Відношення та їх властивості. Відношення еквівалентності. Відношення часткового порядку.

Відношення та їх властивості

Найпростіший спосіб задати зв'язок між елементами двох множин — записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв'язку. Нехай А та В — множини. *Бінарне відношення* з А в В — це якась підмножина R декартового добутку АхВ цих множин: $R \subset A \times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з А в В — це множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині А, а другий — множині В. Використовують запис aRb, якщо $(\mathrm{a}, b) \in R$, і запис $a\bar{R}b$, якщо $(\mathrm{a}, b) \notin R$.

Бінарні відношення описують зв'язки між елементами двох множин. Зв'язки між елементами більше ніж двох множин задають n-арними відношеннями. Розглядаючи в певному контексті лише бінарні відношення, уживають термін „відношення" замість „бінарне відношення".

Приклад 1. Нехай А = {0,1,2}, В={a,b} та задано відношення R={(0,a), (0,b), (1,a), (2, b)}. Отже, 0Ra, бо $(0, \mathrm{a}) \in R$, але $1\bar{R}b$, оскільки $(1, b) \notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови А=В. *Відношенням на множині* А називають бінарне відношення з А в А. Інакше кажучи, відношення R на множині А - це підмножина декартового квадрату множини А, тобто $R \subset A^2$.

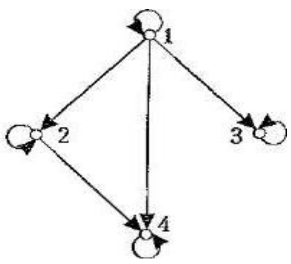
Приклад 2. Нехай А = {1, 2, 3, 4}. Які впорядковані пари утворюють відношення R= = {(a, b) | a ділить b}? Очевидно, що R = {(1, 1) (1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)}.

Бінарне відношення на множині А можна задати за допомогою булевої матриці чи орієнтованого графа. На n-елементній множині А відношення R задає $n \times n$матриця $M_R = [m_{ij}]$,i, j = 1,...., n, де

$$m_{ij} = \begin{array}{l} 1, \text{якщо} (a_i, a_j) \in R, \\ 0, \text{якщо} (a_i, a_j) \notin R. \end{array}$$

Граф G_R, який задає відношення R на множині А, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j)існує тоді й лише тоді, коли $(a_i, a_j) \in R$Такий граф G_Rназивають *графом, асоційованим із відношенням* R, або просто *графом відношення R*.

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення з прикладу 2.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

Розглянемо властивості відношень на множині А. Відношення R на множині А називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$виконується $(\mathrm{a}, \mathrm{a}) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині А = {1, 2, 3, 4}:

R_1={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}; R_2={(1, 1), (1,2), (2, 1)};

R_3= {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)};

R_4={(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)};

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}; R_6{(3,4)}.

Відношення R_3таR_5 рефлексивні, бо вони містять усі пари вигляду (а, а), тобто (1, 1), (2, 2), (3,3), (4,4). Решта відношень не рефлексивні. Зокрема, відношення R_1,R_2,R_4, R_6не містять пари (3, 3).

Відношення R на множині А називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(\text{a}, \text{a}) \notin R$. Наприклад, відношення R_4,R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1,R_2 — не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині А називають *симетричним*, якщо для будь-яких $\text{a}, b \in A$з того, що$(\text{a}, b) \in R$, випливає, що $(b, \text{a}) \in R$. У прикладі 4 лише відношення R_2таR_3 симетричні.

Відношення R на множині А називають *антисиметричним*, якщо для всіх $\text{a}, b \in A$з того, що $(\text{a}, b) \in R$і$(b, \text{a}) \in R$, випливає, що а = b. Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).

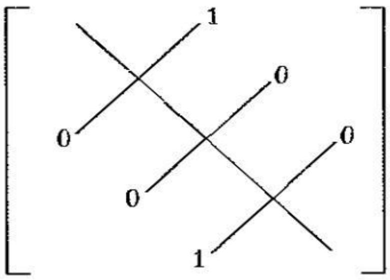
У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4- R_6. У кожному з них немає таких пар елементів ата $b(a \neq b)$, що водночас $(\text{a}, b) \in R$і$(b, \text{a}) \in R$. Властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості. Наприклад, відношення $R = \emptyset$на множині $\text{A} = \{\text{a}\}$водночас і симетричне, й антисиметричне. Є також відношення, які не мають жодної з цих двох властивостей, наприклад R_1із прикладу 4.

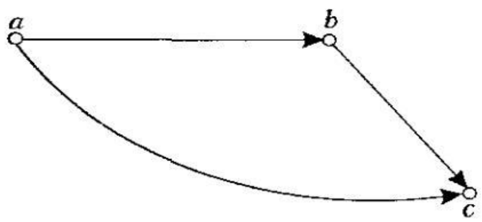
Відношення R на множині А називають *асиметричним*, якщо для всіх $\text{a}, b \in A$з того, що $(\text{a}, b) \in R$, випливає, що $(b, \text{a}) \notin R$. Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині А називають *транзитивним*, якщо для будь-яких $\text{a}, b, \text{c} \in A$з того, що $(\text{a}, b) \in R$і $(b, \text{c}) \in R$, випливає$(\text{a}, \text{c}) \in R$. Відношення$R_4$-$R_6$із прикладу 4 транзитивні, відношенняR_1-R_3 не транзитивні: $(3{,}4) \in R_1$,$(4{,}1) \in R_1$але $(3{,}1) \notin R_1$; $(2{,}1) \in R_2$, $(1{,}2) \in R_2$, але $(2{,}2) \notin R_2$;$(2{,}1) \in R_3$, $(1{,}4) \in R_3$, але $(2{,}4) \notin R_3$.

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються в їх матрицях і графах. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_Rлише одиниці, якщо іррефлексивне — то нулі. Матриця симетричного відношення симетрична, а матриця M_Rантисиметричного відношення R має таку властивість: якщо$i \neq j$,то з m_{ij}= 1 випливає m_{ji}=0 (але може бути $m_{ij} = m_{ji} = 0$)

Граф G_Rрефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) .





Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які мають водночас декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації. Відношення на множині А називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Два елементи множини А, пов'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними*. Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то кожний його елемент еквівалентний до самого себе. Більше того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що елементи а та b еквівалентні й b та с еквівалентні, випливає, що ата стакож еквівалентні.

Приклад 5. Нехай R — таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли$(a = b) \vee (a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому являє собою відношення еквівалентності.

Приклад 6. Нехай R — таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли (a-b) — ціле число. Оскільки число a-a=0 ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, що a-b — ціле число. Тому й число b-a також ціле, тобто bRa. Ми довели, шо відношення R симетричне. Якщо aRb та bRc, то числа a-b та b-c цілі. Але тоді число a - c = (a - b) + (b - c) також ціле, тобто aRc. Отже, відношення R транзитивне. Тому це відношення еквівалентності.

Приклад 7. Конгруентність за модулем m. Нехай m> 1 — ціле число. Доведемо, що $R = (a, b) \mid a \equiv b(modm)$— відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел. За означенням, $a \equiv b(modm)$еквівалентно тому, що m ділить (a-b). Зазначимо, що a - a = 0 ділиться на m, бо 0 = 0 • m. Отже, $a \equiv a(modm)$, тобто відношення рефлексивне. Окрім того, $a \equiv b(modm)$, якщо a – b = km, де k — ціле число. Тоді b – a = (-k)m, тобто $b \equiv a(modm)$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b(modm)$і $b \equiv c(modm)$. Це означає, що a – b = km, b – c = lm де k,l — цілі числа. Додамо останні дві рівності: a – b + b – c = (k+l)m, тобто a – c = (k+l)m. Отже, $a \equiv c(modm)$, тобто відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m — відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Нехай R — відношення еквівалентності на множині A. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елементаa $\in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a). Клас еквівалентності, породжений елементом a за відношенням R, позначають $[a]_R$. Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення [a]. Отже, $[a]_R = x \in A \mid aRx$. Елемент $b \in [a]_R$називають *представником* цього класу еквівалентності.

Приклад 8. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 5. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: [a] = {-a, a}, a $\neq 0$, та [0] = {0}.

Нехай R — відношення еквівалентності на множині A. Зазначимо, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

ЛЕМА 1. Нехай R — відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb, **(II)** [a] = [b], **(III)** $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям множини. Цей зв'язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають її розбиттям, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються й об'єднання їх усіх дорівнює множині A.

ТЕОРЕМА 1 . Кожне відношення еквівалентності R на множині A породжує її розбиття на класи еквівалентності.

Доведення. Об'єднання класів еквівалентності за відношенням R покриває множину A, бо кожен елемент a з множини A належить своєму власному класу еквівалентності$[a]_R$

Інакше кажучи, $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

Із леми випливає, що коли $[a]_R \neq [b]_R$, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Приклад 9. Відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 9) породжує розбиття множини Z цілих чисел на чотири класи еквівалентності:$[0]_4$,$[1]_4$, $[2]_4$та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині Z.

ТЕОРЕМА 2. Будь-яке розбиття множини A задає відношення еквівалентності на множині A.

Відношення часткового порядку.

Відношення R на множині A називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину A з частковим порядком R називають *частково впорядкованою множиною* й позначають (A,R).

Приклад 10. Нехай $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$. Відношення R задамо як звичайне порівняння чисел: $(a,b) \in R$тоді й лише тоді, коли $a \leq b(a,b \in A)$. Неважко безпосередньо переко- натись, що це частковий порядок на множині A.

Приклад 11. Нехай A – множина з прикладу 10. Відношення задамо так:$(a,b) \in R_1$тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже: R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2,12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)}. Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині *A*.

Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають *порівнянними*, якщо aRb або bRa. Якщо a та b — такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають непорів- нянними.

Приклад 12. Елементи 3 та 4 множини (A,R_1) із прикладу 11 – непорівнянні.

Якщо (A, R) - частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнянні, то її називають *лінійно,* або *тотально впорядкованою,* а частковий порядок R — *лінійним,* або *тотальним* порядком. Отже, множина (A, R) із прикладу 10 лінійно впорядкована, множина (A,R_1) із прикладу 11 частково впорядкована, але не лінійно впорядкована. Лінійно впорядковану множину називають також ланцюгом.

Нехай на скінченній множині A задано якесь відношення часткового порядку R, а G_R— граф, асоційований із цим відношенням. Відношення R можна задати за допомогою такої процедури. Починають із графа G_R.Оскільки відношення часткового порядку рефлексив- не, то в кожній вершині графа G_R є петля. Вилучають усі петлі в графі G_R . Потім вилучають усі дуги графа G_R, які є в ньому внаслідок транзитивності. Наприклад, якщо пари (a, b) та (b, c) належать відношенню, то в графі вилучають дугу (a, c). Більше того, якщо пара (c, d) також належить відношенню R, то в графі G_Rвилучають дугу (a, d). Після цього всі вершини графа розміщують на площині так, щоб початкова вершина кожної дуги була нижче, ніж кінцева вершина. Тепер усувають усі стрілки, бо дуги спрямовано вгору, до своїх кінце- вих вершин (отже, напрямок зрозумілий).

Усі ці кроки коректно визначені й у випадку скінченної множини *A* потрібна тільки скінченна кількість таких кроків. У результаті отримують *діаграму Гассе* (Hasse), яка містить усю інформацію, потрібну для подання відношення часткового порядку.

Приклад 13. Побудуємо діаграму Гассе для відношення часткового порядку з прикладу 11. Почнемо з орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R_1(рис. 2, а). Вилучимо всі петлі (рис. 2, б), а потім - усі дуги, зумовлені властивістю транзитивності, недуги (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12), (3, 12). Переконаємося, що напрямок всіх дуг - знизу вверх, і усунемо стрілки. Отримаємо діаграму Гассе (рис. 2 в).

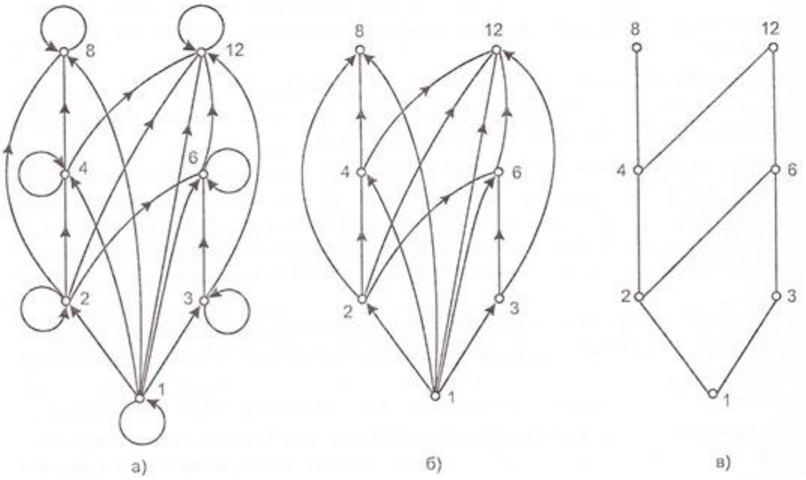


Рис. 2.

Символом ≤ часто позначають довільне відношення часткового порядку: у частково впорядкованій множині (A, R) $a \le b$означає, що $(a, b) \in R$. Використовують також записа $<$ b, який означає, що $a \le b$, але $a \ne b$. Коли $a < b$, то кажуть, що *a передує b* (a менше, ніж b) або *b виходить* з a (b більше, ніж a). Елемент $b \in A$ *безпосередньо виходить* з $a \in A$ тоді й лише тоді, коли $a < b$ і не існує такого елемента $u \in A$, що $a < u < b$. У такому разі також елемент *a безпосередньо передує* елементу b.

Є алгоритм, який дає змогу побудувати діаграму Гассе для частково впорядкованої множини без використання графа відношення. Цей алгоритм ґрунтується на такій властивості. Нехай (A, R) – скінченна частково впорядкована множина; тоді $a_1 < a_n$у тому й лише тому разі, якщо існує послідовність $a_1 < a_2 <\ldots< a_n$у якій $a_{(i+1)}$безпосередньо виходить з a_i для $i = 1,2,\ldots,n-1$.Зобразимо кожний елемента$a_i \in A$ точкою a_iна площині й розглянемо всі впорядковані пари(a_i, a_j). Точку a_jрозмістимо вище точкиa_i тоді й лише тоді, коли $a_i < a_j$, і з’єднаємо точки a_i та a_j лінією, якщо a_j безпосередньо виходить з a_i. Одержимо діаграму Гассе; у ній існує шлях, який веде від точки a_n до точки a_m, якщо $a_n < a_m$.

Елементи частково впорядкованих множин, які мають певні екстремальні властивості, дуже важливі в багатьох застосуваннях. Елемент частково впорядкованої множини називають *максимальним*, якщо він не менший за будь-який елемент цієї множини. Отже, a – максимальний елемент частково впорядкованої множини (A, R), якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $a < b$. Аналогічно, елемент називають *мінімальним*, якщо він не більший за будь-який елемент частково впорядкованої множини. Отже, елемент a — мінімальний, якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $b < a$. Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Гассе: це, відповідно, «верхні» й «нижні» її елементи (для «верхніх» елементів немає висхідних ребер, а «нижніх» — низхідних).

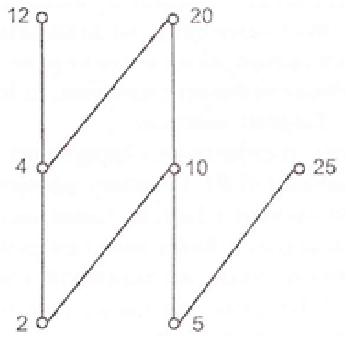


Рис. 3.

Приклад 14. На множині *A={2,* 4, 5, 10, 12, 20, 25} задано відношення часткового порядку R={(a,b)l a ділить b}. Знайдемо максимальні й мінімальні елементи множини *(A,R).* Діаграму Гасссе для цієї множини зображено на рис. 3. Із неї доходимо висновку, що максимальні елементи — 12, 20 і 25, а мінімальні — 2 та 5. Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.