# Булеві функції. Означення булевої функції. Алгебри булевих функцій: алгебра Буля та алгебра Жегалкіна.

## Означення булевої функції.

Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини *B = {0, 1}*, називаються логічними або булевими змінними.

Значення 0 та 1 булевих змінних називаються булевими константами. Функція виду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументу *xi* і значення у якої належать множині *B*, називається *n*-мірною булевою функцією. Такі функції також називаються логічними або перемикаючими.

Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається двійковим словом або булевим набором довжини n.

Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретні значення булевого $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ називається інтерпретацією булевої функції *f*.

Множина всіх двійкових слів, що позначаються через Bn, називається n-мірним булевим кубом і містить *2n* елементів слів *|Bn| =2n.*

Число різних булевих функцій $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дорівнює *22n* .

*Способи завдання булевих функцій.*

Булеві функції можуть задаватися наступними способами:

- За допомогою таблиці істинності (значення якої беруться з інтерпретацій).
- Порядковим номер, який має ця функція.
- Аналітично (у вигляді формули).

Таблиця, в якій кожній інтерпретації функції поставлена у відповідність її значення, називається таблицею істинності булевої функції.

Кількість булевих функцій двох змінних *f(x, y)* дорівнює *222 =16.* Більшість з 16-ти булевих функцій *f(x, y)* часто застосовують на практиці, мають різні значення.

*Номера функцій та інтерпретацій.*

Кожній функції надається порядковий номер у вигляді натурального числа, двійковий код якого є стовпцем значень функції в таблиці істинності. Молодшим розрядом вважається самий нижній рядок (значення функції на інтерпретації (1, 1, …, 1), а старшим – самий верхній (значення функції на інтерпретації (0, 0, …, 0).

Кожній інтерпретації булевої функції також надається номер – значення двійкового коду, який являє собою інтерпретацію.

*Приклад.* Знайти порядковий номер функції *f(x, y),* яка приймає наступні значення *f(0, 0)=1, f(0, 1)=1, f(1, 0)=0, f(1, 1)=1.*

Побудуємо таблицю істинності для цієї функції.

| *x* | *y* | *f(x, y)* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Двійковий код, який відповідає цій функції 11102 = 1·23+1·22+1=1310 Таким чином, десятинний номер даної функції дорівнює 13.

Алгеброю логіки називається двоелементна булева алгебра (B, ^,¯,→, ~), B={0, 1}, в якій множина доповнена двома булевими операціями: імплікацією та еквівалентністю.

Булеві функції можуть бути задані аналітично, тобто формулами. Формули – це вирази, які містять булеві функції та їх суперпозиції. Суперпозицією називається прийом отримання нових функцій шляхом підстановки значень однієї функції замість значень аргументів інших функцій.

*Приклад.* Розглянемо формулу, яка задає функцію *f(x, y, z) = (xy )      z*

Нехай *G(x1)* - заперечення, *S(x1, x2)* – кон’юнкція и *L(x1, x2)* – диз’юнкція. Тоді нашу функцію можна записати у вигляді

*f(x, y, z) = L(S(x, G(y)), z).*

Навіть при складанні нескладних формул виникає велика кількість дужок. Щоб уникнути цього, приймемо деякі угоди відносно розставлення дужок.

Зовнішня дужка не записується.

На множині *{ , , , →, ~, |, ↓, }* вводиться транзитивне відношення «бути сильнішим» і бути рівносильним.

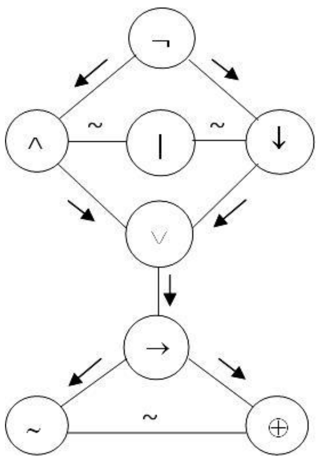


Рис. 1

В формулі $x \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z)$ дужку убирати неможна оскільки в силу наших домовленостей формулі $x \rightarrow y \rightarrow \bar{z}$ відповідає формула $(x \rightarrow y) \rightarrow z$.

Представлення функції формулою не єдине.

Наприклад, штрих Шеффера.

$\overline{x1 \mid x2} = x1 \quad x2$ ¯ $\overline{\text{або}}$ $x1 \mid x2 = x1 \quad x2$ .

Формули, які представляють одну й ту ж функцію, називаються еквівалентними або рівносильними.

Еквівалентність формул позначається знаком рівності.

## Алгебри булевих функцій: алгебра Буля та алгебра Жегалкіна.

Нехай функцію $f_1$задано формулою $\mathrm{F}_1$, а функцію $f_2$- формулою $F_2$. Підстановка $F_1$та $F_2$, наприклад, у диз'юнкцію $x_1 \vee x_2$дає формулу $F_1 \vee F_2$. Узявши формулу $\Phi_1$, рівносильну $F_1$(тобто $\Phi_1$також подає функцію $f_1$) та формулу $\Phi_2$, рівносильну $F_2$, отримаємо формулу $\Phi_1 \vee \Phi_2$, рівносильну формулі $F_1 \vee F_2$.

Отже, диз'юнкцію можна розглядати як двомісну операцію на множині всіх булевих функцій. Ця операція кожній парі функцій $f_1$ $і$ $f_2$, незалежно від вигляду формул, якими їх подано, однозначно ставить у відповідність функцію $f_1 \vee f_2$. Аналогічно, й інші булеві функції можна розглядати як операції на множині $P_2$ усіх булевих функцій. Наприклад, заперечення — одномісна операція, кон'юнкція та диз'юнкція — двомісні.

Множину $P_2$ всіх булевих функцій разом з уведеною на ній системою операцій називають алгеброю булевих функцій.

Розглянемо дві алгебри. Алгебру$(P_2; \neg, \wedge, \vee)$, операціями якої є заперечення, кон'юнкція та диз'юнкція, називають алгеброю Буля.

Алгебру $(P_2; \oplus \wedge)$, операціями якої є кон'юнкція й додавання за *mod2*, називають алгеброю Жегалкіна.

Формули алгебри Буля та алгебри Жегалкіна будують зі знаків операцій відповідної алгебри, круглих дужок, символів змінних і констант 0 та 1.

Порядок виконання операцій у разі відсутності дужок у булевій алгебрі такий: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція. В алгебрі Жегалкіна спочатку виконують кон'юнкція, а потім – додавання за *mod2*. У разі наявності дужок спочатку повинні виконувати операції всередині них. У булевій алгебрі роль дужок у разі заперечення складних виразів відіграє сам символ заперечення.

Одна з найважливіших задач — виявлення основних еквівалентностей в алгебрах. Ці еквівалентності називають законами відповідної алгебри.

*Закони алгебри Буля:*

- Закони асоціативності:$(xy)z = x(yz) = xyz$,$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z.$
- Закон комутативності: $xy = yx$,$x \vee y = y \vee x.$
- Дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції:$(x \vee y)z = xz \vee yz.$
- Дистрибутивний закон для диз'юнкції відносно кон'юнкції:

$xy \vee z = (x \vee y)(y \vee z).$

- Закон подвійного заперечення: $\bar{\bar{x}} = x.$
- Закони де Моргана: $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}.$
- Закони ідемпотентності: $xx = x$, $x \vee x = x.$
- Закони поглинання: $x \vee xy = x$, $x(x \vee y) = x.$
- Співвідношення для констант: $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$, $1x = x$, $0x = 0$, $1 \vee x = 1$, $0 \vee x = x.$
- Закон виключеного третього: $x \vee \bar{x} = 1.$
- Закон протиріччя $x\bar{x} = 0.$

*Закони алгебри Жегалкіна.*

- Закони асоціативності:$(xy)z = x(yz) = xyz$,$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) =$

$= x \oplus y \oplus z.$

- Закон комутативності: $xy = yx$, $x \oplus y = y \oplus x.$
- Дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно додавання за *mod2:*

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz.$

- Співвідношення для констант: $1x = x$, $0x = 0$, $x \oplus 0 = x.$
- Закони ідемпотентності для кон'юнкції: $xx = x.$
- Закон зведення подібних членів у разі додавання за *mod2*:$x \oplus x = 0.$

Правильність цих еквівалентностей доводять за допомогою таблиць.

Наведені еквівалентності залишаються правильними й у разі підстановки замість змінних довільних булевих функцій (тобто формул, які ці функції задають). Важливо лише виконувати таке правило підстановки формули замість змінної: під час підстановки формули F замість змінної x, усі змінні x, які входять у дану еквівалентність, повинні бути одночасно замінені формулою F. Наприклад, підставивши замість змінної xформулу xy, а замість змінної y- формулу $z \vee t$з$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ отримаємо $\overline{xy(z \vee t)} = \overline{xy} \vee \overline{z \vee t}$.

Закони алгебр Буля та Жегалкіна дають змогу доводити нові еквівалентності вже без таблиць, на основі тотожних перетворень.

Функцію $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називають двоїстою до функції $f(x_1, \dots, x_n)$ , якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ . Візьмемо заперечення над обома частинами рівності і підставимо $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ замість $x_1, \dots, x_n$ .Отримаємо $\overline{f^*}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) == \bar{\bar{f}}(\overline{\overline{x_1}}, \dots, \overline{\overline{x_n}}) = f(x_1, \dots, x_n)$, тобто функціяfдвоїста до $f^*$, тобто $(f^*)^* = f$. Отже, відношення двоїстості між функціями симетричне. Пару двоїстих функцій складають, наприклад, кон'юнкція та диз’юнкція. Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного порядку наборів отримується із таблиці для функції$f(x_1, \dots, x_n)$інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції і перевертанням цього стовпчика.

З означення двоїстості випливає, що для довільної функції двоїсту функцію визначають однозначно. Зокрема, може з'ясуватись, що функція є двоїстою самої себе. У цьому випадку її називають самодвоїстою. Наприклад, заперечення x̄та функція $x \oplus y \oplus z$- самодвоїсті функції.

*Теорема.*

Якщо

$F(x_1, \dots, x_2) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_n))$,

$F^*(x_1, \dots, x_2) = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n))$.

*Доведення.*

$$F^*(x_1, \dots, x_2) = \bar{F}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \bar{f}(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_s(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) =$$
$$= \bar{f}(\bar{\bar{f}}_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, \bar{\bar{f}}_s(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) = \bar{f}(\overline{f_1}^*(x_1, \dots, x_n), \dots, \overline{f_s}^*(x_1, \dots, x_n)) =$$
$$= f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n)).$$

З теореми випливає таке твердження.

Принцип двоїстості. Якщо у формулі F, яка реалізує функцію f, усі символи функцій замінити, відповідно, на символи двоїстих функцій, то отримана формула $F^*$подає функцію $f^*$, двоїсту до f.

В алгебрі Буля принцип двоїстості має простіший вигляд.

Принцип двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі$F$, яка реалізує функцію$f$, усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, диз'юнкції - на кон'юнкції, 1 замінити на 0, 0 - на 1, то отримана формула $F^*$ реалізує функцію $f^*$, двоїсту до $f$.