Логіка та методи доведення

Логіка – наука про правильні міркування, про засоби та методи пізнання за допомогою міркувань.

Логіка, вивчаючи правильні міркування, оперує поняттями істинності та хибності. Правильні міркування або висловлювання є істинними, неправильні – хибними.

Логіку застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи й засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій.

Логіка висловлювань

Твердження або висловлювання – це думка, в якій стверджується наявність або відсутність яких-небудь фактів або зв’язків між фактами.

Означення 14.1. **Просте висловлювання** – це просте розповідне речення, про яке можна сказати, що воно є або істинним, або хибним, але й не те та інше одночасно.

Прикладами висловлювань є:

Сніг білий.

Київ– столиця України.

Земля – третя планета від Сонця.

Прикладами не висловлювань є:

$x + 1 = 3$.

Котра година?

Значення “істина” чи “хибність”, яких набуває висловлювання, називають його **значеннями істинності**. Значення “істина” позначають буквою T (від англ. “*truth*” – істина), а “хибність” – буквою F (від англ. “*false*” – хибність). Для позначення висловлювань використовують літери латинського алфавіту, які називаються **атомарними формулами** або **атомами**: p, q, r,…

Складні висловлювання складаються з простих за допомогою логічних операцій: заперечення (читають «не» та позначають знаком «$\neg$»), кон’юнкції (читають «і» та позначають знаком & або $\wedge$), диз’юнкції (читають «або» та позначають знаком $\vee$), імплікації (читають «якщо …, то» та позначають знаком $\rightarrow$), еквівалентності (читають «тоді й лише тоді» та позначають знаком $\sim$ або $\equiv$).

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиці істинності

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \sim q$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Якщо висловлювання A – “горобець – птах” істинно, то висловлювання $\neg A$ – “горобець – не птах” – хибне, а висловлювання $\neg\neg A$ – “Невірно, що горобець не птах” еквівалентне висловлюванню “горобець – птах”.

Кон’юнкція $A \wedge B$, яка відповідає сполучникам “і”, “та”, істинна тільки в тому випадку, коли істинні обидва висловлювання, що входять до її складу. Наприклад, твердження “найбільше місто України, Київ (A), є її столицею (B)” можна записати як $A \wedge B$. Висловлювання “на вулиці йде дощ (A) з сильним вітром (B)” також виражається формулою $A \wedge B$.

Диз’юнкція $A \vee B$, відповідає сполучнику “або”, істинна в будь-якому випадку, коли істинно хоча б одне висловлювання, яке входить до неї, і хибна тільки тоді, коли обидва висловлювання хибні. Наприклад, висловлювання “два помножити на два – чотири (A) або п’ять (B)” виражається формулою $A \vee B$ і є істинним.

Еквівалентність $A \sim B$ стверджує рівнозначність (рівносильність, тотожність) двох висловлювань A та B. Вона істинна тоді, коли істинність висловлювань A та B співпадає. Наприклад, висловлювання “тварина є птахом (A) тоді і тільки тоді, коли в неї є крила (B)” виражається формулою $A \sim B$.

Імплікацію як логічну операцію називають також умовним реченням. Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв’язок обов’язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: “якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку”. Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань, вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають всіх завдань, то вони можуть отримати оцінку “відмінно”, а можуть й не отримати її залежно від інших обставин.

Означення. (1) Кожний атом є формулою. (2) Якщо A та B – формули, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$.

Побудувавши формулу логіки висловлювань, ми відволікаємося від її змісту та оперуємо тільки поняттями істинності та хибності.

Означення. Тотожньо істинна формула називається **тавтологією** або **загальнозначущою**. Тотожньо хибна формула називається **суперечністю**. Формула, яка приймає істинне значення хоча б на одній своїй інтерпретації, називається **виконуваною**. Дві формули називаються **еквівалентними**, якщо їх таблиці істинності співпадають.

Якщо формула A є тавтологією, то це позначають $\vdash A$. Очевидно, що якщо A – тавтологія, то $\neg A$ – суперечність.

Означення. Якщо A та B – формули, то кажуть, що B **логічно слідує** з A, або з A **логічно випливає** B, якщо всюди де A приймає істинне значення, B також приймає істинне значення. Це позначається як $A \vdash B$ або $A \Rightarrow B$.

Теорема 1. Логічне слідування $A \vdash B$ виконується тоді і тільки тоді, коли формула $A \to B$ – тавтологія.

Означення 14.6. Якщо $A \vdash B$ і $B \vdash A$, то формула A **логічно еквівалентна** формулі B. Це позначається як $A \Leftrightarrow B$ або $A \equiv B$.

Якщо формула A логічно еквівалентна B, то $A \sim B$ – тавтологія.

Теорема 2. (правило **modus ponens**). Якщо A – тавтологія і $A \to B$ – тавтологія, то B – тавтологія.

Приклад 1.11. Розглянемо формулу $((p \to q) \wedge p) \to q$. Атомами в цій формулі є p та q, а формула має $2^2=4$ інтерпретації. Значення істинності заданої формули наведено в табл. 1.4. Задана формула істинна в усіх її інтерпретаціях, тобто вона – тавтологія. ▲

Таблиця 1.4

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Приклад 1.12. Розглянемо формулу $(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$. З табл. 1.5 робимо висновок, що задана формула фальшива в усіх інтерпретаціях, тобто заперечувана. ▲

Таблиця 1.5

p	q	$(p \to q)$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Приклад 1.10. Розглянемо формулу $(p \wedge q) \to (p \sim \bar{r})$.

p	q	r	$\bar{r}$	$(p \wedge q)$	$(p \sim \bar{r})$	$((p \wedge q) \to (p \sim \bar{r}))$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T

Приклад 1.13. За допомогою таблиці істинності покажемо, що $p \to q = \overline{p} \vee q$. Результат розв'язування задачі наведено у таблиці 1.6. ▲

Таблиця 1.6

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$(p \to q) \sim (\overline{p} \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Наступні два правила дозволяють вилучати зв'язки еквівалентності та імплікації з формул і перетворювати їх у формули, які таких зв'язок не містять: $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ та $p \to q = \overline{p} \vee q$ (див. приклад 1.13). Ці правила також можна використовувати для *введення* імплікації та еквівалентності.

Приклад 1.14. За допомогою таблиці істинності покажемо, що $p \to q \neq q \to p$. Результат розв'язування задачі наведено у табл. 1.7. ▲

Таблиця 1.7

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \sim (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Закони логіки висловлювань

	Назва законів	Формулювання законів
1.	Закони комутативності	а) $p \vee q = q \vee p$ б) $p \wedge q = q \wedge p$
2.	Закони асоціативності	а) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ б) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
3.	Закони дистрибутивності	а) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ б) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4.	Закон протиріччя	$p \wedge \overline{p} = \mathrm{F}$
5.	Закон виключеного третього	$p \vee \overline{p} = \mathrm{T}$
6.	Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{p}} = p$
7.	Закони ідемпотентності	а) $p \vee p = p$ б) $p \wedge p = p$
8.	Закони де Моргана	а) $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ б) $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$
9.	Закони поглинання	а) $(p \vee q) \wedge p = p$ б) $(p \wedge q) \vee p = p$
10.	Співвідношення для сталих	а) $p \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$ б) $p \wedge \mathrm{T} = p$ в) $p \vee \mathrm{F} = p$ г) $p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$

Приклад 1.15. Застосуванням законів логіки висловлювань доведемо еквівалентність формул $p\to(q\wedge r)$ та $(p\to q)\wedge(p\to r)$. Випишемо послідовність перетворень та запишемо біля кожного рядка назву застосованого закону або правила.

1. $\overline{p}\vee(q\wedge r)$ – правило вилучення імплікації з першої із заданих формул.
2. $(\overline{p}\vee q)\wedge(\overline{p}\vee r)$ – закон дистрибутивності 3*а* для формули 1.
3. $(p\to q)\wedge(p\to r)$ – правило введення імплікації для формули 2.

Отже, задані формули еквівалентні: $p\to(q\wedge r)=(p\to q)\wedge(p\to r)$. ▲

Приклад 1.16. Застосуванням законів логіки висловлювань доведемо еквівалентність формул $p\to q$ та $\overline{q}\to\overline{p}$. Цю еквівалентність називають *правилом контрапозиції*.

1. $\overline{p}\vee q$ – правило вилучення імплікації у першій із заданих формул.
2. $q\vee\overline{p}$ – закон комутативності 1*а* для формули 1.
3. $\overline{\overline{q}}\vee\overline{p}$ – закон подвійного заперечення 6 для формули 2.
4. $\overline{q}\to\overline{p}$ – правило введення імплікації для формули 3.

Отже, задані формули еквівалентні: $p\to q=\overline{q}\to\overline{p}$. ▲

Нормальні форми логіки висловлювань.

Літералом називатимемо атом або заперечення атома. Прикладами літералів є p, $\bar{q}$, r. Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, та *негативним*, якщо він має знак заперечення. Пару літералів $\{p, \bar{p}\}$ називають *контрарною парою*.

Кажуть, що формулу f записано у *кон'юнктивній нормальній формі* (КНФ), якщо вона має вигляд $f=f_1\wedge f_2\wedge\ldots\wedge f_n$ ($n\geq1$) і всі f_i (i=1,2,…,n) різні. Тут кожна з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є літералом або диз'юнкцією літералів, у якій всі атоми різні.

Приклад 1.17. Нехай p, q та r – атоми. Тоді $f=(p\vee\bar{q}\vee\bar{r})\wedge(\bar{p}\vee q)$ – формула, записана в кон'юнктивній нормальній формі. У цій формулі $f_1=(p\vee\bar{q}\vee\bar{r})$ та $f_2=(\bar{p}\vee q)$, тобто f_1 – диз'юнкція літералів p, $\bar{q}$ та $\bar{r}$, а f_2 – диз'юнкція літералів $\bar{p}$ та q. ▲

Кажуть, що формулу f записано у *диз'юнктивній нормальній формі* (ДНФ), якщо вона має вигляд $f=f_1\vee f_2\vee\ldots\vee f_n$ ($n\geq 1$) і всі f_i ($i=1,2,\ldots,n$) різні. Тут кожна з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є літералом або кон'юнкцією літералів, у якій всі атоми різні.

Приклад 1.18. Нехай p, q та r – атоми. Тоді $f=(\bar{p}\wedge q)\vee(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r})$ – формула, записана у диз'юнктивній нормальній формі. У цій формулі $f_1=(\bar{p}\wedge q)$ та $f_2=(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r})$, де f_1 – кон'юнкція літералів $\bar{p}$ та q, а f_2 – кон'юнкція літералів p, $\bar{q}$ та $\bar{r}$. ▲

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм застосуванням законів логіки висловлювань. Для побудови нормальних форм необхідно виконати таку послідовність кроків еквівалентних перетворень.

Крок 1. Використати правила $f \to g = \bar{f} \vee g$ та $f \sim g = (f \to g) \wedge (g \to f)$ (див. параграф 1.2) для усунення логічних зв'язок "$\to$" та "$\sim$".

Крок 2. Використати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знаку заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. Використати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Для побудови кон'юнктивної нормальної форми використати закон дистрибутивності для диз'юнкції відносно кон'юнкції (закон 3*а* з табл. 1.8). Для побудови диз'юнктивної нормальної форми використати закон дистрибутивності для кон'юнкції відносно диз'юнкції (закон 3*б* з табл. 1.8).

Приклад 1.19. Побудуємо диз'юнктивну нормальну форму формули $((p \vee \bar{q}) \to r) \wedge (\bar{r} \to s)$. Наведемо послідовність кроків для побудови ДНФ та застосовані закони.

1. $\left(\overline{p \vee \bar{q}} \vee r\right) \wedge \left(\bar{\bar{r}} \vee s\right)$ – усунення логічної зв'язки "$\to$" із заданої формули.
2. $((\bar{p} \wedge \bar{\bar{q}}) \vee r) \wedge (\bar{\bar{r}} \vee s)$ – закон де Моргана 8*а* до формули з рядка 1.
3. $((\bar{p} \wedge q) \vee r) \wedge (r \vee s)$ – закон подвійного заперечення 6 до формули 2.
4. $((\bar{p} \wedge q) \wedge (r \vee s)) \vee (r \wedge (r \vee s))$ – закон дистрибутивності 3*б* до формули 3.
5. $((\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s)) \vee ((r \wedge r) \vee (r \wedge s))$ – закон дистрибутивності 3*б* до формули 4.
6. $(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s) \vee (r \wedge r) \vee (r \wedge s)$ – асоціативний закон 2*а* до формули 5.
7. $(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s) \vee r \vee (r \wedge s)$ – закон ідемпотентності 7*б* до формули 6.

Приклад 1.20. Побудуємо кон'юнктивну нормальну форму формули $(p\wedge(q\to r))\to s$. Наведемо послідовність кроків побудови КНФ і застосовані закони та правила.

1. $\overline{p\wedge(\overline{q}\vee r)}\vee s$ – усунення логічної зв'язки "$\to$" із заданої формули.
2. $\overline{p}\vee\overline{\overline{q}\vee r}\vee s$ – закон де Моргана 8*б* до формули 1.
3. $\overline{p}\vee(\overline{\overline{q}}\wedge\overline{r})\vee s$ – закон де Моргана 8*а* до формули 2.
4. $\overline{p}\vee(q\wedge\overline{r})\vee s$ – закон подвійного заперечення 6 до формули 3.
5. $\overline{p}\vee s\vee(q\wedge\overline{r})$ – закон комутативності 1*а* до формули 4.
6. $(\overline{p}\vee s)\vee(q\wedge\overline{r})$ – закон асоціативності 2*а* до формули 5.
7. $(\overline{p}\vee q\vee s)\wedge(\overline{p}\vee\overline{r}\vee s)$ – закон дистрибутивності 3*а* до формули 6.

Формула $(\overline{p}\vee q\vee s)\wedge(\overline{p}\vee\overline{r}\vee s)$ є КНФ формули $(p\wedge(q\to r))\to s$. ▲

Означення. **Одномісним предикатом** $P(x)$, визначеним на множині M, називається вираз, який після підстановки в нього замість x об'єкта з області визначення M, перетворюється у висловлювання. Область визначення предиката називається **предметною областю**. Елементи з області визначення називаються **предметними константами**. Змінна, від якої залежить предикат, називається **предметною змінною**.

Отже, одномісний предикат виражає певну властивість деякого об'єкта або предмета з множини визначень. Також можуть існувати й двомісні предикати, та й, взагалі, предикати із довільною місткістю, тобто арністю. Тоді двомісний предикат буде виражати певне відношення між об'єктами. Ці об'єкти можуть належати одній множині, а можуть належати й різним множинам.

Наприклад, речення "x більше y" можна виразити двомісним предикатом $P(x,y)$, $x,y \in R$, який буде приймати істинне значення, якщо число, яке підставлено замість х, буде більше за число, що підставлене замість y. Речення "місто x є столицею країни y" може бути представлене у вигляді предикату $Q(x,y)$, де x належить множині міст, а y – множині країн. Прикладом використання тримісного предикату є речення "p народився у місті q у році r", де p належить множині людей, q – множині міст, а r – множині років, тобто цілих чисел з певного проміжку.

Над предикатами визначено всі булеві операції, а також дві нові операції – квантори: $\forall$ – квантор загальності та $\exists$ – квантор існування.

Якщо $P(x)$ означає деяку властивість на множині M, то формула $\forall xP(x)$ означає висловлювання: “для будь-якого предмету $m \in M$ виконується властивість $P(x)$” або “всі x мають властивість $P(x)$”. Формула $\forall xP(x)$ набуває значення “істина”, коли властивість P виконується для всіх об’єктів з M, та набуває значення “хибність” у протилежному випадку, тобто коли існує хоча б один об’єкт з множини M, для якого ця властивість не виконується.

Формула $\exists xP(x)$ означає: “існує принаймні один предмет x, який має властивість P» або «деякі x мають властивість P». Значення формули $\exists xP(x)$ є істинним, коли властивість P виконується хоча б для одного об’єкту з множини M, та хибним, коли не існує жодного об’єкта, для якого ця властивість виконувалась би.

Якщо $M = \{a_1,\ldots,a_n\}$ – скінченна область визначення предикату $P(x)$, то формули з кванторами можуть бути виражені через кон'юнкції та диз'юнкції:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Отже, квантор загальності є узагальненням кон'юнкції, а квантор існування – узагальненням диз'юнкції на нескінченну область визначення.

Приклад. Почнемо з речення: “Кожний студент групи вивчав дискретну математику”. Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: “Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику”. Тепер уведемо змінну x, і речення набуде вигляду: “Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику”. Уведемо предикат $C(x)$: “x вивчав дискретну математику”. Якщо предметна область змінної x – усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall x C(x)$.

Інший спосіб записати задане речення – це ввести двомісний предикат $Q(x,y)$: “Студент x вивчає дисципліну y”. Тоді можна замінити $C(x)$ на $Q(x,$’*Дискретна математика*’$)$, що дасть можливість переписати формули у вигляді $\forall x Q(x,$’*Дискретна математика*’$)$ чи $\forall x(S(x) \rightarrow Q(x,$’*Дискретна математика*’$))$.

Приклад. Задане речення: “Сума двох додатних чисел – додатне число”. Спочатку перепишемо це речення так: “Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число”. Уведемо змінні x та y і отримаємо речення: “Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x+y$, яка є додатнім числом”. Запишемо його формулою $\forall x \forall y(((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y > 0))$. Тут предметна область кожної змінної – усі дійсні числа.

У мові логіки першого порядку присутні наступні символи:

- пропозиційні зв’язки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$;
- квантори загальності $\forall$ та існування $\exists$;
- допоміжні символи: кома “,”, та дужки “(“, “)”;
- предметні змінні x_1, x_2,…;
- предметні константи a_1, a_2,…;
- функціональні символи f_1, f_2,…;
- предикатні символи P_1, P_2,…

Приклад. Нехай є формула логіки першого порядку $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Наведемо три інтерпретації цієї формули.

Область інтерпретації D	Інтерпретація	Висловлювання $\forall x(P(x) \to Q(x))$
Множина живих істот	$P(x)$: x – риба, $Q(x)$: x мешкає у воді.	Усі риби мешкають у воді
Множина живих істот	$P(x)$: x – людина, $Q(x)$: x смертний.	Усі люди смертні
Множина цілих чисел	$P(x)$: x ділиться на 6, $Q(x)$: x ділиться на 3.	Всі числа, які діляться на 6, діляться на 3

Наприклад, візьмемо область: $D = \{a, b\}$. Побудуємо таблицю істинності формул: $E_1 = \exists x P(x)$ та $E_2 = \forall x P(x)$. Одномісний предикат на області визначень з двох елементів може приймати одне з чотирьох значень, які визначаються таблицями істинності:

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

Формули E_1 та E_2 будуть приймати на цих інтерпретаціях наступні значення:

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

Приклад 1.32. Нехай предметна область змінних x та y – всі дійсні числа. Речення $\forall x \forall y(x+y=y+x)$ означає, що рівність $x+y=y+x$, яка є комутативним правилом для суми дійсних чисел, правильна для всіх дійсних чисел x та y. Аналогічно, формула $\forall x \exists y(x+y=0)$ означає, що для кожного дійсного числа x існує таке дійсне число y, що $x+y=0$. Формула $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x+(y+z)=(x+y)+z)$ є записом асоціативного правила для суми дійсних чисел. ▲

Приклад 1.33. Перекладемо на українську мову формулу $\forall x \forall y(((x>0)\wedge(y<0))\rightarrow(xy<0))$, істинну для дійсних чисел x та y. Вказана формула означає, що для дійсних чисел x та y таких, що x додатне число, а y – від'ємне, їхній добуток xy – число від'ємне. Це можна записати реченням "Добуток додатного та від'ємного дійсних чисел – число від'ємне". ▲

Приклад 1.34. Подамо формулу $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$ українською мовою, якщо $C(x)$ означає "x має комп'ютер", $F(x,y)$ – "x та y друзі", а предметна область для x і для y складається з усіх студентів певного курсу. Уся формула має такий зміст: "Кожний студент курсу має комп'ютер, або має друга, у якого є комп'ютер". ▲

Приклад 1.38. Запишемо логічною формулою речення "Сума двох додатних чисел є додатним числом". Спочатку перепишемо це речення так: "Два довільних додатних числа дають у сумі додатне число". Уведемо змінні x та y та отримаємо речення "Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x+y$, яка є додатним числом". Предметна область кожної змінної складається з усіх дійсних чисел. Це речення запишемо формулою $\forall x \forall y(((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y>0))$. ▲

Приклад 1.39. Запишемо речення "Кожне дійсне число, за виключенням нуля, має обернене" у вигляді логічної формули. Спочатку перепишемо це речення так: "Якщо x – відмінне від нуля дійсне число, то число x має обернене". Далі перепишемо це речення в такий спосіб: "Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що $xy=1$". Останнє речення можна записати логічною формулою $\forall x((x\neq 0)\to\exists y(xy=1))$. ▲

Теорема. В логіці першого порядку виконуються наступні тотожності:

1. $\neg(\forall x A(x)) = \exists x(\neg A(x))$;
2. $\neg(\exists x A(x)) = \forall x(\neg A(x))$;
3. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;
4. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$;
5. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$;
6. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$;
7. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$;
8. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$;
9. $\forall y \forall x A(x,y) = \forall x \forall y A(x,y)$;
10. $\exists y \exists x A(x,y) = \exists x \exists y A(x,y)$.

Випереджена нормальна форма

Формула логіки першого ступеня записана у *випередженій нормальній формі*, якщо вона має вигляд $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nM$, де кожне Q_ix_i (i=1, 2, …, n) – це або $\forall x_i$, або $\exists x_i$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1x_1\ldots Q_nx_n$ називають *префіксом*, а M – *матрицею* формули, записаної у випередженій нормальній формі.

Приклад 1.43. Наступні формули записані у випередженій нормальній формі:

1) $\forall x\forall y(P(x,y)\wedge Q(y))$;
2) $\forall x\exists y(\overline{P}(x)\vee Q(y))$;
3) $\forall x\forall y\exists z(Q(x,y)\wedge R(z))$. ▲

Наведемо послідовність кроків зведення довільної формули логіки першого ступеня до випередженої нормальної форми.

Крок 1. Виключити з формул логічні зв'язки "~" та "→" застосуванням правил $P \sim Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ та $P \to Q = \overline{P} \vee Q$.

Крок 2. Внести знак заперечення всередину формули, для чого використати закони:

– подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;

– де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$, $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$;

– $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$ та $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$.

Перейменувати зв'язані змінні, якщо це потрібно.

Крок 3. Винести квантори у префікс, для чого скористатись законами 3 – 8

Приклад 1.44. Зведемо формулу $\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$ до випередженої нормальної форми в припущенні, що $P(x)$ та $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність формул, отриманих у процесі побудови випередженої нормальної форми.

1. $\overline{\forall xP(x)}\vee\exists yQ(y)$ – виключена логічна зв'язка "$\rightarrow$".
2. $\exists x\overline{P}(x)\vee\exists yQ(y)$ – застосовано закон $\overline{\forall xP(x)}=\exists x\overline{P}(x)$ до формули 1.
3. $\exists x\exists y(\overline{P}(x)\vee Q(y))$ – у формулі 2 винесено квантор існування у префікс за законом 4

Приклад 1.45. Побудуємо випереджену нормальну форму такої формули $\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\rightarrow\exists uQ(x,y,u))$.

1. $\forall x\forall y\left(\overline{\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))}\vee\exists uQ(x,y,u)\right)$ – виключена логічна зв'язка "$\rightarrow$".
2. $\forall x\forall y(\forall z(\overline{P}(x,z)\vee\overline{P}(y,z))\vee\exists uQ(x,y,u))$ – застосовано закон $\overline{\exists xP(x)}=\forall x\overline{P}(x)$ та закон де Моргана до формули 1.
3. $\forall x\forall y\forall z\exists u(\overline{P}(x,z)\vee\overline{P}(y,z)\vee Q(x,y,u))$ – за законами 6 та 7 параграфа 1.5 винесено $\forall z$ та $\exists u$ у префікс формули 2.

Логічне виведення в логіці висловлювань

Говорять, що формула g – *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, ..., f_n$, або що g *логічно випливає* з $f_1, f_2, ..., f_n$, якщо в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$, формула g також виконується. Формули $f_1, f_2, ..., f_n$ називають *гіпотезами* (*аксіомами, постулатами* чи *засновками*) формули g. Той факт, що формула g логічно випливає з $f_1, f_2, ..., f_n$, позначають $f_1, f_2, ..., f_n \vdash g$.

ТЕОРЕМА 1.2. Формула g – логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ загальнозначуща.

Якщо g – логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$, то формулу $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ називають *логічною теоремою*, а g – її висновком. У такому разі говорять, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, ..., f_n$ і g – *вивідна* формула. Вираз $f_1, f_2, ..., f_n \vdash g$ називають *правилом виведення*. Тут гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, а висновок – справа; сам знак $\vdash$ має зміст „отже".

ТЕОРЕМА 1.3 (принцип прямої дедукції). Формула g – логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли $(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \wedge \overline{g})$ – суперечність.

Приклад 1.47. Розглянемо формули $f_1 = (p \to q)$, $f_2 = \bar{q}$, $g = \bar{p}$. Доведемо, що формула g – логічний наслідок формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.3 та доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \to \bar{g} = ((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge \bar{\bar{p}} = ((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge p$$

заперечувана. Побудуємо таблицю істинності для цієї формули. Із табл. 1.12 видно, що формула $(p \to q) \wedge \bar{q} \wedge p$ хибна в будь-якій інтерпретації.

Таблиця 1.12

p	q	$p \to q$	$\bar{q}$	$(p \to q) \wedge \bar{q}$	$((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge p$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F

Тепер відповідно до теореми 1.3 можна дійти висновку, що формула $\bar{p}$ логічно випливає з формул $p \to q$ та $\bar{q}$.