Множина. Кортеж. Декартів добуток. Операції над множинами. Доведення рівностей з множинами. Комп'ютерне подання множин.

Основні поняття з теорії множин

Поняття множини є одне з фундаментальних невизначених понять сучасної математики і береться за основне, тобто за таке, що не зводиться до інших понять. Під ***множиною*** розуміють деяку сукупність різних поміж собою об'єктів, які добре розпізнаються нашою думкою або інтуїцією і розглядаються як єдине ціле. При цьому ніяких припущень щодо природи об'єктів не робиться.

Об'єкти, з яких складено множину, називають її *елементами.*

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: *A, B, C*,..., а об'єкти або елементи, які становлять множину, позначаються малими латинськими літерами: *a, b, c*,..., або малими латинськими літерами з індексами.

Твердження, що множина A складається з елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$, умовно записується як

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Порядок елементів множини не має значення.

Належність елемента до множини позначається знаком $\in$, тобто $a \in A$. Якщо b не є елементом *A*, то пишуть: $b \notin A$.

Множина може мати скінчену кількість елементів або бути нескінченою. Наприклад, множина непарних чисел $P = \{1, 3, 5, ...\}$ (нескінчена), множина студентів певного вищого навчального закладу (скінчена).

Існує множина, яка не містить жодного елемента. Така множина називається ***порожньою*** і позначається символом $\emptyset$. Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$ є порожньою.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину. Наприклад, множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Множина як об'єкт може бути елементом іншої множини. Наприклад, у множині книг на полиці, самі книги можуть розглядатися як множини сторінок.

Передбачається, що границі множини повинні бути чітко визначені. Саме задання множини явно або неявно обмежує сукупність об'єктів, які належать цій множині. У будь-якій конкретній задачі доводиться мати справу тільки з фіксованою для цієї задачі, множиною.

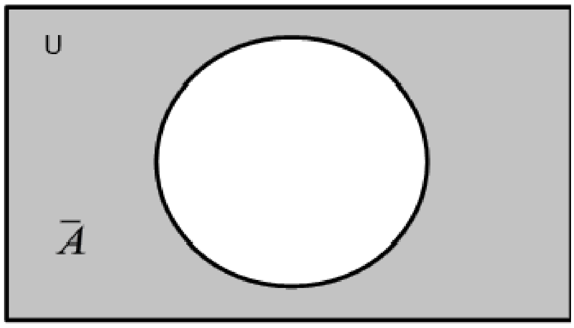
Універсальною множиною (універсумом) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через *U*. Поняття "універсальної множини" залежить від задачі, яку розглядають. Прикладом універсальної множини може бути множина дійсних чисел, множина людей на планеті Земля, тощо.

Операції над множинами

Зазвичай розглядають п'ять основних операцій над множинами: доповнення, об'єднання, переріз, різницю на симетричну різницю. Подамо їхні означення, припускаючи, що задано певний універсум *U*. Позначимо через P_A та P_B властивості, які характеризують відповідно множини *A* та *B* в множині *U* за певною ознакою *P*.

1. Елементи множини *U*, які не входять до *A*, утворюють ***доповнену*** множину до *A* (позначається $\bar{A}$або $\acute{A}$).

За допомогою діаграми Венна доповнену множину можна зобразити геометрично, де$\bar{A}$ затемнена частина.

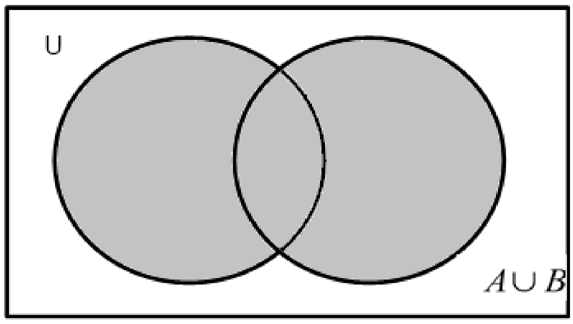


З а у в а ж е н н я. 1) Доповнення множини A до множини U, це множина $\bar{A}$= $\{x| x \notin A, x \in A\}$. 2) Справедлива є властивість $\bar{\bar{A}} = A$.

2. Об'єднанням двох множин - A та B (позначається $A \cup B$або $A+B$) - називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з цих множин $C = A \cup B$=$\{x| x \in A$або$x \in B, x \in U\}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Однакові елементи враховуються один раз.

Геометричну інтерпретацію об `єднання двох множин A та B подано на рисунку, де$A \cup B$затемнена частина.

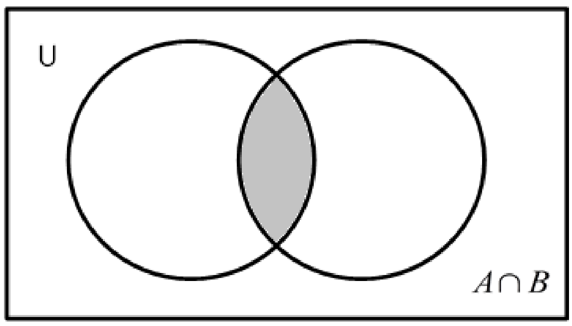


Підкреслимо, що до множини $A \cup B$ належать також і ті елементи, які водночас належать множинам A та B.

3. ***Перерізом*** двох множин - A та B (позначається $A \cap B$або $A \cdot B$)- називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать множині A та B (водночас!).

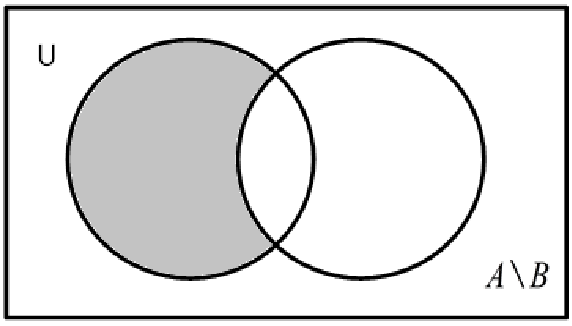
$C = A \cap B$=$\{x| x \in A$і$x \in B, x \in U\}$.

Геометричну інтерпретацію перерізу подано на рисунку, де $A \cap B$- затемнена частина.



4. ***Різницею*** двох множин — A та B (позначається $A \setminus B$) - називається множина $C = A \setminus B$= $\{x| x \in A$та$x \notin B, x \in U\}$.

Геометрична інтерпретація різниці подано на рисунку, де $A \setminus B$- затемнена частина.



Приклад. Нехай A={1,3,4,5,8}; B={2,4,5,6,9}, тоді : $A \cup B$= {1,2,3,4,5,6,8,9}; $A \cap B$= {4,5}; $A \setminus B$= {1,3,8}.

Якщо визначити універсум U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, то $\bar{A}$= {0,2,6,7,9}; $\bar{B}$= {0,1,3,7,8}.

ЗАУВАЖЕННЯ. Для скінченого числа множин $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ в аналогічний спосіб визначаються операції об'єднання та перерізу.

Доведення рівностей з множинами

Теоретико-множинні операції задовольняють законам, наведеним нижче:

1. Закони комутативності: а) $A \cup B = B \cup A$
б) $A \cap B = B \cap A$

2. Закони асоціативності : а)$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Закони дистрибутивності: а)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Закон подвійного доповнення: а) $\overline{(\bar{A})} = A$

5. Закони ідемпотентності: а) $A \cap A = A$
б) $A \cup A = A$

6. Закони де Моргана: а) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
б) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

7. Закони поглинання: а) $A \cap (A \cup B) = A$
б) $A \cup (A \cap B) = A$

8. Закони тотожності: а) $A \cup \emptyset = A$
б) $A \cap U = A$

9. Закони домінування: а) $A \cup U = U$
б) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Говорять, що дві множини A та B *не перетинаються*, якщо вони не мають спільних елементів, тобто якщо $A \cap B = \emptyset$.

Для будь-яких скінчених множин A та B правдива рівність $\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid - \mid A \cap B \mid$. Ця рівність — частинний випадок включення/виключення.

Систему S={A_i} ($i \in I$, де I — множина індексів) підмножин множини A називають ***розбиттям*** множини A якщо:

1. $A_i \neq \emptyset$ для всіх $i \in I$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$;

Інакше кажучи, система S не порожніх підмножин множини A являє собою розбиття цієї множини, якщо будь-який елемент $a \in A$ належить точно одній множині A_i із системи S.

Доводити рівності з множинами можна різними способами. Нижче наведено приклади, що ілюструють способи доведення.

С п о с і б 1. Цей спосіб ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 1: Множини A і B рівні тоді і лише тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$

Приклад 1: Доведемо рівність множин, яка являє собою формулювання закону де Моргана $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Припустимо, що $x \in \overline{(A \cap B)}$. Тоді $x \notin A \cap B$, звідки випливає, що $x \notin A$ або $x \notin B$ Отже $x \in \bar{A}$ або $x \in \bar{B}$, а це означає, що $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Ми довели, що $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Навпаки, нехай $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Тоді $x \in \bar{A}$ або $x \in \bar{B}$, звідки випливає, що $x \notin A$ або $x \notin B$. Це означає, що $x \notin A \cap B$, тобто $x \in \overline{(A \cap B)}$. Отже $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{(A \cap B)}$.

С п о с і б 2. Доведення рівності множин за допомогою законів логіки.

Приклад 2. Доведемо рівність $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Послідовно перевіримо рівності

$\overline{(A \cap B)}$= $\{x \mid x \notin A \cap B\}$=$\{x \mid \neg(x \in A \cap B)\}$=

=$\{x \mid \neg((x \in A) \wedge (x \in B))\}$ = $\{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\}$=

=$\{x \mid (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B})\}$ = $\{x \mid x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}$ = $\bar{A} \cup \bar{B}$.

С п о с і б 3. Доведення рівності множин за допомогою *таблиць належності.* Ці таблиці містять усі можливі комбінації належності елементів множинам (1 - елемент належить множині, 0 - не належить).

Приклад 3. Доведемо цим способом рівність $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Доведення подано в таблиці.

A	B	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Стовпчики, які у таблиці позначено $\overline{(A \cap B)}$ та $\bar{A} \cup \bar{B}$, однакові, отже $\overline{(A \cap B)}$= $\bar{A} \cup \bar{B}$.

С п о с і б 4. Доведення рівності множин з використанням основних законів, яким задовольняють теоретико-множинні операції.

Приклад 4. Довести тотожність $\overline{(A \cup (B \cap C))} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$. Використовуючи закон де Моргана та комутативності, можна записати таку послідовність рівних множин:

$\overline{(A \cup (B \cap C))} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}$=	за законом де Моргана 6а
=$\bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$=	за законом де Моргана 6б
=$(\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$=	за законом комутативності 1б
=$(\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$	за законом комутативності 1а.

Комп'ютерне подання множин

У комп'ютері можна подавати множини різними способами. Один зі способів — зберігати невпорядковані елементи множини. Проте в такому разі операції з множинами займатимуть багато часу через те, що потрібно щоразу переглядати елементи. Тому розглянемо інші способи.

Одним із найпоширеніших і найпростіших способів — подання множин за допомогою бітових рядків. Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Нехай універсальна множина U містить n елементів, тоді $U = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$.

Множину $A \subset U$ подають у комп'ютері рядком із 0 і 1 довжиною n так: якщо $a_i \in A$, то i-й біт дорівнює 1, а ні, то 0.

Приклад 5. Нехай $U = \{a, b, c, d, e, f, m, n, p, q\}$, $A = \{b, m, n, q\}$, $B = \{a, b, f, m, q\}$. Тоді множину A подають рядком 0100001101, а множину B — рядком 1100011001. Тепер на комп'ютері легко виконати операції над множинами A та B. Неважко переконатись, що об'єднанню множин відповідає порозрядне OR над бітовими рядками, які подають множини A та B, а перетину множин — порозрядне AND над відповідними бітовими рядками.

Приклад 6. Використаємо бітові рядки, які подають множини A та B з прикладу 5. Бітовий рядок, який відповідає об'єднанню цих множин $A \cup B = \{a, b, f, m, n, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного OR:

0100001101
$\underline{1100011001}$
1100011101.

Бітовий рядок, який відповідає перетину множин $A \cap B = \{b, m, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного AND:

0100001101
$\underline{1100011001}$
0100001001.

Якщо універсальна множина U має велику потужність, а її підмножини не дуже потужні, то подання за допомогою бітових рядків неефективне щодо витрат пам'яті. У такому разі доцільно використовувати інші структури даних – зазвичай зв'язані списки та хеш-таблиці. У певних задачах потрібні спеціальні методи подання множин, які ґрунтуються на використанні дерев.