

Verjetnost in statistika - zapiski s predavanj

prof. Drnovška

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2022/23

Kazalo

0.1	Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje	1
0.2	Višji momenti in vrstilne karakteristike	4
0.3	Rodovne funkcije	7
0.4	Momentno rodovna funkcija	10
0.5	Šibki in krepki zakon velikih števil	12
0.6	Centralni limitni izrek	15

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2} dx = \\
&E(N(\rho y, \sqrt{1-\rho^2})), \text{ ker je } p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \\
&= \rho \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\
&\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = D(N(0,1)) = 1 \right) \implies = \rho
\end{aligned}$$

Torej sta X in Y nekorelirani $\overset{\text{v splošnem}}{\iff} \rho = 0 \overset{\text{ta primer}}{\iff} X, Y$ neodvisni

Kakšna je gostota, če je ρ blizu 1? $\rho \uparrow 1 : \rho \downarrow -1$:

gostota je skoraj skoncentrirana na neki premici, torej med X in Y obstaja skoraj linearna zveza

0.1 Pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje

Izberimo si dogodek B s $P(B) > 0$

Definicija 0.1. Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na B je $F_X(X | B) := P(X \leq x | B) = \frac{P(X \leq x \wedge B)}{P(B)}$

Ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija

A Diskreten primer

Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor z verjetnostno funkcijo $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$

Za pogoj B vzemimo $B = (Y = y_j)$ pri nekem j , torej $q_j = P(Y = y_j)$

Potem je pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede $F_X(X | Y = y) := \frac{P(X \leq x | Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{1}{q_j} \sum_{j: x_j \leq x} p_{ij}$

Če vpeljemo pogojno verjetnostno funkcije $P_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$, $F_X(X | Y = y_j) = \sum_{i: x_i \leq x} p_{i|j}$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$E(X | Y = y_j) := \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_j \cdot p_{ij}$$

Regresijska funkcija $\ell(y_j) = \sum(X | Y = y_j)$, ki je definirana na zalogi vrednoti slučajne spremenljivke Y

Definirajmo novo slučajno spremenljivko $E(X | Y) = \ell(y)$, ki ji rečemo pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede slučajne spremenljivke Y

$$\text{Ta ima shemo } E(X | Y) = \begin{pmatrix} \ell(y_1) & \ell(y_2) & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X | Y = y_1) & \cdots \\ q_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

Zanjo velja

$$E(X | Y) = \sum_j \ell(y_j) \cdot q_j = \sum_j \sum_i x_i \cdot p_{ij} = \sum_i x_i (\sum_j p_{ij}) = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$$

kjer je $p_i = P(X = x_i)$

Kaj dobimo, če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

Tedaj je $p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_i \cdot q_j}{q_j} = p_i$ in $\ell(y_j) = E(E(X | Y = y_j)) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \sum_i x_i \cdot p_i = E(X)$, torej je regresijska funkcija kar konstanta $E(X)$ oz. je $E(X | Y)$ izrojena slučajna spremenljivka z vrednostjo $E(X)$

Primer. Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Poi(\lambda)$ z $\lambda > 0$. Iz vsakega jajca se z verjetnostjo $p \in (0, 1)$ izvali piščanec, neodvisno od drugih jajc. Naj bo K število piščancev Dolocino $E(K | N)$, $E(K)$ in $E(N | K)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(K = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\ell(n) = E(K | N = n) = E(Bin(n, p)) = n \cdot p$$

torej je $E(K | N) = \ell(n) = p \cdot N$

$$E(K | N) = \begin{pmatrix} p \cdot 0 & p \cdot 1 & p \cdot 2 & \cdots \\ P(N = 0) & P(N = 1) & P(N = 2) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$E(K) = E(E(K | N)) = E(p \cdot N) = p \cdot E(N) = p \cdot \lambda$$

$$\begin{aligned} P(K = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(K = k | N = n) \cdot P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(qk)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda} \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Torej je $K \sim Poi(p \cdot \lambda)$

$$P(N = n | K = k) = \frac{P(N = n, K = k)}{P(K = k)} = \frac{P(K = k | N = n) \cdot P(N = n)}{P(K = k)} =$$

$$= \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{pk! e^{p\lambda}}{(p\lambda)^k} = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-q\lambda} n = k, k+1 \dots$$

To je za k premaknjena Poissonova porazdelitev: $k + Poi(q\lambda)$

Potem je $\psi(k) = E(N | K = k) = E(k + Poi(qk)) = k + q \cdot \lambda$ in zato

je $E(N | K) = \psi(k) = k \cdot q + \lambda$

Preizkus: $E(E(N | K)) = E(k + q \cdot \lambda) = p\lambda + q\lambda = \lambda = E(N)$ (ok)

Regresijsko premico je vpeljal Golten (1822-1911)

B Zvezni primer

Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x, y)$.

Vzemimo $B = (y < Y \leq y + k)$ za nek $y \in \mathbb{R}, k > 0$.

Potem je $F_X(X | y < Y \leq y + k) = P(x \leq x | y < Y \leq y + k) =$

$$\frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + k)}{P(y < Y \leq y + k)} = \frac{F_{(X,Y)}(x, y+k) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+k) - F_Y(y)}$$

Pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$ je limita, če obstaja:

$$F_X(x | Y = y) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(x | y < Y \leq y+h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_{(X,Y)}(x, y+h) - F_{(X,Y)}(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

Denimo sedaj, da sta $p_{X,Y}$ in p_Y zvezni funkciji. Tedaj je $F_X(X | Y =$

$$y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{(X,Y)}(x, y)}{F'_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^x p_{(X,Y)}(x, v) dv$$

Če vpeljemo pogojno gostoto $p_X(x | Y = y) := \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$, je torej

$$F_{(X,Y)}(x | Y = y) = \int_{-\infty}^x p_X(u | y) du$$

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$ je

$$E(X | Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x|y) dx = \frac{1}{p_Y(y)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)}(x, y) dx$$

Vpeljimo regresijsko funkcijo $l(y) := E(X | Y = y)$, definirano na zalogi vrednosti slučajne spremenljivke Y . Tako dobimo novo slučajno spremenljivko $E(X | Y) := l(y)$: pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y .

Kot v diskretnem primeru se pokaže enakost $E(E(X | Y)) = E(X)$

Primer. $(X, Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$

Robna gostota za Y je $N(\mu_y, \sigma_y)$

Zato je pogojna gostota

$$p_X(x | y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)} \stackrel{\text{D.N.}}{=} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(2\pi)(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \rho \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)$$

torej je $N(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2})$

Eksponent: $\frac{1}{2(1-\rho^2)} \sigma_x^2 (x - (\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)))^2$

$\Rightarrow l(y) = E(X | Y = y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$ - 1. parameter

$= \alpha + \beta y : \beta = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \alpha = \mu_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \mu_y$

Torej je $E(x | y) = \alpha + \beta y$

Primer. Meritev onesnaženosti zraka

Slučajna spremenljivka X meri koncentracijo ogljikovih delcev (v $\mu g/m^3$),

Y pa koncentracijo ozona (v $\mu l/l = ppm$)

Podatki kažejo, da ima (X, Y) približno dvorazsežno normalno porazdelitev, $\mu_x = 10.7, \sigma_x^2 = 29, \mu_y = 0.1, \sigma_y^2 = 0.02, \rho = 0.72$

Koncentracija ozona je škodljiva zdravju, če je ≥ 0.3

Denimo, da naprava za merjenje ozona odpove, koncentracija škodljivih delcev je $X = 200$

a kolikšna je pričakovana koncentracija ozona?

b kolikšna je verjetnost, da je stopnja ozona zdravju škodljiva

a

$$E(Y | X = x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) = 0.1 + 0.72 \sqrt{\frac{0.02}{29}}(20 - 10.7) \doteq 0.28$$

b Pogojna porazdelitev $Y | X = x$ je $N(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2}) = N(0.28, 0.1)$

$$P(Y > 0.3 | X = 20) = 1 - P(Y \leq 0.3 | X = 20) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{0.3 - 0.28}{0.1}\right) \doteq 0.42$$

0.2 Višji momenti in vrstilne karakteristike

Definicija 0.2 (Momenti). Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. Moment reda k glede na točko a je $m_k(a) := E((X - a)^k)$ (če obstaja)

Za a običajno vzamemo

1. $a = 0$: $z_k := m_k(0) = E(X^k)$ začetni moment reda k

2. $a = E(X)$: $m_k := m_k(E(X))$ cenralni moment reda k

Očitno je $z_1 = E(X), m_2 = D(X)$

Trditev 0.3. Če $\exists m_n(a)$, potem obstajaj tudi moment $m_k(a)$ za vse $k < n$

Dokaz. (V zveznem primeru):

$$\begin{aligned} E((X-a)^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k p_X(x) dx = \int a - 1^{a+1} (X-a)^k p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx + \int_{(-\infty, a-1) \cup (a+1, \infty)} (x-a)^k p_X(x) dx \leq \\ &\leq 1 + E((X-a)^k) < \infty \end{aligned}$$

■

Trditev 0.4. Če obstaja začetni moment z_n , potem obstaja $m_n(a)$ glede na poljubno točko $a \in \mathbb{R}$

Dokaz.

$$E((X-a)^n) \leq E((|X| + |a|)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(a)^{n-k} \cdot E(|X|^k) < \infty$$

■

Centralne momente lahko izrazimo z začetnimi:

$$\begin{aligned} m_n(a) &= E((X-a)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} E(X^k) \\ a = E(X) &\implies m_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k \end{aligned}$$

Asimetrija slučajne spremenljivke X je $A(X) := E(X_s^3) = E((\frac{X-E(X)}{\sigma_x})^3) = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}} m_2 = \sigma^2 = D(X)$

$A(N(\mu, \sigma)) = 0$, ker $A(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Sploščenost (kurtozis) $K(X) := E(X_s^4) = \frac{m_4}{m_2^2}$

$K(N(\mu, \sigma)) = 3$

Ce momenti ne obstajajo (npr. že $E(X)$ ne), potem si lahko pomagamo z vrstilnimi karakteristikami

Definicija 0.5 (Mediana). Mediana slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja $P(X \leq x) \leq \frac{1}{2}$ in $P(Y \geq x) \geq \frac{1}{2}$ ($1 - P(X < x) = 1 - F(x-)$)

Če je F porazdelitvena funkcija za X , je to ekvivalentno s pogojem $F(x-) \leq \frac{1}{2} \leq F(x)$

Če je X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, dobimo $F(X) = \frac{1}{2}$ oz. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dx = \frac{1}{2}$

Te vrednosti (lahko jih je več) označimo z $X_{\frac{1}{2}}$

Primer.

- $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
 $x_{\frac{1}{2}} = 1, E(X) = \frac{4}{5}$

- $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$
 Mediane so $[0, 1]$

-

- $X \sim N(0, 1)$
 $x_{\frac{1}{2}} = \mu = E(X)$

Definicija 0.6 (Kvantil). Kvantil reda p ($p \in (0, 1)$) je vsaka vrednost x_p , za katero velja $P(X \leq x_p) \geq p$ in $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$
 Ekvivalentno je $F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj $F(x_p) = p$ t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = p$

- Kvartili: $X_{\frac{1}{4}}, X_{\frac{2}{4}}, X_{\frac{3}{4}}$
- Percentili: $X_{\frac{1}{100}}, X_{\frac{2}{100}}, \dots, X_{\frac{99}{100}}$

Primer. Telesna višina odraslih moških

Definicija 0.7 ((Semiinter)kvartilni razmik). $s := \frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$

je nadomestek (analog) za standardno deviacijo

Primer.

- $X \sim N(0, 1)$
 $X_{\frac{1}{2}} = 0$
 $\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} p(t)dt = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{tabelca}} x_{\frac{1}{4}} \doteq -0.67$
 $\xrightarrow{\text{simetrija}} x_{\frac{3}{4}} \doteq 0.67 \implies s = 0.67, \sigma(x) = 1$

- X naj ima Cauchyjevo porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$x_1 = 0$$

Momenti ne obstajajo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{x=-\infty}^{x_1} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\pi} \arctan x_1 + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \\ \arctan x_1 &= \frac{1}{4} \implies x_1 = -1 \\ \xrightarrow{\text{simetrija}} x_1 &= 1, s = 1 \end{aligned}$$

0.3 Rodovne funkcije

Definicija 0.8. Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_k = P(X = k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \dots s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta absolutno konvergira.

Očitno je $G_X(0) = p_0, G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Ker je $s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, je $G_X(s) = E(s^X)$

Za $s \in [-1, 1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq P_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Zato je vrsta konvergentna, če je $|s| \leq 1$. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1

Primer.

- $X \sim \text{geo}(p), p \in (0, 1)$

$$p_k = P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k \\ &= ps \frac{1}{1-qs} \end{aligned}$$

konvergira, ko $|qs| < 1 \Leftrightarrow |s| < \frac{1}{|q|} =: R$

- $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \end{aligned}$$

$$R = \infty \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Iz teorije Taylorjevih vrst sledi

Izrek 0.9 (O eniličnosti). Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y . Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za $\forall s \in [-1, 1] \Leftrightarrow P(X = k) = P(Y = k)$ za vse $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedaj velja $P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^k(0)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_k = P(X = k)$$

Naj ima rodovna funkcija G_X slučajne spremenljivke X konvergenčni radij $R > 1$. Potem za $\forall s \in (-R, R)$ velja $G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1}$

Če postavimo $s = 1$, dobimo $G_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

Izrek 0.10. Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$ in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^n(1-) \equiv \lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1))$$

$$\begin{aligned} \text{Dokaz.} \quad \text{Za } \forall s \in [0, 1) \text{ je } G_X^n(s) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} = \\ &= E(X(X-1)(X-2) \cdots (X-n+1) \cdot s^{X-n}) \end{aligned}$$

Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$\lim_{s \nearrow 1} G_X^n(s) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} =$$

$$\stackrel{\text{Abelova lema}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \lim_{s \nearrow 1} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_k s^{k-n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_k = E(X(X-1) \cdots (X-n+1))$$

■

Posledica 0.11.

$$E(X) = G_X'(1-)$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G_X^{(2)}(1-) + G_X^{(1)}(1-) - (G_X^{(1)}(1-))^2$$

Izrek 0.12. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnima funkcijama G_X in G_Y . Potem je $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$ za $s \in [-1, 1]$

Dokaz. $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \stackrel{\text{izrek}}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$,
saj sta s^X in s^Y neodvisni slučajni spremenljivki ■

Posplošitev 0.13. Če so $X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, potem je za vse $s \in [-1, 1]$ $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s)$.
Če so $X_1, X_2 \dots X_n$ enako porazdeljene in neodvisne, potem je

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = (G_X(s))^n$$

Izrek 0.14. Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $N, X_1, X_2 \dots X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N, X_n pa rodovno funkcijo G_X . Potem ima slučajna spremenljivka $S := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rodovno funkcijo enako $G_S = G_N \circ G_X$ oz. $G_S(s) = G_N(G_X(s))$ za $s \in [-1, 1]$

To je posplošitev formule dd: $P(N = n) = 1, G_N(s) = 1 \cdot s^n = s^n$

Dokaz. Zaradi neodvisnosti imamo $P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = k, N = n) =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, X_1 + \dots + X_n = k) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k)$

Zato je

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S = k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k \right) = \\ &\stackrel{G_{X_1+\dots+X_n}(s) \stackrel{\text{neodvisnost}}{=} (G_X(s))^n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot (G_X(s))^n = G_N(G_X(s)) \end{aligned}$$

za vse $s \in [-1, 1]$ ■

Posledica 0.15. Pri predpostavkah iz izreka velja Waldova enakost:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

Dokaz.

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)) \forall s \in [-1, 1] \quad (1)$$

$$E(S) = G'_S(1-) = G'_N(G_X(1-)) \cdot G'_X(1-) = E(N) \cdot E(X) \quad (2)$$

■

Primer. Kokoš, jajca, piščanci

N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$

K je število piščancev

Definiramo $X_i = 1$ dogodek, da se iz i-tega jajca izvali piščanec, sicer $X_i = 0$.

Potem je $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $q = 1 - p$ in X_i so neodvisne slučajne spremenljivke.

Očitno je $K = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Ker je $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ in $G_X(s) = q \cdot s^0 + p \cdot s = q + ps$, je po izreku $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q+ps-1)} = e^{\lambda(ps-p)} = e^{\lambda p(s-1)} \forall s \in [-1, 1]$, zato je $K \sim Poi(\lambda p)$

0.4 Momentno rodovna funkcija

Definicija 0.16 (Momentno rodovna funkcija). Momentno rodovna funkcija je $M_X(t) = E(e^{tX})$ za $t \in \mathbb{R}$, za katere obstaja matematično upanje

V primeru zvezne porazdelitve je $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$

To je Laplaceova transformacija funkcije p_X

V diskretnem primeru $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ je $M_X(t) = \sum_i e^{tx} p_i$

V posebnem primeru, ko ima X nenegativne celoštevilске vrednosti, je $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p_i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i (e^t)^i = G_X(e^t) \quad (M_X(t) = E((e^t)^X) = G_X(e^t))$$

$$G_X(s) = E(s^X)$$

Očitno je $M_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

Primer.

$$X \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ker je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx$ gostota za $N(0, 1)$

Izrek 0.17. Naj bo $M_X(t) < \infty$ (obstaja, $< \infty$ zato, ker je $e^t > 0$) za $\forall t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z M_X , vsi začetni momenti obstajajo, $z_k = E(X^k) = M_X^k(0)$ za $\forall k \in \mathbb{N}$ in velja $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$ za $\forall t \in (-\delta, \delta)$

Dokaz. (bistvo)

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$$

■

Trditev 0.18. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$, $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

Dokaz. $M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{(at)X} \cdot e^{bt}) = e^{bt} M_X(at)$

■

Izrek 0.19. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

Dokaz. $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \stackrel{e^{tX}, e^{tY} \text{ neodvisni}}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

■

Trditev 0.20. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Potem je $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$

Dokaz. Ker je

$$U := \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0, 1)$$

(standardizacija), je

$$X = \sigma_x \cdot U + \mu_x$$

in zato je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot M_U(\sigma_x t)$$

po zadnji trditvi. Potem je

$$M_U(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

je

$$M_X(t) = e^{\mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

za Y velja podobno. Po zadnjem izreku je

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\frac{\sigma_x^2 t^2}{2} + \mu_x t} \cdot e^{\frac{\sigma_y^2 t^2}{2} + \mu_y t} = \\ &= e^{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)t^2}{2} + (\mu_x + \mu_y)t} \end{aligned}$$

Po izreku je

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$$

■

Opomba. Če bi vedeli, da je $X + Y$ porazdeljena normalno, bi “samo” izračunali parametra

Primer.

$$X \sim N(0, 1), M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} t^{2k}$$

Po drugi strani je $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{j!} t^j \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Primerjamo koeficiente:

- lihi koeficienti: $z_{2k-1} = 0 \quad k \in \mathbb{N}$
- sodi koeficienti:

$$\begin{aligned} \frac{z_{2k}}{(2k)!} &= \frac{1}{k! 2^k} \implies z_{2k} = \frac{(2k)!}{k! 2^k} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!! \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

0.5 Šibki in krepki zakon velikih števil

Definicija 0.21 (Verjetnostna konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verjetnostno konvergira proti slučajni spremenljivki X , če za $\forall \epsilon > 0$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$
oz. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$

Definicija 0.22 (Skoraj gotova konvergenca). Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ skoraj gotovo konvergira proti slučajni spremenljivki X , če velja $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$

Tukaj je $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall k (\in \mathbb{N}) \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} =$$

$$= \{\cap_{k \in \mathbb{N}} \cup_{m \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq m} \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\} \quad (3)$$

Opomba. Števnne unije in preseki \implies smo v σ -algebri, torej je to res dogodek

Trditev 0.23. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = 1$

Dokaz. Označimo $c_m := (|X_n - X| < \epsilon \text{ za } n \geq m) = \cap_{n=m}^{\infty} (|x_n - X| < \epsilon)$.

Potem je $c_1 \subseteq c_2 \subseteq \dots$

je c_m za $\epsilon = \frac{1}{k}$ in $(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_m$ (preseki)

Torej je $1 = P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) \subseteq (\cup_{m=1}^{\infty} c_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m)$

Od tod sledi $\lim_{m \rightarrow \infty} P(c_m) = 1$ ■

Posledica 0.24. Če $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ skoraj gotovo, potem $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ verjetnostno konvergira.

Dokaz. Izberemo $\epsilon > 0$. Potem velja

$$P(|X_n - X| < \epsilon \text{ za } \forall n \geq m) \leq P(|X_m - X| < \epsilon)$$

Če uporabimo trditev, dobimo $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$ (leva stran). ■

Opomba. Obratna implikacija ne velja

Definicija 0.25. Naj bo $X_1, X_2, X_3 \dots$ zaporedje slučajnih spremenljivk, ki imajo matematično upanje. Definirajmo $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$

Potem je $E(Y_n) = 0$

Za $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja šibki zakon velikih števil (ŠZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej za $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} (P(|y| < \epsilon)) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| < \epsilon))$

Za $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja krepki zakon velikih števil (KZVŠ), kadar $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ skoraj gotovo, torej $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$

Če velja KVZŠ, potem velja ŠVZŠ

Primer. Mečemo kocko, X_k je # pik v k-tem metu. Potem je $E(X_k) = \frac{7}{2}$ in $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{7}{2}$

Ali konvergira $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2}$ skoraj gotovo? (Da)

Izrek 0.26.

- a Neenakost Markova: če slučajna spremenljivka X ima matematično upanje, potem je $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ za $\forall a > 0$
- b Neenakost Čebiševa: če slučajna spremenljivka X ima disperzijo, potem je $P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{a^2}$ za $\forall a > 0$ (pomembno za $a \geq 1$, ker je verjetnost ≤ 1)
 oz. če pišemo $\epsilon = a \cdot \sigma(x) \implies P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$ za $\forall \epsilon > 0$

Dokaz. (samo zvezni primer)

a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_x(x) dx \geq \int_{\{|x| \geq a\}} |x| p_x(x) dx \geq$$

$$|a| \int_{\{|x| \geq a\}} p_x(x) dx = a \cdot P(|X| \geq a)$$

b

$$P((X - E(X)) \geq \epsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \stackrel{(a) \text{ za } X-E(X)}{\leq} \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} = \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

■

Izrek 0.27 (Markov). Če za zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, potem velja ŠZVŠ. Tukaj je $S_n := X_1 + \dots + X_n$

Dokaz. V neenakosti Čebiševa vzamemo $X = \frac{S_n}{n}$

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{P(S_n)}{n^2 \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Če vzamemo $Y_n = \frac{|S_n - E(S_n)|}{n}$, je $P(|Y_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

oz. $P(|Y_n| < \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Zato $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ verjetnostno, torej velja ŠZVŠ za zaporedje $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

■

Posledica 0.28 (Izrek Čebišev). Če so X_1, X_2, \dots, X_n paroma nekorelirane slučajne spremenljivke in $\sup_{n \in \mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja ŠVZŠ

Dokaz. Ker je $D(S_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) \leq n \cdot c$, je $\frac{D(S_n)}{n^2} \leq \frac{n \cdot c}{n^2} = \frac{c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, zato po izreku Markova velja ŠZVŠ

■

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$, $E(X_n) = p$, $E(S_n) = n \cdot p$
 Po izreku Čebiševa velja ŠZVŠ: $P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\implies P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

S_n je frekvenca dogodka, $\frac{S_n}{n}$ je relativna frekvenca, $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ verjetnostno

To je Bernoullijev zakon velikih števil iz 1713

Izrek 0.29 (Kolmogorov). Če za neodvisne slučajne spremenljivke $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n^2} < \infty$, potem velja KZVŠ, t.j. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0) = 1$. Posebej je pogoj za vrsto izpolnjen, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Primer. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ neodvisne slučajne spremenljivke, $D(X_n) = pq$

Po izreku Kolmogorova velja KVZŠ, t.j. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ skoraj gotovo. To posplošuje Bernoullijev zakon

0.6 Centralni limitni izrek

Definicija 0.30. Naj bo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk s končnimi disperzijami. Definiramo $S_n := X_1 + \dots + X_n$ in standardizirajmo: $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$, torej $E(Z_n) = 0$, $D(Z_n) = 1$

Za $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja centralni limitni izrek, če je $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)} \forall x \in \mathbb{R}$, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Pracimo, da $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ po porazdelitvi konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi.

Izrek 0.31 (Centralni limitni izrek (CLI, osnovna verzija)). Naj bodo X_1, X_2, \dots neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem zanje velja centralni limitni zakon, t.j.

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokazal je Ljapunov (1900), s tem je posplošil Laplaceov izrek iz leta 1812. V dokazu bomo uporabili

Izrek 0.32 (O zveznosti rodovne funkcije). Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ slučajnih spremenljivk velja:

$$M_{Z_n}(t) \rightarrow M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \text{ za vse } t \in (-\delta, \delta) \text{ pri nekem } \delta > 0$$

Potem $F_{Z_n}(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz. CLI v primeru, ko X_n imajo momentno rodovno funkcijo

$$M_X(t) = E(e^{tX_n}) \text{ na neki okolici točke } 0$$

Naj bo $E(X_n) = \mu$, $D(X_n) = \sigma^2$ in $U_n := X_n - \mu = X_n - E(X_n)$. Torej je $E(U_n) = 0$ in $D(U_n) = \sigma^2$ ter $M_U(t) = 1 + tE(U_n) + \frac{t^2}{2!}E(U_n^2) + o(t^2) =$
 $= 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n)}{n} = 0$)

Ker je $D(S_n) \stackrel{\text{neodvisne}}{=} D(X_1) + \dots + D(X_n) = n \cdot \sigma^2$ in $E(S_n) = n \cdot \mu =$
 $E(X_1) + \dots + E(X_n)$, je $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} =$
 $= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (\sum_{i=1}^n U_i)$

Potem je $M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1 + \dots + U_n)}) = E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_1}) \dots E(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}U_n}) =$
 $\stackrel{\text{enaki}}{=} (M_U(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n = (1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))^n$
 $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{o(\frac{1}{n} \rightarrow 0)} e^{\frac{t^2}{2}}$

Lema 0.33. Če $X_n \rightarrow X$, potem $(1 + \frac{X_n}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^X$

Po prejšnjem izreku: $F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)}(x)$ ■