Розфарбовування графів. Незалежні множини вершин. Кліка. Паросполучення в графах. Теорема Холла. Найбільше паросполучення у дводольних графах.

Розфарбування графів.

Розфарбуванням простого графа G називають таке пристосування кольорів (або натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не набувають однакового кольору. Найменшу можливу кількість кольорів у розфарбуванні називають хроматичним числом і позначають $x(G)$. Очевидно, що існує розфарбування графа в k кольорів (k-розфарбування) для будь-якого k в діапазоні $\chi(G) \leq k \leq n$, де $n-$ кількість вершин графа. Множину вершин, розфарбованих в один колір, називають одноколірним класом. Такі класи утворюють незележні множини вершини, тобто ніякі дві вершин в одноколірному класі не суміжні (про незалежні множини див. інформацію про множини в інших джерелах).

На рис.2 зображено розфарбовування графа Петерсена трьома кольорами.

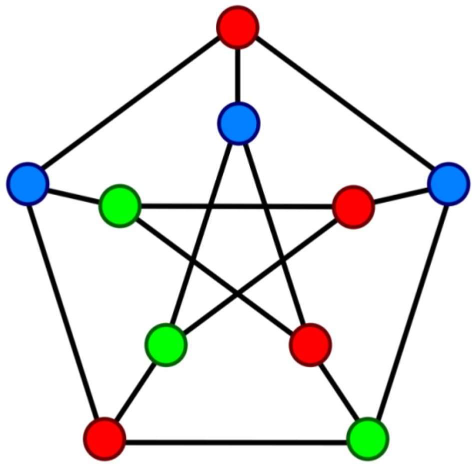

Рис.2

Очевидно, що $\chi(K_n) = n$, і, отже, легко побудувати графи з як завгодно великим хроматичним числом. З іншого боку, $\chi(G) = 1$ тоді й лише тоді, коли $G-$ порожній граф, $\chi(G) = 2$ тоді й лише тоді, коли $G-$ дводольний граф (зважаючи на це, дводольний граф називають біхроматичним).

Хроматичні поліноми.

Нехай G – простий граф, а $P_G(k)$ називають хроматичною функцією графа G. Для повного графа K_n виконується рівність $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$. Справді, для першої вершини є k варіантів кольору. Оскільки друга вершина суміжна з першою, то її можна розфарбувати в один з $k-1$ кольорів. Третя Вершина суміжна з першою та другою, тому для неї є $k-2$ варіантів вибору. Продовжуючи ці міркування, доходимо висновку, що для останньої вершини залишиться $k-(n-1)$ варіантів вибору кольору.

Якщо $k < \chi(G)$, то $P_G(k) = 0$, а для $k \geq \chi(G)$ виконується нерівність $p_G(k) > 0$. Гіпотеза чотирьох фарб еквівалентна твердженню: якщо $G-$ простий планарний граф, то $P_G(4) > 0$. Якщо задано довільний простий граф, то в загальному випадку важко отримати його хроматичну функцію за допомогою простих міркувань. Наступна теорема й наслідок із неї дають систематичний метод одержання хроматичної функції простого графа у вигляді суми хроматичних функцій повних графів.

Незалежні множини вершин.

Нехай G – простий граф. Множину його вершин називають незалежною (або внутрішньо стійкою), якщо ніякі вершини цієї множини не суміжні. Незалежну множину називають максимальною, якщо вона не є підмножиною жодної іншої незалежної множини з більшою кількістю вершин.

Найпотужнішу максимальну незалежну множину називають найбільшою. Кількість вершин у найбільшій незалежній множині графаG називають числом незалежності (числом внутрішньої стійкості, нещільністю) і позначають $\alpha(G)$.

Із поняттям незалежності в графі повязане поняття домінування. Підмножину V' вершин графа $G = (V, E)$ називають домінантною (або зовнішньо стійкою), якщо кожна вершина з $V \setminus V'$ суміжна з якоюсь вершиною з V'. Інакше кажучи, кожна вершина графа віддалена від домінантної множини не більше, ніж на одиницю. Домінантна множина має назву мінімальної, якщо жодна з її власних підмножин не домінантна. Домінантну множину з найменшою потужністю називають найменшою.

Кліка.

Кліка в неорієнтованому графі – це така підмножина його вершин, що кожні дві вершини з цієї підмножини поєднанні ребром. Кліки є однією з базових концепцій теорії графів і використовуються в багатьох математичних задачах та побудовах на графах. Кліки також вивчаються в інформатиці: виявлення чи існує в графі кліка даного розміру (задача про кліку) є NP-повною, але незважаючи на складність, вивчаються багато алгоритмів знаходження клік.C

Кліка в неорієнтованому графі $G = (V, E)$ це підмножина вершин $C \subseteq V$ така, що для кожних двох вершин в C, існує ребро, що поєднує ці вершини. Це тотожно до виразу, що підграф утворений C – повний(в деяких випадках, термін кліка може бути використаний для підграфа).

Максимальна кліка (англ. maximal clique) — кліка, яка не може бути розширена через додання однієї з суміжних вершин, тобто така, що не є частиною більшої кліки.

Максимум клік (англ. maximum clique) — кліка найбільшого можливого розміру в даному графі. Клікове число $\omega(G)$ графа G – кількість вершин в максимумі клік в G.

Протилежністю до кліки є незалежна множина, в сенсі, що кожна кліка відповідає незалежній множині в доповненні графа. Задача покриття графа кліками спрямована на знаходження найменшої кількості клік, які включають кожну вершину графа. Пов'язана концепція це бікліка, повний дводольний підграф. Дводольна розмірність графа це найменша кількість біклік необхідних, щоб покрити всі ребра графа.

На рис.1 зображено граф з 23 1-вершинними кліками (просто його вершинами), 42 2-вершинними кліками (просто його ребрами), 19 3-вершинними кліками (блакитними трикутниками), і 2 4-вершинними кліками (темно-блакитними). Шість ребер і 11 трикутників утворюють максимальні кліки. Два темно-голубих 4-вершинних кліки є максимальними і максимумами, і клікове число графа дорівнює 4.

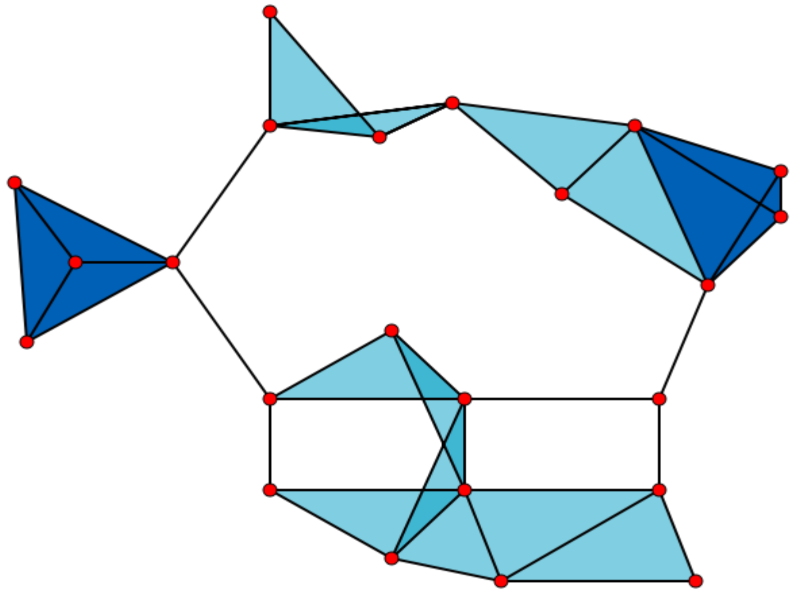

Рис.1

Паросполучення в графах.

Паросполученням (незалежною множиною вершин) у простому графі $G = (V, E)$називають множину ребер, у якій ніякі два ребра не є суміжними. Паросполучення називають максимальним, якщо воно не міститься в жодному з інших паросполученнях з більшою кількістю ребер даного графа G, і найбільшим, якщо кількість ребер у даному паросполученні найбільша, в порівняні з іншими паросполученнями графа G.

Також є ще таке поняття як Досконале паросплучення. Нехай нам дано граф $G = (V, E)$, який є дводольним. Дводольним графом називають граф, у якому, якщо розбити множину вершин V, то утворені підмножини вершин V_1та V_2не перетинаються $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, і кожне ребро з'єднує вершину з підмножини V_1, з вершиною підмножини V_2. Щоб знайти умови винекнення досконалого паросполучення з V_1у V_2часто використовують задачу про весілля, але для її розв'язання використовують теорему Холла, про яку буде описано нижче.

Нехай V_1 — це множина усіх юнаків, а V_2 — множина усіх дівчат, відповідно ребра — це знайомства між дівчатами та юнаками, тобто весілля. Нам задано певні початкові умови, зображені на таблиці 1:

Юнак	Дівчата, з якими знайомий юнак
b_1	g_1, g_3, g_6
b_2	g_1, g_2, g_4
b_3	g_3, g_2, g_5
b_4	g_2, g_5

Таблиця 1

Відповідно за даною таблицею ми можемо побудувати граф:

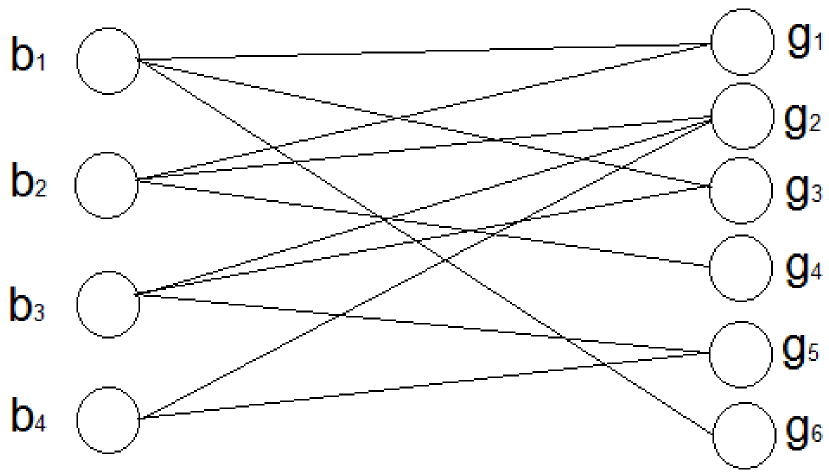

Рис 1

Для заданої задачі, знайти досконале паросполучення у графі, означає знайти множину весіль усіх юнаків з дівчатами. Відповідно потовщеними лініями на рис.1 позначений один із можливих варіантів роз'вязку. Також можна розглядати і інші варіант, наприклад, нехай хлопець b_2одружується з дівчиною g_2, а хлопець b_3з дівчиною g_5, то в даному прикладі можна помітити, що юнак b_4 залишиться без дівчини, відповідно ми отримаємо, що вершина b_3не з'єднується з жодною вершиною підмножини V_2, але дане паросполучення не буде досконалим, оскільки не виконується умова про з'єднання всіх вершин з однієї підмножини з вершинами інших.

Теорема Холла.

Теорема Холла (теорема про весілля) - це комбінаторне твердження, що дає необхідні і достатні умови існування вибору різних елементів, з певного набору множин, які містять скінченну кількість елементів.

Теорему Холла можна сформулювати за допомогою мови теорії графів або на мові теорії трансверсалів і також на основі досконалих паросполучень, використовуючи задачу про весілля.

Твердження на мові теорії графів.

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Розіб'ємо множину вершин V на дві підмножини V_1та V_2, але таким чином щоб виконувалися наступні умови:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$;
- $V_1 \cup V_2 = V$;
- Для довільного ребра e, що $e = \{v, u\}$, щоб виконувалось твердження ($v \in V_1 \wedge u \in V_2$) ∨($v \in V_2 \wedge u \in V_1$).

З цих трьох умов випливає, що даний нам граф є дводольним. Тоді існує набір ребер, що з'єднують вершини з підмножини V_1з вершинами підмножини V_2, але тоді і тільки тоді, коли для кожної підмножини $R \subseteq V_1$виконується:

$$|S| \geq |R|$$

де, S – це множина елементів зV_2, що з'єднані хоча б з одним елементом з підмножини R. Для S також задається певна умова, яка носить назву “умова одруження” і має вона наступний вигляд:

$$S = \{s \in V_2 : (\exists r \in R)\{r, s\} \in E\}$$

Доведення.

Позначимо літерою Tпідграф графа $G = (V, E)$, але такий підграф, що:

- кожна вершина інцидентна деякому ребру підграфа T;
- підграф T задовольняє умову одруження, про яку написано вище і є мінімальним за включенням ребер графом.

Тоді позначимо степінь кожної вершини в підграфі T, як $d_T(t)$. Очевидно, що степінь кожної вершини більший за 1, тобто $d_T(t) \geq 1$, але для доведення теореми Холла достатньо довести, що степінь рівний 1. Спочатку позначимо умову одруження, як:

$$N_H(R) = \{s \in V_2 : (\exists r \in R)\{r, s\} \in E\}$$

Припустимо, що є певна вершина v, яка належить підмножині вершин V_2, і з'єднується більше ніж з однією вершиною, тобто нехай це будуть вершини $n_{1,}n_2 \in N_T(t)$. Тоді отримаємо, що графи $T - \{vn_1\}$і $T - \{vn_2\}$не будуть задовольняти умови одруження. Тому для $i = 1,2 \exists V_{1\mathrm{i}} \subset V_1$, що містять v і $|V_{1\mathrm{i}}| \geq |V_{2\mathrm{i}}|$, де $V_{2\mathrm{i}} := N_{(T - \{vn_i\})}(V_{1\mathrm{i}})$. З цього отримуємо наступну нерівність:

$$|(N_T(V_{11} \cap V_{12} \setminus \{v\}))| \leq |(V_{21} \cap V_{22})|$$

Розклавши об'єднання $V_{21} \cap V_{22}$, вийде $|V_{21}| + |V_{22}| - |(V_{21} \cup V_{22})|$ і підставивши в попереднє рівняння, отримаємо:

$$|V_{21}| + |V_{22}| - |(N_T(V_{11} \cup V_{12}) \setminus \{v\})| \leq |V_{11}| - 1 + |V_{12}| - 1 - |(V_{11} \cup V_{12})|$$

І здійснивши певні перетворення і операції, ми отримаємо рівняння:

$$|(V_{11} \cap V_{12} \setminus \{v\})| - 1$$

Тобто отриманий кінцевий результат не буде задовольняти умови одруження, що суперечить припущенню, тому це доводить теорему.

Твердження на основі досконалого паросполучення.

З самого початку ми визначили, що таке паросполучення і, що таке досконале паросполучення. Використавши теорему Холла, ми розв'язали завдання про весілля, тим самим знайшовши досконале паросполучення. Зараз ми розглянемо доведення теореми Холла на основі досконалого паросполучення.

Нехай нам дано дводольний граф G = (V, E), у якому множину вершин V, розбито на дві підмножини вершин V_1та V_2. Досконале паросполучення буде існувати тільки тоді, коли для кожної множини $A \subset V_1$, виконується умова $|A| \leq |(\Gamma(A))|$.

Доведення.

Нехай існує досконале паросполучення з V_1у V_2. Тоді множина $\Gamma(A)$містить $|A|$вершин із V_2, які відповідають вершинам з А у цьому паросполученні.
І можливо ще якісь вершин з V_2. Отже, отримуємо, що $|A| \leq |(\Gamma(A))|$.

Застосуємо індукцію за кількістю вершин у множині V_1. Нехай $|V_1| = m > 0$. Якщо $m = 1$, тоді єдина вершина з V_1, буде інцидентна принаймні 1 ребру . Це ребро і буду являти необхідне нам паросполучення. Тепер нехай $m > 1$і тоді теорема буде справджуватися для графів, у яких $|V_1| < m$.

В такому випадку потрібно розглядати 2 варіанти.

Варіант 1. Для кожної підмножини $A \subset V_1$і $A \neq V_1$, буде виконуватися нерівність $|A| < |(\Gamma_G(A))|$. Індекс G, показує, що будемо використовувати граф G. Виберемо в даному графі ребро (n, m). Далі вилучаємо з цього графа вибране ребро, і також інцидентні йому вершини, і отримаємо граф $\tilde{G}$. Після вилучення вершин отримаємо:

$$\widetilde{V_1} = V_1 \setminus \{n\};$$

$$\widetilde{V_2} = V_2 \setminus \{m\}.$$

Відповідно після вилучення ребер, також отримаємо:

$$\tilde{E} = E \setminus \{\{n, z\}, \{k, m\} \mid k \in V_{1,} z \in V_2\}.$$

Отриманий граф буде дводольним $\tilde{G} = (\widetilde{V_1} \cup \widetilde{V_{2,}} \tilde{E})$, причому кількість вершин буде рівна $\widetilde{V_1} = m - 1$. Нехай $\tilde{A}$- довільна підмножина множини $\widetilde{V_1}$. Використавши попередню нерівність, отримаємо, що $|\tilde{A}| < |(\Gamma_G(\tilde{A}))|$, а якщо з множини$V_2$вилучити ще 1 вершину то оримаємо$|\tilde{A}| < |(\Gamma_{(\tilde{G})}(\tilde{A}))|$. Тоді за індуктивним припущенням випливає, що у графі $\tilde{G}$існує паросполучення M, яке покриває $\widetilde{V_1}$. Відповідно додавши до графа нащого графа M ребро (n, m), ми отримаємо необхідне паросполучення.

Варіант 2. У підмножині вершинV_1існує така підмножинаA_0, для якої повинні виконуватися умови$A_0 \subset V_1$і$A_0 \neq V_1$, і тоді$|A| = |(\Gamma_G(A))|$. Позначимо через $K = A_0 \cup \Gamma_G(A_0)$, і тоді нехай$M_1$ таM_2 підграфи графа G, породжені множинами вершин B та $V \setminus B$. Спочатку розглянемо підграфM_1, у якому для будь-якої множини $A_0 \subset A$, буде виконуватися, що$\Gamma_G(A) = \Gamma_{(M_1)}(A)$, а отже$|A| \leq |(\Gamma_{(M_1)}(A))|$. Відповідно за індуктивним припущенням в підграфіM_1, буде існувати паросполучення, що покриє A_0. Тепер перейдемо до підграфа M_2, у якому для будь-якої підмножини $A \subset V_1 \setminus A_0$, виконується $|A_0| + |A| = |(A_0 \cup A)| \leq |(\Gamma_G(A_0 \cup A))| = |(\Gamma_G(A_0))| + |(\Gamma_{(M_2)}(A))|$.

Врахувавши рівність $|A_0| = |(\Gamma_G(A_0))|$, отримаємо, що $|A| \leq |(\Gamma_{(M_2)}(A))|$ і тоді за припущенням індукції в графі M_2 існує паросполучення, що покриває множину $V_1 \setminus A_0$. Об'єднавши його з паросполученням, що покриває A_0, ми отримаємо паросполучення, що покриває всю множину V_1.

Найбільше паросполучення в графах.

Задача на побудову найбільшого паросполученні в графі досить розповсюджена. Розв'язання даного завдання ґрунтується на алгоритмі заснованим Дж. Петерсеном.

Нехай нам задано паросполучення H графа G. Для використання цього алгоритму вводять таке поняття як Почерговий шлях. Почерговий шлях — це такий простий шлях, ребра якого почергово входять і не виходять в множину H. Шлях довжиною з одиницю, також вважається почерговим. Ребра шляху називають темними або світлими, в залежності від того чи належать вони, чи не належать вони паросполученню H, відповідно. Також вершини графа G, які інцидентні ребрам із паросполучення H, називають насиченими, відповідно інші називають ненасиченими.

В графі можна побудувати паросполучення з більшою кількістю ребер, ніж у паросполученні M, якщо в графі G існує почерговий відносно паросполучення M шлях, який з'єднує дві різні ненасичені вершини. У такому випадку отримаємо, що кількість темних ребер на 1 менша, ніж кількість світлих ребер. Вилучивши з M усі темні ребра та приєднавши всі світлі, отримаємо нове паросполучення, у якому на 1 ребро буде більше, ніж в попередньому. Почерговий щодо паросполучення M шлях, який з'єднує дві різні ненасичені вершини, називають збільшувальним відносно M шляхом у графі G. Тому, відсутність збільшувальних відносно M шляхів, ознака того, що дане паросполучення вже є найбільшим. Але це ще потрібно довести.

Доведення.

Нехай M_1також паросполучення в графі G, причому $|M_1| > |M|$. Розглянемо граф F, який утворюється ребрами $(M \cup M_1) \setminus (M \cap M_1)$. Оскільки довільна його вершина n інцидентна не більше ніж одному ребру з паросполучень Mі M_1, то її степінь не більший ніж 2. Отже, якщо $deg(n) = 2$, то одне з інцидентних вершині V ребер належить паросполученню M, а інше — M_1. Тому будь-яка зв'язка компонента графа F буде являти собою цикл, що містить однакове кількість ребер з паросполучень Mі M_1, або почерговий шлях відносно M. Тоді крайні вершини цього шляху не насичені паросполученням M, що буде суперечити умові теореми.

Розглянемо граф на рис 1.2. Почерговий шлях з'єднує ненасичені вершини 5 і 7. Але паросполучення M не буде найбільшим, його можна збільшити і потім отримане паросполучення також можна ще збільшити. $\acute{M} = \acute{M} \cup \{15\} = \{e_{3,}e_{5,}e_{7,}e_{13,}e_{15}\}$.

Потрібно почати з довільного паросполучення M_1і будувати послідовність $M_{1,}M_{2,}M_{3,}$ ..., у якій $M_{(k+1)}$отримаємо з M_k, за допомогою збільшуваного шляху. Тому найефективніший алгоритм зводиться до процедури, яка швидко знаходить збільшувальний шлях у графі чи виявляє, що його нема, тобто дане паросполучення вже буде найбільшим.

Найчастіше цей процес побудови демонструють на дводольних графах, але його також можна використати для довільного. Дана процедура полягає в приєднувані вершин доти, доки це можливо, причому ненасичену вершину можна приєднати до цього графа тільки тільки на непарному рівні. Відповідно у побудованому графі шлях від будь-якої ненасиченої вершини до вершини 0-го рівня, якраз і буде наш збільшувальний шлях відносно паросполучення M.