

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

**М. В. Белодедов, О. М. Михайлова,
М. М. Абулкасимов**

Электротехника

Учебное пособие



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2 0 1 5

УДК 621.371
ББК 32.844
Б43

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/193/book792.html>

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Системы обработки информации и управления»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент Г. В. Богомолов,
канд. техн. наук, доцент В. Б. Маничев

Белодедов, М. В.

Б43 Электротехника : учебное пособие / М. В. Белодедов, О. М. Михайлова, М. М. Абулкасимов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 105, [3] с.

ISBN 978-5-7038-4046-7

Рассмотрены основные темы курса «Электротехника». По каждой теме приведены основные теоретические сведения, рассмотрены примеры расчета электрических узлов и устройств, сформулированы контрольные вопросы. По каждой теме предлагается лабораторная работа, которая может выполняться как с использованием реальных электротехнических элементов, так и в рамках программы-симулятора (Electronics Workbench, MicroCap, Proteus и т. д.).

Для студентов второго курса специальности «Системы обработки информации и управления» факультета «Информатика и системы управления». Может оказаться полезным для студентов других специальностей при изучении дисциплины «Электротехника».

УДК 621.371
ББК 32.844

ISBN 978-5-7038-4046-7

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015

Предисловие

При подготовке инженеров по специальности «Системы обработки информации и управления» крайне важно освоить следующие тесно взаимосвязанные дисциплины: «Электротехника», «Полупроводниковые приборы», «Схемотехника». Часто возникает необходимость повторить пройденный материал или самостоятельно подготовить ту или иную тему по указанным дисциплинам.

В учебном пособии рассмотрены основные темы курса «Электротехника». По каждой теме приведены основные теоретические сведения, рассмотрены примеры расчета электрических узлов и устройств, сформулированы контрольные вопросы, работа над которыми должна способствовать более глубокому изучению дисциплины. По каждой теме предлагается лабораторная работа, которая может выполняться как с использованием реальных электротехнических элементов, так и в рамках программы-симулятора (Electronics Workbench, MicroCap, Proteus и т. д.).

Пособие предназначено для студентов 2-го курса специальности «Системы обработки информации и управления» факультета «Информатика и системы управления» в помощь по изучению учебной дисциплины «Электротехника», а также для выполнения лабораторных работ по этой дисциплине.

1. ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Ключевые слова и термины:

- *электрический потенциал, напряжение, вольт;*
- *сила тока, ампер;*
- *резистор, сопротивление, проводимость, ом, сименс;*
- *закон Ома, правило узлов;*
- *делитель напряжения;*
- *идеальный источник напряжения;*
- *идеальный источник тока;*
- *резистивный сумматор напряжения;*
- *последовательное соединение резисторов;*
- *параллельное соединение резисторов;*
- *законы Кирхгофа;*
- *метод контурных токов;*
- *метод эквивалентного генератора.*

Основные параметры, характеризующие электрические цепи, — это *потенциал электрического поля и сила тока*.

Потенциал электрического поля φ_A произвольной точки A определяется как работа, совершаемая силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Потенциал электрического поля (или просто *потенциал*) измеряется в *вольтах* (В). Абсолютное значение потенциала никакого физического смысла не имеет. Физический смысл имеет только разность потенциалов двух различных точек или одной и той же точки в разные моменты времени. Если электрический заряд q имел потенциал φ_1 , который затем изменился до значения φ_2 , то его потенциальная энергия изменилась на величину $q(\varphi_2 - \varphi_1)$. Один вольт (В) соответствует разности потенциалов, при которой заряд в один кулон (Кл) приобретает энергию в

один джоуль (Дж). Другое название разности потенциалов — *электрическое напряжение* или *напряжение*.

В идеальных проводниках все их точки имеют один и тот же потенциал. На электрических схемах идеальные проводники изображаются сплошными линиями. Пересечение двух проводников обозначается жирной точкой, если они соединены, т. е. имеют одинаковые потенциалы (рис. 1.1).

Разветвление проводников также обозначается жирной точкой (рис. 1.2, *а*). В некоторых зарубежных стандартах разветвление проводников принято обозначать, как на рис. 1.2, *б*.

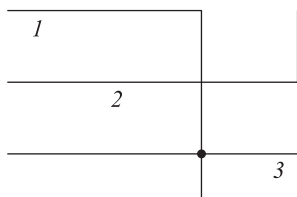


Рис. 1.1. Пересечения проводников: проводники 1 и 2 не соединены, проводники 1 и 3 соединены

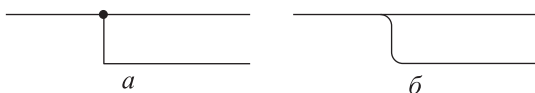


Рис. 1.2. Обозначения разветвления проводников: *а* — по ГОСТу; *б* — по зарубежным стандартам

В проводниках всегда присутствуют свободные заряженные частицы. Если они движутся, и за время T через сечение проводника переносится заряд Q , то говорят, что в проводнике течет электрический ток, имеющий силу (*сила тока*): $I = Q/T$. Сила тока измеряется в *амперах* (А). При силе тока в 1 ампер через сечение проводника за 1 секунду переносится заряд в 1 кулон.

Таким образом, главные величины электрических цепей — потенциал и сила тока. Потенциал имеет каждая точка электрической цепи, силой тока характеризуется каждый одиночный проводник. Физический смысл имеет не потенциал сам по себе, а разность потенциалов.

В проводниках, не являющихся идеальными, ток может течь только тогда, когда между двумя точками проводника присутствует некоторая отличная от нуля разность потенциалов. В этом случае для одного и того же проводника сила тока, протекающего от

точки A к точке B , оказывается пропорциональной разности потенциалов между точками проводника: $I_{AB} \sim \varphi_A - \varphi_B = U_{AB}$. Коэффициент пропорциональности носит название *сопротивление* проводника. Соотношение $I = U/R$ называется *законом Ома*. Единицей измерения сопротивления является *ом*, равный $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} / 1 \text{ А}$. Иногда используют величину, обратную сопротивлению, — *проводимость* $G = 1/R$, измеряемую в *сименсах* (См). Закон Ома в этом случае приобретает вид $I = UG$.

Одним из главных элементов цепей постоянного тока является резистор. Это — *двухполюсник*, т. е. устройство с двумя клеммами, к которым можно присоединять внешние проводники. Резистор полностью характеризуется своим сопротивлением. Обозначение резистора приведено на рис. 1.3.

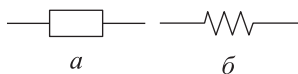


Рис. 1.3. Обозначения резисторов:
 a — по ГОСТу; b — произвольное

Помимо закона Ома, при расчете электрических цепей применяется первый закон Кирхгофа, или правило узлов: *если электрическая схема содержит узел, в котором соединяются три и более проводника, то алгебраическая сумма токов, втекающих в узел, равна нулю:* $\sum_n I_n = 0$.

Направления течения токов в проводниках можно выбирать произвольным образом, например, все втекающие токи — со знаком «плюс», а все вытекающие — со знаком «минус». Другая формулировка первого закона Кирхгофа гласит, что *сумма втекающих токов равняется сумме вытекающих*. Для расчета любой цепи постоянного тока достаточно применить к каждому резистору закон Ома, а к каждому узлу — первый закон Кирхгофа.

Пример 1.1. Делитель напряжения. Входное напряжение U_1 схемы, показанной на рис. 1.4, считается заданным. Требуется найти выходное напряжение U_2 при условии, что к выходу схемы нет никаких подключений.

Решение. В верхнем узле схемы ток вытекающий из нее отсутствует. Поэтому ток I , протекающий через резистор R_1 , протекает и через резистор R_2 .

Разность потенциалов (падение напряжения) на резисторе R_2 , равная по закону Ома величине IR_2 , является выходным напряжением схемы. Сумма падений напряжений на обоих резисторах представляет собой входное напряжение. Таким образом,

$$\begin{cases} U_2 = IR_2; \\ U_1 = IR_2 + IR_1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим $U_2 = U_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

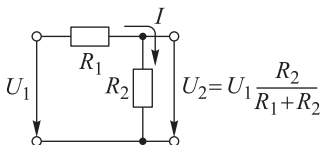


Рис. 1.4. Делитель напряжения



Рис. 1.5. Обозначения «земли»: a — по ГОСТу; $б$ — произвольное

Поскольку абсолютное значение потенциала физического смысла не имеет, одну (произвольную) точку электрической цепи можно объявить имеющей нулевой потенциал. На рис. 1.5 приведены обозначения нулевой точки (применяется также термин «земля»).

Идеальный источник напряжения является двухполюсником, между выходными клеммами которого поддерживается неизменная разность потенциалов. Направление стрелки на рис. 1.6, a соответствует ситуации, когда потенциал верхней клеммы источника выше потенциала нижней. Другое название идеального источника напряжения — источник ЭДС. Направление стрелки соответствует направлению ЭДС.

Аналогично *идеальный источник тока* — это двухполюсник, между клеммами которого протекает неизменный ток. Этот ток будет протекать через любой двухполюсник, подключенный к идеальному источнику тока.

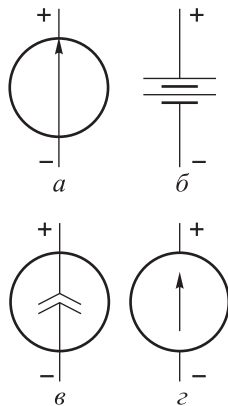


Рис. 1.6. Обозначения идеальных источников: напряжения (a , $б$) и тока ($в$, $з$); a , $в$ — по ГОСТу

Если идеальный проводник ($R = 0$) подключить к идеальному источнику напряжения, то через него потечет бесконечно большой ток: $I = U/R = U/0 = \infty$. Если идеальный изолятор ($R = \infty$) подключить к идеальному источнику тока, то падение напряжения на нем будет равно бесконечности: $U = IR = I \times \infty = \infty$.

Пример 1.2. Несколько источников напряжения подключаются через резисторы к одной точке (рис. 1.7). Найти потенциал этой точки.

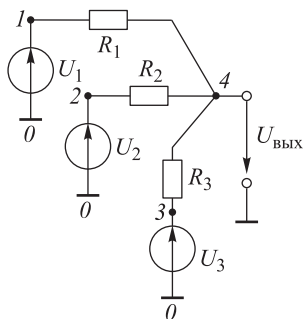


Рис. 1.7. К примеру 1.2

Решение. Обозначим токи, текущие через резисторы, как I_1 , I_2 и I_3 . По закону Ома найдем их значения:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_1} = \frac{U_1 - U_{\text{вых}}}{R_1};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_2} = \frac{U_2 - U_{\text{вых}}}{R_2};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = \frac{U_3 - U_{\text{вых}}}{R_3}.$$

При выводе последних выражений учтено, что $U_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1 - 0 = \varphi_1$, и аналогично $U_2 = \varphi_2$, $U_3 = \varphi_3$, $U_{\text{вых}} = \varphi_4$.

Все токи сходятся в одном узле, поэтому по правилу узлов их сумма равна нулю:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_1 - U_{\text{вых}}}{R_1} + \frac{U_2 - U_{\text{вых}}}{R_2} + \frac{U_3 - U_{\text{вых}}}{R_3} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно выходного напряжения $U_{\text{вых}}$, получим

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_1 / R_1 + U_2 / R_2 + U_3 / R_3}{1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3} = U_1 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1} + U_2 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_2} + U_3 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_3},$$

$$\text{где } R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 = \frac{1}{1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3}.$$

Выходной потенциал схемы оказывается равным взвешенной сумме входных потенциалов, поэтому схема носит название «рези-

тивный сумматор напряжений». Можно показать, что при $R_3 = \infty, U_2 = 0$ схема превращается в делитель напряжения (см. рис. 1.4).

При расчете электрических цепей постоянного тока удобно пользоваться эквивалентными схемами, приведенными на рис. 1.8, 1.9. При последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются: $R = R_1 + R_2$, при параллельном соединении складываются их обратные величины: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_1 + R_2)/R_1 R_2$ — т. е. их проводимости $G = G_1 + G_2$.

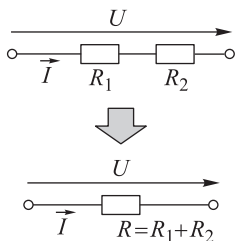


Рис. 1.8. Эквивалентная схема при последовательном соединении резисторов

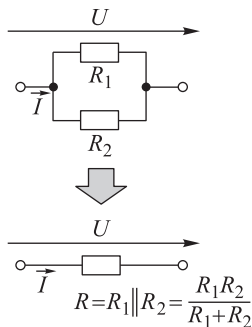


Рис. 1.9. Эквивалентная схема при параллельном соединении резисторов

Что касается произвольного соединения резисторов, то в общем случае не удастся представить его в виде комбинации параллельного и последовательного соединений. Тем не менее подавляющее большинство практических схем можно свести к совокупности таких соединений. Некоторые схемы можно рассчитать, используя эквивалентную замену соединения трех резисторов типа «звезда» (рис.1.10, а) на соединение «треугольник» (рис. 1.10, б).

Эквивалентность замены состоит в том, что величины токов I_1, I_2, I_3 не изменяются. Пересчет «звезды» в «треугольник» и наоборот выполняют по следующим формулам:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}; \quad R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}};$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}};$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}; \quad R_3 = \frac{R_{23} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

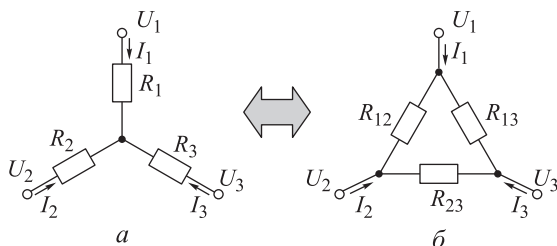


Рис. 1.10. Эквивалентная замена соединения резисторов «звезда» (а) на соединение «треугольник» (б)

Для расчета цепей постоянного тока необходимо для каждого проводника цепи записать закон Ома, а для каждого узла — первый закон Кирхгофа (правило узлов). Этих законов достаточно для расчета любой цепи постоянного тока. На практике удобнее применять специальные методы расчета цепей с меньшим количеством необходимых уравнений:

- применение законов Кирхгофа;
- метод контурных токов;
- метод узловых потенциалов;
- метод наложения;
- метод эквивалентного генератора.

Для изучения этих методов необходимо сформулировать второй закон Кирхгофа следующим образом: *алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура:*

$$\sum_n I_n R_n = \sum_m E_m.$$

Знаки токов положительны, если их направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательны в противном случае. Аналогично знаки ЭДС определяются тем, совпадают ли их направления с направлением обхода контура.

Расчет схем постоянного тока с помощью законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Ветвь можно определить как участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами и заключенный между двумя различными узлами. Обозначим число всех ветвей схемы через N , число узлов — через M . В каждой ветви схемы течет свой ток.

Алгоритм расчета будет следующим:

- произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме;
- произвольно выбрать положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа;
- для произвольно выбранных $M - 1$ узлов записать первый закон Кирхгофа;
- записать второй закон Кирхгофа для $N - M + 1$ контуров, при этом контуры необходимо выбирать так, чтобы получившиеся уравнения были линейно независимыми;
- решить составленную систему N уравнений относительно N токов.

Пример 1.3. Найти токи в ветвях схемы (рис. 1.11).

Решение. Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях. В схеме число ветвей $N = 3$, число узлов $M = 2$. Следовательно, по первому закону Кирхгофа нужно составить только одно уравнение: $I_1 + I_2 = I_3$.

По второму закону Кирхгофа необходимо составить $3 - 2 + 1 = 2$ уравнения.

Положительные направления обхода контуров выбираем по ходу часовой стрелки. Для контура $R_1 E_1 R_2 E_2$ имеем

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2.$$

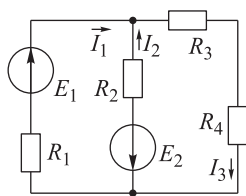


Рис. 1.11. К примеру 1.3

Знак «плюс» перед $I_1 R_1$ взят потому, что направление тока I_1 совпадает с направлением обхода контура; знак «минус» перед $I_2 R_2$ — потому, что направление I_2 встречно обходу контура.

Для контура $E_2 R_2 R_3 R_4$

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2.$$

Решая систему из трех уравнений

$$I_1 + I_2 = I_3;$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2;$$

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2,$$

получим

$$I_1 = \frac{E_1 - I_3 (R_3 + R_4)}{R_1};$$

$$I_2 = \frac{-E_2 - I_3 (R_3 + R_4)}{R_2};$$

$$I_3 = \frac{E_1 / R_1 - E_2 + R_2}{1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)/(R_1 R_2)}.$$

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета один или несколько токов могут оказаться отрицательными, т. е. действительные направления этих токов не совпадают с направлениями, выбранными для них в начале расчета, и они текут в обратном направлении.

Метод контурных токов

При расчете методом контурных токов каждый контур цепи рассматривается отдельно, и для него записывается второй закон Кирхгофа. Токи в отдельных ветвях цепи вычисляются как алгебраическая сумма контурных токов.

Алгоритм расчета следующий:

- выбрать независимые контуры цепи;
- для каждого контура произвольно выбрать направление протекания тока (контурного тока);

- для каждого контура записать второй закон Кирхгофа (направление обхода должно совпадать с направлением контурного тока), и из получившейся системы уравнений найти каждый контурный ток;

- токи в отдельных ветвях цепи вычислить как алгебраическую сумму токов контуров, в состав которых входит ветвь.

Как правило, использование метода контурных токов приводит к меньшему числу уравнений, чем непосредственное использование законов Кирхгофа.

Пример 1.4. Найти токи в ветвях схемы (рис. 1.12).

Решение. В схеме присутствуют два независимых контура. Положим, что в левом контуре по ходу часовой стрелки течет контурный ток $I_{\kappa 1}$, а в правом (также по ходу часовой стрелки) — контурный ток $I_{\kappa 2}$. Для каждого из контуров составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением R_5) течет сверху вниз ток $I^* = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}$. Направления обхода контуров — по ходу часовой стрелки.

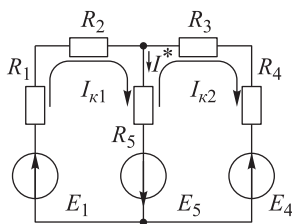


Рис. 1.12. К примеру 1.4

Для первого (левого) контура

$$(R_1 + R_2)I_{\kappa 1} + R_5(I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}) = E_1 + E_5,$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{\kappa 1} + (-R_5)I_{\kappa 2} = E_1 + E_5.$$

Для второго (правого) контура

$$-R_5(I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}) + (R_3 + R_4)I_{\kappa 2} = -E_5 - E_4,$$

или

$$(-R_5)I_{\kappa 1} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{\kappa 2} = -E_5 - E_4.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I_{\kappa 1} + (-R_5)I_{\kappa 2} = E_1 + E_5; \\ (-R_5)I_{\kappa 1} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{\kappa 2} = -E_5 - E_4, \end{cases}$$

получим токи в ветвях схемы:

$$I_{\kappa 2} = \frac{(-E_4 - E_5)(R_1 + R_2 + R_5) + R_5(E_1 + E_5)}{-R_5^2 + (R_3 + R_4 + R_5)(R_1 + R_2 + R_5)};$$

$$I_{\kappa 1} = \frac{-E_1(R_3 + R_4 + R_5) - E_5(R_3 + R_4) + E_4 R_5}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2 + R_5) + R_5(R_1 + R_2)};$$

$$I^* = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2} = \frac{E_4(R_2 + R_1) + E_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + E_1(R_4 + R_3)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2 + R_5) + R_5(R_1 + R_2)}.$$

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора называют иногда методом короткого замыкания и холостого хода или методом активного двухполюсника. С его помощью находят ток в той или иной ветви схемы. Пусть эта ветвь ограничивается точками A и B (ветвь AB) и содержит один резистор R (рис. 1.13).

По отношению к выделенной ветви всю остальную часть схемы при расчете можно заменить последовательно соединенными идеальным источником напряжения и резистором (эквивалентным генератором).

ЭДС источника напряжения в этом случае равна разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, возникающей при отсутствии резистора R ($R = \infty$): $E = (\varphi_A - \varphi_B)|_{R=\infty}$. Сопротив-

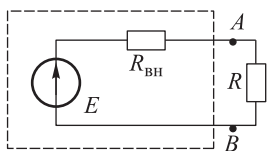


Рис. 1.13. Схема Гельмгольца — Тевенена (эквивалентный генератор)

ление последовательно подключенного резистора $R_{\text{вн}}$ определяется следующим образом: все идеальные источники напряжения, входящие в состав схемы, заменяются идеальными проводниками (замыкаются накоротко), а все идеальные источники тока — идеальными изоляторами (разрыв), затем вычисляется сопротивление всей схемы между точками A и B при отсутствии резистора R .

Схема, показанная на рис. 1.13, называется схемой Гельмгольца — Тевенена (эквивалентный генератор выделен штриховой линией).

Алгоритм расчета:

- найти ЭДС эквивалентного генератора E , как напряжение U_{AB}^* на зажимах разомкнутой ветви AB ;
- определить входное сопротивление $R_{\text{вн}}$ всей схемы по отношению к зажимам A и B при замкнутых накоротко источниках ЭДС всей схемы и разомкнутой ветви AB ;
- вычислить ток ветви AB : $I = \frac{U_{AB}^*}{R + R_{\text{вн}}}$.

Пример 1.5. Определить ток в диагонали ab мостовой схемы (рис. 1.14, a).

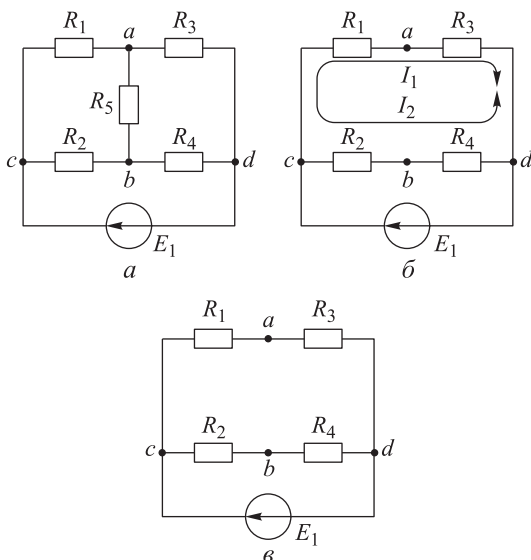


Рис. 1.14. К примеру 1.5:

a — мостовая схема; b — нахождение ЭДС эквивалентного генератора; $в$ — нахождение внутреннего сопротивления

Решение. Разомкнем ветвь ab (рис. 1.14, b) и найдем напряжение U_{ab}^* на зажимах разомкнутой ветви ab :

$$\varphi_a = \varphi_b + I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varphi_b + E_1 \left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right);$$

$$U_{ab}^* = \varphi_a - \varphi_b = E_1 \left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right).$$

Вычислим внутреннее сопротивление всей схемы по отношению к зажимам ab при замкнутом накоротко источнике ЭДС (рис. 1.14, $в$). Точки c и d схемы оказываются соединенными накоротко. Поэтому

$$R_{\text{вн}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Определим ток в диагонали ab :

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_{ab}^*}{R_5 + R_{\text{вн}}} = E_1 \frac{R_2/(R_2 + R_4) - R_1/(R_1 + R_3)}{R_5 + R_1 R_3/(R_1 + R_3) + R_2 R_4/(R_2 + R_4)} = \\ &= E_1 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_5 (R_2 + R_4)(R_1 + R_3) + R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Какова разность потенциалов между концами идеального проводящего гвоздя, ориентированного строго с севера на юг?
2. Какое количество электрического заряда протекает за один час через провод сечением 1 мм^2 с электрическим током 100 мА ?
3. Чему равно сопротивление идеального проводника?
4. Может ли выходное напряжение делителя напряжения быть больше входного?
5. Чему равна сила тока, протекающего через идеальный изолятор, подключенный к идеальному источнику напряжения?
6. Чему равно напряжение на идеальном проводнике, подключенном к идеальному источнику тока?
7. Вычислить общее сопротивление N одинаковых резисторов, соединенных параллельно.

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя электрическую схему для исследования.
2. Вычислить значения параметров схемы, указанные преподавателем.
3. Собрать полученную схему и провести измерения рассчитанных параметров. Сравнить с вычисленными значениями.

Содержание отчета

1. Анализируемая электрическая схема и ее описание.
2. Обоснование выбранного метода расчета схемы и аналитический расчет.
3. Описание процедуры измерений параметров схемы.
4. Сравнение вычисленных и измеренных параметров схемы и объяснение их расхождений.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Ключевые слова и термины:

- нелинейные двухполюсники;
- вольт-амперная характеристика (ВАХ);
- пассивные двухполюсники;
- активные двухполюсники;
- монотонные вольт-амперные характеристики;
- немонотонные вольт-амперные характеристики;
- статическое сопротивление;
- дифференциальное сопротивление;
- падающие участки ВАХ;
- нагрузочная характеристика;
- рабочая точка;
- гистерезис вольт-амперной характеристики.

Как известно, падение напряжения U на резисторе, имеющем сопротивление R и ток I , протекающий через него, связаны линейной зависимостью $I = U/R$. По этой причине резистор называют *линейным двухполюсником*. Любой двухполюсник должен также характеризоваться зависимостью тока от напряжения $I(U)$, которую принято называть *вольт-амперной характеристикой (ВАХ)* двухполюсника. Иногда вольт-амперной характеристикой называют зависимость $U(I)$.

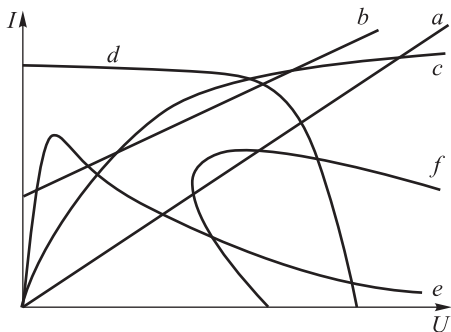
Вольт-амперные характеристики удобно представлять в виде графиков. Типичный вид некоторых типов ВАХ показан на рис. 2.1.

Вольт-амперная характеристика вида *a* представляет собой линейную зависимость, т. е. является ВАХ резистора. Кривая *b* также является линейной зависимостью, но при нулевом напряжении ток не обращается в нуль, и этим она коренным образом отличается от кривой *a*. Двухполюсники, ВАХ которых проходит через точку $(0,0)$, называют *пассивными* двухполюсниками. Вольт-амперные

характеристики a , c и e принадлежат пассивным двухполусникам. Альтернативой им являются *активные* двухполусники, ВАХ которых не проходит через начало координат (b , d , f). В настоящей лабораторной работе рассматриваются только пассивные двухполусники.

Рис. 2.1. Типичные графики ВАХ нелинейных двухполусников:

a , c , e — пассивные двухполусники; b , d , f — активные двухполусники



Вольт-амперные характеристики пассивных двухполусников могут быть линейными (резистор) и нелинейными (кривые c и e на рис. 2.1). Они могут быть также монотонными (кривые a и c) и немонотонными (кривая e). Немонотонные характеристики нелинейных пассивных двухполусников в простейшем случае могут быть двух типов (рис. 2.2).

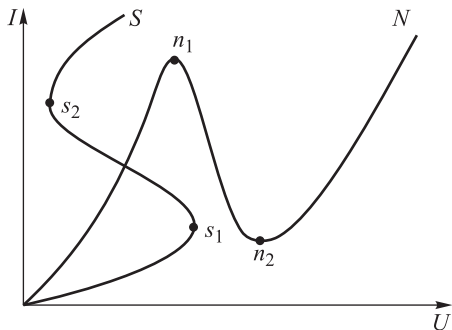


Рис. 2.2. Немонотонные ВАХ нелинейных пассивных двухполусников

Приведенные характеристики S - и N -типов имеют *падающие участки*, на которых увеличение напряжения приводит к уменьшению тока ($s_1 - s_2$ и $n_1 - n_2$). Свойства нелинейного двухполусника можно охарактеризовать либо его вольт-амперной характеристикой,

либо зависимостями его статического и дифференциального сопротивлений от тока (или напряжения).

Статическое сопротивление $R_{\text{ст}}$ характеризует поведение нелинейного двухполюсника в режиме неизменного тока (напряжения). Оно равно отношению напряжения на нелинейном двухполюснике к протекающему по нему току: $R_{\text{ст}} = U/I$. При переходе от одной точки ВАХ к соседней статическое сопротивление изменяется. Под *дифференциальным сопротивлением* $r_{\text{диф}}$ принято понимать отношение малого (теоретически — бесконечно малого) приращения напряжения dU на нелинейном двухполюснике к соответствующему приращению тока dI :

$$r_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI}.$$

Дифференциальное сопротивление характеризует поведение нелинейного двухполюсника при достаточно малых отклонениях от предшествующего состояния. Легко убедиться, что статическое и дифференциальное сопротивления резистора не зависят от режима его работы и равны его сопротивлению:

$$U = IR \Rightarrow r = \frac{dU}{dI} = \frac{d}{dI}(RI) = R.$$

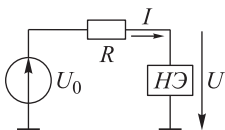


Рис. 2.3. Подключение нелинейного двухполюсника к внешнему источнику напряжения

Для пассивных нелинейных двухполюсников с немонотонными ВАХ дифференциальное сопротивление на падающих участках отрицательно.

Рассмотрим часто встречающуюся в цепях постоянного тока ситуацию: нелинейный пассивный двухполюсник, включенный последовательно с резистором, подключается к внешнему источнику напряжения (рис. 2.3).

Через резистор R и нелинейный двухполюсник (нелинейный элемент — НЭ) протекает один и тот же ток I . Этот ток определяется, с одной стороны, падением напряжения на нелинейном двухполюснике: $I = I(U)$, а с другой — законом Ома: $I = (U_0 - U)/R$. Поэтому

ток, протекающий через двухполюсник, и падение напряжения на нем могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\begin{cases} I = I(U); \\ I = \frac{U_0 - U}{R}. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений является вольт-амперной характеристикой нелинейного двухполюсника, которую можно изобразить на плоскости $U — I$. Второе уравнение определяет прямую линию, проходящую на той же плоскости через точки $I = 0, U = U_0$ и $I = U_0/R, U = 0$. Эта линия носит название *нагрузочной прямой* (рис. 2.4).

Вольт-амперная характеристика и нагрузочная прямая пересекаются в *рабочей точке*, координаты которой определяют ток через нелинейный двухполюсник и напряжение на нем. Для того чтобы измерить ВАХ двухполюсника, необходимо собрать схему согласно рис. 2.3 и, изменяя величину напряжения источника, зафиксировать ток через двухполюсник и падение напряжения на нем. Полученный набор точек образует искомую ВАХ. Для монотонных ВАХ описанная процедура измерения применима без каких-либо оговорок.

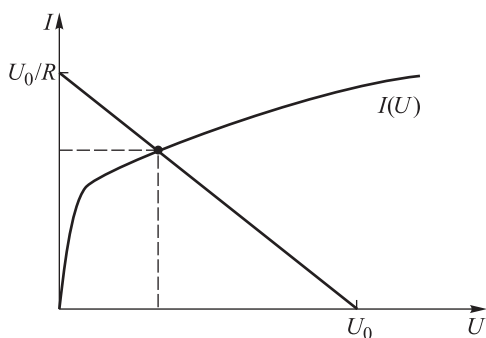


Рис. 2.4. Нагрузочная прямая и рабочая точка

Если же ВАХ двухполюсника обладает участками с отрицательным дифференциальным сопротивлением, возможны некоторые особенности.

На рис. 2.5 показана процедура измерения ВАХ нелинейного двухполюсника, имеющую нелинейность *N*-типа. При изменении входного напряжения в последовательности $U_1-U_2-U_3-U_4-U_5-U_6-$

$U_7-U_6-U_5-U_4-U_3-U_2-U_1$ рабочая точка последовательно занимает положения 1–2–3–4–5–6–7–8–7–6–9–10–3–2–1.

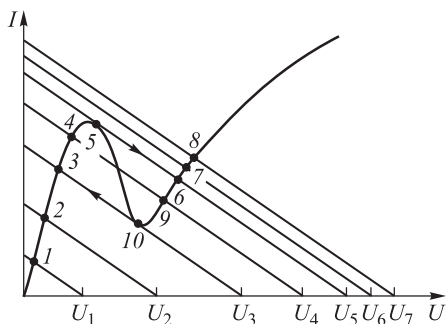


Рис. 2.5. Гистерезис при измерении немонотонной ВАХ нелинейного двухполюсника

Таким образом, участок ВАХ между положениями 5 и 10 рабочей точки оказывается вообще недоступен, и рабочая точка туда не попадает. Это явление называется *гистерезисом* вольт-амперной характеристики. Можно показать, что для того, чтобы избежать явления гистерезиса, двухполюсники с нелинейностью вольт-амперной характеристики *N*-типа следует подключать к идеальному источнику напряжения, а с нелинейностью *S*-типа — к идеальному источнику тока.

Для качественного анализа цепей постоянного тока с нелинейными двухполюсниками полезно использовать свойства их последовательного и параллельного соединения.

При последовательном соединении двухполюсников через них протекает один и тот же ток, а падение напряжения оказывается равным сумме падений напряжения на каждом двухполюснике. Поэтому вольт-амперную характеристику их последовательного соединения следует строить, проводя горизонтальную линию $I = \text{const}$ и складывая напряжения, соответствующие пересечению этой линии с отдельными ВАХ. Этот метод схематично показан на рис. 2.6.

Аналогично при параллельном соединении нелинейных двухполюсников падение напряжения оказывается одинаковым на каждом двухполюснике, в то время как полный ток представляет собой сумму токов, протекающих через каждый из двухполюсников. Поэтому ВАХ параллельного соединения нелинейных двухполюсников схематично выглядит, как показано на рис. 2.7.

Рис. 2.6. Вольт-амперная характеристика Σ последовательного соединения нелинейных двухполюсников 1 и 2

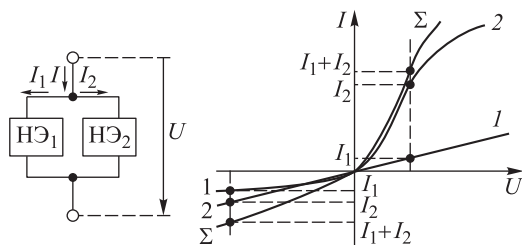
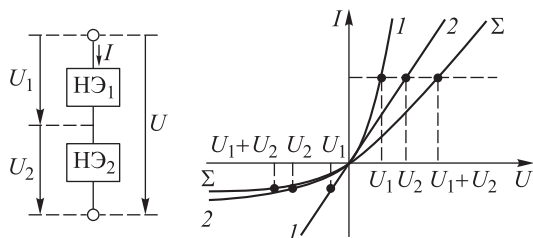


Рис. 2.7. Вольт-амперная характеристика Σ параллельного соединения нелинейных двухполюсников 1 и 2

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются активные двухполюсники от пассивных?
2. Может ли существовать линейный двухполюсник с отрицательным дифференциальным сопротивлением?
3. При каком соединении (параллельном или последовательном) нелинейного двухполюсника, имеющего ВАХ N -типа, с резистором в получившейся ВАХ может отсутствовать падающий участок?
4. При каком соединении (параллельном или последовательном) нелинейного двухполюсника, имеющего ВАХ S -типа, с резистором в получившейся ВАХ может отсутствовать падающий участок?
5. Получите основную формулу делителя напряжения $U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} R_2 / (R_1 + R_2)$, рассматривая резистор как нелинейный двухполюсник в схеме (см. рис. 2.3).

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя схему, моделирующую нелинейный двухполюсник.

2. Собрать схему двухполюсника и измерить его ВАХ. Метод измерений изображен на рис. 2.3. Сопротивление R выбрать таким образом, чтобы на измеренной ВАХ отсутствовал гистерезисный участок.

3. Подключить к анализируемому двухполюснику последовательно или параллельно (по указанию преподавателя) резистор (сопротивление также указывается преподавателем) и графически построить ВАХ получившегося соединения. Измерить значения нескольких точек ВАХ соединения и сравнить их со значениями, полученными графическим способом.

4. Пользуясь измеренной ВАХ, графически построить зависимость статического и дифференциального сопротивлений двухполюсника от приложенного напряжения $r_{\text{диф}}(U)$, $R_{\text{ст}}(U)$. Если полученная ВАХ имеет нелинейность S -типа, то следует построить зависимость дифференциального сопротивления от протекающего через двухполюсник тока $r_{\text{диф}}(I)$.

5. Собрать схему согласно рис. 2.3 со значением U_0 , указанным преподавателем. Используя измеренную ВАХ, рассчитать такое значение сопротивления R , при котором падение напряжения на нелинейном двухполюснике будет составлять $U_0/2$. Измерить положение рабочей точки двухполюсника и сравнить его с рассчитанным.

Содержание отчета

1. Схема анализируемого нелинейного двухполюсника.
2. Таблица измеренных значений вольт-амперной характеристики двухполюсника.
3. График ВАХ двухполюсника.
4. График ВАХ двухполюсника с добавленным резистором и значения нескольких измеренных точек этой характеристики.
5. Построенные зависимости статического и дифференциального сопротивлений двухполюсника от приложенного напряжения (или протекающего тока).
6. Расчет параметров схемы для установки рабочей точки двухполюсника на половинное напряжение источника питания и измеренное положение рабочей точки.

3. ИСТОЧНИКИ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

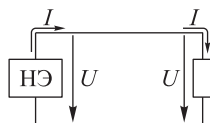
Ключевые слова и термины:

- *источник электрической энергии;*
- *нагрузочная характеристика, внешняя характеристика;*
- *ток короткого замыкания;*
- *напряжение холостого хода;*
- *линейный источник;*
- *внутреннее сопротивление линейного источника.*

Рассмотрим нелинейные активные двухполюсники, т. е. двухполюсники, ВАХ которых не проходят через точку $U = 0, I = 0$. Соединим такой двухполюсник с резистором (рис. 3.1).

При одинаковых падениях напряжения на нелинейном элементе и резисторе токи, текущие через них, имеют противоположные значения. Мощность, рассеиваемая на резисторе, определяется выражением $W = UI$. Из этого следует, что мощность, рассеиваемая на активном двухполюснике, должна иметь отрицательное значение. Это можно интерпретировать так, что активный двухполюсник не поглощает энергию, а выделяет ее. Поэтому активные двухполюсники являются также *источниками электрической энергии*.

Рис. 3.1. Соединение активного двухполюсника и резистора (НЭ — нелинейный элемент)



Вольт-амперная характеристика источника энергии должна содержать точки с положительным значением напряжения и отрицательным значением тока. Для удобства ВАХ источника энергии изображается точками с положительными значениями как тока, так и напряжения. Чтобы подчеркнуть этот факт, гово-

рят не о ВАХ источника, а о его *нагрузочной характеристике*. Другое название нагрузочной характеристики — «*внешняя характеристика*».

Внешняя характеристика любого реального источника должна иметь две характерные точки. Если клеммы источника соединить идеальным проводником (замкнуть накоротко), то разность потенциалов между клеммами будет равна нулю. Величина тока, текущего в проводнике, носит название «*ток короткого замыкания*» ($I_{к.з}$). Кроме того, если к источнику не подключать никакой нагрузки (что равносильно подключению идеального изолятора), ток в цепи, показанной на рис. 3.1, будет равен нулю. Разность потенциалов между клеммами источника в этом случае имеет значение *напряжения холостого хода* ($U_{х.х}$). Характерные точки нагрузочной характеристики изображены на рис. 3.2.

Простейшим примером реального источника является *линейный источник*, нагрузочная характеристика которого — прямая штриховая линия на рис. 3.2. Нагрузочная характеристика линейного источника электрической энергии выражается соотношением

$$U = U_{х.х} - \frac{U_{х.х}}{I_{к.з}} I = U_{х.х} - R_{вн} I.$$

Именно такую нагрузочную характеристику имеют две эквивалентные схемы линейного источника, изображенные на рис. 3.3. Первая из них содержит идеальный источник напряжения (рис. 3.3, б) вторая — идеальный источник тока (рис. 3.3, в).

Сопротивление, входящее в состав обеих схем, носит название «*внутреннее сопротивление источника*». Величину внутреннего сопротивления можно получить, измеряя напряжение холостого хода и ток короткого замыкания. Для определения внутреннего сопротивления можно, однако, не вводить источник в эти режимы работы. Если при нагрузке R_1 источник выдает ток I_1 при напряжении на клеммах U_1 , а при нагрузке R_2 — ток I_2 при напряжении на клеммах U_2 , то внутреннее сопротивление можно рассчитать по формуле

$$R_{вн} = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}.$$

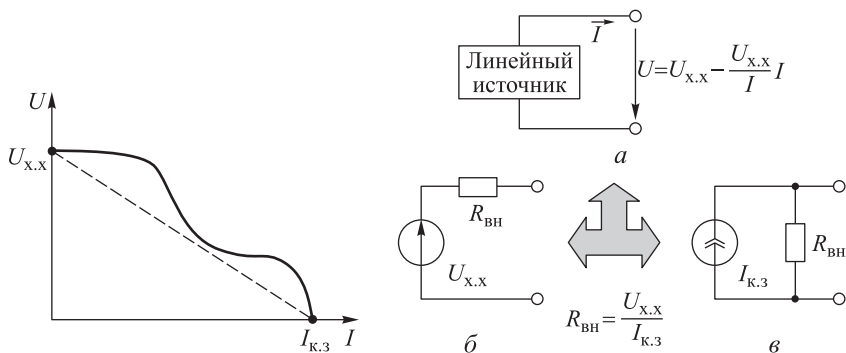


Рис. 3.2. Характерные точки нагрузочной характеристики $U_{x,x}$ и $I_{к.з}$

Рис. 3.3. Эквивалентные схемы (б, в) линейного источника напряжения (а)

При подключении к источнику нагрузки, имеющей сопротивление R , ток I_R , протекающий через нагрузку, и падение напряжения U_R на ней определяются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} U = U(I); \\ U = IR. \end{cases}$$

Ее можно решить графически (рис. 3.4). Ток, протекающий через нагрузку, и падение напряжения на ней определяются координатами точки пересечения нагрузочной характеристики источника и вольт-амперной характеристики нагрузки. Нагрузочной характеристикой идеального источника напряжения является горизонтальная прямая $U = U_{x,x}$, поэтому внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю.

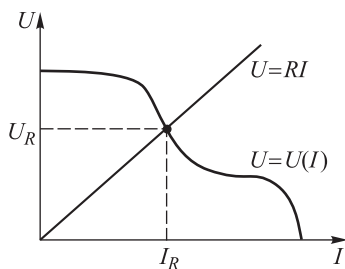


Рис. 3.4. Напряжение и ток, протекающий через нагрузку, подключенную к источнику

Аналогично идеальный источник тока обладает нагрузочной характеристикой $I = I_{к.з.}$, и его внутреннее сопротивление обращается в бесконечность. Идеальные источники как тока, так и напряжения являются теоретической абстракцией и реально не существуют. Для любого реального источника можно указать такие диапазоны изменения нагрузки, в которых при нахождении сопротивления нагрузки внутри них источник можно приближенно считать источником напряжения или источником тока.

Пример 3.1. Для источника, нагрузочная характеристика которого изображена на рис. 3.5, найти диапазоны изменения нагрузки, в которых источник с точностью 2 % можно считать источником напряжения или источником тока.

Решение. В диапазоне значений 19,2...20 В напряжение имеет среднее значение 19,6 В и изменяется не более чем на 2 %. Напряжению 19,2 В соответствует ток 1,7 А, который реализуется при сопротивлении нагрузки $19,2 \text{ В} / 1,7 \text{ А} = 11,63 \text{ Ом}$. Поэтому, если сопротивление нагрузки лежит в диапазоне значений от 11,63 Ом до бесконечности, то источник энергии можно считать источником напряжения. Аналогично, в диапазоне значений 4,8...5 А ток при среднем значении 4,9 А изменяется не более чем на 2 %. Току 4,8 А соответствует напряжение 4 В, что имеет место при сопротивлении нагрузки $4 \text{ В} / 4,8 \text{ А} = 0,83 \text{ Ом}$. Следовательно, при сопротивлении нагрузки 0...0,83 Ом источник является источником тока.

Используемые на практике лабораторные источники энергии, как правило, имеют прямоугольную выходную характеристику, вид которой показан на рис. 3.6.

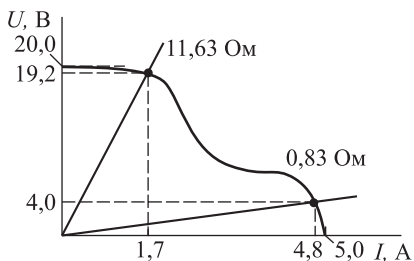


Рис. 3.5. К примеру 3.1

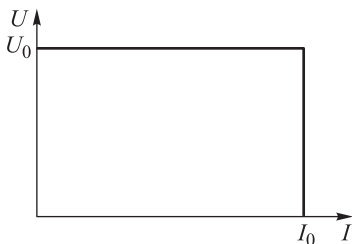


Рис. 3.6. Нагрузочная характеристика лабораторного источника энергии

Поскольку источники энергии являются двухполюсниками, к ним применимы все методы анализа, используемые при расчете двухполюсников. При последовательном соединении источников их нагрузочные характеристики складываются так, что при фиксированном токе складываются напряжения первой и второй нагрузочной характеристик. При параллельном соединении источников при фиксированном напряжении складываются токи первой и второй характеристик. Для линейных источников это означает, что при их последовательном соединении параметры суммарного источника имеют значения

$$U_{x.x\Sigma} = U_{x.x1} + U_{x.x2}; \quad I_{k.3\Sigma} = \frac{U_{x.x1} + U_{x.x2}}{R_1 + R_2}; \quad R_{\Sigma} = R_1 + R_2,$$

а при параллельном соединении эти параметры определяются выражениями

$$U_{x.x\Sigma} = \frac{U_{x.x1}R_2 + U_{x.x2}R_1}{R_1 + R_2}; \quad I_{k.3\Sigma} = I_{k.31} + I_{k.32}; \quad R_{\Sigma} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Приведенными соображениями можно также пользоваться при параллельном или последовательном присоединения резистора к источнику. Сам резистор можно представить как линейный источник с нулевыми значениями напряжения холостого хода и тока короткого замыкания.

Пример 3.2. Рассмотрим источник с нагрузочной характеристикой, изображенной на рис. 3.5. Построить нагрузочные характеристики источника с присоединенным последовательно резистором 5 Ом, а также с присоединенным параллельно резистором 10 Ом.

Решение. Резистор 5 Ом можно представить в виде линейного источника. Его нагрузочная характеристика изображена на рис. 3.7, а. Изобразим на одном графике нагрузочную характеристику исходного источника и нагрузочную характеристику резистора. Затем на фиксированных значениях тока сложим напряжения первой и второй нагрузочной характеристик. Точки полученной кривой образуют нагрузочную характеристику $U_1(I)$ последовательно соединенных исходного источника и резистора 5 Ом, изображенную на рис. 3.7, а.

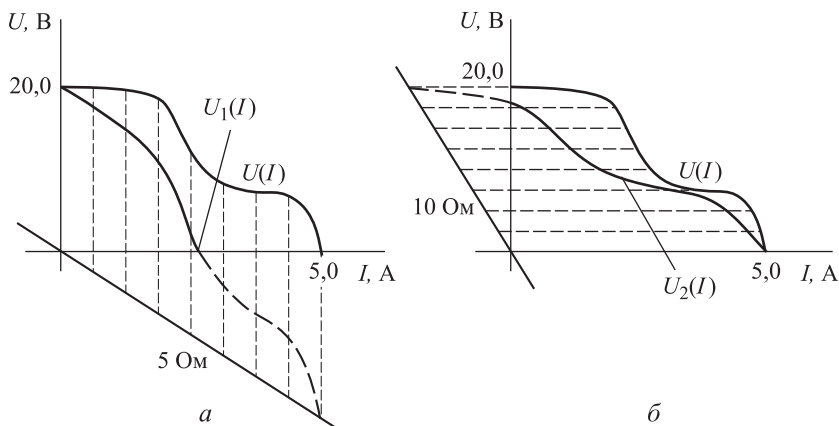


Рис. 3.7. Нагрузочные характеристики $U_1(I)$ и $U_2(I)$:

a — последовательного соединения источника и резистора 5 Ом; b — параллельного соединения источника и резистора 10 Ом

Аналогично нарисуем на одном графике нагрузочные характеристики параллельного соединения исходного источника и резистора 10 Ом (см. рис. 3.7, b). При фиксированных значениях напряжения сложим токи обеих характеристик. Полученные точки образуют нагрузочную характеристику исходного источника с параллельно присоединенным резистором 10 Ом.

На основании примера 3.2 можно сделать следующие выводы:

- при последовательном присоединении резистора к источнику его напряжение холостого хода остается неизменным, а ток короткого замыкания уменьшается;
- при параллельном присоединении резистора к источнику его ток короткого замыкания остается неизменным, а напряжение холостого хода уменьшается.

Контрольные вопросы

1. Являются ли идеальные источники тока и напряжения источниками электрической энергии?
2. Может ли напряжение на клеммах источника быть больше, чем напряжение холостого хода?

3. Может ли ток, выдаваемый линейным источником, быть больше, чем ток короткого замыкания?

4. Возможны ли отрицательные значения при вычислении внутреннего сопротивления источника по формуле $R = -(\Delta U / \Delta I)$?

5. Определите диапазоны изменения нагрузки лабораторного источника (см. рис. 3.6), при которых его можно считать идеальным источником тока и идеальным источником напряжения.

6. Определите параметры источника, являющегося параллельным соединением N одинаковых линейных источников с известными параметрами.

7. Определите параметры источника, являющегося последовательным соединением N одинаковых линейных источников с известными параметрами.

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя данные об источнике электрической энергии.

2. Подключая к источнику резисторы различных номиналов и измеряя напряжение на клеммах источника и ток, выдаваемый источником, снять нагрузочную характеристику.

3. Подключить к источнику резистор с сопротивлением, указанным преподавателем. Пользуясь построенной нагрузочной характеристикой, определить напряжение на резисторе и ток через него. Измерить эти значения и сравнить с расчетными.

4. По построенной нагрузочной характеристике определить диапазоны изменения нагрузки, в которых источник можно считать идеальным источником тока или напряжения.

5. По указанию преподавателя (сопротивление, тип подключения) подключить к источнику резистор. Графически построить нагрузочную характеристику получившегося источника. Подключить к получившемуся источнику 2–3 различных нагрузки и измерить напряжение на них и ток через них. Сравнить с расчетными значениями.

Содержание отчета

1. Таблица измерений напряжения и тока источника при различных сопротивлениях нагрузки.

2. Построенная на миллиметровой бумаге нагрузочная характеристика источника.

3. Графическое определение напряжения на заданной преподавателем нагрузке и тока через нее и их измеренные значения.

4. Графическое определение диапазонов изменения нагрузки, в которых источник является идеальным источником тока или напряжения.

5. Графически построенная нагрузочная характеристика источника с подключенным к нему резистором и результаты измерений напряжения и тока через подключенные к нему нагрузки.

4. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Ключевые слова и термины:

- амплитуда;
- частота, циклическая частота, период колебаний;
- фаза, разность фаз;
- конденсатор, емкость;
- катушка индуктивности, индуктивность;
- комплексная амплитуда;
- комплексное сопротивление, импеданс;
- активное сопротивление;
- реактивное сопротивление;
- частотная характеристика;
- амплитудно-частотная характеристика;
- фазово-частотная характеристика;
- децибел.

В цепях переменного тока все напряжения и токи изменяются во времени по гармоническому закону $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ или $x(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Величину X_0 называют амплитудой, величину ω — частотой переменного тока или напряжения. Иногда за частоту принимают не ω , а $f = \omega/(2\pi)$; в этом случае величину ω называют циклической частотой. Физический смысл частоты f состоит в том, что число периодов переменной величины за одну секунду равно величине f , т. е. $f = 1/T$, где T — период колебаний. Параметр φ называется фазой и в случае, когда рассматривается только одна переменная величина, собственного смысла не имеет. Физический смысл имеет только разность фаз двух переменных сигналов. Если два переменных сигнала с одной частотой оказываются сдвинуты один относительно другого на время Δ , то раз-

ность их фаз составляет величину $\varphi = 2\pi\Delta/T$. Все названные параметры переменных токов и напряжений показаны на рис. 4.1.

Основные элементы цепей переменного тока, помимо резисторов, — конденсаторы и катушки индуктивности. Эти элементы являются двухполюсниками, но, в отличие от ранее рассмотренных двухполюсников, разность потенциалов на этих элементах и сила тока, протекающего через них, связаны не локальной зависимостью (когда ток в данный момент времени полностью определяется значением напряжения в тот же момент времени), а более сложной зависимостью. Обозначения конденсатора и катушки индуктивности на электрических схемах приведено на рис. 4.2.

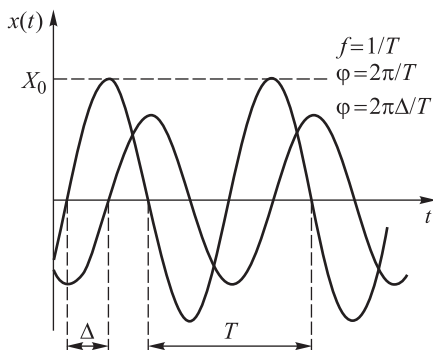


Рис. 4.1. Основные параметры переменных токов и напряжений

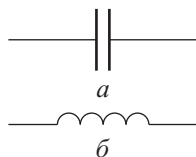


Рис. 4.2. Обозначения конденсатора (a) и катушки индуктивности (б) на электрических схемах

Для конденсатора справедливо соотношение $I = C\dot{U}$, где точкой обозначается производная по времени ($\dot{U} = dU/dt$), а коэффициент C носит название *емкость* конденсатора. Для катушки индуктивности ток и напряжение связаны соотношением $\dot{I} = (1/L)U$, а параметр L называют *индуктивностью*.

Для анализа цепей переменного тока принято использовать комплексные величины. Вычисления с комплексными величинами получаются гораздо проще и нагляднее. Будем использовать также комплексную плоскость, на которой можно изобразить комплексные числа.

Комплексное число имеет действительную (вещественную) Re и мнимую Im части. По оси абсцисс комплексной плоскости (рис. 4.3) будем откладывать действительную часть комплексного числа, а по оси ординат — мнимую часть. На оси действительных значений ставим знак $+1$, а на оси мнимых значений — знак $+j$ ($j^2 = -1$).

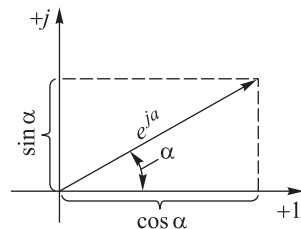


Рис. 4.3. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости

Из курса математики известна формула Эйлера: $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$. Комплексное число $e^{j\alpha}$ изображают на комплексной плоскости вектором длиной, численно равной единице и составляющим угол α с осью вещественных значений (осью $+1$). Угол α отсчитывается против хода часовой стрелки от оси $+1$.

Любая величина, принимающая комплексные значения, может быть представлена в форме $H = H_0 e^{j\alpha}$, где ее амплитуда H_0 и фаза α являются действительными величинами. Согласно формуле Эйлера, эту величину можно записать в виде

$$H = H_0 e^{j\alpha} = H_0 \cos \alpha + j H_0 \sin \alpha.$$

Пусть $\alpha = \omega t + \varphi$, т. е. величина α изменяется прямо пропорционально времени. В этом случае можно записать

$$H = H_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = H_0 \cos(\omega t + \varphi) + j H_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

При этом

$$H_0 \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}(H_0 e^{j(\omega t + \varphi)});$$

$$H_0 \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}(H_0 e^{j(\omega t + \varphi)}).$$

Таким образом, синусоидально изменяющуюся величину, имеющую амплитуду H_0 и начальную фазу φ , можно представить как $\text{Im}(H_0 e^{j(\omega t + \varphi)})$.

Для единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени $\omega t = 0$. При этом вектор $H_0 e^{j\varphi}$ выделяют в отдельную величину

$$\dot{H}_0 = H_0 e^{j\varphi},$$

имеющую комплексное значение; модуль этой величины равен H_0 , а угол, под которым вектор \dot{H}_0 проведен к оси $+1$ на комплексной плоскости, равен начальной фазе φ .

Следует отметить, что обозначение \dot{H}_0 , применяемое во многих учебных пособиях, не имеет ничего общего с также повсеместно используемым обозначением производной по времени.

Величину \dot{H}_0 называют *комплексной амплитудой* величины (например, тока или напряжения), изменяющейся во времени по закону $e^{j\omega t}$.

Рассмотрим воздействие переменного напряжения $U(t) = \dot{U}_0 e^{j\omega t}$ на конденсатор. Ток через конденсатор пропорционален производной напряжения по времени:

$$I(t) = C \frac{dU}{dt} = C \dot{U}_0 \frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega C \dot{U}_0 e^{j\omega t} = \left(\frac{\dot{U}_0}{1/j\omega C} \right) e^{j\omega t},$$

и является переменной величиной с той же частотой, что и напряжение, причем его комплексная амплитуда равна $\dot{I}_0 = \dot{U}_0 / (1/j\omega C)$. Таким образом, комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе связана с комплексной амплитудой тока через него соотношением

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_0}{1/j\omega C}.$$

Аналогично при воздействии того же переменного напряжения на катушку индуктивности ток через нее будет определяться выражением

$$I(t) = \frac{1}{L} \int U(t) dt = \frac{\dot{U}_0}{L} \int e^{j\omega t} dt = \left(\frac{\dot{U}_0}{j\omega L} \right) e^{j\omega t},$$

т. е. будет иметь амплитуду $\dot{I}_0 = \dot{U}_0 / (j\omega L)$. С использованием комплексных амплитуд тока и напряжения последнее выражение записывается в виде

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_0}{j\omega L}.$$

Таким образом, как конденсатор, так и катушка индуктивности проявляют себя аналогично обыкновенному резистору, у которого связь между амплитудой переменного напряжения и амплитудой переменного тока выглядит как $I_0 = U_0 / R$. Этот факт дает основание ввести понятие «*комплексное сопротивление*», или «*импеданс*». Каждый из трех рассмотренных линейных двухполюсников обладает своим импедансом: для конденсатора $Z = 1 / j\omega C$, для катушки индуктивности $Z = j\omega L$ и для резистора $Z = R$ (рис. 4.4).

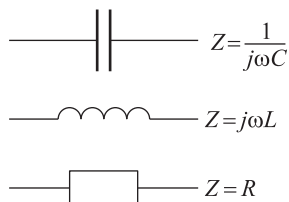


Рис. 4.4. Линейные элементы цепей переменного тока

Для каждого из двухполюсников можно записать аналог закона Ома: $\dot{I} = \dot{U} / Z$, в котором вместо мгновенных значений токов и напряжений фигурируют комплексные амплитуды переменных токов и напряжений, а вместо сопротивления — импеданс или комплексное сопротивление. Импеданс резистора, таким образом, является чисто действительной величиной, а импедансы конденсатора и катушки индуктивности — чисто мнимые величины. Линейные двухполюсники, используемые на практике, в общем случае обладают комплексным сопротивлением $Z = X_R + jX_I$, т. е. их импеданс содержит как действительную часть X_R , так и мнимую — X_I . Действительную часть импеданса часто называют ак-

тивным сопротивлением двухполюсника, а мнимую — его реактивным сопротивлением.

Для узлов цепей переменного тока в каждый момент времени справедлив первый закон Кирхгофа. Из этого следует, что он справедлив также и для комплексных амплитуд токов, втекающих в узел из различных проводников.

Итак, для цепей переменного тока справедливы как закон Ома, так и правило узлов. Из этого следует, что при анализе цепей переменного тока можно применять те же самые методы, что и для расчета цепей постоянного тока, только токи следует интерпретировать как комплексные амплитуды переменных токов, а потенциалы — как комплексные амплитуды переменных потенциалов.

Широкое распространение на практике для расчета цепей переменного синусоидального тока получил метод комплексных амплитуд. Его еще называют символическим или комплексным. Сущность этого метода состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями, к алгебраическим уравнениям для комплексных амплитуд тока и напряжения. Этот переход основан на том, что в любом уравнении, составленном по законам Кирхгофа для установившегося процесса, мгновенное значение тока i заменяют комплексной амплитудой тока \dot{I}_0 ; мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении $u_R = Ri$ — на $R\dot{I}_0$; мгновенное значение напряжения на индуктивности $u_L = L di/dt$ — на $\dot{I}_0 j\omega L$; мгновенное значение напряжения на емкости $u_C = (\int idt)/C$ — на $\dot{I}_0 (-j/(\omega C))$; ЭДС e — на \dot{E}_0 .

Например, для схемы, изображенной на рис. 4.5, уравнение для мгновенных значений можно записать как

$$u_R + u_L + u_C = e,$$

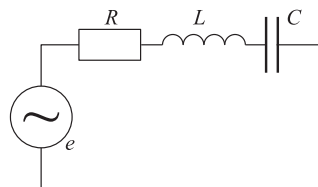
или

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e.$$

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{I}_0 R + \dot{I}_0 j\omega L + \dot{I}_0 \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = \dot{E}_0.$$

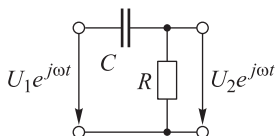
Рис. 4.5. К расчету электрической схемы методом комплексных амплитуд



Из последнего выражения следует, что для схемы на рис. 4.5 справедливо выражение

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_0}{R + j\omega L - j / (\omega C)}.$$

Пример 4.1. На вход цепи (рис. 4.6), подается переменное напряжение с амплитудой U_1 и частотой f . Найти амплитуду выходного напряжения и его фазовый сдвиг относительно входного.



$$|\dot{U}_2| = |\dot{U}_1| \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Рис. 4.6. Резистивно-емкостный делитель напряжения

Решение. Обозначим комплексную амплитуду входного переменного напряжения через \dot{U}_1 , а комплексную амплитуду выходного — через \dot{U}_2 . Поскольку рассматриваемая цепь представляет собой делитель напряжения, комплексные амплитуды входного и выходного напряжений связаны соотношением

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_R}{Z_R + Z_C},$$

где Z_R — импеданс резистора, $Z_R = R$; Z_C — импеданс конденсатора, $Z_C = 1/j\omega C$. Тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Для того чтобы найти амплитуду выходного напряжения необходимо вычислить модуль комплексного числа \dot{U}_2 :

$$\begin{aligned} |\dot{U}_2| &= \left| \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right| = |\dot{U}_1| \left| \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right| = \\ &= |\dot{U}_1| \sqrt{\left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right) \left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right)^*} = |\dot{U}_1| \sqrt{\left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right) \left(\frac{-j\omega RC}{1 - j\omega RC} \right)} = \\ &= |\dot{U}_1| \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = |\dot{U}_1| \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = |\dot{U}_1| \frac{2\pi f RC}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 R^2 C^2}}. \end{aligned}$$

Чтобы найти фазовый сдвиг выходного напряжения, необходимо вычислить действительную и мнимую составляющие комплексной амплитуды выходного напряжения $\text{Re}(\dot{U}_2)$ и $\text{Im}(\dot{U}_2)$ и воспользоваться формулой $\varphi = \text{arctg}(\text{Im}(\dot{U}_2)/\text{Re}(\dot{U}_2))$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \dot{U}_1 \frac{j\omega RC(1 - j\omega RC)}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)} = \\ &= \dot{U}_1 \frac{j\omega RC + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \dot{U}_1 \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\dot{U}_1 \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}; \\ \varphi &= \text{arctg}\left(\frac{\text{Im}(\dot{U}_2)}{\text{Re}(\dot{U}_2)}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\omega RC/(1 + \omega^2 R^2 C^2)}{\omega^2 R^2 C^2/(1 + \omega^2 R^2 C^2)}\right) = \\ &= \text{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1}{2\pi f RC}\right). \end{aligned}$$

В цепях переменного тока большую роль играет *частотная характеристика* цепи. Если на входе цепи переменный сигнал имеет комплексную амплитуду \dot{U}_1 , а на выходе — \dot{U}_2 (такую цепь принято называть *четырёхполюсником*), то частотной характеристикой (или *передаточной функцией*) называется отношение этих комплексных амплитуд, которое в общем случае зависит от частоты: $\dot{H}(\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$. Поскольку частотная характеристика является комплексной величиной, можно выделить ее амплитуду и фазу:

$$\dot{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \operatorname{Re} \dot{H}(\omega) + j \operatorname{Im} \dot{H}(\omega);$$

$$H(\omega) = |\dot{H}(\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} \dot{H}(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} \dot{H}(\omega)]^2};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \dot{H}(\omega)}{\operatorname{Re} \dot{H}(\omega)}.$$

Амплитуда частотной характеристики называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а ее фаза — *фазово-частотной характеристикой* (ФЧХ). В рассмотренном примере частотная характеристика цепи равна $j\omega RC/(1 + j\omega RC)$, а ее АЧХ и ФЧХ — соответственно $\omega RC/\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$ и $\operatorname{arctg}(1/\omega RC)$.

Пример 4.2. Найти амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики моста Вина — Робинсона (рис. 4.7).

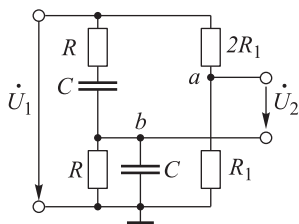


Рис. 4.7. Мост Вина — Робинсона

Решение. На вход схемы, показанной на рис. 4.7, сигнал подается относительно общей точки с нулевым потенциалом. Выходной сигнал снимается между точками *a* и *b*. На входе схемы переменный сигнал имеет комплексную амплитуду \dot{U}_1 , а на выходе — \dot{U}_2 . В точке *a* относительно общей точки омический делитель напряжения обеспечивает частотно-независимое напряжение

$$\dot{U}_a = \dot{U}_1 \frac{R_1}{R_1 + 2R_1} = \frac{1}{3} \dot{U}_1.$$

В точке *b* относительно общей точки напряжение будет иметь значение

$$\dot{U}_b = \dot{U}_1 \frac{1/[1/R + j\omega C]}{[1/(1/R) + j\omega C] + R + 1/(j\omega C)} = \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC} =$$

$$= \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC} = \dot{U}_1 \frac{j\Omega}{1 + 3j\Omega - \Omega^2},$$

где $\Omega = \omega RC$. Выходной сигнал равен разности потенциалов точек a и b :

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_a - \dot{U}_b = \frac{1}{3}\dot{U}_1 - \frac{j\Omega}{1 + 3j\Omega - \Omega^2}\dot{U}_1.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{3} \frac{1 - \Omega^2}{1 + 3j\Omega - \Omega^2} = \frac{(1 - \Omega^2)(3 - 3\Omega^2) - j9\Omega(1 - \Omega^2)}{(3 - 3\Omega^2)^2 + (9\Omega)^2}.$$

АЧХ и ФЧХ определяются как

$$H(\omega) = |\dot{H}(\omega)| = \frac{|1 - \Omega^2|}{3\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{3\Omega}{\Omega^2 - 1}, \quad \Omega \neq 1.$$

Строить графики АЧХ четырехполюсников принято в двойном логарифмическом масштабе, удобном для отображения как очень низких, так и очень высоких частот. При использовании логарифмического масштаба относительные изменения величины отображаются на графике одинаковыми интервалами. Положения меток частот на горизонтальной оси определяют формулой $l = l_0 \lg(f/f_0)$, где частота f_0 выбирается из удобства построения графика (вертикальная ось графика будет пересекать горизонтальную именно в частоте f_0), а величина l_0 определяет масштаб по горизонтальной оси (длина l_0 в мм, см и т. д. соответствует десятикратному увеличению частоты), а по вертикальной оси откладывается АЧХ, выраженная в децибелах, т. е. величина $20 \lg |\dot{H}(\omega)|$.

Пример 4.3. АЧХ некоторой цепи имеет на некоторой частоте значение $1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Найти ее значение в децибелах.

Решение.

$$H_{\text{дБ}} = 20 \lg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -20 \lg \sqrt{2} = -20 \cdot \frac{1}{2} \lg 2 = -10 \cdot 0,301 = -3,01 \text{ дБ.}$$

На рис. 4.8 и 4.9 приведены АЧХ и ФЧХ резистивно-емкостного делителя и моста Вина — Робинсона. Для графика АЧХ использован двойной логарифмический масштаб, на графике ФЧХ логарифмический масштаб применяют только для оси частот, значения фазы приведены в линейном масштабе.

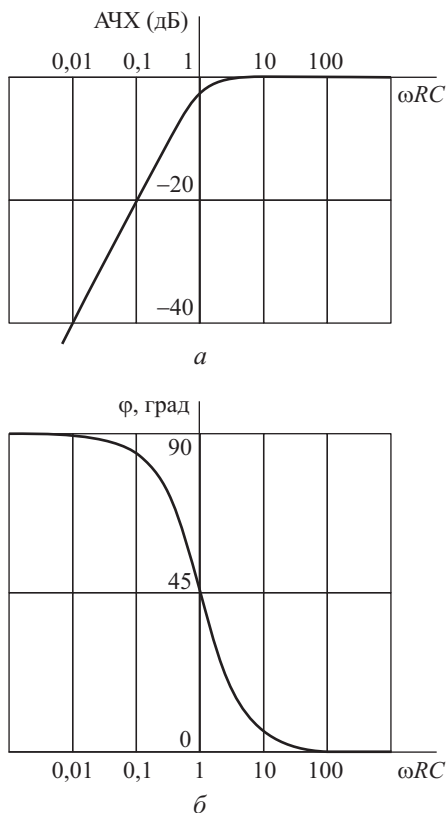


Рис. 4.8. АЧХ (а) и ФЧХ (б) резистивно-емкостного делителя

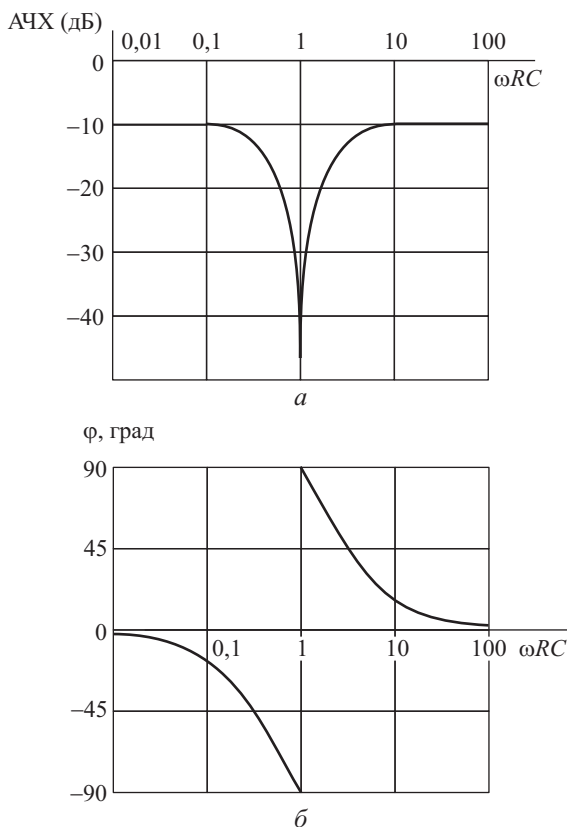


Рис. 4.9. АЧХ (а) и ФЧХ (б) моста Вина — Робинсона

Контрольные вопросы

1. Два переменных сигнала связаны соотношением $U_1(t) = -U_2(t)$. Найти фазовый сдвиг между этими сигналами.
2. Изобразить два переменных сигнала одинаковых амплитуд, сдвинутых по фазе один относительно другого на 120° .
3. Может ли импеданс конденсатора на какой-либо частоте быть равным импедансу катушки индуктивности?
4. Может ли АЧХ принимать отрицательные значения?

5. Вычислить АЧХ и ФЧХ резистивного делителя напряжения.
6. Пусть АЧХ на частоте $\omega = 0$ имеет значение 1. Отобразить этот факт в двойном логарифмическом масштабе.
7. Пусть АЧХ на частоте ω_0 имеет значение 0. Отобразить этот факт в двойном логарифмическом масштабе.

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя схему цепи переменного тока.
2. Методом комплексных амплитуд рассчитать частотную характеристику цепи, ее АЧХ и ФЧХ.
3. Собрать полученную схему.
4. Подключить ко входу цепи генератор переменного напряжения. Изменяя частоту генератора, измерить с помощью осциллографа отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного и фазовый сдвиг между сигналами для разных частот.
5. Пользуясь полученными результатами, построить АЧХ и ФЧХ исследуемой цепи. При построении ФЧХ для оси частот использовать логарифмический масштаб, а для оси значений — линейный. При построении АЧХ использовать двойной логарифмический масштаб. На тех же графиках построить рассчитанные АЧХ и ФЧХ.
6. На построенном графике АЧХ исследуемой цепи отметить частоты, на которых АЧХ в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального значения.

Содержание отчета

1. Полученная схема цепи переменного тока и расчет ее частотной характеристики методом комплексных амплитуд.
2. Таблица результатов измерений АЧХ и ФЧХ.
3. Построенные на одном графике в двойном логарифмическом масштабе рассчитанная и измеренная АЧХ.
4. Построенные на одном графике в логарифмическом масштабе рассчитанная и измеренная ФЧХ.
5. Значения частот, на которых АЧХ цепи в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального значения.

5. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Ключевые слова и термины:

- *последовательный колебательный контур;*
- *резонансная частота контура;*
- *характеристическое сопротивление контура;*
- *резонанс напряжений;*
- *параллельный колебательный контур;*
- *резонанс токов;*
- *ширина полосы пропускания;*
- *добротность.*

Колебательные контуры — цепи, содержащие конденсаторы и катушки индуктивности (реактивные элементы), широко применяются в радиотехнических устройствах. При этом используют резонансные свойства колебательных контуров. Частотная характеристика такой цепи обязательно содержит член вида $(\omega^2 LC - 1)$, который обращается в нуль при частоте входного сигнала $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Это значение частоты обычно называется *резонансной частотой* контура. В зависимости от способа соединения конденсатора и катушки индуктивности различают последовательный и параллельный колебательные контуры.

Рассмотрим некоторые типовые схемы. На рис. 5.1 изображен последовательный колебательный контур.

Определим ток в контуре при подключении к нему источника переменного напряжения. Применяя метод комплексных

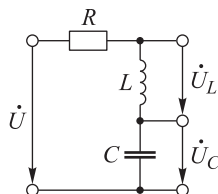


Рис. 5.1. Последовательный колебательный контур

амплитуд, представим комплексную амплитуду тока в виде выражения

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L - j/(\omega C)} = \frac{\dot{U}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{|\dot{U}|}{|Z|} e^{-j\varphi},$$

где $Z = R + j(\omega L - 1/(\omega C))$ — комплексное сопротивление последовательного контура; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$ — сдвиг фаз между током и напряжением.

Комплексные амплитуды напряжений на реактивных элементах контура имеют значения

$$\dot{U}_L = \dot{I} j\omega L = \dot{U} \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))} = \dot{U} \frac{\omega L}{|Z|} j e^{-j\varphi} = \dot{U} \frac{\omega L}{|Z|} e^{j(-\varphi + \pi/2)};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= \dot{I} \frac{1}{j\omega C} = \dot{U} \frac{1}{j\omega C (R + j(\omega L - 1/(\omega C)))} = \\ &= \dot{U} \frac{1}{\omega C |Z|} (-j) e^{-j\varphi} = \dot{U} \frac{1}{\omega C |Z|} e^{j(-\varphi - \pi/2)}, \end{aligned}$$

поскольку $j = e^{j\pi/2}$, $-j = e^{-j\pi/2}$.

При равенстве частоты внешнего источника резонансной частоте контура $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ член $\omega L - 1/(\omega C)$, входящий в полученные выражения, принимает нулевое значение, и амплитуда тока в контуре достигает наибольшей возможной (при заданной амплитуде входного напряжения $U = |\dot{U}|$) величины $I_p = U/R$.

Амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, пропорциональные току, при резонансной частоте $\omega = \omega_p$ достигают соответственно величин

$$U_{Lp} = \left| \dot{U}_L \right|_{\omega=\omega_p} = U \frac{\omega_p L}{R} \text{ и } U_{Cp} = \left| \dot{U}_C \right|_{\omega=\omega_p} = U \frac{1}{\omega_p C R}.$$

Реактивные сопротивления конденсатора и катушки индуктивности на резонансной частоте становятся равными одной и той же

величине, которая называется *характеристическим (волновым) сопротивлением*:

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Используя введенную величину, можно представить амплитуды напряжений на реактивных элементах контура при резонансе в виде

$$U_{Lp} = U_{Cp} = U \frac{\rho}{R},$$

т. е. они превышают амплитуду U внешнего напряжения, действующего на контур, в ρ/R раз. Отсюда и происходит название *резонанс напряжений* или *последовательный резонанс*.

Считая амплитуду входного напряжения U и параметры контура неизменными, рассмотрим зависимости $I(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$I(\omega) = |\dot{I}(\omega)| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Безразмерное отношение $\nu(\omega) = \frac{I(\omega)}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$

обычно называется *резонансной кривой* последовательного колебательного контура.

Используя ранее введенные обозначения $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$, $\rho/R = \omega_p L/R = 1/(\omega_p RC)$, легко получить

$$\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right].$$

Графики $\nu(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ последовательного колебательного контура для некоторых значений ρ/R (в различных масштабах) приведены на рис. 5.2.

Как видно из рис. 5.2, последовательный колебательный контур можно рассматривать как полосовой фильтр, пропускающий переменные сигналы в узкой области частот. *Полосой пропускания* полосового фильтра принято называть полосу частот $\Delta\omega$ вблизи резонансной частоты, на границах которой АЧХ фильтра (или резонансная кривая) принимает значение $1/\sqrt{2}$ (или -3 дБ) от резонансного значения. Полосовые фильтры принято характеризовать также *добротностью* $Q = \omega_p / \Delta\omega$. Для последовательного колебательного контура $Q = \rho/R$.

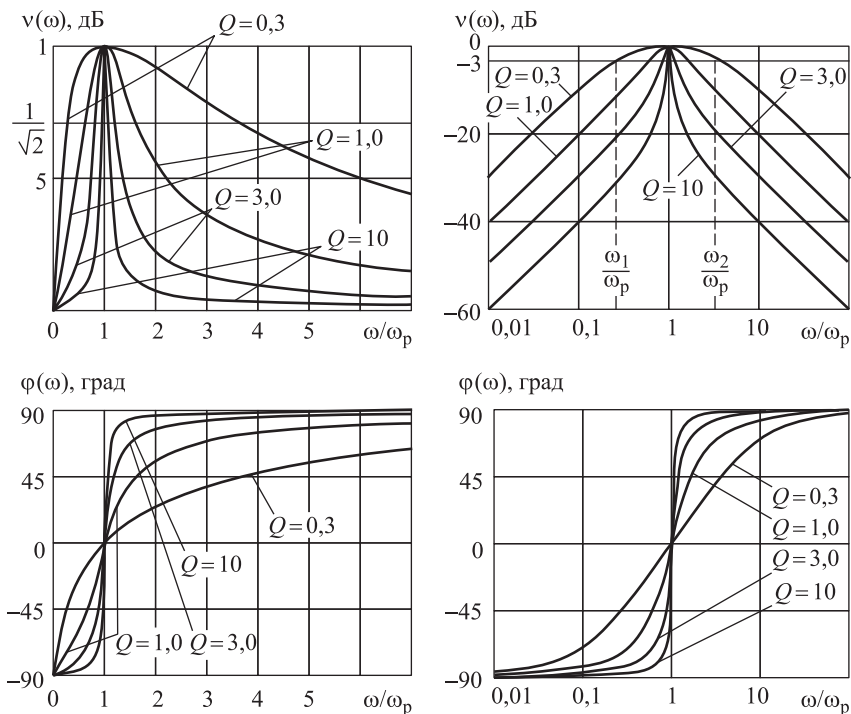


Рис. 5.2. Зависимости $\nu(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ последовательного колебательного контура для некоторых значений добротности Q (в различных масштабах)

Рассмотрим параллельный колебательный контур, изображенный на рис. 5.3. Подключим к нему идеальный источник переменного напряжения.

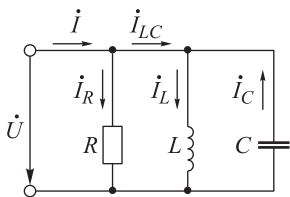


Рис. 5.3. Параллельный колебательный контур

Определим ток в контуре. Применяя метод комплексных амплитуд, представим комплексную амплитуду тока в виде выражения

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{1/\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right]} = \frac{\dot{U}}{1/\left[\frac{1}{R} + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}\right)\right]} = \frac{|\dot{U}|}{|Z|} e^{-j\varphi},$$

где $Z = \frac{(\omega L)^2 R - j\omega L R^2 (\omega^2 LC - 1)}{(\omega L)^2 + R^2 (\omega^2 LC - 1)^2}$ — комплексное сопротивление

параллельного контура; $\varphi = \arctg\left(-\frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}\right)$ — сдвиг фаз между током и напряжением.

Кроме того, полный ток контура является суммой токов, протекающих через резистор, конденсатор и катушку индуктивности:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + j\omega C \dot{U} = \frac{\dot{U}}{R} + \left(\frac{-j\dot{U}}{\omega L}\right) + \dot{U} j\omega C.$$

Как видно из последнего выражения, токи \dot{I}_L и \dot{I}_C текут в противофазе (у одного тока есть множитель $-j$, а у другого — множитель j).

При резонансной частоте $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_p$ амплитуда тока в контуре принимает значение

$$I_p = \frac{U}{R} = I_R.$$

Амплитуды токов через катушку индуктивности L и конденсатор C , пропорциональные напряжению, при резонансной частоте $\omega = \omega_p$ имеют значения

$$I_{Lp} = \frac{U}{\omega_p L} = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho};$$

$$I_{Cp} = U(\omega_p C) = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho}.$$

Следовательно, на резонансной частоте токи, текущие в реактивных элементах, превышают общий ток в контуре в R/ρ раз. Отсюда и происходит название «резонанс токов» или «параллельный резонанс».

Считая амплитуду входного напряжения U и параметры контура неизменными, рассмотрим зависимости $I(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$I(\omega) = |\dot{I}(\omega)| = \left| \dot{U} \left(\frac{1}{R} + j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right) \right| = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{(\omega^2 LC - 1)^2}{(\omega L)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \left(-\frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L} \right).$$

Уравнение резонансной кривой параллельного контура имеет вид

$$v(\omega) = \frac{I(\omega)}{I_p} = \sqrt{1 + \frac{R^2(\omega^2 LC - 1)^2}{(\omega L)^2}}.$$

Используя прежние обозначения

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p RC},$$

легко получить

$$v(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{R}{\rho} \left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right].$$

Графики $v(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для некоторых значений R/ρ приведены на рис. 5.4.

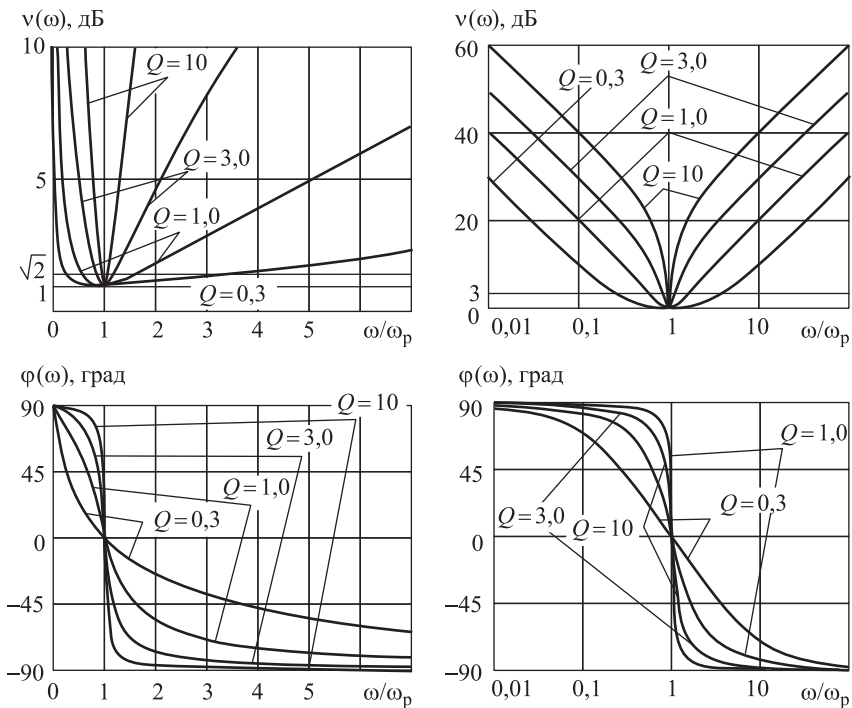


Рис. 5.4. Зависимости $v(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ параллельного колебательного контура для некоторых значений добротности Q (в различных масштабах)

Если параллельный колебательный контур подключить не к источнику переменного напряжения, а к источнику переменного тока, то зависимость падения напряжения на контуре от частоты определяется выражением

$$\frac{U(\omega)}{U_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/\rho)^2 (\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)^2}},$$

где U_p — падение напряжения на контуре при $\omega = \omega_p$. Полученная зависимость по форме совпадает с резонансной кривой последовательного колебательного контура при определении добротности параллельного контура как $Q = R/\rho$.

Как было рассмотрено ранее, для последовательного колебательного контура добротность равна ρ/R , т. е. для ее увеличения необходимо уменьшать сопротивление резистора, а для параллельного колебательного контура она равна отношению R/ρ и для ее увеличения сопротивление резистора необходимо повышать.

Большое прикладное значение имеет также импульсная характеристика колебательного контура — его реакция на короткий импульс:

$$h(t) = e^{-\frac{\omega_p t}{2Q}} \sin\left(\omega_p t \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}\right),$$

представляющая собой гармонические колебания с частотой $\omega_c = \omega_p \sqrt{1 - 1/(2Q)^2}$, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону (рис. 5.5).

Такие колебания (т. е. отклик контура на короткий импульс) называют *свободными колебаниями* контура. Частота свободных колебаний контура отличается от его резонансной частоты на коэффициент $\sqrt{1 - 1/(2Q)^2}$. Для колебательных контуров с высоким значением добротности частота свободных колебаний приближается к резонансной частоте. Можно показать, что для высокодобротных контуров амплитуда свободных колебаний уменьшается в 2 раза после $N = Q \ln 2/\pi \approx 0,22Q$ периодов колебаний. Поскольку используемые на практике конденсаторы и катушки индуктивности

обязательно имеют паразитные проводимости и сопротивления, колебательные контуры, построенные на их основе, как правило, не могут иметь значения добротности, большие, чем 500.

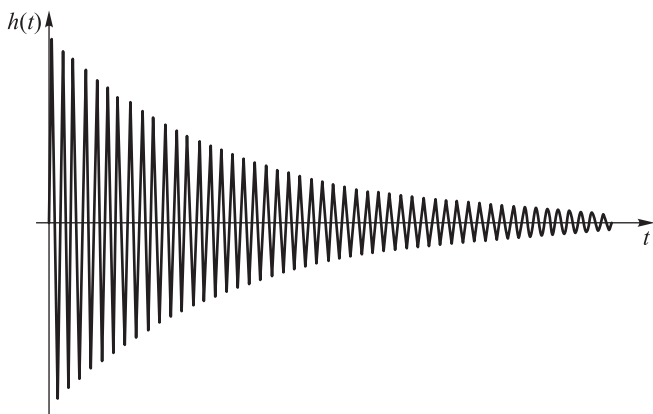


Рис. 5.5. Свободные (собственные) колебания колебательного контура

Понятие добротности распространяется также и на другие колебательные системы, отличные от LC -контуров. Добротность системы всегда равняется отношению резонансной частоты к полосе пропускания системы:

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega}.$$

Например, для кварцевых резонаторов значения добротности достигают величин $10^6 \dots 10^7$.

Пример 5.1. Рассчитать параллельный колебательный контур с резонансной частотой 100 кГц и добротностью 100. Определить частоту собственных колебаний контура.

Решение. На основании значений резонансной частоты и добротности составим систему уравнений:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100 \text{ кГц}; \quad Q = \frac{R}{\rho} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 100.$$

Выберем значение сопротивления $R = 1 \text{ кОм}$. Решая систему, получим номиналы элементов контура:

$$L = \frac{100}{2\pi} \text{ мкГн} \approx 15,9 \text{ мкГн}; \quad C = \frac{1}{2\pi} \text{ мкФ} \approx 159 \text{ нФ}.$$

Частота свободных колебаний контура принимает значение

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_p \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}{2\pi} = 99,998 \text{ кГц},$$

т. е. практически не отличается от резонансной частоты.

Контрольные вопросы

1. В каком частотном диапазоне колебательный контур можно заменить эквивалентной индуктивностью или емкостью?

2. На каких частотах последовательный колебательный контур имеет максимальное и минимальное значения сопротивления?

3. На каких частотах параллельный колебательный контур имеет максимальное и минимальное значения сопротивления?

4. Какую частоту свободных колебаний имеет колебательный контур с добротностью $Q = 1/2$?

5. Если два колебательных контура имеют одинаковые значения резонансной частоты и добротности, означает ли это, что номиналы элементов, входящих в их состав, равны?

6. Какой добротностью должен обладать колебательный контур, чтобы его резонансная частота ровно в 2 раза превышала частоту свободных колебаний?

7. Два одинаковых параллельных колебательных контура соединяются параллельно. Найдите резонансную частоту и добротность получившегося контура.

8. Два одинаковых последовательных колебательных контура соединяются последовательно. Найдите резонансную частоту и добротность получившегося контура.

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя параметры колебательного контура: тип (параллельный или последовательный), значения резонансной частоты и добротности.

2. Составить схему колебательного контура и рассчитать номиналы ее элементов.

3. Собрать колебательный контур. Измерить резонансную кривую и зависимость сдвига фаз между током и напряжением в контуре от частоты. Построить графики измеренных зависимостей.

4. По построенным графикам найти значения резонансной частоты и добротности контура. Сравнить с заданными значениями.

5. С помощью осциллографа снять импульсную характеристику колебательного контура. Для этого подать на контур короткий импульс и измерить его отклик. Построить график импульсной характеристики. По построенному графику определить значения резонансной частоты и добротности контура. Сравнить с заданными и полученными в п. 4 значениями.

Содержание отчета

1. Схема колебательного контура и расчет номиналов ее элементов.

2. Таблица измерений резонансной кривой и зависимости сдвига фаз между током и напряжением в контуре от частоты.

3. Графики измеренных зависимостей, построенных в двойном логарифмическом масштабе.

4. Значения резонансной частоты и добротности контура, полученные из графиков п. 3.

5. Импульсная характеристика контура.

6. Значения резонансной частоты и добротности контура, полученные с помощью импульсной характеристики.

6. ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

Ключевые слова и термины:

- нулевой провод, нейтральный провод;
- фазный провод, линейный провод;
- фазное напряжение;
- фазный ток;
- линейное напряжение;
- симметричная нагрузка;
- перекося фаз.

Большинство потребителей электроэнергии работают на переменном токе и получают энергию по двум проводникам. Один из этих проводников обычно имеет постоянный потенциал (он принимается за нулевой), а потенциал второго изменяется во времени по закону $U_1(t) = U_0 \cos \omega t$. Первый из этих проводников называется нулевым, или нейтральным проводом, а второй — фазным, или линейным проводом.

Недостаток такого подхода состоит в том, что потенциал фазного провода, а значит, и потребляемая энергия, периодически в некоторые моменты времени обращается в нуль. Энергоёмкие потребители используют многофазное питание, при котором электроэнергия поступает не по двум, а по $N+1$ проводникам, один из которых является нулевым, а потенциалы остальных N имеют равные фазовые сдвиги относительно друг друга: $U_n = U_0 \cos(\omega t + 2\pi n/N)$. Разность потенциалов между фазным и нулевым проводами называется фазным напряжением, а ток, текущий в фазном проводнике, — фазным током. Двухфазная цепь должна иметь, помимо нейтрального провода, два провода с потенциалами

$$U_1 = U_0 \cos \omega t \text{ и } U_2 = U_0 \cos(\omega t + \pi) = -U_0 \cos \omega t = -U_1.$$

На практике двухфазная цепь никогда не применяется, поскольку она имеет тот же недостаток, что и однофазная — в некоторые моменты времени потребляемая мощность обращается в нуль. Этого недостатка удастся избежать в трехфазной цепи, когда три фазных напряжения имеют вид

$$U_A = U_0 \cos \omega t;$$

$$U_B = U_0 \cos(\omega t - 2\pi/3);$$

$$U_C = U_0 \cos(\omega t - 4\pi/3) = U_0 \cos(\omega t + 2\pi/3).$$

Зависимость фазных напряжений от времени показана на рис. 6.1. Следует подчеркнуть, что именно такое обозначение фаз принято в Российской Федерации.

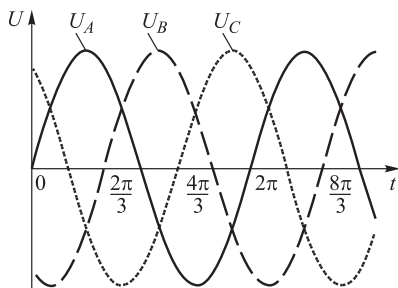


Рис. 6.1. Фазные напряжения трехфазной цепи

Напряжение фазы *B* отстает от напряжения фазы *A* на треть периода, и напряжение фазы *C* отстает на треть периода от напряжения фазы *B*. Нарушение порядка следования фаз в трехфазных цепях может привести к серьезным последствиям. Комплексные амплитуды фазных напряжений можно записать в виде

$$\dot{U}_A = 1; \quad \dot{U}_B = e^{-2\pi/3} = -0,5 - j\sqrt{3}/2; \quad \dot{U}_C = e^{2\pi/3} = -0,5 + j\sqrt{3}/2.$$

Разность потенциалов между двумя фазными проводами называется *линейным напряжением*. В трехфазных цепях линейное напряжение между любыми двумя фазными проводами имеет одну и ту же амплитуду:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= U_A - U_B = U_0 \cos \omega t - U_0 \cos(\omega t - 2\pi/3) = \\ &= U_0 (\cos \omega t - \cos(\omega t - 2\pi/3)) = -2U_0 \sin(\omega t - \pi/3) \sin(\pi/3) = \\ &= -U_0 \sqrt{3} \sin(\omega t - \pi/3). \end{aligned}$$

Итак, амплитуда линейного напряжения в трехфазной цепи в $\sqrt{3}$ раз больше амплитуды фазного напряжения. Этот вывод касается, конечно, и действующих значений напряжений. Если действующее значение фазного напряжения равно 220 В, то линейное напряжение составляет величину 381 В (по действующему значению).

Анализировать цепи трехфазного тока удобно, изображая на комплексной плоскости векторы фазных токов и напряжений (рис. 6.2). При этом комплексные амплитуды фазных токов вычисляются как произведение комплексных амплитуд фазных напряжений и комплексных сопротивлений нагрузок, подключенных к фазам.

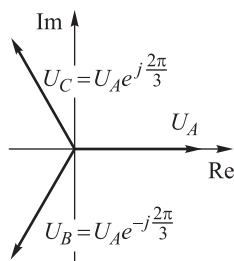


Рис. 6.2. Комплексные амплитуды фазных напряжений в трехфазной цепи

Пример 6.1. Требуется подключить к трехфазной сети с действующими значениями каждой фазы 220 В и частотой 50 Гц три нагрузки. Первая нагрузка имеет сопротивление 10 Ом, вторая представляет собой конденсатор с емкостью 200 мкФ, третья является катушкой с индуктивностью 30 мГн. Подключение необходимо осуществить таким образом, чтобы ток в нейтральном проводе был минимальным.

Решение. При подключении первой нагрузки все фазы являются равноправными. Выберем фазу A и подключим к ней активную нагрузку $R = 10$ Ом. Комплексное сопротивление этой нагрузки — число действительное, поэтому вектор комплексной амплитуды тока совпадает по направлению с вектором U_A и имеет длину $|I_R| = 220\text{ В}/10\text{ Ом} = 22\text{ А}$.

Емкостная нагрузка имеет комплексное сопротивление $Z_C = 1/j\omega C = -j/(2\pi \cdot 50\text{ Гц} \cdot 200\text{ мкФ}) = -j \cdot 15,9\text{ Ом}$. Это означает, что

вектор комплексной амплитуды фазного тока при подключении емкостной нагрузки будет иметь длину $|I_C| = 220 \text{ В} / 15,9 \text{ Ом} = 13,8 \text{ А}$, причем его направление будет составлять с направлением вектора комплексной амплитуды фазного напряжения угол 90° против хода часовой стрелки.

Индуктивная нагрузка имеет комплексное сопротивление $Z_L = j\omega L = j \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Гц} \cdot 30 \text{ мГн} = j \cdot 9,42 \text{ Ом}$. Вектор комплексной амплитуды фазного тока в ветви с индуктивной нагрузкой имеет длину $|I_L| = 220 \text{ В} / 9,42 \text{ Ом} = 23,4 \text{ А}$ и направление его составляет с вектором комплексной амплитуды фазного напряжения угол 90° по ходу часовой стрелки.

Подключение индуктивной и емкостной нагрузок можно осуществить несколькими способами. Рассмотрим эти способы.

Способ 1. Обе нагрузки подключаются к фазе *A*. Комплексные векторы I_C и I_L имеют следующие значения: $I_C = j \cdot 13,8 \text{ А}$, $I_L = -j \cdot 23,3 \text{ А}$ (рис. 6.3, *a*).

Амплитуда тока в нейтральном проводе равна сумме амплитуд фазных токов: $I_Z = I_R + I_C + I_L = (22 - j \cdot 9,5) \text{ А}$, и имеет абсолютное значение $|I_Z| = \sqrt{22^2 + 9,6^2} \text{ А} = 24,0 \text{ А}$.

Способ 2. Обе нагрузки подключаются к фазе *C*. Комплексные векторы I_C и I_L будут повернуты относительно своих положений на рис. 6.3, *a* на угол 120° :

$$I_C = j \cdot 13,8 \text{ А} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) = (-12,0 - 6,9j) \text{ А};$$

$$I_L = -j \cdot 23,4 \text{ А} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) = (20,2 + 11,7j) \text{ А}.$$

Амплитуда тока в нулевом проводе равна величине $I_Z = (30,2 + 4,8j) \text{ А}$ с абсолютным значением $|I_Z| = 30,6 \text{ А}$. Векторная диаграмма фазных токов представлена на рис. 6.3, *б*.

Способ 3. Обе нагрузки подключаются к фазе *B*. Комплексные векторы I_C и I_L будут повернуты относительно положений рис. 6.3, *a* на угол -120° :

$$I_C = j \cdot 13,8 \text{ A} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) = (12,0 - 6,9 j) \text{ A};$$

$$I_L = -j \cdot 23,4 \text{ A} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) = (-20,2 + 11,7 j) \text{ A}.$$

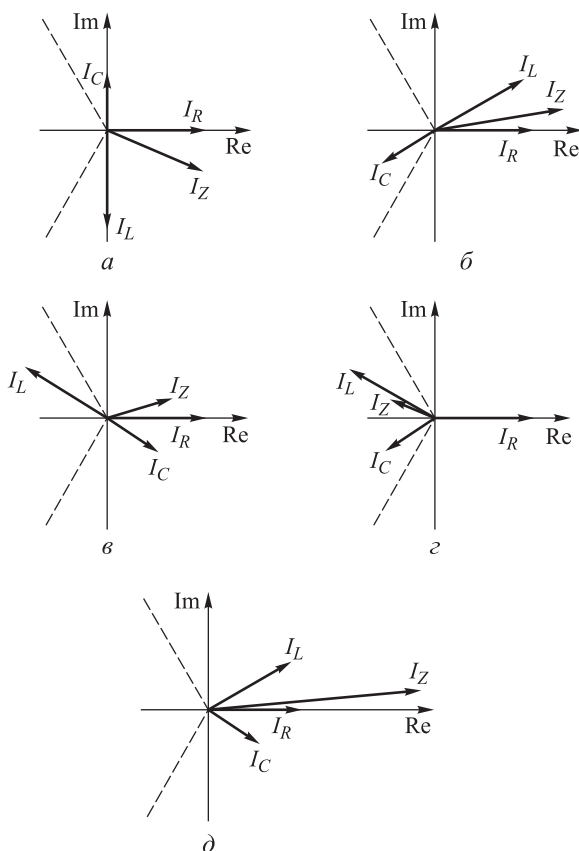


Рис. 6.3. Векторы комплексных амплитуд фазовых токов в зависимости от способа подключения индуктивной и емкостной нагрузок к трехфазной сети

В нулевом проводе течет ток с комплексной амплитудой $I_Z = (13,8 + 4,8 j) \text{ A}$ и абсолютным значением $|I_Z| = 14,6 \text{ A}$. Векторы комплексных амплитуд фазных токов показаны на рис. 6.3, в.

Способ 4. Конденсатор подключается к фазе C , а катушка индуктивности — к фазе B . В этом случае комплексные амплитуды токов через них равны $I_C = (-12,0 - 6,9j) \text{ A}$ и $I_L = (-20,2 + 11,7j) \text{ A}$ (рис. 6.3, з). Комплексная амплитуда тока в нулевом проводе равна величине $I_Z = (-10,2 + 4,8j) \text{ A}$ с абсолютным значением $|I_Z| = 11,2 \text{ A}$.

Способ 5. Конденсатор подключается к фазе B : $I_C = (12,0 - 6,9j) \text{ A}$, а катушка индуктивности — к фазе C : $I_L = (20,2 + 11,7j) \text{ A}$. Векторы комплексных амплитуд фазных токов показаны на рис. 6.3, д. Комплексная амплитуда тока в нулевом проводе равна величине $I_Z = (54,2 + 4,8j) \text{ A}$ с абсолютным значением $|I_Z| = 54,4 \text{ A}$.

Аналогично можно рассмотреть оставшиеся четыре способа подключения нагрузок:

Способ 6. Конденсатор — к фазе A , катушка — к фазе B . $|I_Z| = 25,6 \text{ A}$.

Способ 7. Конденсатор — к фазе A , катушка — к фазе C . $|I_Z| = 49,3 \text{ A}$.

Способ 8. Катушка — к фазе A , конденсатор — к фазе B . $|I_Z| = 11,8 \text{ A}$.

Способ 9. Катушка — к фазе A , конденсатор — к фазе C . $|I_Z| = 43,8 \text{ A}$.

Минимальное значение тока в нейтральном проводе имеет место при подключении по способу 4, и поэтому он является оптимальным (рис. 6.4).

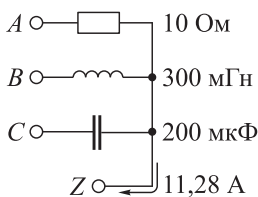


Рис. 6.4. Оптимальный способ подключения нагрузок (пример 6.1)

При расчете трехфазных цепей особое место занимает случай, когда ток в нейтральном проводе обращается в нуль. Это происходит, например, при *симметричной нагрузке*, когда нагрузки, подключаемые к каждой фазе, равны: $Z_A = Z_B = Z_C$. Если ток в нейтральном проводе равен нулю, то исключение его из схемы или его обрыв не изменяют распределения напряжений и токов в схеме.

Пример 6.2. К фазам трехфазной цепи подключены нагрузки, изображенные на рис. 6.4. Что изменится в работе нагрузок при обрыве нулевого провода?

Решение. При обрыве нулевого провода комплексная амплитуда потенциала точки Z определяется выражением

$$\begin{aligned} U_Z &= \frac{U_A / Z_A + U_B / Z_B + U_C / Z_C}{1 / Z_A + 1 / Z_B + 1 / Z_C} = \\ &= \frac{U_0 / R + U_0 e^{-j2\pi/3} / (j\omega L) + U_0 e^{j2\pi/3} j\omega C}{1 / R + 1 / (j\omega L) + j\omega C} = \\ &= U_0 \frac{(j\omega L + R e^{-j2\pi/3} - e^{j2\pi/3} \omega^2 RLC) / (j\omega RL)}{(j\omega L + R - \omega^2 RLC) / (j\omega RL)} = \\ &= U_0 \frac{j\omega L + R \left(-0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) - \left(-0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) \omega^2 RLC}{j\omega L + R - \omega^2 RLC} = \\ &= U_0 \frac{j \left(\omega L - R \frac{\sqrt{3}}{2} - \omega^2 RLC \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0,5 R (\omega^2 LC - 1)}{j\omega L + R - \omega^2 RLC}. \end{aligned}$$

Подставив в последнее выражение значения $R = 10 \text{ Ом}$, $C = 200 \text{ мкФ}$, $L = 300 \text{ мГн}$, $\omega = 2\pi \times 50 \text{ Гц} = 314,159 \text{ Гц}$, получим

$$U_Z = U_0 \frac{34,31j + 24,61}{94,25j - 49,22} = U_0 (0,18 - 0,35j).$$

Комплексная амплитуда падения напряжения на нагрузке R будет иметь величину

$$U_A - U_Z = U_0 - U_0 (0,18 - 0,35j) = U_0 (0,82 + 0,35j)$$

с абсолютным значением

$$U_0 \sqrt{0,82^2 + 0,35^2} = 0,89 U_0.$$

Комплексная амплитуда падения напряжения на индуктивной нагрузке будет равна

$$U_B - U_Z = U_0(-0,5 - 0,87j) - U_0(0,18 - 0,35j) = U_0(-0,68 - 0,52j)$$

с абсолютным значением

$$U_0 \sqrt{0,68^2 + 0,52^2} = 0,86 U_0.$$

Комплексная амплитуда падения напряжения на емкостной нагрузке станет равной

$$U_C - U_Z = U_0(-0,5 + 0,87j) - U_0(0,18 - 0,35j) = U_0(-0,68 + 1,22j)$$

с абсолютным значением

$$U_0 \sqrt{0,68^2 + 1,22^2} = 1,40 U_0.$$

Таким образом, после обрыва нулевого провода значения напряжений на нагрузках трехфазной цепи изменились: на емкостной нагрузке напряжение возросло, на остальных нагрузках упало. Такое явление носит название *перекос фаз*. При симметричной нагрузке перекас фаз при обрыве нулевого провода отсутствует.

Контрольные вопросы

1. Как сильно отличается фазное напряжение от линейного в шестифазной цепи?
2. Чем отличаются линейные напряжения U_{AB} и U_{AC} в трехфазной цепи?
3. Какие значения токов (амплитудные или действующие) вычислены в примере 6.1?
4. Три резистивные нагрузки с разными сопротивлениями подключены к разным фазам трехфазной цепи. Изменится ли ток в нейтральном проводе, если поменять порядок подключения нагрузок к фазам?

5. Возможна ли несимметричная нагрузка трехфазной цепи, для которой обрыв нулевого провода не приводит к перекосу фаз?

6. Чему равно линейное напряжение в трехфазной цепи с действующим значением фазного напряжения 127 В?

7. К каким последствиям приведет сдвиг фаз, отличный от 120° в трехфазной цепи с симметричной нагрузкой?

8. Изменится ли величина тока в нулевом проводе при изменении подключения (см. рис. 6.4): фаза A — $C = 200$ мкФ; фаза B — $R = 10$ Ом; фаза C — $L = 300$ мГн?

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя однофазные нагрузки (не менее трех) для трехфазной цепи.

2. Вычислить комплексные сопротивления нагрузок.

3. Построить векторные диаграммы фазных токов при различном подключении нагрузок к трехфазной цепи с указанным преподавателем действующим значением фазного напряжения. Выполнить все возможные способы подключения.

4. Вычислить действующее значение тока нейтрального провода при различных способах подключения нагрузок.

5. Подключить нагрузки к трехфазной цепи с минимальным значением тока нейтрального провода. Измерить действующее значение тока в нейтральном проводе и сравнить с рассчитанным.

Содержание отчета

1. Комплексные сопротивления полученных нагрузок.

2. Векторные диаграммы фазных токов при различных способах подключения нагрузок к трехфазной цепи.

3. Расчет значения тока в нулевом проводе при различных способах подключения нагрузок к трехфазной цепи.

4. Результаты измерения тока в нулевом проводе при оптимальном подключении нагрузок.

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Ключевые слова и термины:

- *измерительная головка;*
- *ток полного отклонения;*
- *амперметр;*
- *шунтирование;*
- *вольтметр;*
- *метод амперметра-вольтметра;*
- *омметр последовательного типа;*
- *омметр параллельного типа;*
- *градуировочная кривая;*
- *мостовой метод измерения сопротивлений;*
- *баланс моста.*

Для измерения параметров электрического тока используют измерительные приборы различных конструкций и систем (магнитодинамическая, электромагнитная, электродинамическая и т. д.). Измерительный прибор без подключенных к нему каких-либо дополнительных электрических цепей называют *измерительной головкой*. Действие измерительного прибора основано на воздействии электрического тока, протекающего через прибор, на стрелку прибора (или на электронную схему). Поэтому главными параметрами измерительного прибора являются *ток полного отклонения* (ток, при котором стрелка достигает края шкалы) и *сопротивление* прибора, т. е. отношение тока, протекающего через прибор, к падению напряжения на нем (как для любого двухполюсника).

Для определения силы тока измерительный прибор включают последовательно с участком цепи, через который протекает измеряемый ток. В этом случае через прибор и участок цепи протекает

один и тот же ток. Включение в цепь прибора, безусловно, влияет на процессы, происходящие в цепи, и ток, текущий в цепи с прибором, будет отличаться от тока, текущего в цепи без прибора. Эти отличия незначительны, если сопротивление измерительного прибора будет минимально.

Часто встречается задача, когда с помощью измерительной головки с током полного отклонения I_0 и сопротивлением r необходимо построить амперметр с током полного отклонения I_{\max} (рис. 7.1).

Эта задача решается с помощью *шунтирования* измерительного прибора, т. е. включения параллельно с ним резистора с некоторым сопротивлением R (рис. 7.2).

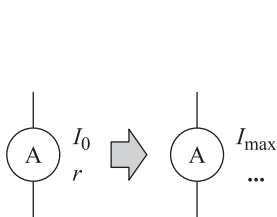


Рис. 7.1. Задача построения амперметра

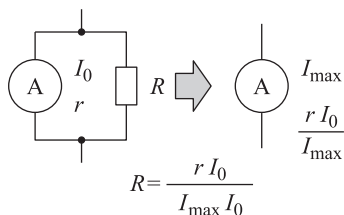


Рис. 7.2. Шунтирование измерительного прибора

Сопротивление R выбирается таким образом, чтобы при силе тока, протекающего через параллельно соединенные прибор и шунт, равной I_{\max} , непосредственно через прибор протекал ток, равный I_0 .

Падения напряжения на измерительном приборе и на шунте равны: $I_0 r = IR$. Сумма токов I_0 и I должна быть равной I_{\max} : $I_0 + I = I_{\max}$.

Решая систему из этих двух уравнений, получим

$$R = r \frac{I_0}{I_{\max} - I_0}.$$

Сопротивление полученного амперметра

$$r \parallel R = \frac{rR}{r + R} = r \frac{I_0}{I_{\max}}.$$

Если необходимо построить амперметр с током полного отклонения 1 А из измерительного прибора с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 1 Ом, нужно использовать шунт 0,1 мОм, при этом сопротивление амперметра окажется равным сопротивлению шунта.

Другая практическая задача — с использованием такой же измерительной головки построить вольтметр с напряжением полного отклонения U_{\max} . Для ее решения достаточно включить последовательно с головкой резистор, выбрав его сопротивление таким, чтобы напряжение U_{\max} , поданное на последовательно включенные прибор и резистор, вызывало в приборе ток, равный току полного отклонения (рис. 7.3).

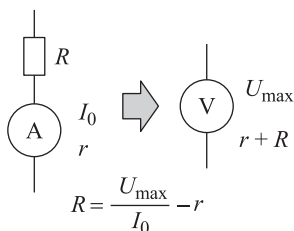


Рис. 7.3. Построение вольтметра

Для этого необходимо выбрать значение сопротивления R таким, чтобы выполнялось условие

$$I_0 = \frac{U_{\max}}{r + R},$$

откуда $R = U_{\max} / I_0 - r$. Сопротивление вольтметра оказывается равным $r + R$.

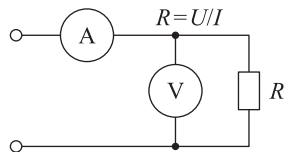
Если с помощью той же измерительной головки ($I_0 = 100$ мкА, $r = 1$ Ом) необходимо создать вольтметр с напряжением полного отклонения 100 В, следует выбрать $R = 1$ МОм, такое же значение будет иметь внутреннее сопротивление полученного вольтметра.

Для измерения падения напряжения на некотором участке цепи постоянного тока необходимо включить вольтметр параллельно участку цепи, при этом падение напряжения на нем будет равняться падению напряжения на участке цепи. Конечно, подключение вольтметра вызовет изменение процессов в цепи, и падение

напряжения на участке цепи с подключенным вольтметром будет отличаться от падения напряжения при отсутствии вольтметра. Эти отличия будут тем меньше, чем большим будет выбрано внутреннее сопротивление вольтметра.

Кроме измерения токов и напряжений, на практике часто возникает необходимость измерения сопротивлений. Сопротивление можно измерить, одновременно измеряя падение напряжения U на нем и силу тока I , текущего через него. Далее можно вычислить сопротивление по закону Ома: $R = U/I$ (рис. 7.4).

Рис. 7.4. Измерение сопротивления методом амперметра-вольтметра



При измерении сопротивления необходимо, чтобы через него протекал ток, отличный от нуля. Поэтому в схеме на рис. 7.4 необходимо к внешним клеммам подключить какой-либо источник напряжения. Описанный метод носит название *метода амперметра-вольтметра*. Неудобство метода амперметра-вольтметра состоит в том, что для измерения параметров тока необходимы два прибора. От этого недостатка свободен метод, когда последовательно с измеряемым сопротивлением включаются амперметр и дополнительный резистор сопротивлением r . На эти элементы подается напряжение с делителя напряжения на потенциометре R_0 . Измерительный прибор, построенный по этому методу, называется *омметр последовательного типа* (рис. 7.5).

Перед началом измерений положение движка потенциометра устанавливается таким, чтобы при коротком замыкании ($R = 0$) через амперметр протекал ток полного отклонения $I_0 = U/r$. При измерении сопротивления через амперметр протекает ток $I = U/(r + R)$ и ему соответствует измеряемое сопротивление $R = U/I - r = I_0 r / I - r = r(I_0 / I - 1)$. Зависимость $R(I)$ является *градуировочной кривой* омметра и служит основой для измерения сопротивлений (рис. 7.6). Обычно в соответствии с этой кривой проводят разметку шкалы омметра.

Как видно из рис. 7.6, шкала омметра последовательного типа инверсна — минимальному отклонению стрелки соответствует максимальное сопротивление и наоборот. Для неизменности шкалы омметра необходимо, чтобы напряжение U (см. рис. 7.5) оставалось одним и тем же при изменении измеряемого сопротивления. Это возможно только при выполнении условия $R_0 \ll r + R$. Таким образом, последовательный омметр следует использовать для измерения относительно больших значений сопротивления.

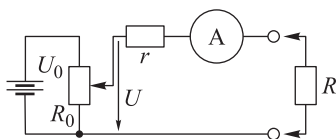


Рис. 7.5. Омметр последовательного типа

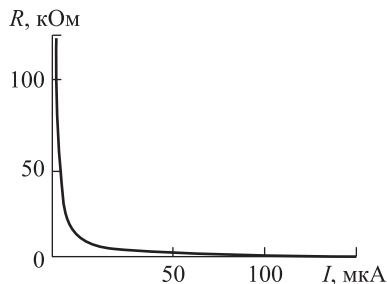


Рис. 7.6. Типичный вид градуировочной кривой последовательного омметра

Другим прибором, используемым для измерения сопротивлений, является *омметр параллельного типа*, схема которого приведена на рис. 7.7. В таком омметре амперметр с дополнительным резистором r подключается параллельно измеряемому сопротивлению. Перед началом измерений движок потенциометра R_0 выставляется таким образом, чтобы при отсутствии измеряемого сопротивления ($R = \infty$) через амперметр протекал ток полного отклонения I_0 .

В этом случае при подключении измеряемого сопротивления должны выполняться следующие условия:

$$Ir = I_R R;$$

$$I + I_R = I_0.$$

Решая полученную систему уравнений, можно найти градуировочную кривую омметра: $R(I) = rI/(I_0 - I)$. Типичный вид

градуировочной кривой омметра параллельного типа приведен на рис. 7.8. Как и кривая, изображенная на рис. 7.6, эта градуировочная кривая обладает существенной нелинейностью, но, в отличие от последовательного омметра, она не является инверсной.

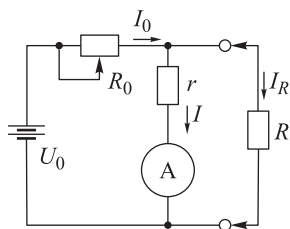


Рис. 7.7. Омметр параллельного типа

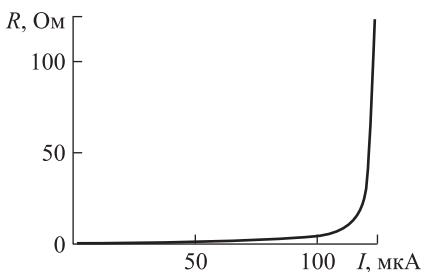


Рис. 7.8. Типичный вид градуировочной кривой параллельного омметра

Необходимое условие неизменности шкалы параллельного омметра — соблюдение требования $R_0 \gg r \parallel R$, поэтому омметры параллельного типа находят применение при измерении малых сопротивлений.

Для прецизионных измерений сопротивлений используется *мостовой метод* (рис. 7.9).

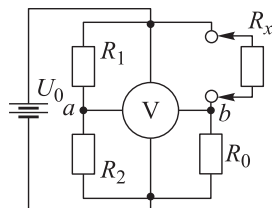


Рис. 7.9. Мостовой метод измерения сопротивлений

В этом методе мост собирается из трех эталонных резисторов с известными сопротивлениями R_1 , R_2 и R_0 и измеряемого сопротивления R_x . В одну диагональ моста включается источник напряжения U_0 , в другую — вольтметр. Поскольку как левое, так и правое плечи моста представляют собой делители напряжения, точка a

имеет потенциал $\varphi_a = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$, а потенциал точки b равен $\varphi_b = U_0 R_0 / (R_x + R_0)$.

Напряжение на вольтметре оказывается равным

$$\varphi_a - \varphi_b = U_0 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_0}{R_x + R_0} \right) = U_0 \frac{R_2 R_x - R_1 R_0}{(R_1 + R_2)(R_x + R_0)}.$$

Напряжение на вольтметре будет равно нулю (говорят, что наступает *баланс моста*) при выполнении условия $R_2 R_x = R_1 R_0$.

При измерении сопротивлений мостовым методом два из эталонных сопротивлений оставляют постоянными, а третье изменяют (обычно с помощью магазина сопротивлений) для достижения нулевых показаний вольтметра.

Основные преимущества мостового метода измерения сопротивлений заключаются в следующем:

- метод основан на измерении нулевого напряжения с высокой точностью;
- измерения можно проводить, используя вольтметр с конечным (не бесконечным, как у идеального вольтметра) сопротивлением, причем это сопротивление может иметь произвольное значение.

Контрольные вопросы

1. Перечислите главные параметры измерительной головки.
2. Нарисуйте схему подключения амперметра к измеряемому участку цепи.
3. В чем состоит цель шунтирования измерительной головки?
4. При каких условиях можно доверять показаниям амперметра?
5. Нарисуйте схему подключения вольтметра к измеряемому участку цепи.
6. При каких условиях можно доверять показаниям вольтметра?
7. Какой омметр обладает инверсной шкалой: последовательного типа или параллельного типа?
8. Какие сопротивления следует измерять омметром последовательного типа?
9. Какие сопротивления следует измерять омметром параллельного типа?

10. В чем состоят основные преимущества мостового метода измерения сопротивлений?

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя измерительную головку. Измерить ее параметры — ток полного отклонения и сопротивление.

2. По схеме, изображенной на рис. 7.2, собрать амперметр для измерения тока, величина которого указана преподавателем. Собрать схему, показанную на рис. 7.10, и провести измерения тока $I_{\text{изм}}$, протекающего через резистор R при различных значениях его сопротивления.

Построить график зависимости $I_{\text{изм}}(R)$. На том же графике построить зависимость $I_{\text{теор}}(R) = U_0/R$. Объяснить имеющиеся расхождения.

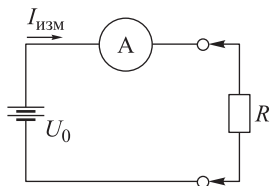


Рис. 7.10. Схема измерения силы тока

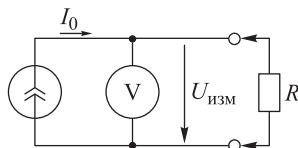


Рис. 7.11. Схема измерения напряжения

3. По схеме, изображенной на рис. 7.3, собрать вольтметр для измерения напряжения, величина которого указана преподавателем. Собрать схему согласно рис. 7.11 и провести измерения напряжения $U_{\text{изм}}$, падающего на резисторе R , при различных значениях его сопротивления.

Построить график зависимости $U_{\text{изм}}(R)$. На том же графике построить зависимость $U_{\text{теор}}(R) = I_0 R$. Объяснить имеющиеся расхождения.

4. Собрать омметр последовательного или параллельного типа (по указанию преподавателя). Пользуясь расчетными формулами, построить его градуировочную кривую. Подключая к омметру различные сопротивления и фиксируя при этом показания прибо-

ра, нанести на тот же график соответствующие точки. Объяснить имеющиеся расхождения.

5. Собрать мост для измерения сопротивлений по схеме, показанной на рис. 7.9, с указанными преподавателем значениями сопротивлений R_1 , R_2 и R_0 . Изменяя значение сопротивления R_x , построить зависимость напряжения вольтметра от этого сопротивления. Удостовериться в справедливости условия баланса моста. Пользуясь построенным графиком, оценить точность измерения сопротивлений мостовым методом.

Содержание отчета

1. Схема амперметра и расчет номиналов ее элементов.
2. Построенные на одном графике зависимости измеренного и расчетного токов от сопротивления.
3. Схема вольтметра и расчет номиналов ее элементов.
4. Построенные на одном графике зависимости измеренного и расчетного напряжений от сопротивления.
5. Схема омметра и расчет номиналов ее элементов.
6. Построенные на одном графике расчетная и измеренная градуировочные кривые омметра.
7. Схема моста для измерения сопротивлений.
8. График зависимости показаний вольтметра моста от величины измеряемого сопротивления.

8. ИЗМЕРЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Ключевые слова и термины:

- *мост переменного тока*;
- *нулевой индикатор*;
- *метод по координатного спуска*;
- *условия равновесия моста переменного тока*.

Для измерения емкости конденсаторов и индуктивности катушек можно применять те же методы, что и для измерения сопротивлений, но использовать вместо источника постоянного напряжения источник переменного напряжения.

В случае, когда активным сопротивлением катушки индуктивности можно пренебречь, отношение абсолютных значений комплексной амплитуды напряжения и тока определяется только ее индуктивностью, и путем их измерения можно определить индуктивность: $L = |U_0| / (\omega |I_0|)$. Точно так же, если пренебречь проводимостью конденсатора, величина его емкости может быть получена измерением абсолютных значений комплексной амплитуды тока и напряжения $C = |I_0| / (\omega |U_0|)$ (рис. 8.1).

Если же действительным сопротивлением конденсатора или катушки индуктивности пренебречь нельзя, измерение их параметров существенно усложняется, поскольку следует учитывать не только абсолютные значения комплексных амплитуд тока и напряжения, но и сдвиг фаз между ними.

На практике для измерения комплексных сопротивлений наиболее часто используется *мост переменного тока*. Он состоит из четырех плеч — двухполюсников с некоторыми комплексными сопротивлениями (рис. 8.2).

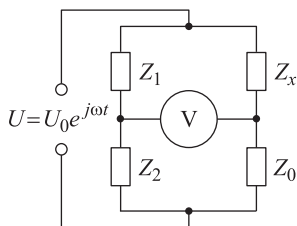
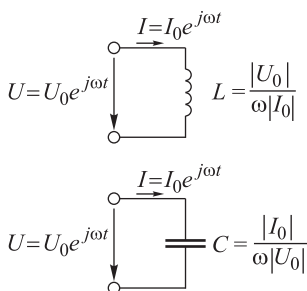


Рис. 8.1. Непосредственное изме-

Рис. 8.2. Мост переменного тока

В одну диагональ моста включен источник переменного напряжения $U = U_0 e^{j\omega t}$, в другую — нулевой индикатор переменного напряжения, т. е. прибор, способный с высокой достоверностью определять, отлично ли от нуля напряжение между его клеммами (в качестве нулевого индикатора можно использовать, например, вольтметр или амперметр). Равновесие моста достигается при условии равенства произведений комплексных сопротивлений противоположных плеч:

$$Z_1 Z_0 = Z_2 Z_x.$$

Это условие можно представить иначе — как комплексные сопротивления в виде показательной функции:

$$|Z_1| e^{j\varphi_1} |Z_0| e^{j\varphi_0} = |Z_2| e^{j\varphi_2} |Z_x| e^{j\varphi_x},$$

где $|Z_1|, |Z_2|, |Z_x|, |Z_0|$ — модули полных сопротивлений плеч моста; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_x, \varphi_0$ — фазовые сдвиги между током и напряжением в соответствующих плечах.

Последнее равенство распадается на два условия равновесия моста:

$$|Z_1| |Z_0| = |Z_2| |Z_x|; \quad \varphi_1 + \varphi_0 = \varphi_2 + \varphi_x.$$

Отсюда следует, что мост переменного тока нужно уравнивать регулировкой активной и реактивной составляющих плеч,

т. е. равновесие осуществляется как по модулям, так и по фазам. Необходимо иметь в виду, что при изменении значений активных и реактивных составляющих одновременно изменяются и модуль, и фаза, поэтому мост переменного тока можно привести в равновесие лишь методом последовательных приближений к нулевому показанию индикатора.

Второе условие равновесия моста переменного тока определяет порядок включения двухполюсников относительно друг друга. Действительно, если в первое и нулевое плечи моста включены резисторы, то во втором и неизвестном плечах должны быть реактивные сопротивления разных знаков. Если в смежных плечах, например в первом и втором, стоят резисторы, в другие смежные должны быть включены реактивные сопротивления одного типа. Очевидно, что одновременно во все плечи можно включать двухполюсники с сопротивлениями одного типа.

Рассмотрим некоторые схемы мостов переменного тока.

Мост переменного тока, представленный на рис. 8.3, можно использовать для измерения емкости конденсатора.

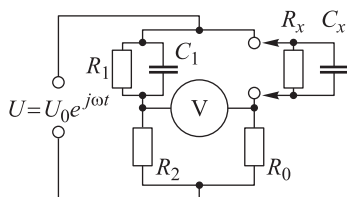


Рис. 8.3. Мост переменного тока для измерения емкости конденсатора

Любой конденсатор, помимо емкости, обладает еще сопротивлением утечки, и его комплексное сопротивление можно записать как

$$Z = R \parallel (1/j\omega C) = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2},$$

и условие баланса моста в комплексной форме примет вид

$$R_0 \frac{R_1 - j\omega R_1^2 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} = R_2 \frac{R_x - j\omega R_x^2 C_x}{1 + (\omega R_x C_x)^2},$$

или для модуля и фазы

$$R_0 \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega R_1^2 C_1)^2}}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} = R_2 \frac{\sqrt{R_x^2 + (\omega R_x^2 C_x)^2}}{1 + (\omega R_x C_x)^2};$$

$$\varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_x \Rightarrow \arctg(-\omega R_1 C_1) = \arctg(-\omega R_x C_x).$$

Как нетрудно убедиться, баланс моста будет достигнут в случае

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_0}{R_2} \Rightarrow R_x = R_1 \frac{R_0}{R_2};$$

$$R_x C_x = R_1 C_1 \Rightarrow C_x = C_1 \frac{R_2}{R_0}.$$

Измерение параметров конденсатора следует проводить следующим образом:

- 1) установить значения сопротивлений R_0 и R_2 ;
- 2) для некоторого значения емкости C_1 , сохраняя его неизменным, изменением сопротивления R_1 добиться минимальных показаний вольтметра (см. рис. 8.3);
- 3) не изменяя значения сопротивления R_1 , изменением емкости C_1 добиться минимальных показаний вольтметра;
- 4) повторять действия по п. 2 и 3 до тех пор, пока не будут достигнуты нулевые показания измерительного прибора;
- 5) искомые величины R_x и C_x можно вычислить по формулам $R_x = R_1 R_0 / R_2$; $C_x = C_1 R_2 / R_0$.

Предлагаемая последовательность действий очень сильно напоминает поиск минимума функции двух переменных и в вычислительной математике носит название *метода покоординатного спуска*. Метод измерения, схема которого представлена на рис. 8.3, нельзя использовать для измерения индуктивности, поскольку сдвиг фаз, вносимый конденсатором C_1 , не может менять знак. Выходом из сложившейся ситуации может служить применение моста переменного тока (рис. 8.4).

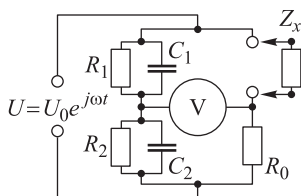


Рис. 8.4. Мост переменного тока для измерения произвольных комплексных сопротивлений

Для этой схемы справедливы следующие соотношения:

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} - j \frac{\omega R_1^2 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2};$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2} - j \frac{\omega R_2^2 C_2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2};$$

$$|Z_{1,2}| = \frac{R_{1,2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R_{1,2}^2 C_{1,2}^2}},$$

поэтому условия баланса моста примут вид

$$Z_1 R_0 = Z_x Z_2,$$

или

$$|Z_1| R_0 = |Z_x| |Z_2|,$$

$$\varphi_1 + \varphi_0 = \varphi_x + \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_x + \varphi_2.$$

Из последних соотношений видно, что данным мостом можно измерять емкости конденсаторов (при этом величины $\varphi_1, \varphi_x, \varphi_2$ будут одного знака, и равенство $\varphi_1 = \varphi_x + \varphi_2$ будет выполняться). Данным мостом можно также измерять индуктивности катушек (величина φ_x будет иметь знак, противоположный величинам φ_1 и φ_2 , но при условии $|\varphi_x| < |\varphi_2|$ равенство $\varphi_1 = \varphi_x + \varphi_2$ также выполняется).

Действительную и мнимую части комплексного сопротивления исследуемого двухполюсника можно вычислить по формулам

$$\operatorname{Re}(Z_x) = \frac{R_0 R_1}{R_2} \times \frac{1 + (\omega R_1 C_1)(\omega R_2 C_2)}{1 + (\omega R_1 C_1)^2};$$

$$\operatorname{Im}(Z_x) = \frac{R_0 R_1}{R_2} \times \frac{\omega R_2 C_2 - \omega R_1 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}.$$

Контрольные вопросы

1. Зависят ли результаты измерений по схеме на рис. 8.1 от частоты переменного напряжения?

2. Как воспользоваться методом измерения, представленном на рис. 8.1, не зная частоты переменного напряжения, но располагая точным значением емкости некоторого эталонного конденсатора?

3. Можно ли в схеме, изображенной на рис. 8.2, заменить вольтметр амперметром?

4. Если при измерениях по схеме на рис. 8.2 баланс моста достигнут на одной частоте, будет ли он соблюдаться на других частотах?

5. Как использовать схему, показанную на рис. 8.3, для измерения индуктивностей?

6. Можно ли в схеме, изображенной на рис. 8.4, заменить емкости C_1 и C_2 на индуктивности?

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя линейный двухполюсник для исследования.

2. Подать на двухполюсник переменное напряжение некоторой частоты (порядка 1 кГц) с действующим значением 5...10 В. Измеряя действующее значение тока, протекающего через двухполюсник, оценить абсолютное значение его импеданса: $|Z| = |U|/|I|$.

3. Собрать мост переменного тока в соответствии со схемой на рис. 8.4, используя выбранное значение частоты переменного напряжения. Величины сопротивлений и емкостей моста выбрать в соответствии с оценкой импеданса двухполюсника.

4. Добиться баланса моста. Для этого использовать метод по координатного спуска:

а) не изменяя значения емкостей C_1 и C_2 , путем изменения сопротивлений R_1 и R_2 (при $R_1 + R_2 \approx \text{const}$) добиться минимального показания вольтметра;

б) не изменяя значения сопротивлений R_1 и R_2 , путем изменения емкостей C_1 и C_2 (при $C_1 + C_2 \approx \text{const}$) добиться минимального показания вольтметра;

в) повторять указанные операции до тех пор, пока значения R_1 , R_2 , C_1 и C_2 не перестанут изменяться.

5. Вычислить действительную и мнимую части комплексного сопротивления исследуемого двухполюсника по формулам

$$\operatorname{Re}(Z_x) = \frac{R_0 R_1}{R_2} \frac{1 + (\omega R_1 C_1)(\omega R_2 C_2)}{1 + (\omega R_1 C_1)^2};$$

$$\operatorname{Im}(Z_x) = \frac{R_0 R_1}{R_2} \frac{\omega R_2 C_2 - \omega R_1 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}.$$

6. Провести измерения по п. 4б для различных значений частоты и построить график зависимости действительной и мнимой частей комплексного сопротивления от частоты в двойном логарифмическом масштабе, заменяя отрицательные значения их абсолютными значениями.

7. Аппроксимируя участки построенного графика прямыми линиями, найти частотные диапазоны, в пределах которых двухполюсник можно считать имеющим индуктивное или емкостное сопротивление. При этом следует иметь в виду, что идеальная индуктивность имеет мнимую часть импеданса $\operatorname{Im}(Z) = \omega L$, которая в двойном логарифмическом масштабе $(\log[\operatorname{Im}(Z)] = \log(L) + \log(\omega))$ выглядит как прямая линия с коэффициентом наклона 1 (или 20 дБ на декаду). Кроме того, идеальная емкость имеет модуль мнимой части импеданса $|\operatorname{Im}(Z)| = 1/\omega C$, и в двойном логарифмическом масштабе $\log|\operatorname{Im}(Z)| = -\log(C) - \log(\omega)$ выглядит прямой линией с коэффициентом наклона -1 (-20 дБ на декаду).

Содержание отчета

1. Схема измерений.
2. Оценка абсолютного значения импеданса исследуемого двухполюсника и выбранные в соответствии с этой оценкой параметры моста.
3. Таблица измерений значений параметров ω , R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , при которых реализуется баланс моста переменного тока.
4. Таблица зависимости $\operatorname{Re}(Z_x)$ и $\operatorname{Im}(Z_x)$ от частоты.
5. График зависимости $\operatorname{Re}(Z_x)$ и $\operatorname{Im}(Z_x)$ от частоты, построенный в двойном логарифмическом масштабе.
6. Результаты аппроксимации участков графика прямыми линиями.

9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ключевые слова и термины:

- *основные законы коммутации;*
- *интегрирующая RC-цепь, интегрирующая RL-цепь;*
- *дифференцирующая RC-цепь, дифференцирующая RL-цепь;*
- *перезаряд конденсатора;*
- *характерное время перезаряда RC-цепи.*

Рассмотрим линейную цепь, т. е. цепь, составленную из резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности и идеальных источников тока либо напряжения. Пусть до момента времени $t = 0$ все параметры цепи (сопротивления, емкости, индуктивности, входные напряжения и токи, а также нагрузка) остаются постоянными, а в указанный момент времени один из них скачкообразно изменяется и принимает новое значение, которое в дальнейшем остается неизменным. После скачкообразного изменения параметра напряжения и токи в цепи (а также выходные напряжения и токи) претерпевают изменения и некоторое время отличаются от своих стационарных значений. Зависимость от времени напряжений и токов цепи непосредственно после скачкообразного изменения ее параметров принято называть *переходным процессом*.

Если в качестве изменяющегося параметра принимается входной сигнал линейной цепи, то переходный процесс в точности соответствует *переходной характеристике* цепи, подробно рассматриваемой в теории автоматического управления, а также в теории цепей и сигналов. Однако переходный процесс — более широкое понятие, включающее также явления, происходящие в цепи при изменении не только входного сигнала, но и ее внутренних параметров.

Для цепей, содержащих лишь резисторы и идеальные источники, понятие переходного процесса не имеет никакой актуальности, поскольку связь через резистор между током и падением напряжения на нем носит мгновенный характер: ток в некоторый момент времени полностью определяется значением напряжения в тот же момент времени.

Для исследования переходных процессов с успехом применяется аппарат дифференциальных уравнений. Алгоритм его применения состоит в следующем.

1. Найти стационарные значения основных величин цепи (токов и напряжений) до изменения параметров. При этом следует иметь в виду, что в стационарном случае ток, протекающий через конденсатор, равен нулю ($I_C = C dU_C / dt = 0$), точно так же как равно нулю падение напряжения на катушке индуктивности ($U_L = L dI_L / dt = 0$). Кроме того, при изменении параметров должны выполняться *основные законы коммутации*.

Во-первых, электрический заряд, накопленный в конденсаторе, не может измениться мгновенно, поэтому сразу после скачкообразного изменения параметров он должен остаться неизменным ($q = CU = \text{const}$).

Во-вторых, магнитный поток, создаваемый катушкой индуктивности, точно так же должен сохранить свою величину сразу после изменения параметров ($\Phi = LI = \text{const}$). При неизменных значениях емкостей и индуктивностей основные законы коммутации упрощаются: падение напряжения на конденсаторе, также как ток, протекающий через катушку индуктивности, не может измениться мгновенно.

2. Для каждого двухполюсника цепи записать соотношение между током, протекающим через него, и падением напряжения на нем (или их производными по времени): $I_R = U_R / R$, $I_C = C dU_C / dt$, $U_L = L dI_L / dt$.

3. Решить полученную систему дифференциальных уравнений, используя в качестве начальных условий стационарные значения величин цепи, полученные в п. 1.

Рассмотрим типичные примеры расчета переходных процессов в электрических цепях.

Пример 9.1. Интегрирующая RC-цепь.

Схему, изображенную на рис. 9.1, принято называть *интегрирующей RC-цепью*, поскольку частотная характеристика цепи $H(\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$ в определенной степени близка к частотной характеристике идеальной интегрирующей цепи.

Действительно, идеальный интегратор, работающий в соответствии с алгоритмом $U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau} \int U_{\text{вх}}(t) dt$, при входном сигнале

$U_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$ должен выдавать выходной сигнал $U_{\text{вых}}(t) = e^{j\omega t} / (j\omega\tau)$,

т. е. иметь частотную характеристику $H(\omega) = 1/(j\omega\tau)$.

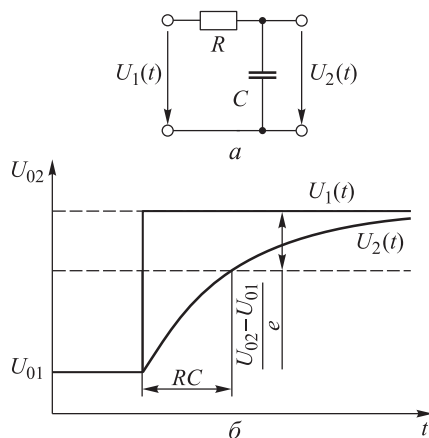


Рис. 9.1. Интегрирующая RC-цепь:

а — рассматриваемая схема; *б* — реакция схемы на скачкообразное изменение напряжения ($U_{02} - U_{01}$)

Найдем реакцию схемы (рис. 9.1) на скачкообразное изменение входного напряжения от уровня U_{01} до уровня U_{02} . Пока на вход цепи подается постоянное напряжение $U_1(t) = U_{01}$, ток, протекающий через конденсатор, равен нулю. Поэтому нулю равен также ток, текущий через резистор, падение напряжения на нем, в свою очередь, равно нулю, и выходное напряжение равно входному: $U_2(t) = U_{01}$. Запишем дифференциальные уравнения, описывающие работу цепи:

$$I(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt};$$
$$I(t) = \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R}.$$

Для решения системы приравняем правые части обоих уравнений:

$$C \frac{dU_2(t)}{dt} = \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R},$$

откуда с учетом $U_1(t) = U_{02}$ получим

$$RC \frac{d(U_2(t) - U_{02})}{dt} = U_{02} - U_2(t) = -(U_2(t) - U_{02}).$$

Решением полученного дифференциального уравнения является зависимость $U_2(t) = U_{02} - K e^{-t/RC}$. Значение неопределенной постоянной K можно получить, зная, что непосредственно в момент изменения входного напряжения (пусть это будет момент времени $t = 0$) выходное напряжение имеет значение U_{01} :

$$U_2(t) \big|_{t=0} = U_{02} - K = U_{01} \Rightarrow K = U_{02} - U_{01}.$$

Итак, выходное напряжение цепи экспоненциально изменяется от значения U_{01} к значению U_{02} , как это и изображено на рис. 9.1:

$$U_2(t) = U_{02} - (U_{02} - U_{01}) e^{-t/RC}.$$

Этот процесс называют также *процессом перезаряда конденсатора C* .

Разность между выходным и входным напряжениями экспоненциально уменьшается, причем за промежуток времени RC она становится меньше в $e = 2,718281828...$ раз, поэтому постоянная RC называется *характерным временем перезаряда RC -цепи*.

Пример 9.2. Дифференцирующая RL -цепь.

Схема, изображенная на рис. 9.2, имеет частотную характеристику

$$H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L},$$

являющуюся приближением частотной характеристики идеальной дифференцирующей цепи $H(\omega) = j\omega\tau$. Вычислим реакцию диф-

ференцирующей RL -цепи на мгновенный перепад входного напряжения.

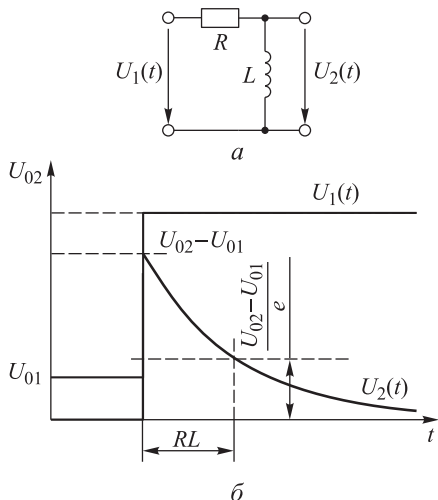


Рис. 9.2. Дифференцирующая RL -цепь:

a — рассматриваемая схема; b — реакция схемы на скачкообразное изменение напряжения ($U_{02} - U_{01}$)

До изменения входного напряжения в момент времени $t = 0$ падение напряжения на катушке индуктивности равно нулю, поэтому ток, протекающий через нее, имеет величину $I_L = I_R = U_{01}/R$. После того как входное напряжение приняло значение U_{02} , процессы в цепи определяются соотношениями

$$I = \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R};$$

$$U_2(t) = L \frac{dI}{dt}.$$

Объединяя их, получим дифференциальное уравнение

$$U_2(t) = \frac{L}{R} \left(\frac{dU_1(t)}{dt} - \frac{dU_2(t)}{dt} \right),$$

которое при учете постоянства входного напряжения принимает более простой вид:

$$U_2(t) = -\frac{L}{R} \frac{dU_2(t)}{dt}.$$

Решением дифференциального уравнения является экспонента

$$U_2(t) = K e^{-(R/L)t}.$$

Константу K можно определить из условия

$$I(t)|_{t=0} = \frac{U_{02} - U_2(t)|_{t=0}}{R} = \frac{U_{02} - K}{R} = \frac{U_{01}}{R} \Rightarrow K = U_{02} - U_{01}.$$

Таким образом, переходной процесс описывается выражением

$$U_2(t) = (U_{02} - U_{01}) e^{-(R/L)t}$$

и является экспонентой с характерным временем установления R/L , как это и изображено на рис. 9.2.

Интегрирующие цепи можно строить на основе резистора и катушки индуктивности точно так же, как дифференцирующие — на основе конденсатора и резистора. Варианты их построения изображены на рис. 9.3 и 9.4.

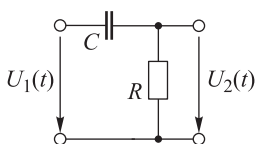


Рис. 9.3. Дифференцирующая RC -цепь

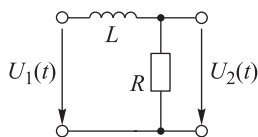


Рис. 9.4. Интегрирующая RL -цепь

Приведенные примеры вычисления переходных процессов сводятся к исследованию изменения выходного сигнала цепи как реакции на скачкообразное изменение входного, т. е. являются, по сути, вычислением переходной характеристики цепи. Рассмотрим более сложные случаи.

Пример 9.3. В цепи, изображенной на рис. 9.5, вычислить переходный процесс $U(t)$, возникающий при изменении значения сопротивления нагрузки R_n . Пусть его первоначальное значение — R_1 , а новое — R_2 .

Решение. До изменения сопротивления нагрузки ток через конденсатор не течет, поэтому величину U можно определить по

формуле делителя напряжения: $U = U_0 R_1 / (R + R_1)$. Запишем основные соотношения, описывающие процессы в цепи:

$$I_0 = I_R + I_C; \quad I_0 = \frac{U_0 - U(t)}{R};$$

$$I_C = C \frac{dU(t)}{dt}; \quad I_R = \frac{U(t)}{R}.$$

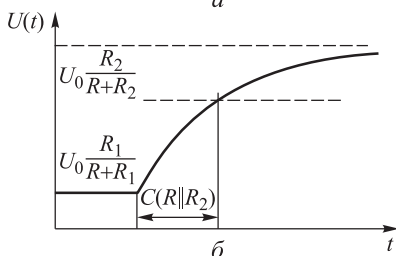
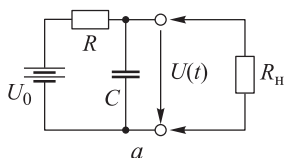


Рис. 9.5. К примеру 9.3:

a — рассматриваемая схема; *б* — график переходного процесса $U(t)$

Разрешим полученную систему уравнений относительно $U(t)$:

$$\frac{U(t)}{R_H} + C \frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_0 - U(t)}{R}.$$

Полученное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} C \frac{dU(t)}{dt} &= \frac{U_0}{R} - U \frac{R + R_H}{RR_H} = \\ &= - \left(U(t) - U_0 \frac{R_H}{R + R_H} \right) \frac{R + R_H}{RR_H} = - \left(U(t) - U_0 \frac{R_H}{R + R_H} \right) \frac{1}{(R || R_H)} \end{aligned}$$

при $t \geq 0$ ($R_H = R_2$) имеет следующее решение:

$$U(t) = U_0 \frac{R_2}{R + R_2} + K \exp \left(- \frac{t}{C(R || R_2)} \right),$$

где K — произвольная константа.

При неизменной емкости конденсатора постоянство его заряда означает постоянство падения напряжения на нем. Это дает основание найти значение константы интегрирования K :

$$U(t)|_{t=0} = U_0 \frac{R_2}{R + R_2} + K = U_0 \frac{R_1}{R + R_1},$$

откуда

$$K = U_0 \left(\frac{R_1}{R + R_1} - \frac{R_2}{R + R_2} \right) = U_0 \frac{R(R_1 - R_2)}{(R + R_1)(R + R_2)}.$$

Таким образом, переходный процесс в рассматриваемой цепи имеет вид

$$U(R + R_2) = U_0 \left[\frac{R_2}{R + R_2} + \frac{R(R_1 - R_2)}{(R + R_1)(R + R_2)} \exp \left(-\frac{t}{C(R||R_2)} \right) \right]$$

и является экспоненциальным процессом с характерным временем затухания $C(R||R_2)$.

Пример 9.4. Для цепи, изображенной на рис. 9.6, вычислить переходный процесс, вызываемый изменением емкости конденсатора от значения C_1 до значения C_2 .

Решение. Пусть изменение емкости конденсатора происходит в момент времени $t = 0$. До этого момента ток через конденсатор не течет, поэтому отсутствует и ток в резисторе. Следовательно, $U(t)|_{t=0} = 0$, разность потенциалов на конденсаторе составляет величину U_0 , а его заряд равен CU_0 . Именно этот заряд, согласно основным законам коммутации, должен оставаться на обмотках конденсатора сразу после изменения его емкости.

Запишем основные соотношения, описывающие цепь на рис. 9.6:

$$U(t) + U_C = U_0; \quad I = \frac{U(t)}{R} = C \frac{dU_C}{dt},$$

и, основываясь на них, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U(t)}{RC}.$$

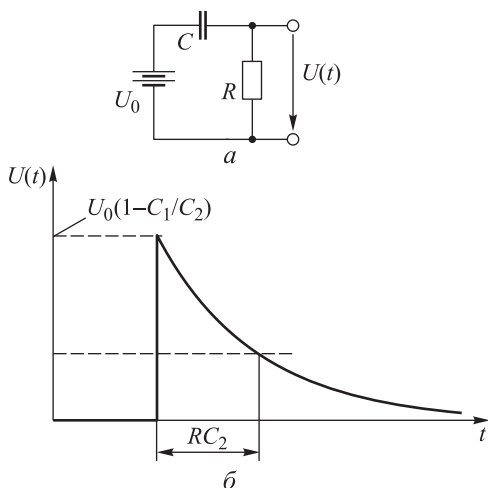


Рис . 9.6. К примеру 9.4:
a — рассматриваемая схема;
б — график переходного процесса $U(t)$

Его решение при $t \geq 0$ следующее:

$$U(t) = Ke^{-t/RC_2}.$$

Для нахождения постоянной интегрирования K напомним, что в момент времени $t = 0$ конденсатор имеет заряд

$$q = C_1 U_0 = C_2 U_C \Big|_{t=0} = C_2 (U_0 - U(t)) \Big|_{t=0},$$

откуда

$$C_1 U_0 = C_2 (U_0 - K) \Rightarrow K = U_0 (1 - C_1/C_2).$$

Итак, переходный процесс имеет вид

$$U(t) = U_0 \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right) e^{-t/RC_2},$$

т. е. после изменения емкости конденсатора на выходе цепи (см. рис. 9.6) появляется импульс с амплитудой $U_0(1 - C_1/C_2)$ и характерным временем затухания RC_2 . Рассмотренные примеры демонстрируют, как, пользуясь достаточно унифицированными методами, анализировать процессы, возникающие в линейных электрических цепях при скачкообразном изменении их параметров.

Контрольные вопросы

1. Могут ли наблюдаться переходные процессы в резистивном делителе напряжения?
2. Какой переходный процесс будет наблюдаться в интегрирующей RC -цепи при скачкообразном изменении емкости?
3. Можно ли при исследовании переходных процессов считать неизменным заряд конденсатора?
4. Можно ли при исследовании переходных процессов считать неизменным ток, протекающий через катушку индуктивности?
5. Какой переходный процесс будет наблюдаться при соединении между собой двух конденсаторов одинаковой емкости, но имеющих различные заряды?
6. Имеет ли смысл говорить о переходном процессе при подключении конденсатора к идеальному источнику напряжения?
7. При соблюдении каких условий можно считать, что интегрирующая цепь производит интегрирование входного сигнала?
8. При соблюдении каких условий можно считать, что дифференцирующая цепь производит дифференцирование входного сигнала?

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя схему линейной цепи для исследования переходных процессов.
2. Рассчитать переходный процесс в исследуемой цепи. Построить график зависимости выходного сигнала от времени.
3. Собрать исследуемую схему. С помощью осциллографа снять зависимости выходного сигнала от времени. Нанести эту зависимость на график, построенный согласно п. 2.

Содержание отчета

1. Подробный расчет переходного процесса в исследуемой линейной цепи.
2. График рассчитанного переходного процесса.
3. Таблица измеренных точек переходного процесса.
4. График измеренного переходного процесса.

10. ТРАНСФОРМАТОР

Ключевые слова и термины:

- обмотка трансформатора;
- сердечник;
- ЭДС самоиндукции, индуктивность;
- ЭДС взаимоиндукции, коэффициент взаимоиндукции;
- коэффициент трансформации;
- согласование нагрузки;
- гальваническая развязка.

Трансформатор представляет собой конструкцию из двух и более катушек индуктивности с общим магнитным потоком. Это означает, что магнитный поток, создаваемый одной катушкой индуктивности (или *первичной обмоткой* трансформатора), полностью пронизывает вторичную обмотку, и наоборот (рис. 10.1).

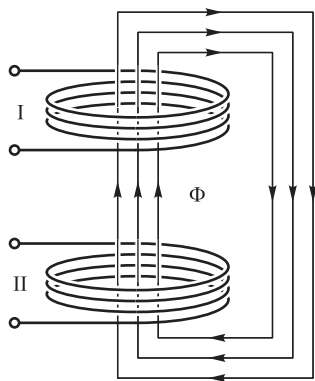


Рис. 10.1. Принципиальная конструкция трансформатора:

I, II — первичная и вторичная обмотки; Φ — магнитный поток

Чтобы магнитный поток не рассеялся в пространстве и был полностью охвачен обмотками трансформатора, используют *сер-*

дечник, изготовленный из материала с высокой магнитной проницаемостью. Поскольку силовые линии магнитного поля должны замыкаться, они будут оставаться внутри сердечника только в том случае, если сердечник трансформатора замкнут.

На рис. 10.2 приведены обозначения трансформаторов на принципиальных электрических схемах. Жирной линией обозначается сердечник трансформатора, вплотную прилегающими к нему изображены обмотки трансформатора, количество которых должно быть не менее двух. От части обмотки может быть сделан *отвод*. Иногда на схемах жирными точками отмечается направление обмоток. Изменение магнитного потока в сердечнике вызывает одновременное увеличение (или одновременное уменьшение) электрических потенциалов тех концов обмоток, которые отмечены жирными точками.

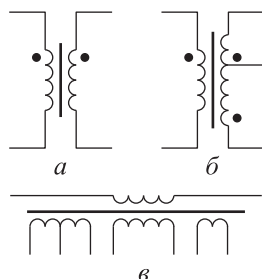


Рис. 10.2. Обозначения трансформаторов (*a*, *б*, *в*) на электрических схемах

Рассмотрим процессы, происходящие в трансформаторе. Пусть один виток, через который протекает ток I , создает магнитный поток $\Phi_0 = L_0 I$. Вся обмотка, содержащая n витков, при том же протекающем токе создает магнитный поток $\Phi = n\Phi_0 = nL_0 I$. Изменение протекающего тока вызывает изменение магнитного потока, что приводит к возникновению в одном витке ЭДС, равной $E_0 = -d\Phi/dt = -nL_0 di/dt$. ЭДС всей обмотки (ЭДС самоиндукции) составит величину $E = nE_0 = -n^2 L_0 di/dt$.

Поскольку падение напряжения на катушке индуктивности определяется выражением $U = L di/dt$, индуктивность одной обмотки трансформатора (как и индуктивность катушки индуктивности) можно рассчитать по формуле $L = n^2 L_0$, где n — число витков; L_0 — индуктивность одиночного витка.

Пусть ток протекает в первичной обмотке трансформатора, содержащей n_1 витков, а нас интересует ЭДС, наводимая во вторичной обмотке, содержащей n_2 витков. Ток первичной обмотки создает магнитный поток $\Phi = L_1 I_1 = n_1 L_0 I_1$. Во вторичной обмотке наводится ЭДС

$$E_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = -n_1 n_2 L_0 \frac{dI_1}{dt} = -\sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt}.$$

Величина $M = \sqrt{L_1 L_2}$ носит название «коэффициент взаимной индукции». Если в первичной обмотке протекает ток $I_1(t)$, а во вторичной — ток $I_2(t)$, в этих обмотках наводятся ЭДС:

$$E_1 = -\left(L_1 \dot{I}_1 + \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_2\right); \quad E_2 = -\left(L_2 \dot{I}_2 + \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_1\right).$$

При протекании через трансформатор переменного (синусоидального) тока те же формулы можно записать для комплексных амплитуд ЭДС и токов в следующем виде:

$$E_1 = -\left(j\omega L_1 I_1 + j\omega \sqrt{L_1 L_2} I_2\right); \quad E_2 = -\left(j\omega L_2 I_2 + j\omega \sqrt{L_1 L_2} I_1\right).$$

Типовое включение трансформатора в электрическую сеть показано на рис. 10.3. В первичную цепь включаются источник переменной ЭДС с амплитудой U_1 и комплексное сопротивление Z_1 . Введением этого сопротивления можно учесть влияние активного сопротивления первичной обмотки. Ко вторичной обмотке подключается нагрузка Z_2 .

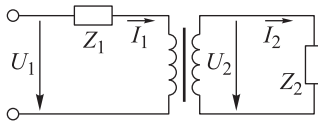


Рис. 10.3. Типовое включение трансформатора в электрическую сеть

Запишем второй закон Кирхгофа для первичной и вторичной цепей, выбрав направления обхода контуров совпадающими с направлениями токов:

$$I_1 Z_1 = U_1 + E_1 = U_1 - j\omega \left(L_1 I_1 + \sqrt{L_1 L_2} I_2\right);$$

$$I_2 Z_2 = E_2 = -j\omega \left(L_2 I_2 + \sqrt{L_1 L_2} I_1\right).$$

Разрешим полученную систему уравнений относительно I_1 и I_2 :

$$I_1 = U_1 \frac{Z_2 + j\omega L_2}{(Z_2 + j\omega L_2)(Z_1 + j\omega L_1) + \omega^2 L_2 L_1};$$

$$I_2 = -U_1 \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{(Z_2 + j\omega L_2)(Z_1 + j\omega L_1) + \omega^2 L_2 L_1}.$$

Последние выражения существенно упрощаются, если выполняются условия $|Z_1| \ll \omega L_1$, $|Z_2| \ll \omega L_2$, т. е. собственный импеданс обмоток существенно превышает импеданс подключенных к ним двухполюсников:

$$I_1 = U_1 \frac{L_2}{L_1 Z_2 + L_2 Z_1} = U_1 \frac{n_2^2 L_0}{n_1^2 L_0 Z_2 + n_2^2 L_0 Z_1} = \frac{U_1}{(n_1^2/n_2^2)Z_2 + Z_1};$$

$$I_2 = -U_1 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1 Z_2 + L_2 Z_1} = -U_1 \frac{n_1 n_2}{n_1^2 Z_2 + n_2^2 Z_1} = \frac{-U_1 (n_2/n_1)}{Z_2 + (n_2^2/n_1^2)Z_1}.$$

Таким образом, отдельно для первичной и для вторичной цепей трансформатор удобно представить в виде эквивалентных схем, показанных на рис. 10.4.

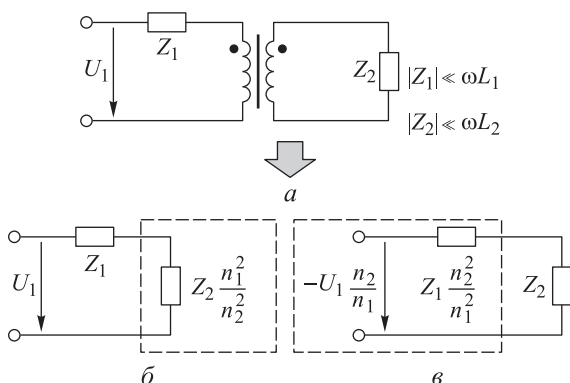


Рис. 10.4. Представление трансформатора (а) в виде эквивалентных схем (б, в)

Для цепи первичной обмотки подключение трансформатора с нагрузкой Z_2 во вторичной цепи эквивалентно включению в первичную цепь двухполюсника с импедансом $Z_2 (n_1^2/n_2^2)$. Для цепи

вторичной обмотки подключение трансформатора с ЭДС U_1 и внутренним импедансом Z_1 эквивалентно подключению ЭДС $-U_1(n_2/n_1)$ с внутренним импедансом $Z_1(n_2^2/n_1^2)$. Величина n_2/n_1 , таким образом, играет важную роль и носит название *коэффициента трансформации*.

Преобразование напряжения с тем же коэффициентом имеет место и в случае $|Z_1| \ll \omega L_1$, $|Z_2| \gg \omega L_2$:

$$\begin{aligned} I_2 &= -U_1 \frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{(Z_2 + j\omega L_2)(Z_1 + j\omega L_1) + \omega^2 L_2 L_1} = -U_1 \frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{j\omega Z_2 L_1 + \omega^2 L_2 L_1} = \\ &= -U_1 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{Z_2 L_1 - j\omega L_2 L_1} = -U_1 \frac{\sqrt{L_2/L_1}}{Z_2 - j\omega L_2} = \frac{-U_1(n_2/n_1)}{Z_2 - j\omega L_2} = \frac{-U_1(n_2/n_1)}{Z_2}. \end{aligned}$$

Эквивалентное представление на рис. 10.4 справедливо только тогда, когда $|Z_1| \ll \omega L_1$ и $|Z_2| \gg \omega L_2$, т. е. при большой индуктивности обмоток трансформатора и высоких рабочих частотах. При низких частотах эти условия не выполняются. Для достижения высоких значений индуктивности следует использовать сердечники из материалов с высокой магнитной проницаемостью и предусматривать достаточно большое количество витков в обмотках трансформатора.

Основные направления применения трансформатора сводятся к следующим.

1. Преобразование амплитуды переменного напряжения.

Это наиболее часто встречающееся использование трансформаторов. Амплитуда напряжения на вторичной обмотке в n_1/n_2 раз меньше амплитуды напряжения на первичной обмотке. Использование трансформатора для преобразования напряжения привлекательно в первую очередь тем, что преобразование происходит без потери энергии. В то время как напряжения обмоток связаны отношением числа витков $U_2 = U_1(n_2/n_1)$, токи в первичной и во вторичной цепях связаны обратным соотношением $I_2 = I_1(n_1/n_2)$. По этой причине использование трансформатора — самое доступное средство для преобразования напряжения без потерь энергии.

2. Согласование нагрузки.

Если источник переменного напряжения с внутренним сопротивлением r подключить к нагрузке с сопротивлением R , то максимальная мощность будет рассеиваться в нагрузке при равенстве сопротивлений нагрузки и источника $r = R$. Если же сопротивления нагрузки и источника фиксированы и не совпадают, то для реализации максимальной мощности в нагрузке можно использовать трансформатор с коэффициентом трансформации $n_2/n_1 = \sqrt{R_2/R_1}$ (рис. 10.5). Описанная процедура носит название «*согласование нагрузки*».

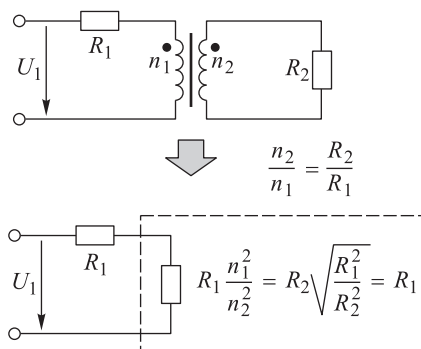


Рис. 10.5. Согласование нагрузки с помощью трансформатора

3. Гальваническая развязка.

Первичная и вторичная цепи трансформатора не имеют общих точек. Они изолированы друг от друга. Можно выбрать любую точку электрической схемы и объявить ее потенциал равным нулю. При использовании трансформатора такие точки можно выбрать независимо и в первичной, и во вторичной цепях. В таких случаях говорят, что различные цепи трансформатора *гальванически развязаны*. Гальваническая развязка оказывается весьма полезной в ряде практических приложений, например в медицинской технике.

Контрольные вопросы

1. Будет ли работать трансформатор с сердечником из сухой фанеры?
2. Можно ли использовать в качестве трансформатора катушку индуктивности с отводом от части витков?

3. Почему в реальных конструкциях трансформаторов число витков исчисляется сотнями и тысячами?

4. Можно ли с помощью трансформатора преобразовать емкостную нагрузку в индуктивную?

5. Зависит ли коэффициент трансформации от частоты используемого напряжения?

6. Можно ли использовать трансформатор для преобразования напряжения батарейки 1,5 В в напряжение 12 В?

7. Имеет ли практическую ценность трансформатор с равным количеством витков первичной и вторичной обмоток?

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя трансформатор для исследования.

2. Измерить индуктивность обмоток трансформатора. Для этого подключить к измеряемой обмотке источник переменного напряжения с амплитудой U и измерить амплитуду протекающего по обмотке тока I , после чего вычислить значение индуктивности $L = U/\omega I$. Измерения повторить при разных значениях частоты.

3. Вычислить коэффициент трансформации по формуле $k = \sqrt{L_2/L_1}$.

4. Измерить коэффициент трансформации как отношение амплитуды напряжений первичной и вторичной обмоток. Измерения провести на различных частотах. Сравнить с рассчитанным значением.

5. Подключить к первичной обмотке трансформатора источник переменного напряжения. Снять зависимость тока первичной обмотки от сопротивления, подключенного ко вторичной обмотке трансформатора. Объяснить полученную зависимость.

Содержание отчета

1. Таблица измеренных значений амплитуды тока в обмотках трансформатора при различных частотах переменного напряжения и соответствующие им значения коэффициента трансформации.

2. Измеренные значения коэффициента трансформации при различных частотах.

3. Зависимость тока первичной обмотки от сопротивления, подключенного ко вторичной обмотке резистора.

11. ДЛИННАЯ ЛИНИЯ

Ключевые слова и термины:

- *телеграфные уравнения;*
- *погонная емкость;*
- *погонная индуктивность;*
- *скорость распространения волн в длинной линии;*
- *волновое сопротивление.*

Электрические сигналы, передаваемые на расстояние, распространяются обязательно по двум проводникам, следовательно, электрические линии передачи информации должны быть двухпроводными. Электрическая схема такой линии приведена на рис. 11.1.

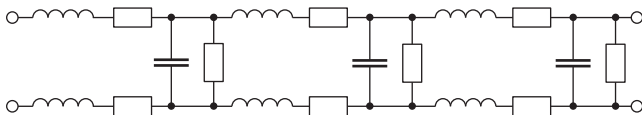


Рис. 11.1. Эквивалентная электрическая схема длинной линии (общий случай)

В схеме учитывается, что в пространстве между проводниками возникает электрическое поле, пропорциональное разности потенциалов между ними, т. е. каждая точка длинной линии содержит эффективную емкость, и электрический ток, протекающий по проводникам, создает в пространстве магнитное поле, и каждая точка проводника содержит эффективную индуктивность. Кроме того, на схеме указаны сопротивление проводников и сопротивление диэлектрика между проводниками. В длинных линиях не очень большой протяженности этими сопротивлениями можно пренебречь и использовать более простую эквивалентную схему длинной линии (рис. 11.2).

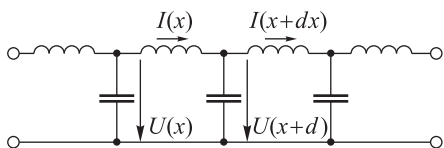


Рис. 11.2. Эквивалентная схема длинной линии (без потерь)

В момент времени t в точке длинной линии с координатой x протекает ток $I(x, t)$, а между проводниками линии есть некоторая разность потенциалов $U(x, t)$. Таким образом, состояние длинной линии полностью описывается данными двумя функциями времени и координаты. Изменение этих величин во времени описывается *телеграфными уравнениями*:

$$\begin{aligned}\frac{dI(x, t)}{dx} &= -c \frac{dU(x, t)}{dt}; \\ \frac{dU(x, t)}{dx} &= -l \frac{dI(x, t)}{dt},\end{aligned}$$

где c — емкость длинной линии единичной длины, или *погонная емкость*; l — индуктивность длинной линии единичной длины, или *погонная индуктивность*.

Телеграфные уравнения допускают решение в виде бегущих волн:

$$\begin{aligned}U(x, t) &= f_1(x - vt); \\ I(x, t) &= f_2(x - vt),\end{aligned}$$

причем скорость распространения волн определяется параметрами длинной линии: $v = \pm 1/\sqrt{lc}$.

Волны в длинной линии могут распространяться как слева направо ($v > 0$), так и справа налево ($v < 0$). Если волна в линии распространяется слева направо, то напряжение и ток в линии связаны соотношением $U(x, t) = I(x, t)\sqrt{l/c}$. Для волны, распространяющейся в противоположном направлении (справа налево), это соотношение инвертируется: $U(x, t) = -I(x, t)\sqrt{l/c}$. Параметр $\rho = \sqrt{l/c}$, связывающий значения тока и напряжения, носит название *волнового сопротивления* длинной линии.

Если в длинной линии, нагруженной на конце сопротивлением R , распространяется волна, то она может отразиться от конца линии, как это изображено на рис. 11.3. Такое изображение длинной линии является общепринятым и соответствует коаксиальной длинной линии.

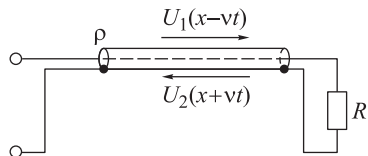


Рис. 11.3. Отражение волны от конца длинной линии

Пусть падающая волна описывается напряжением и током $U_1(x,t)$ и $I_1(x,t)$ и распространяется слева направо: $U_1 = \rho I_1$. Для отраженной волны, описываемой напряжением $U_2(x,t)$ и током $I_2(x,t)$, должно выполняться почти аналогичное выражение $U_2 = -\rho I_2$. На сопротивление R падают обе волны, поэтому падение напряжения на нем будет равно сумме $U_1 + U_2$, а ток, протекающий через него, будет равен сумме $I_1 + I_2$. Считая, что коэффициент отражения волны от конца длинной линии равен k ($U_2 = kU_1$), получим

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I_1 + I_2} = \frac{U_1 + U_2}{U_1 - U_2} \rho = \frac{1+k}{1-k} \rho,$$

откуда значение коэффициента отражения

$$k = \frac{R - \rho}{R + \rho}.$$

Из последнего выражения следует, что разомкнутый конец длинной линии ($R = \infty$) полностью отражает упавшую волну ($k = 1$), а замкнутый накоротко ($R = 0$) — отражает ее с инвертированием ($k = -1$). В случае равенства сопротивления нагрузки волновому сопротивлению линии ($R = \rho$) коэффициент отражения равен нулю и отраженная волна отсутствует.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, т. е. представляя процессы в длинной линии как суперпозицию двух волн, распро-

страняющихся в противоположных направлениях, можно получить большое количество полезных результатов.

Пример 11.1. К отрезку длинной линии длиной L подключен идеальный источник переменного напряжения с амплитудой U_0 и частотой ω . Другой конец длинной линии разомкнут. Считая известными волновое сопротивление длинной линии ρ и скорость v распространения волн в ней, определить величину тока, втекающего в длинную линию.

Решение. Пусть конец длинной линии, к которому подключен источник, имеет координату 0, а разомкнутый конец — координату L . Рассмотрим две волны, распространяющиеся в отрезке длинной линии: волну, распространяющуюся слева направо —

$$\vec{U} \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) \right],$$

и волну, распространяющуюся справа налево —

$$\vec{U} \exp \left[j \left(\omega t + \frac{\omega}{v} x \right) \right].$$

Эти две волны создают токи

$$(\vec{U}/\rho) \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) \right] \text{ и } -(\vec{U}/\rho) \exp \left[j \left(\omega t + \frac{\omega}{v} x \right) \right].$$

На разомкнутом конце суммарный ток должен иметь нулевую величину:

$$(\vec{U}/\rho) \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{v} L \right) \right] - (\vec{U}/\rho) \exp \left[j \left(\omega t + \frac{\omega}{v} L \right) \right] = 0,$$

откуда следует связь амплитуд волн

$$\vec{U} = \vec{U} \exp \left(j \frac{\omega}{v} L \right).$$

На конце линии, подключенном к источнику, сумма напряжений волн должна давать напряжение источника:

$$\vec{U} \exp(j\omega t) + \vec{U} \exp(j\omega t) = U_0 \exp(j\omega t).$$

На том же конце сумма токов волн должна определять ток, текущий в линию:

$$(\vec{U}/\rho) \exp(j\omega t) - (\vec{U}/\rho) \exp(j\omega t) = I_0 \exp(j\omega t).$$

Решая получившуюся систему уравнений, получим

$$\vec{U} = \vec{U} \exp\left(j \frac{\omega}{v} L\right);$$

$$\vec{U} + \vec{U} = U_0;$$

$$\vec{U} - \vec{U} = \rho I_0,$$

откуда найдем комплексную амплитуду тока I_0 :

$$I_0 = j \frac{U_0}{\rho} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{v} L\right).$$

Из последнего выражения следует, что разомкнутая длинная линия представляет собой реактивный двухполюсник. Зависимость амплитуды тока от частоты подключаемого напряжения имеет вид, приведенный на рис. 11.4.

Ток принимает нулевое значение при $\omega = \pi v n / L$ и бесконечно большое значение при $\omega = \pi v (n + 1/2) / L$. Если частота подаваемого напряжения равна $\pi v n / (4L)$, то амплитуда тока в длинной линии имеет значение U_0 / ρ .

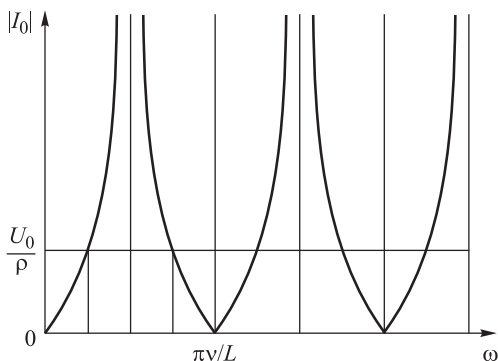


Рис. 11.4. Зависимость тока I_0 длинной линии от частоты подаваемого напряжения ω

Сделанные выводы позволяют сформулировать алгоритм определения параметров длинной линии. Для этого необходимо определить самую низкую частоту ω_0 переменного напряжения, при которой ток в длинной линии становится равным нулю. Это дает возможность определить скорость распространения волн в длинной линии: $v = L\omega_0/\pi$. После чего необходимо измерить амплитуду тока I_1 на частоте $\omega_0/4$ и определить волновое сопротивление линии $\rho = U_0/I_1$.

Контрольные вопросы

1. Можно ли с помощью одного омметра определить волновое сопротивление длинной линии?

2. Почему телевизоры, имеющие входное сопротивление 75 Ом, не рекомендуют подключать к антенне кабелем с волновым сопротивлением 50 Ом?

3. Рассчитайте падение напряжения на нагрузке, имеющей сопротивление R и подключенной к источнику напряжения U_0 с внутренним сопротивлением r через длинную линию с волновым сопротивлением ρ (рис. 11.5).

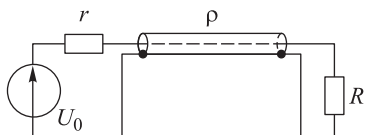


Рис. 11.5. Подключение нагрузки к источнику через длинную линию

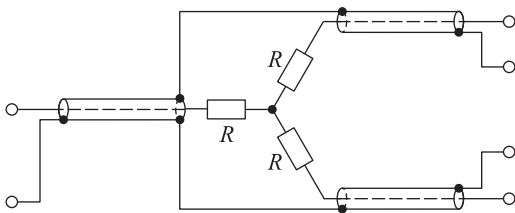
4. Определите скорость распространения сигнала и волновое сопротивление длинной линии с параметрами $c = 100 \text{ пФ/м}$; $l = 1 \text{ мкГн/м}$. Может ли реально существовать такая длинная линия?

5. Можно ли метровый отрезок длинной линии с погонной емкостью $c = 10 \text{ нФ/м}$ использовать как конденсатор с емкостью 10 нФ?

6. Можно ли отрезок длинной линии использовать как колебательный контур?

7. На рис. 11.6 изображена схема телевизионного разветвителя. Объясните принцип ее работы и обоснуйте выбор величины R , учитывая, что волновое сопротивление телевизионных кабелей — 75 Ом.

Рис. 11.6. Схема телевизионного разветвителя



8. Проанализируйте зависимость тока длинной линии от частоты подаваемого напряжения при замкнутом накоротко конце линии.

Программа лабораторной работы

1. Получить у преподавателя отрезок длинной линии для исследования.

2. Подключить к одному концу длинной линии источник переменного напряжения. Второй конец линии оставить разомкнутым.

3. Снять зависимость тока длинной линии от частоты подаваемого напряжения, как можно более точно измеряя частоты, при которых ток длинной линии принимает нулевое значение.

4. По полученной зависимости определить скорость распространения волн в длинной линии и ее волновое сопротивление.

5. Подключить к длинной линии генератор коротких импульсов, а к противоположному ее концу, нагруженному на сопротивление R , — осциллограф.

6. Изменяя время задержки между отраженными импульсами, определить скорость распространения импульса в длинной линии. Сравнить со значением, полученным в п. 4.

7. Изменяя амплитуды главного и отраженного импульсов, вычислить волновое сопротивление линии. Сравнить со значением, полученным в п. 4. При этом следует учесть, что первый отраженный импульс отражается 2 раза — сначала от конца длинной линии, нагруженного на сопротивление R , а затем — от замкнутого накоротко конца длинной линии, подключенного к импульсному генератору.

8. Изменяя величину сопротивления R , добиться отсутствия отраженных импульсов. Сравнить величину R с волновым сопротивлением линии, полученным в п. 4.

Содержание отчета

1. Таблица измерения и график зависимости тока длинной линии от частоты подаваемого напряжения.
2. Частоты переменного напряжения (не менее трех), при которых ток длинной линии обращается в нуль.
3. Рассчитанные значения скорости распространения волн в длинной линии и волнового сопротивления линии.
4. Осциллограммы импульсов, отраженных концами линии.
5. Рассчитанные по осциллограммам значения скорости распространения импульсов в длинной линии и ее волновое сопротивление.
6. Значение сопротивления нагрузки длинной линии, при котором отражение импульсов отсутствует.

Литература

1. *Касаткин А.С., Немцов М.В.* Электротехника. 12-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия», 2008. 544 с.
2. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник. 10-е изд. М.: Гардарики, 2002. 638 с.
3. *Борисов Ю.М., Липатов Д.Н.* Общая электротехника: учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1974. 519 с.
4. *Карлащук В.И., Карлащук С.В.* Электронная лаборатория на IBM PC. Инструментальные средства и моделирование элементов практических схем. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. 144 с.

Содержание

Предисловие.....	3
1. Цепи постоянного тока.....	4
2. Нелинейные двухполосники.....	18
3. Источники тока и напряжения	25
4. Цепи переменного тока	33
5. Колебательный контур	46
6. Цепи трехфазного тока	57
7. Электрические измерения в цепях постоянного тока	66
8. Измерение комплексных сопротивлений.....	75
9. Переходные процессы	82
10. Трансформатор	92
11. Длинная линия	99
Литература	107

Учебное издание

Белодедов Михаил Владимирович
Михайлова Ольга Михайловна
Абулкасимов Манас Мукитович

Электротехника

Редактор *А.В. Звягин*
Художник *А.С. Ключева*
Корректор *О.В. Калашникова*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

В оформлении обложки использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 06.03.2015. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 6,75. Тираж 200 экз. Изд. № 140-2014. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com