Логіка першого ступеня. Закони логіки першого ступеня. Випереджена нормальна форма.

Існують речення, які не являють собою висловлювання та містять змінні. Речення зі змінними — це не висловлювання, але вони перетворюються на висловлювання, якщо надати змінним певних значень. Речення зі змінними дуже поширені. Вони містяться в математичних формулах і комп'ютерних програмах.

Зокрема, у мовах програмування є оператори у вигляді "Повторити цикл доти, доки змінні x та y не стануть рівними, або припинити обчислення після 100 повторень". Позначивши як і лічильник повторень, умову закінчення програми можна задавати виразом "$(x = y) \vee (i > 100)$". Тоді оператор циклу набирає вигляду "повторювати, якщо $(\neg((x = y) \vee (i > 100)))$".

Речення "$x > 3$", або, в іншому вигляді, "x більше 3", складається з двох частин: першу, змінну х, називають предметом, а другу — "більше 3", - яка показує властивість предмета, — предикатом. Часто предикатом називають усе речення.

Теорія предикатів починається з аналізу граматичної будови простих висловлень і ґрунтується на такому висновку: прості висловлення виражають той факт, що деякі об'єкти (або окремий об'єкт) мають певні властивості, або що ці об'єкти знаходяться між собою у певному відношенні.

У латинській граматиці присудок називається предикатом, звідси цей термін і увійшов у математичну логіку. Головним для логіки предикатів є саме друга складова речення-висловлення — присудок-властивість. Вона фіксується, а значення об'єкта пропонується змінювати так, щоб кожен раз отримувати осмислені речення, тобто висловлення.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати і логічні зв'язки (операції), можна будувати складені предикати або предикатні формули.

Означимо логіку першого ступеня (логіку предикатів), у якій до понять логіки висловлювань додано нові поняття. Для формулювання складних думок у логіці висловлювань використовують атоми як основні елементи формул.

Атом розглядають як неподільне ціле — його структуру та склад не аналізують. Позаяк багато міркувань неможливо описати лише за допомогою висловлювань, уведемо поняття атома в логіці першого ступеня.

Для запису атомів логіки першого ступеня використовують такі типи символів:

- індивідні символи, або сталі — це імена об'єктів, які починаються з великої букви, та сталі, наприклад: Іван, Марія, Дискретна_математика, T, F, 2, 5;
- предметні символи, предметні змінні, або просто змінні — імена, якими позначають змінні та які записують малими буквами (можливо, з індексами), наприклад: x, y, z, v_i, w_j
- предикатні символи — імена, якими позначають предикати та які записують великими буквами (наприклад, P, Q, R) або змістовними словами, які записують великими буквами (наприклад, БІЛЬШЕ, ЛЮБИТЬ).

Загалом, предикат, який містить n предметних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записують $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$і називають n-місним. Предметною областю змінної x_iназивають множину D_iїї значень, а символ P — n-місним предикатним символом.

Замість поняття "предикат" іноді використовують термін "пропозиційна функція".

Атом логіки першого ступеня має вигляд $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де P — предикатний символ, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$— предметні чи індивідні символи.

Щойно змінна x набуває якогось значення з предметної області, предикат $P(x)$ набуває значення T чи F і перетворюється на висловлювання. Аналогічно, якщо всі змінні багатомісного предиката набувають якихось значень, то він набуває значення істинності та перетворюється на висловлювання.

Є й інший спосіб перетворення предиката у висловлювання — квантифікація. Нехай $P(x)$ — предикат, D — задана предметна область, $x \in D$. Використовують два спеціальні символи $\forall$та $\exists$, які називають відповідно кванторами загальності й існування. Якщо x — предметна змінна, то вираз $(\forall x)$читають “для всіх x”, “для кожного x” або “для будь-якого x”. Запис $(\forall x)P(x)$означає “предикат $P(x)$ істинний для всіх значень x із предметної області”; його читають як “$P(x)$ для всіх x”.

Вираз $(\exists x)$читають “існує x”, “для деяких x” або “принаймні для одного x”. Запис $(\exists x)P(x)$має зміст “в області D існує таке x, що предикат $P(x)$ істинний”, або “в області D існує принаймні одне x таке, що предикат $P(x)$ істинний”, або “предикат $P(x)$ істинний для якогось x з області D”. Дужки біля квантора можна випускати, тобто замість $(\forall x)$та $(\exists x)$писати відповідно $\forall x$та $\exists x$.

Перехід від $P(x)$ до $\forall xP(x)$або $\exists xP(x)$називають зв'язуванням предметної змінної x, а саму змінну x — зв'язаною. Незв'язану змінну називають вільною. Говорять, що у виразах $\forall xP(x)$та $\exists xP(x)$предикат $P(x)$ належить області дії відповідного квантора.

Для пошуку значення істинності висловлювання, отриманого з пропозиційної функції зв'язуванням її змінних кванторами, потрібно знати предметну область.

Правильно побудовані формули логіки першого ступеня, або формули логіки першого ступеня, означають так:

- атом — це формула;
- якщо H і G — формули, то $(\neg H)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$та $(H \sim G)$— формули;
- якщо H — формула, а x — вільна змінна у формулі H, то $\forall xH$та $\exists xH$— формули;
- формули можна породити тільки скінченною кількістю застосувань попередніх трьох правил.

Зазначимо, що замість $(\neg H)$можна писати $\overline{H}$.

Зв'язування частини змінних багатомісного предиката перетворює його на предикат із меншою кількістю змінних. Зміст зв'язаних і вільних змінних у предикатах різний.

Вільні змінні — це звичайні змінні, які можуть набувати різних значень із предметної області D; вираз $P(x)$ змінний, і його значення залежить від значення змінної x. Формули $\exists xP(x)$та $\forall xP(x)$не залежать від змінної x і для певних P та D мають конкретні значення. Це, зокрема, означає, що перейменування зв'язаних змінних, а саме, заміна $\forall xP(x)$на $\forall yP(y)$, не змінює істинності формули.

Додавати квантори можна й до багатомісних предикатів. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$і $\exists$до змінних x і y двомісного предиката $A(x,y)$, отримаємо чотири різні одномісні предикати $\forall xA(x,y)$, $\exists xA(x,y)$, $\forall yA(x,y)$і $\exists yA(x,y)$. У перших двох змінна x є зв'язаною, а змінна y — вільною, а у двох останніх — навпаки.

Додавання одного квантора завжди зменшує число вільних змінних. Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його у висловлення (іноді таку предикатну формулу називають замкненою формулою). Порядок слідування різнойменних кванторів у формулі є суттєвим.

Головна проблема перекладу речень, записаних українською мовою, на мову предикатів і кванторів полягає в правильному використанні кванторів. Кожне речення можна подати декількома способами, і не існує загального алгоритму, який дає змогу будувати його крок за кроком.

Способи перекладу речень з української мови на мову предикатів:

- Спосіб 1. Запишемо речення "Кожний студент групи вивчав дискретну математику" за допомогою предикатів і кванторів. Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: "Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику".

  Тепер уведемо змінну x, і речення набере вигляду: "Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику".

  Уведемо предикат $C(x)$: "x вивчав дискретну математику". Якщо предметна область змінної x — усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall x C(x)$.
- Спосіб 2. Можна вважати, що нас цікавлять інші групи людей, окрім тих, які вчаться в одній академічній групі. Узявши як предметну область усіх людей, можна записати задане речення так: "Для кожної особи x, якщо ця особа x — студент групи, то x вивчав дискретну математику". Якщо предикат $S(x)$ має вигляд „Особа x учиться в групі", то задане речення треба записати у вигляді $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$. Задане речення не можна записати як $\forall x(S(x) \wedge C(x))$, бо тоді це означало б, що всі особи з предметної області вчаться в групі та вивчали дискретну математику.
- Спосіб 3. Ввести двомісний предикат $Q(x, y)$: „Студент x вивчає дисципліну y". Тоді можна замінити $C(x)$ на $Q(x$, Дискретна_математика), що дасть можливість переписати наведені формули у вигляді $\forall x Q(x,$Дискретна_математика)чи $\forall x(S(x) \rightarrow Q(x,$Дискретна_математика)).

Закони логіки першого ступеня

Якщо закони логіки висловлень застосовуються до виразів, котрі за будь-якого розподілу значень істинності своїх пропозиційних змінних набувають значення "істина", то з деякими поправками аналогічні закони діють і в логіці предикатів(логіці першого ступеня).

Що стосується поправок, то в даному випадку слід ураховувати таке: якщо перетворення функції "x має властивість P" на істинне висловлення залежить передусім від обраної індивідної (предметної) області, то закони логіки предикатів треба шукати у виразах, які не залежать від тієї чи іншої області індивідів як значень змінних, але є значущими для будь-яких непорожніх областей. Річ у тім, що логіка предикатів розглядає предикати в загальному, тобто вона цікавиться структурою висловлень, незалежно від їхнього конкретного смислового змісту. Тому закони логіки предикатів заявляють про себе в таких виразах, які не залежать від конкретних значень предикатних змінних і є правильними для будь-яких їхніх значень.

Отже, еквівалентні формули логіки висловлювань залишаються такими й у логіці першого ступеня. Однак у логіці першого ступеня є еквівалентності (закони), пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого ступеня.

Дві формули логіки предикатів називають еквівалентними, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P та Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$— тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P та Q записують як $P = Q$.

Проблема побудови законів логіки першого ступеня полягає в доведенні еквівалентності формул P та Q. У логіці висловлювань еквівалентність можна перевірити, побудувавши відповіді таблиці істинності. У логіці першого ступеня аналогічна процедура загалом неможлива, бо предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, і повний перебір усіх їх значень неможливий.

Нижче наведено основні закони логіки першого ступеня. У формулах показано лише зв'язані змінні.

1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$
2. $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
5. $\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$
6. $\forall x(P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$
7. $\exists x(P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$
8. $\exists x(P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$
9. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

Для доведення цих законів потрібні спеціальні методи. Проілюструвати це можна на прикладі доведення еквівалентності $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$.

Нехай для якогось предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого $P(a)$ істинне. Отже, для будь-якого а $P(a)$ хибне, а $\overline{P}(a)$істинне; тому істинна права частина еквівалентності. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого $P(a)$ істинне, тобто права частина хибна.

Аналогічно можна довести й закон $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$.

Доведення закону $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$:

Нехай ліва частина істинна для якихось P та Q, тобто для довільного $a \in D$істинне $P(a) \wedge Q(a)$. Тому $P(a)$ та $Q(a)$ водночас істинні для довільного a, тобто $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$істинне. Якщо ж ліва частина хибна, то для якогось $a \in D$хибне принаймні одне з висловлювань $P(a)$ чи $Q(a)$. Це означає, що хибне принаймні одне з висловлювань $\forall x P(x)$або $\forall x Q(x)$, тобто хибна й права частина.

Аналогічно можна довести еквівалентність $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

В законах 9 і 10 змінні в предикатах зв'язані однаковими кванторами, тому можна переставляти їх без порушення еквівалентності. Якщо квантори різні, подібна еквівалентність виконується не завжди, тобто загалом $\forall x \exists y P(x, y) \neq \exists y \forall x P(x, y)$.

Доведення закону $\forall x \exists y P(x, y) \neq \exists y \forall x P(x, y)$:

Розглянемо двомісний предикат $P(x,y)$:"$x \geq y$" на різних предметних областях. Формула $\exists x \exists y P(x, y)$означає, що в предметній області існує максимальний елемент. Ця формула істинна на предметній області, що являє собою будь-яку скінченну підмножину множини цілих чисел, але хибна, наприклад, на множині {1/2, 2/3, 3/4,..., $n/(n + 1)$,...}.

Висловлювання $\forall y \exists x P(x, y)$означає, що для довільного елемента y існує елемент x, не менший від y. Таке висловлювання істинне на довільній непорожній множині. Отже, переставлення кванторів існування та загальності може змінити зміст висловлювання та значення його істинності. З цього слідує, що $\forall x \exists y P(x,y) \neq \exists y \forall x P(x,y)$.

Якщо D=$\{a_{1,} a_{2,}\ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями $\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$та $\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$. У такому разі заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що:

$$\overline{\forall x P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)} = \bar{P}(a_1) \vee \bar{P}(a_2) \vee \ldots \vee \bar{P}(a_n)$$

остання формула еквівалентна $\exists x \bar{P}(x)$.

Аналогічно,

$$\overline{\exists x P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)} = \bar{P}(a_1) \wedge \bar{P}(a_2) \wedge \ldots \wedge \bar{P}(a_n)$$

що еквівалентно $\forall x \bar{P}(x)$.

Випереджена нормальна форма

Говорять, що формулу логіки першого ступеня записано у випередженій нормальній формі, якщо вона має вигляд $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n M$, де кожне $Q_i x_i (i = 1,2,\ldots,n)$— це $\forall x_i$, або $\exists x_i$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$називають префіксом, а M — матрицею формули, записаної у випередженій нормальній формі.

Алгоритм зведення довільної формули логіки першого ступеня до випередженої нормальної форми:

Крок 1. Усунути з формули логічні операції “~” та “—>” застосуванням еквівалентних формул:

- $P \sim Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
- $P \to Q = \bar{P} \vee Q$

Крок 2. Унести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{(P)}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$та $\overline{(P \wedge Q)} = \bar{P} \vee \bar{Q}$;
- $\overline{(\forall x P(x))} = \exists x \bar{P}(x)$;
- $\overline{(\exists x P(x))} = \forall x \bar{P}(x)$.

Перейменувати зв'язані змінні, якщо це потрібно,

Крок 3. Винести квантори в префікс, скориставшись такими законами:

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$
- $\forall x (P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$
- $\exists x (P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$
- $\exists x (P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$
- $\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(x,y)$.
- $\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y)$.

Для будь-якої предикатної формули існує рівносильна їй формула, записана у випередженій нормальній формі.