka}$$

Zato je $p_X(x) \cdot p_Y(y) = f(x) \cdot g(y) = p_{(X,Y)}(x,y)$, kar pomeni neodvisnost po prejšnji trditvi ■

Izrek 1.25. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni \iff za vsaki Borelovi množici $A, B \subseteq \mathbb{R}$ velja

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

t.j. dogodka $(X \in A)$ in $(Y \in B)$ sta neodvisna
 (Borelova σ -algebra: najmanjša σ -algebra z odprtimi množicami)

Dokaz. (\Leftarrow)

$$\begin{aligned} A &= (-\infty, x], B = (-\infty, y] \\ P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \in (-\infty, x], Y \in (-\infty, y]) = \\ &= P(x \in (-\infty, x]) \cdot P(Y \in (-\infty, y]) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ &\implies F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned}$$

(\Rightarrow) izpustimo ■

1.8 Funkcije slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev

Naj bo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $Y := f \circ X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tudi slučajna spremenljivka.

$f \circ X = f(X)$
saj je množica

$$\begin{aligned}(Y \leq y) &\equiv \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \leq y\} = \\&= \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in (-\infty, y]\} = \\&= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}((-\infty, y])\} = \\&= \{X \in f^{-1}((-\infty, y])\}\end{aligned}$$

dogodek, ker je $f^{-1}((-\infty, y])$ zaprta množica, torej Borelova.
 y je funkcija slučajne spremenljivke X .

Naj bo f strogo naraščajoča funkcija z zalogo vrednosti (a, b) , kjer je $-\infty \leq a < b \leq \infty$

Vzemimo $y \in (a, b)$. Potem je

$$\begin{aligned}F_Y(y) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y \leq y) = P(f \circ X \leq y) = \\&= P(X \leq f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y))\end{aligned}$$

kjer je $f^{-1} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ inverzna funkcija k funkciji f

če je $y \geq b$ je $F_Y(y) = 1$

če je $y \leq a$ je $F_Y(y) = 0$

Če je še f zvezno odvedljiva in X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, potem je y tudi zvezno porazdeljena z gostoto Φ

$$\Phi_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))'$$

za $y \in (a, b)$, če je $y \notin (a, b)$, je $p_Y(y) = 0$

Podobno ravnamo v primeru, ko je f strogo padajoča $((a, b)$ zaloga vrednosti)

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(f \circ X \leq y) = P(X \geq f^{-1}(y)) = \\ = 1 - P(X \leq f^{-1}(y)) = 1 - F_X(f^{-1}(y)-)$$

Primer. $X \sim N(0, 1)$, $f(x) = kx + n$, $k \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$
Vzemimo, da je $k > 0$. Definiramo $Y = f(X)$. Tedaj je

$$p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-n}{k}\right) \cdot \frac{1}{k}$$

po formuli (prej).

$$y = kx + n \implies x = \frac{y-n}{k} = f^{-1}(y)$$

To je enako

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-n}{k}\right)^2} \frac{1}{k}$$

torej je $Y \sim N(n, k)$

Če je $k < 0$, potem je $p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-n}{k}\right) \cdot \frac{1}{-k}$, torej za poljuben $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $Y \sim N(n, |k|)$

Primer. $X \sim N(0, 1)$, $f(x) = x^2$. Tedaj ima $Y = f(X) = X^2$ porazdelitveno funkcijo

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$$

za $y \leq 0$ in

$$F_Y(y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{\text{soda}}{\text{under}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

za $y \geq 0$

Gostota za Y pa je

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= F'_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}
\end{aligned}$$

kar je $\chi^2(1)$, saj je

$$\chi^2(n) : p_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

za $x > 0$, sicer $p_X(x) = 0$

Trditev 1.26. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, f in $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji, potem sta tudi $U = f(X)$ in $V = g(Y)$ neodvisni slučajni spremenljivki

Dokaz.

$$\begin{aligned}
F_{(U,V)}(u,v) &= P(f(x) \leq u, g(y) \leq v) = P(X \in f^{-1}((-\infty, u]), Y \in g^{-1}((-\infty, v])) = \\
&= f^{-1}((-\infty, u]) \text{ in } g^{-1}((-\infty, v]) \text{ zaprti} \implies \text{Borelovi} \\
&\stackrel{\text{Borelov izrek}}{=} P(X \in f^{-1}((-\infty, u])) \cdot P(Y \in g^{-1}((-\infty, v])) = \\
&= P(f(X) \leq u) \cdot P(g(Y) \leq v) = F_U(u) \cdot F_V(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

■

Izrek 1.27. Naj bo $X = (X_1 \cdots X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ slučajni vektor in $f = (f_1 \cdots f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $Y = f \circ X \equiv f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tudi slučajni vektor (brez dokaza).

Y je funkcija slučajnega vektorja X in ima m komponent $Y = (Y_1 \cdots Y_m)$. Porazdelitvena funkcija za Y_j , ($j = 1, 2 \cdots m$) je

$$F_{Y_j}(y) = P(f_i(x_1 \cdots x_n) \leq y) = P((x_1 \cdots x_n) \in f_j^{-1}((-\infty, y])) \text{ množica v } \mathbb{R}^n$$

Če je $X = (X_1 \cdots X_n)$ zvezno porazdeljena, je torej

$$F_{Y_j}(y) = \int \underbrace{\cdots}_{f^{-1}((-\infty, y])} \int p_X(x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Primer. $n = 2, m = 1, (x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno porazdeljen

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(f(x, y) \leq z) = P((X, Y) \in f^{-1}((-\infty, z])) = \\ &= \iint_{x+y \leq z} p_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p_{(X,Y)}(x, y) dy \end{aligned}$$

od tod sledi, da je gostota slučajne spremenljivke Z

$$p_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, z-x) dx$$

Če sta še X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx - \text{konvolucija funkcij } p_X \text{ in } p_Y$$

Vzemimo posebni primer $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, torej

$$p_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ za } x > 0 \text{ in } 0 \text{ sicer}$$

za $p_Y(y)$ podobno.

Po zadnji formuli je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx = 0$ za $z \leq 0$, sicer je za $z > 0$

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{z-x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\ x &= tz \quad dx = z dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{m}{2}-1+\frac{n}{2}-1+1} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\
&\rightarrow B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m+n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{m+n}{2}-1}
\end{aligned}$$

Torej $X + Y \sim \chi^2(m+n)$
Dokazali smo

Trditev 1.28. Naj bosta neodvisni slučajni spremenljivki $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$. Potem je $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

Posledica 1.29. Če so X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene $N(0, 1)$, potem je $Y := X_1^2 + \dots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$

Dokaz. Vemo, da je $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ in da so X_1^2, \dots, X_n^2 neodvisne spremenljivke. Potem je po trditvi + indukciji $Y \sim \chi^2(1 + \dots + 1) = \chi^2(n)$ ■

Oglejmo si transformacijo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (u, v)$, ki preslika zvezno porazdeljen slučajni vektor (x, y) v zvezno porazdeljen slučajni vektor (u, v) , torej $U = u(x, y), V = v(x, y)$

Označimo še $A_{u,v} = (-\infty, u] \times (-\infty, v]$

Potem je

$$F_{(U,V)}(u, v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(U,V)}(s, t) ds dt$$

Pot drugi strani pa je

$$F_{(U,V)}(u, v) = P((U, V) \in A_{u,v}) = P((X, Y) \in f^{-1}(A_{u,v})) = \iint_{f^{-1}(A_{u,v})} p_{(X,Y)}(x, y) dx dy$$

Privzemimo še, da je f zvezno odvedljiva bijekcija. Potem je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \rightarrow (x, y)$ tudi zvezno odvedljiva. Z zamenjavo spremenljivk $x = X(u, v), y = Y(u, v)$ v zadnjem integralu dobimo

$$F_{(U,V)}(u, v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(X,Y)}(x(s, t), y(s, t)) \cdot |J(s, t)| dx ds$$

kjer je

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} (u, v)$$

Jacobijeva determinanta.

Zaradi 1.8 imamo torej $p_{(U,V)}(u, v) = p_{(X,Y)}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)|$

Oglejmo si poseben primer

Primer. $U = X, V = v(x, y)$ oz $X = U, Y = y(u, v)$

Tedaj je $p_{(U,V)}(u, v) = p_{(X,Y)}(u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right|$

Gostota spremenljivke V je $\int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right| dv = p_V(v)$

Pišimo $Z = V$, torej je $Y = y(x, z)$, saj je $U = X$

Potem prepišemo $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, y(x, z)) \left| \frac{\partial y}{\partial z}(x, z) \right| dx$

Primer.

1. $Z = X + Y \implies Y = Z - X$, torej je $y(x, z) = z - x$, $\frac{\partial y}{\partial z}(x, z) = 1$

$$p_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, z - x) \cdot 1 dx$$

2. $Z = X \cdot Y \implies Y = \frac{Z}{X}$, torej je $y(x, z) = \frac{z}{x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}(x, z) = \frac{1}{x}$

$$p_{X \cdot Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, \frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx$$

Če sta še X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je

$$p_{X \cdot Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y\left(\frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{|x|} dx$$

1.9 Matematično upanje oz. pričakovana vrednost

V primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ je matematično upanje oz. pričakovana vrednost vsota $E(X) := \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$

V posebnem primeru $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ je $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ - povprečje števil $x_1 \dots x_n$

expected value, expectation, mean value

Naj bo X diskretno porazdeljena slučajna spremenljivka z neskončno zalogo vrednosti:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

X ima matematično upanje oz. pričakovano vrednost, če je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$. Tedaj je matematično upanje definirano kot $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$. Naj bo sedaj X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X . Potem ima X matematično upanje, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x) dx < \infty$. Tedaj je matematično upanje slučajne spremenljivke X enako $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx$

Primer.

$$1. X \sim Ber(p) \text{ oz. } X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \quad q = 1 - p, E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$2. X \sim Poi(\lambda), \text{ torej } p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$3. \text{ Enakomerna porazdelitev na } [a, b]$$

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{če } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$4. X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-\infty}{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$U = \frac{x - \mu}{\sigma} \implies du = \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \mu \quad (1)$$

Ker je v predzadnjem koraku 1. funkcija (v integralu) liha, 2. pa je gostota porazdelitve $N(0, 1)$

5. Cauchyjeva porazdelitev $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
 Nima matematičnega upanja, saj je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\infty} = \infty$
6. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ je pogojno konvergentna vrsta, t.j. konvergira, a ne absolutno

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$x_k \cdot p_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \qquad p_k := \frac{1}{2^k} \text{ npr. ker je vsota } 1$$

$$x_k := \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2^k$$

Ta porazdelitev nima matematičnega upanja, ker vrsta ne konvergira absolutno

Trditev 1.30. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija

- (a) Če je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$
 potem je $E(f \circ X) \equiv E(f(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \cdot p_k$ (če le to matematično upanje obstaja)
- (b) Če je X zvezno porazdeljena z gostoto p_X , potem je $E(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$

Dokaz. (samo (a)):

$$f \circ X : \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

npr če $f(x_1) = f(x_3) \implies \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots \\ p_1 + p_3 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$
 $(E(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{f(x)}(x) dx = \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$ - substitucija
 $y = f(x)$ v integralu) ■

Posledica 1.31. Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje $\iff X$ ima matematično upanje. Tedaj velja $|E(X)| = E(|X|)$

Dokaz. (samo diskreten primer):

$$E(|X|) \stackrel{\text{trd. } f(x)=|x|}{=} \sum_i |x_i| \cdot p_i \geq \left| \sum_i x_i \cdot p_i \right| = |E(X)|$$

■

Posledica 1.32. Za $\forall a \in \mathbb{R}$ in vsako slučajno spremenljivko X z matematičnim upanjem velja $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ (homogenost)

Dokaz. $f(x) = a \cdot x$, trditev (od prej) ■

Podobno kot zadnjo trditev se dokaže

Trditev 1.33. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in (X, Y) slučajni vektor

- (a) Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen $p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$ (če le vrsta (oz. končna vsota) absolutno konvergira)
- (b) Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen z gostoto $p(X, Y)$. Potem je $E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p_{(X,Y)}(x, y) dy$ (če le integral absolutno konvergira)

Posledica 1.34. Če slučajni spremenljivki X in Y imata matematično upanje, potem ga ima tudi $X + Y$ in velja $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (aditivnost)

Dokaz. (samo zvezen primer):

$$\begin{aligned} E(X, Y) &\stackrel{f(x,y)=x+y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) p_{(X,Y)}(x, y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy = E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

■

Posledica 1.35. Za slučajne spremenljivke $X_1 \cdots X_n$, ki imajo matematično upanje, velja $E(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$ z $\forall a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X+Y}(x) dx \stackrel{?}{=} E(X) + E(Y) \text{ ni očitno iz tega}$$

Primer. 1. Če ima X matematično upanje, potem $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

$$2. X_k \sim \text{Ber}(p), \text{ t.j. } X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1 - p$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n \implies E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n \cdot p$$

Posebej to (v 2. zgledu) velja v primeru, ko so $\{X_k\}_{i=1}^n$ neodvisne. To velja tudi za Bernoullijevo zaporedje ponovitev poskusa: opazujemo dogodek A s $P(A) = p$. X je frekvenca dogodka A v n ponovitvah poskusa. Potem je $X \sim \text{Bin}(n, p)$ in $X = X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $(X_k = 1)$ dogodek, da se A zgodi v k -ti ponovitvi poskusa, sicer je $(X_k = 0)$. Po zgornjem je $E(X) = n \cdot p$. Do tega lahko pridemo tudi direktno:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot p_k = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \stackrel{j=k-1}{=} \\ &= np \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} \right) = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Trditev 1.36 (Cauchy-Schwartzova neenakost). Če obstajata $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, potem obstaja tudi $E(X, Y)$ in velja $E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$. Enačaj velja samo v primeru $|Y| = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}} |X|$ z verjetnostjo 1

Dokaz. Ker za nenegativna realna števila velja neenakost

$$u \cdot v \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \iff (u - v)^2 \geq 0$$

za nenegativni slučajni spremenljivki U in V velja neenakost

$$U \cdot V \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

Enakost velja samo v točkah $\omega \in \Omega$, za katere je $U(\omega) = V(\omega)$
 Če vstavimo $U = a \cdot |X|$ in $V = \frac{1}{a}|Y|$ za $a > 0$, dobimo $|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2}(a^2 Y^2 + \frac{1}{a^2} Y^2)$ in zato je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \frac{1}{2}(a^2 E(X^2) + \frac{1}{a^2} E(Y^2)) \text{ za } \forall a > 0 \quad (2)$$

Če vstavimo $a^2 = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}}$ na desni strani dobimo

$$\frac{1}{2}(\sqrt{E(Y^2) + E(X^2)} + \sqrt{E(X^2 + E(Y^2))}) = \sqrt{E(X^2) + E(Y^2)}$$

Torej je

$$E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$$

Enakost v neenakosti velja $\iff a|X| = \frac{1}{a}|Y|$, torej $|Y| = a^2|X| = \frac{E(Y^2)}{E(X^2)}|X|$ z verjetnostjo 1 ■

Posledica 1.37. Če obstaja $E(X^2)$, potem obstaja $E(X)$ in velja $(E(X))^2 \leq E(X^2)$

Dokaz. $Y = 1$, t.j. $Y : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$

$$E(|X \cdot 1|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot 1^2} \quad (E(|X|))^2 \leq E(X^2)$$

■

Trditev 1.38. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, ki imata matematični upanji. Potem ima matematično upanje tudi $X \cdot Y$ in velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dokaz. (samo zvezem primer):

$$E(X \cdot Y) \stackrel{\text{trd}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p_{(X,Y)}(x,y) dx dy \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} \iint_{\mathbb{R}} x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy$$

■

Definicija 1.39 (Nekoreliranost). Slučajni spremenljivki X in Y sta nekorrelirani, če velja $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, sicer sta korelirani.

Po trditvi iz neodvisnosti sledi nekoreliranost. Obratno pa ne velja:

Primer.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \cos(U) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y = \sin(U) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0, E(Y) = \frac{1}{3}$$

$$X \cdot Y = \sin(U) \cdot \cos(U) = 0 \implies E(X \cdot Y) = 0 \implies X \text{ in } Y \text{ sta nekorelirani slučajni spremenljivki}$$

X \ Y	0	1	Σ
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
Σ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\implies \text{nista neodvisni, npr}$$

$$\frac{1}{3} = P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

Trditev 1.40. $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$

Potem sta X in Y neodvisni \iff nekorelirani

$$\iff E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

1.10 Disperzija, kovarianco in korelacijski koeficient

Definicija 1.41 (Disperzija). Naj obstaja $E(X^2)$. Disperzija oz. varianca slučajne spremenljivke X je $D(X) \equiv \text{var}(X) := E((X - E(X))^2)$

Disperzija meri razpršenost slučajne spremenljivke X okoli $E(X)$

Ker je $E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$, je $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Lastnosti disperzije:

- $D(X) \geq 0$ in $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$, t.j. X je izrojena slučajna spremenljivka
- $D(a \cdot X) = a^2 D(X)$ $a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ velja: $E((X - a)^2) \geq D(X)$. Enakost velja le v primeru $a = E(X)$

Dokaz.

$$E((X - a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2E(X)|a| + a^2 = (a - E(X))^2 + E(X^2) -$$

Enakost velja samo za $a = E(X)$ ■

Definicija 1.42 (Standardna deviacija). Standardna deviacija ali standardni odklon slučajne spremenljivke X je $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$

Zanjo velja $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$

Primeri nekaterih $E(X)$ in $D(X)$

1. enakomerna diskretna porazdelitev: $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

$$E(X) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2$$

2. Binomska porazdelitev $Bin(n, p), n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1), q = 1 - p$

$$E(X) = n \cdot p, D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

3. Poissonova porazdelitev $Poi(\lambda), \lambda > 0$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

4. Geometrijska porazdelitev $geo(p), p \in (0, 1), q = 1 - p$

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$$

5. Pascalova porazdelitev $Pas(m, p), m \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

$$E(X) = \frac{m}{p}, D(X) = \frac{mq}{p^2}$$

6. Enakomerna zvezna porazdelitev Ed na $[a, b]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. Normalna porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma$$

8. Porazdelitev gama $\gamma(b, c)$

$$E(X) = \frac{b}{c}, D(X) = \frac{b}{c^2}$$

9. Porazdelitev $\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$$E(X) = n, D(X) = 2n$$

10. Eksponentna porazdelitev $Exp(\lambda), \lambda > 0 = \gamma(1, \lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Preverimo, da je $D(X) = \sigma^2$ za $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \implies x - \mu = \sigma t, dx = \sigma dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$u = t, dv = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$du = dt, v = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-te^{-\frac{1}{2}t^2} |_{-\infty}^{\infty}) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2$$

Definicija 1.43 (Kovarianca). Kovarianca slučajnih spremenljivk $K(X, Y) \equiv Cov(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

Ker je

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

je $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Lastnosti:

1. $K(X, X) = D(X)$
2. $K(X, Y) = 0 \iff X$ in Y sta neodvisni
3. K je simetrična in bilinearna funkcija:
 - $K(X, Y) = K(Y, X)$
 - $K(aX + bY, Z) = aK(X, Z) + bK(Y, Z) \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. Če obstajata $D(X)$ in $D(Y)$, potem obstaja tudi $K(X, Y)$. Tedaj velja $|K(X, Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
 To sledi iz Cauchy-Schwartzove neenakosti ($|E(U \cdot V)| \leq \sqrt{E(U^2) \cdot E(V^2)}$) za slučajni spremenljivki $X - E(X)$ in $Y - E(Y)$. Enačaj v neenakosti velja $\iff Y - E(Y) \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X))$ z verjetnostjo 1
5. Če X in Y imata disperziji, potem jo ima tudi $X+Y$ in velja $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)$
 če sta X in Y nekorelirani (posebej neodvisni), potem je $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Dokaz. Sledi iz enakosti

$$(X + Y - E(X + Y))^2 = ((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 = (X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X))(Y - E(Y))$$

$$D(X + Y) = E((X - E(X))^2) + E((Y - E(Y))^2) + E(2(X - E(X))(Y - E(Y))) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)$$

■

6. Posplošitev: $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) + 2 \sum_{i < j} K(X_i, X_j)$
 Če so $X_1 \dots X_n$ paroma nekorelirani (posebej neodvisni), potem je $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n)$

Primer. $\text{Bin}(n, p)$ je vsota $X = X_1 + \dots + X_n$, kjer je $X_i \sim \text{Ber}(p)$, t.j.

$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, ki so neodvisne

Zato je $D(X) = D(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot D(X_1) = n \cdot p \cdot q$, saj je $D(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = p - p^2 = pq$

Definicija 1.44 (Standardizacija slučajne spremenljivke). Standardizacija slučajne spremenljivke X je slučajna spremenljivka $X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

Zanjo velja:

- $E(X_s) = 0$
- $D(X_s) = \frac{1}{\sigma(X)^2} \cdot D(X - E(X)) = \frac{1}{\sigma(X)^2} D(X) = 1$

Primer.

$$X \sim N(\mu, \sigma) \implies X_s = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Definicija 1.45 (Korelacijski koeficient). Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_s \cdot Y_s)$$

Lastnosti:

1. $r(X, Y) = 0 \iff X$ in Y sta nekorelirani
2. $r(X, Y) \in [-1, 1]$, kar sledi iz lastnosti (4) za kovarianco
3.
 - $r(X, Y) = 1 \iff Y = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1
 - $r(X, Y) = -1 \iff Y = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ z verjetnostjo 1

Tedaj imamo linearno zvezo med X in Y

Primer.

$$(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) \quad \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y \in [0, \infty], \rho \in [-1, 1]$$

Trdimo, da je $r(X, Y) = \rho$

$$(X_s, Y_s) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$$

$$r(X, Y) = E(X_s \cdot Y_s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbb{R}} xye^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dx dy$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2\rho xy + y^2 &= (x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2)y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2} dx = \\ &= E(N(\rho y, \sqrt{1-\rho^2})), \text{ ker je } p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \\ &= \rho \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = D(N(0, 1)) = 1 \right) \implies = \rho \end{aligned}$$

Torej sta X in Y nekorelirani $\overset{\text{v splošnem}}{\iff} \rho = 0 \overset{\text{ta primer}}{\iff} X, Y$ neodvisni

Kakšna je gostota, če je ρ blizu 1? $\rho \uparrow 1 : \rho \downarrow -1$:

gostota je skoraj skoncentrirana na neki premici, torej med X in Y obstaja skoraj linearna zveza

1.11 Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje

Izberimo si dogodek B s $P(B) > 0$

Definicija 1.46. Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na B je $F_X(X | B) := P(X \leq x | B) = \frac{P(X \leq x \wedge B)}{P(B)}$

Ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija

A Diskreten primer

Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor z verjetnostno funkcijo $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$

Za pogoj B vzemimo $B = (Y = y_j)$ pri nekem j , torej $q_j = P(Y = y_j)$

Potem je pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede $F_X(X | Y = y) := \frac{P(X \leq x | Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{1}{q_j} \sum_{j: x_j \leq x} p_{ij}$

Če vpeljemo pogojno verjetnostno funkcije $P_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$, $F_X(X | Y = y_j) = \sum_{i: x_i \leq x} p_{i|j}$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$E(X | Y = y_j) := \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_j \cdot p_{ij}$$

Regresijska funkcija $\ell(y_j) = \sum(X | Y = y_j)$, ki je definirana na zalogi vrednoti slučajne spremenljivke Y

Definirajmo novo slučajno spremenljivko $E(X | Y) = \ell(y)$, ki ji rečemo pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede slučajne spremenljivke Y

Ta ima shemo $E(X | Y) = \begin{pmatrix} \ell(y_1) & \ell(y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X | Y = y_1) & \dots \\ q_1 & \dots \end{pmatrix}$

Zanjo velja

$$E(X | Y) = \sum_j \ell(y_j) \cdot q_j = \sum_j \sum_i x_i \cdot p_{ij} = \sum_i x_i (\sum_j p_{ij}) = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$$

kjer je $p_i = P(X = x_i)$

Kaj dobimo, če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

Tedaj je $p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_i \cdot q_j}{q_j} = p_i$ in $\ell(y_j) = E(E(X | Y = y_j)) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$, torej je regresijska funkcija kar konstanta $E(X)$ oz. je $E(X | Y)$ izrojena slučajna spremenljivka z vrednostjo $E(X)$

Primer. Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Poi(\lambda)$ z $\lambda > 0$. Iz vsakega jajca se z verjetnostjo $p \in (0, 1)$ izvali piščanec, neodvisno od drugih jajc. Naj bo K število piščancev Dolocino $E(K | N), E(K) \text{ in } E(N | K)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(K = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\ell(n) = E(K | N = n) = E(\text{Bin}(n, p)) = n \cdot p$$

torej je $E(K | N) = \ell(N) = p \cdot N$

$$E(K | N) = \begin{pmatrix} p \cdot 0 & p \cdot 1 & p \cdot 2 & \dots \\ P(N = 0) & P(N = 1) & P(N = 2) & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(K) = E(E(K | N)) = E(p \cdot N) = p \cdot E(N) = p \cdot \lambda$$

$$\begin{aligned} P(K = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(K = k | N = n) \cdot P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(qk)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda} \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Torej je $K \sim Poi(p \cdot \lambda)$

$$\begin{aligned} P(N = n | K = k) &= \frac{P(N = n, K = k)}{P(K = k)} = \frac{P(K = k | N = n) \cdot P(N = n)}{P(K = k)} = \\ &= \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{pk! e^{p\lambda}}{(p\lambda)^k} = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-q\lambda} \quad n = k, k+1, \dots \end{aligned}$$

To je za k premaknjena Poissonova porazdelitev: $k + Poi(q\lambda)$

Potem je $\psi(k) = E(N | K = k) = E(k + Poi(q\lambda)) = k + q \cdot \lambda$ in zato je $E(N | K) = \psi(K) = k \cdot q + \lambda$

Preizkus: $E(E(N | K)) = E(k + q \cdot \lambda) = p\lambda + q\lambda = \lambda = E(N)$ (ok)

Regresijsko premico je vpeljal Golten (1822-1911)

B Zvezni primer

Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x, y)$.

Vzemimo $B = (y < Y \leq y + k)$ za nek $y \in \mathbb{R}, k > 0$.

Potem je $F_X(X \mid y < Y \leq y + k) = P(x \leq x \mid y < Y \leq y + k) = \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + k)}{P(y < Y \leq y + k)} = \frac{F_{(X,Y)}(x, y+k) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+k) - F_Y(y)}$

Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$ je limita, če obstaja:

$$F_X(x \mid Y = y) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(x \mid y < Y \leq y+h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_{(X,Y)}(x, y+h) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

Denimo sedaj, da sta $p_{X,Y}$ in p_Y zvezni funkciji. Tedaj je $F_X(X \mid Y = y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{(X,Y)}(x, y)}{F'_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^x p_{(X,Y)}(x, v) dv$

Če vpeljemo pogojno gostoto $p_X(x \mid Y = y) := \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$, je torej

$$F_{(X,Y)}(x \mid Y = y) = \int_{-\infty}^x p_X(u \mid y) du$$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$ je

$$E(X \mid Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x \mid y) dx = \frac{1}{p_Y(y)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)}(x, y) dx$$

Vpeljimo regresijsko funkcijo $l(y) := E(X \mid Y = y)$, definirano na zalogi vrednosti slučajne spremenljivke Y . Tako dobimo novo slučajno spremenljivko $E(X \mid Y) := l(y)$: pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y .

Kot v diskretnem primeru se pokaže enakost $E(E(X \mid Y)) = E(X)$

Primer. $(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$

Robna gostota za Y je $N(\mu_y, \sigma_y)$

Zato je pogojna gostota

$$p_X(x \mid y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)} \stackrel{\text{D.N.}}{=} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(2\pi)(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \rho \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)$$

torej je $N(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y), \sigma_x \sqrt{1-\rho^2})$

Eksponent: $\frac{1}{2(1-\rho^2)} \sigma_x^2 (x - (\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y)))^2$

$\implies l(y) = E(X \mid Y = y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y)$ - 1. parameter

$= \alpha + \beta y : \beta = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \alpha = \mu_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \mu_y$

Torej je $E(x \mid y) = \alpha + \beta y$

Primer. Meritev onesnaženosti zraka

Slučajna spremenljivka X meri koncentracijo ogljikovih delcev (v $\mu g/m^3$),

Y pa koncentracijo ozona (v $\mu l/l = ppm$)

Podatki kažejo, da ima (X, Y) približno dvorazsežno normalno porazdelitev, $\mu_x = 10.7, \sigma_x^2 = 29, \mu_y = 0.1, \sigma_y^2 = 0.02, \rho = 0.72$

Koncentracija ozona je škodljiva zdravju, če je ≥ 0.3

Denimo, da naprava za merjenje ozona odpove, koncentracija škodljivih delcev je $X = 200$

a kolikšna je pričakovana koncentracija ozona?

b kolikšna je verjetnost, da je stopnja ozona zdravju škodljiva

a

$$E(Y | X = x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x) = 0.1 + 0.72 \sqrt{\frac{0.02}{29}} (20 - 10.7) \doteq 0.28$$

b Pogojna porazdelitev $Y | X = x$ je $N(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2}) = N(0.28, 0.1)$

$$P(Y > 0.3 | X = 20) = 1 - P(Y \leq 0.3 | X = 20) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{0.3 - 0.28}{0.1}\right) \doteq 0.42$$

1.12 Višji momenti in vrstilne karakteristike

Definicija 1.47 (Momenti). Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. Moment reda k glede na točko a je $m_k(a) := E((X - a)^k)$ (če obstaja)

Za a običajno vzamemo

1. $a = 0$: $z_k := m_k(0) = E(X^k)$ začetni moment reda k
2. $a = E(X)$: $m_k := m_k(E(X))$ cenralni moment reda k

Očitno je $z_1 = E(X), m_2 = D(X)$

Trditev 1.48. Če $\exists m_n(a)$, potem obstajaj tudi moment $m_k(a)$ za vse $k < n$

Dokaz. (V zveznem primeru):

$$\begin{aligned} E((X-a)^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k p_X(x) dx = \int a - 1^{a+1} (X-a)^k p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \leq \\ &\leq 1 + E((X-a)^k) < \infty \end{aligned}$$

■

Trditev 1.49. Če obstaja zacetni moment z_n , potem obstaja $m_n(a)$ glede na poljubno točko $a \in \mathbb{R}$

Dokaz.

$$E((X - a)^n) \leq E((|X| + |a|)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(a)^{n-k} \cdot E(|X|^k) < \infty$$

■

Centralne momente lahko izrazimo z začetnimi:

$$m_n(a) = E((X - a)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} E(X^k)$$

$$a = E(X) \implies m_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

Asimetrija slučajne spremenljivke X je $A(X) := E(X_s^3) = E\left(\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_x}\right)^3\right) = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$ $m_2 = \sigma^2 = D(X)$

$A(N(\mu, \sigma)) = 0$, ker $A(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Sploščenost (kurtozis) $K(X) := E(X_s^4) = \frac{m_4}{m_2^2}$

$K(N(\mu, \sigma)) = 3$

Ce momenti ne obstajajo (npr. že $E(X)$ ne), potem si lahko pomagamo z vrstilnimi karakteristikami

Definicija 1.50 (Mediana). Mediana slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja $P(X \leq x) \leq \frac{1}{2}$ in $P(Y \geq x) \geq \frac{1}{2}$ ($1 - P(X < x) = 1 - F(x-)$)

Če je F porazdelitvena funkcija za X , je to ekvivalentno s pogojem $F(x-) \leq \frac{1}{2} \leq F(x)$

Če je X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, dobimo $F(X) = \frac{1}{2}$ oz. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dx = \frac{1}{2}$

Te vrednosti (lahko jih je več) označimo z $X_{\frac{1}{2}}$

Primer.

- $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
 $x_{\frac{1}{2}} = 1, E(X) = \frac{4}{5}$

- $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$
 Mediane so $[0, 1]$

-

- $X \sim N(0, 1)$
 $x_{\frac{1}{2}} = \mu = E(X)$

Definicija 1.51 (Kvantil). Kvantil reda p ($p \in (0, 1)$) je vsaka vrednost x_p , za katero velja $P(X \leq x_p) \geq p$ in $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$
 Ekvivalentno je $F(x_p -) \leq p \leq F(x_p)$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj $F(x_p) = p$ t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = p$

- Kvartili: $X_{\frac{1}{4}}, X_{\frac{2}{4}}, X_{\frac{3}{4}}$
- Percentili: $X_{\frac{1}{100}}, X_{\frac{2}{100}}, \dots, X_{\frac{99}{100}}$

Primer. Telesna višina odraslih moških

Definicija 1.52 ((Semiinter)kvartilni razmik). $s := \frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$

je nadomestek (analog) za standardno deviacijo

Primer.

- $X \sim N(0, 1)$
 $x_{\frac{1}{2}} = 0$
 $\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} p(t)dt = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{tabelca}} x_{\frac{1}{4}} \doteq -0.67$
 $\xrightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} \doteq 0.67 \implies s = 0.67, \sigma(x) = 1$

- X naj ima Cauchyjevo porazdelitev
 $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
 $x_{\frac{1}{2}} = 0$
 Momenti ne obstajajo

$$\int_{-\infty}^{x_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{x=-\infty}^{x=\frac{1}{4}} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\pi} \arctan x_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \\ \arctan x_{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{4} \implies x_{\frac{1}{4}} = -1 \\ \xrightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} &= 1, s = 1\end{aligned}$$

1.13 Rodovne funkcije

Definicija 1.53. Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:
 $p_k = P(X = k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta absolutno konvergira.

Očitno je $G_X(0) = p_0, G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Ker je $s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, je $G_X(s) = E(s^X)$

Za $s \in [-1, 1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq p_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Zato je vrsta konvergentna, če je $|s| \leq 1$. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1

Primer.

- $X \sim \text{geo}(p), p \in (0, 1)$

$$p_k = P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned}G_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^{k-1} \\ &= ps \frac{1}{1 - qs}\end{aligned}$$

konvergira, ko $|qs| < 1 \Leftrightarrow |s| < \frac{1}{|q|} =: R$

- $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

$$R = \infty \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Iz teorije Taylorjevih vrst sledi

Izrek 1.54 (O eniličnosti). Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y . Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za $\forall s \in [-1, 1] \Leftrightarrow P(X = k) = P(Y = k)$ za vse $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedaj velja $P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^k(0)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_k = P(X = k)$$

Naj ima rodovna funkcija G_X slučajne spremenljivke X konvergenčni radij $R > 1$. Potem za $\forall s \in (-R, R)$ velja $G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1}$

Če postavimo $s = 1$, dobimo $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

Izrek 1.55. Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$ in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^n(1-) \equiv \lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1))$$

Dokaz. Za $\forall s \in [0, 1)$ je $G_X^n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} =$

$$= E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1) \cdot s^{X-n})$$

Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$\lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) =$$

$$\stackrel{\text{Abelova lema}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \lim_{s \nearrow 1} k(k-1) \cdots (k-n+1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_k = E(X(X-1) \cdots (X-n+1))$$

■

Posledica 1.56.

$$E(X) = G'_X(1-)$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G_X^{(2)}(1-) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1-))^2$$

Izrek 1.57. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnima funkcijama G_X in G_Y . Potem je $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$ za $s \in [-1, 1]$

Dokaz. $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \stackrel{\text{izrek}}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$, saj sta s^X in s^Y neodvisni slučajni spremenljivki

■

Posplošitev 1.58. Če so $X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, potem je za vse $s \in [-1, 1]$ $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s)$.

Če so $X_1, X_2 \dots X_n$ enako porazdeljene in neodvisne, potem je

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = (G_X(s))^n$$

Izrek 1.59. Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $N, X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N, X_n pa rodovno funkcijo G_X . Potem ima slučajna spremenljivka $S := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rodovno funkcijo enako $G_S = G_N \circ G_X$ oz. $G_S(s) = G_N(G_X(s))$ za $s \in [-1, 1]$

To je posplošitev formule dd: $P(N = n) = 1, G_N(s) = 1 \cdot s^n = s^n$

Dokaz. Zaradi neodvisnosti imamo $P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = k, N = n) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, X_1 + \dots + X_n = k) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k)$$

Zato je

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S = k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k \right) = \\ &\stackrel{G_{X_1+\dots+X_n}(s) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} (G_X(s))^n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot (G_X(s))^n = G_N(G_X(s)) \end{aligned}$$

za vse $s \in [-1, 1]$ ■

Posledica 1.60. Pri predpostavkah iz izreka velja Waldova enakost:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

Dokaz.

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)) \forall s \in [-1, 1] \quad (3)$$

$$E(S) = G'_s(1-) = G'_N(G_X(1-)) \cdot G'_X(1-) = E(N) \cdot E(X) \quad (4)$$

■

Primer. Kokoš, jajca, piščanci

N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$

K je število piščancev

Definiramo $X_i = 1$ dogodek, da se iz i-tega jajca izvali piščanec, sicer $X_i = 0$.

Potem je $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $q = 1 - p$ in X_i so neodvisne slučajne spremenljivke.

Očitno je $K = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Ker je $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ in $G_X(s) = q \cdot s^0 + p \cdot s = q + ps$, je po izreku $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q+ps-1)} = e^{\lambda(ps-p)} = e^{\lambda p(s-1)} \forall s \in [-1, 1]$, zato je $K \sim Poi(\lambda p)$

1.14 Momentno rodovna funkcija

Definicija 1.61 (Momentno rodovna funkcija). Momentno rodovna funkcija je $M_X(t) = E(e^{tX})$ za $t \in \mathbb{R}$, za katere obstaja matematično upanje

V primeru zvezne porazdelitve je $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$

To je Laplaceova transformacija funkcije p_X

V diskretnem primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ je $M_X(t) = \sum_i e^{tx} p_i$

V posebnem primeru, ko ima X nenegativne celoštevilске vrednosti, je $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p_i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i (e^t)^i = G_X(e^t) \quad (M_X(t) = E((e^t)^X) = G_X(e^t))$$

$$G_X(s) = E(s^X)$$

Očitno je $M_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

Primer.

$$X \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ker je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx$ gostota za $N(0, 1)$

Izrek 1.62. Naj bo $M_X(t) < \infty$ (obstaja, $< \infty$ zato, ker je $e^t > 0$) za $\forall t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z M_X , vsi začetni momenti obstajajo, $z_k = E(X^k) = M_X^k(0)$ za $\forall k \in \mathbb{N}$ in velja $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$ za $\forall t \in (-\delta, \delta)$

Dokaz. (bistvo)

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$$

■

Trditev 1.63. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$, $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

Dokaz. $M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{(at)X} \cdot e^{bt}) = e^{bt} M_X(at)$

■

Izrek 1.64. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

Dokaz. $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \stackrel{e^{tX}, e^{tY} \text{ neodvisni}}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

■

Trditev 1.65. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Potem je $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$

Dokaz. Ker je

$$U := \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0, 1)$$

(standardizacija), je

$$X = \sigma_x \cdot U + \mu_x$$

in zato je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot M_U(\sigma_x t)$$

po zadnji trditvi. Potem je

$$M_U(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

za Y velja podobno. Po zadnjem izreku je

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_y^2 t^2}{2} + \mu_y t} = \\ &= e^{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)t^2}{2} + (\mu_x + \mu_y)t} \end{aligned}$$

Po izreku je

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$$

■

Opomba. Če bi vedeli, da je $X + Y$ porazdeljena normalno, bi “samo” izračunali parametra

Primer.

$$X \sim N(0, 1), M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} t^{2k}$$

Po drugi strani je $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{j!} t^j \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Primerjamo koeficiente:

- lihi koeficienti: $z_{2k-1} = 0 \quad k \in \mathbb{N}$
- sodi koeficienti:

$$\begin{aligned} \frac{z_{2k}}{(2k)!} &= \frac{1}{k! 2^k} \implies z_{2k} = \frac{(2k)!}{k! 2^k} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!! \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1.15 Šibki in krepki zakon velikih števil

Definicija 1.66 (Verjetnostna konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verjetnostno konvergira proti slučajni spremenljivki X , če za $\forall \epsilon > 0$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$
oz. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$

Definicija 1.67 (Skoraj gotova konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ skoraj gotovo konvergira proti slučajni spremenljivki X , če velja $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$

Tukaj je $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall k (\in \mathbb{N}) \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} =$$

$$= \{\cap_{k \in \mathbb{N}} \cup_{m \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq m} \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} \quad (5)$$

Opomba. Števnne unije in preseki \implies smo v σ -algebri, torej je to res dogodek

Trditev 1.68. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = 1$

Dokaz. Označimo $c_m := (|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = \cap_{n=m}^{\infty} (|x_n - X| < \epsilon)$.

Potem je $c_1 \subseteq c_2 \subseteq \dots$

je c_m za $\epsilon = \frac{1}{k}$ in $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_m$ (preseki)

Torej je $1 = P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq (\cup_{m=1}^{\infty} c_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m)$

Od tod sledi $\lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m) = 1$ ■

Posledica 1.69. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ verjetnostno konvergira.

Dokaz. Izberemo $\epsilon > 0$. Potem velja

$$P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } \forall n \geq m) \leq P(|X_m - X| < \epsilon)$$

Če uporabimo trditev, dobimo $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$ (leva stran). ■

Opomba. Obratna implikacija ne velja

Definicija 1.70. Naj bo $X_1, X_2, X_3 \dots$ zaporedje slučajnih spremenljivk, ki imajo matematično upanje. Definirajmo $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$

Potem je $E(Y_n) = 0$

Za $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja šibki zakon velikih števil (ŠZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} (|y| < \epsilon) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| < \epsilon)$ Za

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja krepki zakon velikih števil (KZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ skoraj gotovo, torej $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$

Če velja KVZŠ, potem velja ŠVZŠ

Primer. Mečemo kocko, X_k je # pik v k-tem metu. Potem je $E(X_k) = \frac{7}{2}$ in $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{7}{2}$

Ali konvergira $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2}$ skoraj gotovo? (Da)

Izrek 1.71.

- a Neenakost Markova: če slučajna spremenljivka X ima matematično upanje, potem je $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ za $\forall a > 0$
- b Neenakost Čebiševa: če slučajna spremenljivka X ima disperzijo, potem je $P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{a^2}$ za $\forall a > 0$ (pomembno za $a \geq 1$, ker je verjetnost ≤ 1)
 oz. če pišemo $\epsilon = a \cdot \sigma(x) \implies P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$ za $\forall \epsilon > 0$

Dokaz. (samo zvezni primer)

a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx \geq \int_{\{x: |x| \geq a\}} x p_x(x) dx \geq$$

$$|a| \int_{\{x: |x| \geq a\}} p_x(x) dx = a \cdot P(|X| \geq a)$$

b

$$P((X - E(X)) \geq \epsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \stackrel{(a) \text{ za } X-E(X)}{\leq} \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} = \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

■

Izrek 1.72 (Markov). Če za zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, potem velja ŠZVŠ. Tukaj je $S_n := X_1 + \dots + X_n$

Dokaz. V neenakosti Čebiševa vzamemo $X = \frac{S_n}{n}$

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{P(S_n)}{n^2 \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Če vzamemo $Y_n = \frac{|S_n - E(S_n)|}{n}$, je $P(|Y_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

oz. $P(|Y_n| < \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Zato $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej velja ŠZVŠ za zaporedje $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

■

Posledica 1.73 (Izrek Čebišev). Če so X_1, X_2, \dots, X_n paroma nekorelirane slučajne spremenljivke in $\sup_{n \in \mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja ŠVZŠ

Dokaz. Ker je $D(S_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) \leq n \cdot c$, je $\frac{D(S_n)}{n^2} \leq \frac{n \cdot c}{n^2} = \frac{c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, zato po izreku Markova velja ŠZVŠ

■

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$, $E(X_n) = p$, $E(S_n) = n \cdot p$
 Po izreku Čebiševa velja ŠZVŠ: $P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\implies P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

S_n je frekvenca dogodka, $\frac{S_n}{n}$ je relativna frekvenca, $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ verjetnostno

To je Bernoullijev zakon velikih števil iz 1713

Izrek 1.74 (Kolmogorov). Če za neodvisne slučajne spremenljivke $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n^2} < \infty$, potem velja KZVŠ, t.j. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$. Posebej je pogoj za vrsto izpolnjen, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$

Po izreku Kolmogorova velja KVZŠ, t.j. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ skoraj gotovo. To posplošuje Bernoullijev zakon

1.16 Centralni limitni izrek

Definicija 1.75. Naj bo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk s končnimi disperzijami. Definiramo $S_n := X_1 + \dots + X_n$ in standardizirajmo: $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$, torej $E(Z_n) = 0$, $D(Z_n) = 1$

Za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja centralni limitni izrek, če je $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)} \forall x \in \mathbb{R}$, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Pracimo, da $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ po porazdelitvi konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi.

Izrek 1.76 (Centralni limitni izrek (CLI, osnovna verzija)). Naj bodo X_1, X_2, \dots neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem zanje velja centralni limitni zakon, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokazal je Ljapunov (1900), s tem je posplošil Laplaceov izrek iz leta 1812. V dokazu bomo uporabili

Izrek 1.77 (O zveznosti rodovne funkcije). Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ slučajnih spremenljivk velja:

$$M_{Z_n}(t) \rightarrow M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \text{ za vse } t \in (-\delta, \delta) \text{ pri nekem } \delta > 0$$

$$\text{Potem } F_{Z_n}(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x) \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokaz. CLI v primeru, ko X_n imajo momentno rodovno funkcijo

$$M_X(t) = E(e^{tX_n}) \text{ na neki okolici točke } 0$$

$$\begin{aligned} \text{Naj bo } E(X_n) = \mu, D(X_n) = \sigma^2 \text{ in } U_n := X_n - \mu = X_n - E(X_n). \text{ Torej je} \\ E(U_n) = 0 \text{ in } D(U_n) = \sigma^2 \text{ ter } M_U(t) = 1 + tE(U_n) + \frac{t^2}{2!}E(U_n^2) + o(t^2) = \\ = 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2) \text{ (} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n)}{n} = 0 \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker je } D(S_n) \stackrel{\text{neodvisne}}{=} D(X_1) + \dots + D(X_n) = n \cdot \sigma^2 \text{ in } E(S_n) = n \cdot \mu = \\ E(X_1) + \dots + E(X_n), \text{ je } Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (\sum_{i=0}^n U_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Potem je } M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1 + \dots + U_n)}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_1}) \dots E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_n}) = \\ \stackrel{\text{enaki}}{=} (M_U(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n = (1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))^n \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{o(\frac{1}{n} \rightarrow 0)} e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Lema 1.78. Če $X_n \rightarrow X$, potem $(1 + \frac{X_n}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$

Po prejšnjem izreku: $F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)}(x)$

$$\epsilon > 0 : x - \epsilon \leq x_n \leq x + \epsilon \text{ za dovolj velik } n$$

$$\implies (1 + \frac{x - \epsilon}{n})^n \leq (1 + \frac{x_n}{n})^n \leq (1 + \frac{x + \epsilon}{n})^n$$

$$\implies (1 + \frac{x - \epsilon}{n})^n \rightarrow e^{x - \epsilon}$$

$$\implies (1 + \frac{x_n}{n})^n \rightarrow e^x$$

$$\implies (1 + \frac{x + \epsilon}{n})^n \rightarrow e^{x + \epsilon}$$

■

V splošnem se CLI dokaže s pomočjo karakterističnih funkcij:

$$\begin{aligned} \text{naj bo } X \text{ slučajna spremenljivka, } \ell_X(t) := E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))t \in \\ \mathbb{R} \end{aligned}$$

za razliko od momentno rodovnih funkcij karakteristične funkcije vedno od-
stajajo

v zveznem primeru je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx$ - Fourierova transformacija funkcije $p_X(x)$

$X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne, enako porazdeljene

$$\mu := E(X_n), \sigma := \sigma(X_n)$$

$$E(S_n) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} E(X_1) + \dots + E(X_n) = n\mu$$

$$D(S_n) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} D(X_1) + \dots + D(X_n) = n\sigma^2$$

$X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\bar{Z}_n := \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \implies Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Po CLI za velike n velja $Z_n \approx N(0, 1)$, zato je $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ oz. $S_n \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

Če so $X_1, X_2 \dots$ porazdeljene normalno $N(\mu, \sigma)$, potem je $Z_n \sim N(0, 1)$,
torej $F_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Primer. Laplaceova formula je poseben primer CLI:

$X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $X_n = 1$ je dogodek, da se dogodek A (s $P(A) = p$) zgodi v n -ti ponovitvi poskusa, sicer je $X_n = 0$

$E(X_n) = p$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ frekvenca dogodka A v prvih n ponovitvah
 $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$, $E(S_n) = np$, $D(S_n) = npq$, ker je $D(X_1) = pq$

$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \stackrel{\text{CLI}}{\approx} N(0, 1)$, če je n velik

$$P(S_n \leq X) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

kjer je

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

verjetnostni integral

$$\begin{aligned} P(\alpha < S_n \leq \beta) &= \\ &= P(S_n \leq \beta) - P(S_n \leq \alpha) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Laplaceova aproksimacijska formula

Primer. Teža vrečke kostanja je porazdeljena približno normalno, saj je vsota tež posameznih kostanjev, ki so neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke

$X_n \cdots$ teža n-tega kostanja, $S_n = X_1 + \cdots + X_n \approx$ normalno - aditiven efekt

Primer.

$$\begin{aligned} p_{X_n}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}; x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sicer} \end{cases} \\ E(X_1) &= 0, D(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3} \\ S_1 &= X_1, Z_1 = \frac{X_1 - E(X_1)}{\sigma(X_1)} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = x_1 \sqrt{3} \\ S_2 &= X_1 + X_2, Z_2 = \frac{S_2 - E(S_2)}{\sigma(S_2)} = \frac{X_1 + X_2 - E(X_1 + X_2)}{\sigma(X_1 + X_2)} \\ S_3 &= X_1 + X_2 + X_3, Z_3 = \frac{S_3 - E(S_3)}{\sigma(S_3)} \end{aligned}$$

2 Statistika

2.1 Osnovni pojmi

Kot vedo statistiko razdelimo na:

1. opisno statistiko: zbiranje, razvrščanje, prikazovanje podatkov, računanje osnovnih količin

2. analitično statistiko: upraba podatkov pri sklepanju glede zakonitosti danega področja

Definicija 2.1 (Populacija). Populacija je končna ali neskončna množica elementov, pri katerih merimo ali opazujemo neko količino

Primer.

- (a) kontrole kvalitete: populacija je množica (serija) izdelka, npr. dnevna proizvodnja, merimo lastnosti izdelkov, npr. življensko dobo
- (b) testiranje seb: populacija je množica vseh zaposlenih v državi, merimo npr. starost, višino place ...

Matematični pogled: na verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}) imamo slučajno spremenljivko X .

Praviloma ne moremo izmeriti cele populacije, ampak meritve opravimo na relativno majhnem delu populacije, na vzorcu. Le-ta mora biti reprezentativen, izbran nepristransko in dovolj velik.

Matematični pogled: vzorec velikosti n je slučajni vektor $(x_1 \cdots x_n)$, kjer so komponente enako porazdeljene kot slučajna spremenljivka X in med seboj neodvisne.

Vrednost tega slučajnega vektorja pri enem naboru n meritev je realizacija vzorca: $(x_1 \cdots x_n)$: to so konkretni podatki, ki jih analiziramo. Pri opisni statistiki predstavimo in obdelamo te podatke.

Iz teh vzorčnih podatkov želimo oceniti nekatere lastnosti populacije, kot sta:

1. sredina populacije μ , t.i. matematično upanje slučajne spremenljivke X
2. povprečni odklon σ od sredine populacije, t.i. Standardna deviacija slučajne spremenljivke X

Ocene za μ so:

- vzorčno povprečje: $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
- vzorčni modus: najpogostejša vrednost v vzorcu
- vzorčna mediana: srednja vrednost v vzorcu, urejenem po velikosti

Ocene za σ so:

- vzorčni razmak: razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo v vzorcu
- vzorčna disperzija: $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

- popravljena vzorčna disperzija: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} s_0^2$

2.2 Vzorčne statistike in cenilke

Definicija 2.2 (Vzorčna statistika). Naj bo $(X_1, X_2 \dots X_n)$ vzorec t.i. slučajni vektor, kjer so $X_1 \dots X_n$ enako porazdeljene kot slučajna spremenljivka X in med seboj neodvisne.

Vzorčna statistika je simetrična funkcija vzorca $y = g(X_1, X_2 \dots X_n)$, kjer je g simetrična funkcija n spremenljivk

Praviloma vzorčna statistika ocenjuje vrednost nekega parametra ξ . Tedaj je y cenilka za parameter.

y je odvisna od n , zato pišemo tudi $y_n = g(X_1 \dots X_n)$.

Definicija 2.3 (Nepriistranskost, doslednost). Če je $E(Y) = \xi$, je Y nepriistranska cenilka za parameter ξ

Cenilka $Y = Y_n$ je dosledna, če $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ verjetnostno, t.i. $\forall \epsilon > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) = 0$ oz. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| < \epsilon) = 1$

Definicija 2.4 (Standardna napaka). Standardna napaka vzorčne statistike Y je standardna deviacija slučajne spremenljivke Y : $SE(Y) := \sigma(Y)$

Definicija 2.5 (Vzorčno povprečje). Naj bo X slučajna spremenljivka na populaciji, ki ima matematično upanje $E(X) = \mu$ in standardno deviacijo $\sigma(X) = \sigma$. Naj bo $(X_1 \dots X_n)$ vzorec. Definirajmo vzorčno povprečje

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

ki je vzorčna statistika.

Je cenilka za \bar{X} , ki je nepriistranska:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{1}{n}n \cdot \mu = \mu$$

Po ŠZVŠ (izreku Čebiševa) je to dosledna cenilka za μ .

Ker je

$$D(\bar{X}) \stackrel{\text{neodv}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2}n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

je standardna napaka

$$SE(Y) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- čim večji n , bolj oceni parameter μ

Po CLI je pri velikem n slučajna spremenljivka $Z_n := \frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$

porazdeljena približno $N(0, 1)$ oz. \bar{X} je porazdeljen približno $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Če je X normalno porazdeljena $N(\mu, \sigma)$, potem je \bar{X} porazdeljen $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ za vsak n

Trditev 2.6. Naj bo Y_n cenilka za ξ . Če je $E(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ in $D(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, potem je $Y = Y_n$ dosledna cenilka za ξ

Dokaz. Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Dokazati moramo $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) = 0$

Ker je $E(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$: $|E(Y_n) - \xi| < \frac{\epsilon}{2}$ zato je dogodek

$$\begin{aligned} (|Y_n - \xi| \geq \epsilon) &\subseteq (|Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - \xi| \geq \epsilon) \text{ za } \forall n \subseteq \\ &\stackrel{n \geq n_0}{\subseteq} (|Y_{n_0} - E(Y_{n_0})| + |E(Y_{n_0}) - \xi| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Torej je za $n \geq n_0$

$$P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{D(Y_n)}{\epsilon^2} \cdot 4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (doslednost)}$$

Neenakost Čebiševa: $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$

Tako imamo doslednost cenilke: $P(|Y_n - \xi| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ■

Primer. Porazdelitev χ^2 , n število prostorskih stopenj

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Modus = $n - 2$, $E(X) = n$, $D(X) = 2n$

Mediana $\approx n \cdot (1 - \frac{2}{9n})^3$

Definicija 2.7 (Vzorčna disperzija). Naj bo X slučajna spremenljivka na populaciji. Vzorcna disperzija je definirana s

$$s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

popravljen vzorčna disperzija pa je

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Kako sta porazdeljeni, če je $X \sim N(\mu, \sigma)$?

Raje vzemimo vzorčno statistiko: $\chi^2 := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{\sigma^2} s_0^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2$

Ni lahko izračunati, da je $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$

Ideja izpeljave je $\chi^2 = Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2$ za $Z_i \sim N(0, 1)$ in med seboj neodvisne.

Potem uporabimo trditev iz verjetnosti: $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, torej $E(\chi^2) = n-1$, $D(\chi^2) = 2(n-1)$. Od tod sledi

$$E(s_0^2) = E\left(\frac{\sigma^2}{n} \chi^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} E(\chi^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

torej s_0^2 ni nepristranska za σ^2 , je pa asimptotično nepristranska, t.i. $E(s_0^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$

Podobno je $E(s^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} E(\chi^2) = \sigma^2$, torej je s^2 nepristranska cenilka za σ^2

Ker je $D(s_0^2) = \frac{\sigma^4}{n^2} D(\chi^2) = \frac{\sigma^4 2(n-1)}{n^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $D(s^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, iz trditve sledi, da sta s_0^2 in s^2 dosledni cenilki za σ^2

Studentova t-porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

kjer je $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ Beta funkcija

$$n = 1 : \quad \frac{1}{\pi} (1 + x^2)^{-1} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \text{ Cauchyjeva porazdelitev}$$

$$\text{ko gre } n \rightarrow \infty, \text{ gre } \sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \sqrt{2\pi} \text{ in } \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left(\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n\right)^{-\frac{n+1}{2n}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$$

torej je pri velikih n gostota približno $N(0, 1)$

$$n = 2 : \quad \frac{1}{\sqrt{2} B\left(1, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

za $n \geq 2$ je $E(X) = 0$

$$n = 3 : \quad c \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-2} \approx \frac{1}{x^4} \text{ za velike } x$$

$$\text{za } n \geq 3 \text{ je } D(X) = \frac{n}{n-2} > 1$$

Leta 1908 jo je odkril W.S. Gosset, statistik v pivovarni guinness v Dublinu. Student je njegov prevdonim.

Pri normalni porazdelitvi slučajne spremenljivke $X \sim N(\mu, \sigma)$ je vzorčno povprečje \bar{X} porazdeljeno $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, torej je $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ porazdeljena $N(0, 1)$. Če poznamo σ , potem bomo znali povedati, kako dobra ocena za μ je \bar{X} (\rightarrow intervali zaupanja).

Kako ravnati, če σ ne poznamo?

Lahko jo ocenimo s $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$, tako da potem vzorčna statistika $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sqrt{n}$ ni več porazdeljena po $N(0, 1)$, niti približno normalna, razen če je n velik in je s potem skoraj konstanta σ .

Kako je porazdeljena vzorčna statistika T ?

Ker je $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, je $\frac{Z}{T} = \frac{s}{\sigma} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}$, torej je $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}}$

Izkaže se, da sta $Z \sim N(0, 1)$ in $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Od tod lahko izračunamo, da ima T Studentovo porazdelitev z $n-1$ prostorskimi stopnjami:

$$p_T(t) = \frac{1}{(n-1)B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

2.3 Metode za pridobivanje cenilk

2.3.1 Metoda momentov

Definicija 2.8 (Vzročni moment). Naj bo $(X_1, X_2 \dots X_n)$ vzorec velikosti n , torej $X_1 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene kot slučajna spremenljivka X . Zacetni moment reda k je $z_k = E(X^k)$. Definiramo k -ti vzročni moment $z_k := \frac{X_1^k + \dots + X_n^k}{n}$. Le ta je nepristranska cenilka za z_k : $E(Z_k) = \frac{1}{n}(E(X_1^k) + \dots + E(X_n^k)) = z_k$. Z_k je tudi dosledna cenilka za z_k .

Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametrov $\xi_1 \dots \xi_n$: $p(X; \xi_1 \dots \xi_m)$. Naj odstajajo začetni momenti $z_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x; \xi_1 \dots \xi_n) dx$, $k = 1, 2 \dots m$. Denimo, da iz teh m enačb lahko izrazimo parametre: $\xi_k = \phi_k(z_1, z_2 \dots z_m)$, $k = 1 \dots m$ za neko funkcijo ϕ_k . Potem je $c_k := \phi_k(z_1 \dots z_m)$ cenilka za parameter ξ_k , $k = 1 \dots m$

Primer. Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$, kjer sta μ in σ neznana parametra. Potem je $z_1 = E(X) = \mu$, $z_2 = E(X^2) = E(X^2) - (E(X))^2 + (E(X))^2 = D(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2$ ($m = 2$)

Iz teh dveh enačb izrazimo parametra μ in σ : $\mu = z_1, \sigma^2 = z_2 - \mu^2 = z_2 - z_1^2$.
 Cenilka za μ je $Z_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, cenilka za σ^2 je $Z_2 - Z_1^2 = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} - \bar{X}^2$.
 To je enako

$$\begin{aligned} S_0^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \end{aligned}$$

Torej bodimo že znani cenilki za parametra μ in σ^2

Primer. Naj bo X porazdeljena enakomerno na $[a, b]$, kjer sta a in b neznana parametra. Iščemo cenilki za a in b . Po metodi momentov moramo izračunati 2 začetna momenta

$$\begin{aligned} z_1 &= E(X) = \frac{a+b}{2} \\ z_2 &= E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; a, b) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

Iz 1. enačbe dobimo $b = 2z_1 - a$, kar vstavimo v 2. enačbo

$$\begin{aligned} 3z_2^2 &= b^2 + ab + a^2 = 4z_1^2 - 4z_1a + a^2 + 2az_1 - a^2 + a^2 \\ &\implies 3z_2 = 4z_1^2 - 2z_1a + a^2 \\ a^2 - 2az_1 + (4z_1^2 - 3z_2) &= 0 \\ D &= 4z_1^2 - 4(4z_1^2 - 3z_2) = 12(z_2 - z_1^2) \\ a_{1,2} &= \frac{1}{2}(2z_1 \pm \sqrt{D}) = z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} = z_1 \pm \sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \end{aligned}$$

Ker je $a < b$, je torej

$$\begin{aligned} a &= z_1 - \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \\ b &= z_1 + \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{z_2 - z_1^2} \end{aligned}$$

Cenilka za a je

$$A := Z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{Z_2 - Z_1^2} \quad A := Z_1 \pm \frac{1}{2}2\sqrt{3}\sqrt{Z_2 - Z_1^2} = Z_1 - S_0\sqrt{3} \text{ po prejšnjem primeru} = \bar{X}$$

Cenilka za b je $B = \bar{X} + S_0\sqrt{3}$ Denimo da imamo konkreten vzorec $-2, 0, 1, 2, 4$ ($n = 5$)

$$\bar{X} = \frac{-2+0+1+2+4}{5} = 1$$

$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5}((-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2) = 4$ Vzorčna vrednost za A je $\bar{X} - S_0\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} \doteq -2.46$, vzorčna vrednost z B je $\bar{X} + S_0\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} \doteq 4.46$

2.3.2 Metoda maksimalne zanesljivosti (oz. največjega verjetja)

Definicija 2.9 (Funkcija zanesljivosti). Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametra ξ , torej $p(x; \xi)$. Funkcija zanesljivosti (likelihood function) je

$$L(x_1 \cdots x_n; \xi) = p(x_1; \xi) \cdots p(x_n; \xi)$$

Pri danih $x_1 \cdots x_n$ izberimo tak ξ_{max} , da ima L tam maksimum. Ta vrednost parametra je odvisna od $x_1 \cdots x_n$, torej $\xi_{max} = \phi(x_1, x_2 \cdots x_n)$ za neko funkcijo ϕ . Tako dobimo cenilko $c := \phi(x_1 \cdots x_n)$ za parameter ξ

Primer.

$$p(x; \lambda) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

λ je neznan parameter, ki ga ocenjujemo

$$L(x_1 \cdots x_n; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-(x_1 + \cdots + x_n)}$$

Poiskati moramo λ_{max} , pri katerem je dosežen maksimum funkcije L (oz. maksimum funkcije $\ln(L)$)

$$\begin{aligned} \ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda) &= n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda)) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \implies \lambda_{max} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Ker je $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(x_1 \cdots x_n; \lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$, je v λ_{max} maksimum.

Cenilka za λ je $c := \frac{1}{\bar{X}}$

Isto cenilko dobimo z metodo momentov:

$$z_1 = E(X) = \frac{0}{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{D.N.}}{=} \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\bar{x}}$$

cenilka za λ je $c := \frac{1}{\bar{X}}$

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ, σ neznana parametra, ki ju ocenjujemo

$$\begin{aligned} L(x_1 \cdots x_n; \mu, \sigma) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_n - \mu}{\sigma})^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2} \\ \ln L &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \cdot \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L &= -\frac{1}{2\sigma^2}(2(x_1 - \mu)(-1) + \cdots + 2(x_n - \mu)(-1)) = \frac{1}{\sigma^2}(x_1 - \mu + \cdots + x_n - \mu) = 0 \\ x_1 + \cdots + x_n - n\mu &= 0 \implies \mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) = 0 \\ \implies \sigma^2 &= \frac{1}{n}((x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2) = \\ &= \frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2) = s_0^2 \end{aligned}$$

Cenilka za μ je \bar{X} , cenilka za σ^2 je $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Primer. $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$, $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} q = 1 - p, p$ neznan parameter

$$\begin{aligned} P(X = x) &= p^x (1 - p)^{1-x} x \in \{0, 1\} \\ L(x_1 \cdots x_n; p) &= p^{x_1} (1 - p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n} (1 - p)^{1-x_n} = \\ &= p^{x_1 + \cdots + x_n} (1 - p)^{n - (x_1 + \cdots + x_n)} \\ x &:= x_1 + \cdots + x_n \implies L(x_1 \cdots x_n; p) = p^x (1 - p)^{1-x} x \in \{0, 1 \cdots n\} \\ \ln L &= x \ln p + (n - x) \ln(1 - p) \\ \frac{\partial}{\partial p} \ln L &= \frac{x}{p} - \frac{n - x}{1 - p} = 0 \\ \implies x(1 - p) &= (n - x)p \implies x - xp = np - xp \implies p = \frac{x}{n} = \bar{x} \end{aligned}$$

Cenilka za p je $P := \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Ker je

$$E(P) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = p$$

je P nepristranska cenilka

Ker je

$$D(P) = \frac{1}{n^2}(D(X_1 + \dots + D(X_n))) = \frac{1}{n^2}nD(X_1) = \frac{1}{n}D(X_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

po trditvi sledi, da je \bar{X} dosledna cenilka za P

2.4 Intervalsko ocenjevanje parametrov

Definicija 2.10 (Interval zaupanja). Naj bo gostota slučajne spremenljivke X odvisna od parametra ξ . Interval $[A, B]$ (odvisen le od $(x_1 \dots x_n)$ in ne do ξ) je interval zaupanja za parameter ξ , pri stopnji tveganja $\alpha \in (0, 1)$, če je

$$P(\xi \in [A, B]) = 1 - \alpha \text{ oz. } P(\xi \notin [A, B]) = \alpha$$

Za α običajno vzamemo vrednost 0.05 (ali 0.01)

A in B sta vzorčni statistiki, $1 - \alpha$ je stopnja zaupanja

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo, μ pa je neznan parameter.

Slučajna spremenljivka $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

Pri dani stopnji tveganja α najdemo $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ oz. $P(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$ oz. $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

Pogoj $|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni: $|\bar{X} - \mu| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} A &:= \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \\ &< \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =: B \end{aligned}$$

$[A, B]$ je interval zaupanja za μ pri stopnji tveganja α

Konkreten zgled: imejmo vzorec velikosti $n = 36$, za katerega izračunamo $\bar{x} = 2.6$ in $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.3$. Predpostavimo, da imamo $X \sim N(\mu, \sigma)$ in predpostavimo, da je $\sigma := s = 0.3$ (kar pogosto naredimo, če je n razmeroma velik). Vzemimo $\alpha = 0.05$. Iz tabele razberemo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, torej $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$. Tedaj je vzorčna vrednost za A enaka

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.6 - 1.96 \frac{0.3}{\sqrt{36}} = 2.5$$

vzorčna vrednost za B je $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7$

Interval zaupanja za μ je $[2.5, 2.7]$, t.j.

$$P(\mu \in [2.5, 2.7]) = 1 - \alpha = 0.95$$

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ in σ sta neznana.

Iščemo interval zaupanja za μ .

Slučajna spremenljivka $T := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim Student(n-1)$

Pri danem tveganju α izberemo $t_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ oz.

$$P(T > t_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Sedaj imamo podobno situacijo kot v primeru 1.

Pogoj $|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni

$$A := \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =: B$$

Konkreten zgled: življenska doba žarnic v vzorcu je 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, 9.6 (v dneh), $n = 7$. Predpostavimo normalni model $N(\mu, \sigma)$ z neznanimi parametri μ in σ

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 10.0$$

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.283$$

Vzemimo $\alpha = 0.05$, iz tabele za $Student(5)$ razberemo $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.45$

Vzorčna vrednost za A je $a = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 9.74$

Vzorčna vrednost za B je $b = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 10.26$

Interval zaupanja za μ je $[9.74, 10.26]$, kar zapišemo kot $\mu = 10.0 \pm 0.26$,

Verjetnost, da je $\mu \in [9.74, 10.26]$ je 0.95

Primer. Pri normalni porazdelitvi $N(\mu, \sigma)$ ocenjujemo parameter σ . Vzorčna statistika

$$\chi^2 := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 S$$

je porazdeljena po $\chi^2(n-1)$

Izberimo c_1 in c_2 da je

$$P(\chi^2 < c_1) = \frac{\alpha}{2} = P(\chi^2 > c_2)$$

oz.

$$P(c_1 < \chi^2 < c_2) = 1 - \alpha$$

Pogoj $c_1 < \chi^2 < c_2$ pomeni

$$\begin{aligned} c_1 < \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 < c_2 &\iff \\ \iff \frac{1}{c_1} > \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} > \frac{1}{c_2} &\iff \\ \iff B := \frac{(n-1)s^2}{c_1} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{c_2} =: A \end{aligned}$$

$[A, B]$ je interval zaupanja za σ^2 pri stopnji tveganja α

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{c_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \\ B &= \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Primer. Žarnice iz prejšnjega primera:

$$n = 7, (n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0.481, \alpha = 0.059$$

$$\begin{aligned} \chi^2(6) : c_1 &= 1.24, c_2 = 14.45 \\ a &= \frac{1}{14.45} 0.481 = 0.033, b = \frac{1}{1.24} 0.481 = 0.388 \\ \implies P(0.033 < \sigma^2 < 0.388) &= 0.95 \\ P(0.182 < \sigma < 0.623) &= 0.95 \end{aligned}$$

$[0.182, 0.623]$ je interval zaupanja za σ pri stopnji tveganja 0.05

Primer. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, q = 1 - p, p$ neznan parameter, ki ga ocenjujemo

$(x_1 \cdots x_n)$ vzorec. Potem je $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ in $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ je nepristranska in dosledna cenilka za p . Po CLI (Laplaceovi formuli) je

pri velikih n $Z := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$ oz. $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$ oz. $\bar{X} \sim N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$

Pri danem $\alpha > 0$ izberimo $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je $P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

P Pogoji $|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ pomeni $|S - np| < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{npq}$ oz. $|\bar{X} - p| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$

Če na desni strani naredimo aproksimacijo $\bar{X} \approx p$, dobimo pogoj

$$|\bar{X} - p| < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}}$$

od koder dobimo interval zaupanja za p :

$$\begin{aligned} A &:= \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \\ B &:= \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \\ A &< p < B \end{aligned}$$

Primer. Predsedniške volitve v ZDA leta 2000:

Anketa na 2207 volivcev: $n = 2207, \alpha = 0.05 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

George Bush: 47%, Al Gore: 44%, Ralph Nader: 2%

Določimo intervale zaupanja

$$p_{Bush} = 0.47 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.47(1 - 0.47)}{2207}} \doteq 0.47 \pm 0.02$$

Interval zaupanja za p_{Bush} je $[0.45, 0.49]$

$$p_{Al Gore} = 0.44 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.44 \cdot 0.56}{2207}} \doteq 0.44 \pm 0.02$$

Interval zaupanja za $p_{Al Gore}$ je $[0.42, 0.46]$

$$p_{Nader} = 0.02 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{2207}} \doteq 0.02 \pm 0.006$$

Odstopanje:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} < 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \iff x - x^2 \leq \frac{1}{4} \iff$$

$$\iff 0 \leq x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

2.5 Preizkušanje statističnih hipotez

Definicija 2.11 (Statistična hipoteza). Statistična hipoteza je vsaka domneva o porazdelitvi slučajne spremenljivke X na populaciji

Definicija 2.12 (Enostavnost hipoteze). Hipoteza je enostavna, če natanko določa porazdelitev, sicer je sestavljena

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo, μ je neznan parameter
 $H(\mu = 0)$ je primer enostavne hipoteze. Če σ ne poznamo, je to sestavljena hipoteza

Vedno preizkušamo eno ničelno hipotezo H_0 nasproti alternativni hipotezi H_1

Primer. $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo
 $H_0(\mu = 0) : H_1(\mu \neq 0)$

Za H_0 običajno vzamemo enostavno hipotezo, za katero upamo, da jo bomo zavrnili

Hipoteza je lahko pravilna ali nepravilna. Ideal je sprejeti pravilno in zavrniti nepravilno. Odločiti se moramo na osnovi vzorca. Če vzorčni podatki preveč odstopajo od hipoteze, potem niso konsistentni z njo oz. so razlike značilne (signifikantne); tedaj hipotezo zavrnemo

Vnaprej določimo stopnjo značilnosti $\alpha \in [0, 1]$, to je verjetnost, da zavrnemo pravilo hipotezo. Običajno je $\alpha = 0.05$ ali $\alpha = 0.01$. Take teste imenujemo testi značilnosti

Primeri testov znacilnosti

2.5.1 test Z

$X \sim N(\mu, \sigma)$, σ znan parameter

Ničelna domneva je $H_0(\mu = \mu_0)$, kjer je μ_0 damo realno število

Pri predpostavki $H_0(\mu = \mu_0)$ je $Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ porazdeljena $N(0, 1)$, saj je

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Vzemimo $H_1(\mu \neq \mu_0)$. Tedaj H_0 zavrnemo, če vzorčna vrednost za Z leži na kritičnem območju

$$K_\alpha = (-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

kjer je α stopnja značilnosti in $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

$Z \dots$ testna statistika

Pri stopnji značilnosti α določimo $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, da je

$$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

K_α kritično območje

Če je vzorčna vrednost za Z na K_α , hipotezo H_0 zavrnemo

Primer. Izdelovalec vrvic trdi, da je povprečna sila, pri kateri se vrvica strga 150N s standardno deviacijo 5N. Na vzorcu 50 vrvic ($n = 50$) je bila povprečna sila 148N. Privzamemo normalno porazdelitev $N(\mu, 5)$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$ testiramo hipotezo

$$H_0(\mu = 150) : H_1(\mu \neq 150)$$

Iz tabel razberemo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

Kritično območje $K_\alpha = (-\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty)$

Testna statistika $Z = \frac{\bar{X}-150}{5}\sqrt{50} = (\bar{X} - 150)\sqrt{2}$, njena vzorčna vrednost je

$$z = (148 - 150)\sqrt{2} = -2\sqrt{2} = -2.82$$

Ker je $z = -2.82 \in K_\alpha$, H_0 zavrnemo; razlike so značilne (signifikantne)

Ker gledamo odstopanja v obe smeri, je to dvostranski test Z .

Smislen bi bil enostranski test Z : $H_0(\mu = 150) : H_1(\mu < 150)$

$K_\alpha = (-\infty, -z_\alpha)$, pri $\alpha = 0.01$ je $z_\alpha = 2.33$

Ker $z = -2.82 \in K_\alpha$, H_0 zavrnemo tudi sedaj

2.5.2 test T: $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ neznan

$H_0(\mu = \mu_0) : H_1(\mu \neq \mu_0)$, μ_0 je dano število

Testna statistika

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

S je vzorčna deviacija

Pri predpostavki H_0 je porazdeljena po Student(n-1)

$$K_\alpha = (-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

Če vzorčna vrednost za T leži na K_α , hipotezo zavrnemo

Primer. Nadaljevanje prejšnjega primera

Privzamemo deviacijo 5N izračunano iz vzorca, torej

$$S = 5N, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Kot prej je $\bar{x} = 148N$

Iz tabel razberemo, da je $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.68$ (pri 49 prostorskih stopnjah in $\alpha = 0.01$)

$K_\alpha = (-\infty, -2.68] \cup [2.68, \infty)$, vzorčna vrednost za T je (tako kot prej) $t = -2.82$

Ker $t \in K_\alpha$, H_0 zavrnemo

Primer. V kliničnem poskusu testirajo zdravila za zniževanje krvnega tlaka so 10 bolnikom izmerili sistolično krvni tlak pred in po zdravljenju. Razlike pred-pošo $-8, 0, 2, 4, 9, 14, 19, 22, 32, 35 mmHg$. Predpostavimo normalni model $N(\mu, \sigma)$ z neznanima μ in σ . Testiramo hipotezo $H_0(\mu = 0) : H_1(\mu > 0)$. Naredimo test značilnosti (parametrični test značilnosti)

1. enostranski test T $H_0(\mu = 0) : H_1(\mu > 0)$, $H_0 :=$ zdravilo ne učinkuje
2. stopnja značilnosti $\alpha = 0.05$
3. testna statistika $T = \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{10}$, $n = 10$
4. kritično območje $K_\alpha = [t_\alpha, \infty)$
 $Student(9) \implies t_\alpha = 1.83$
5. vzorčna vrednost za T je

$$t = \frac{12.9}{14.1} \sqrt{10} = 2.89$$

Sklep: ker $t = 2.89 \in K_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo

Definicija 2.13 (P-vrednost). P-vrednost je najmanjša stopnja značilnosti, pri kateri še lahko zavrnemo hipotezo (pro danih vzorčnih podatkih)

V našem primeru je $P = 0.89\% = 0.0089$

2.5.3 Studentov primerjalni test

Imejmo 2 neodvisna vzorca velikosti m in n . Prvi je vzet iz populacije, na kateri ima slučajna spremenljivka $X \sim N(\mu_x, \sigma)$, druga pa iz populacije, na kateri imamo $Y \sim N(\mu_y, \sigma)$. Predpostavljamo torej enakost disperzij. Če sta s_x^2 in s_y^2 povprečni vzorčni disperziji

$$S_X^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$$
$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

potem definiramo skupno vzorčno varianco

$$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2} = \frac{1}{m+n-2} \left(\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right)$$

Testiramo hipotezo $H_0(\mu_x = \mu_y) : H_1(\mu_x \neq \mu_y)$. Testna statistika

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

Potem je

$$\begin{aligned} \bar{X} - \bar{Y} &\sim N\left(0, \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}\right) = \\ &= N\left(0, \sigma \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right) = N\left(0, \sigma \sqrt{\frac{m+n}{mn}}\right) \end{aligned}$$

Zato ima spremenljivka

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0, 1)$$

Ker je spremenljivka

$$U = \frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

je

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{m+n-2}}} \sim Student(m+n-2)$$