ЗМІСТ

ВСТУП
1. ВІДНОШЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ 4
1.1. Відношення еквівалентності 6
1.2. Відношення часткового порядку 6
2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ 7
2.1. Закони булевої алгебри 10
2.2. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) 11
2.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) 11
2.4. Методи побудови скороченої ДНФ 13
3. ЗАВДАННЯ 15
4. ВИМОГИ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ 17
5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ 18
Додаток А Титульна сторінка звіту до лабораторної роботи 19

Мета роботи: Вивчення відношень та їх властивостей, відношень еквівалентності та часткового порядку, операцій над відношеннями, замикання відношень. Поняття баз даних і відношення.

ВСТУП

Відношення –одне з основних понять сучасної математики. Мову відношень використовують для опису зав'язків між об'єктами та поняттями. Зокрема, поняття бінарного відношення дає змогу формалізувати операції попарного порівняння і тому його широко використовують у теорії вибору, а реляційні бази даних грунтуються на концепції *n*-арних відношень.

1. ВІДНОШЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Найпростіший спосіб задати зв'язок між елементами двох множин — записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв'язку. Нехай *A* та *B* — множини. *Бінарне відношення* з *A* в *B* — це якась підмножина *R* декартового добутку *A x B* цих множин: $R \subset A \times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з *A* в *B* — це множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині *A*, а другий — множині *B*. Використовують запис *aRb*, якщо $(a,\ b) \in R$, і запис $a\overline{R}b$, якщо $(a,\ b) \notin R$.

Приклад 1.Нехай A = {0,1,2}, B={a,b} та задано відношення R={(0,a), (0,b), (1,a), (2, b)}. Отже, 0Ra, бо $(0, a) \in R$, але $1\overline{R}b$, оскільки $(1, b) \notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови *A=B*. *Відношенням на множиніA* називають бінарне відношення з *A* в *A*. Інакше кажучи, відношення *R* на множині *A* - це підмножина декартового квадрату множини *A*, тобто $R \subset A^2$

Приклад 2.Нехай A = {1, 2, 3, 4}. Які впорядковані пари утворюють відношення R={(a, b) | a ділить b}? Очевидно, що R= {(1, 1) (1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)}.

Бінарне відношення на множині *A* можна задати за допомогою булевої матриці чи орієнтованого графа. На n-елементній множині *A* відношення *R* задає $n \times n$матриця $M_r = \lfloor m_{ij} \rfloor, i, j = 1,...,n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо}\,(a_i, a_j) \in R, \\ 0, \textit{якщо}\,(a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

Граф G_r, який задає відношення *R* на множині *A*, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j)існує тоді й лише тоді, коли $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_rназивають *графом, асоційованим із відношенням R*, або просто *графом відношення R*.

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення з прикладу 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

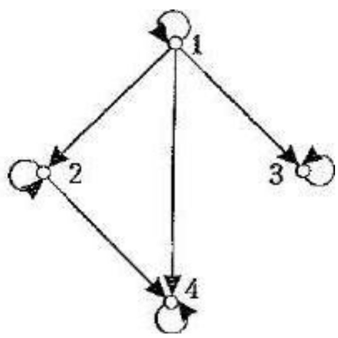

Рис. 1

Розглянемо властивості відношень на множині *A*. Відношення *R* на множині *A* називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$виконується $(a,a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині А = {1, 2, 3, 4}:

R_1={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)};

R_2={(1, 1), (1,2), (2, 1)};

R_3= {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)};

R_4={(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)};

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}; R_6 {(3,4)}.

Відношення R_3таR_5 рефлексивні, бо вони містять усі пари вигляду (a, a), тобто (1, 1), (2, 2), (3,3), (4,4). Решта відношень не рефлексивні. Зокрема, відношення R_1, R_2, R_4, R_6не містять пари (3, 3).

Відношення *R* на множині *A* називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$виконується$(a,a) \notin R$. Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 - не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення *R* на множині *A* називають *симетричним*, якщо для будь-яких $a,b \in A$з того, що$(a,b) \in R$, випливає, що $(b,a) \in R$. У прикладі 4 лише відношення R_2таR_3 симетричні.

Відношення *R* на множині *A* називають *антисиметричним*, якщо для всіх $a,b \in A$з того, що $a,b \in R$і$(b,a) \in R$, випливає, що *a* = *b*. Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4- R_6 У кожному з них немає таких пар елементів aта $bb(a \neq b)$, що водночас $a,b \in R$ і $(b,a) \in R$.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a,b \in A$ з того, що $a,b \in R$, випливає, що $(b,a) \notin R$. Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких $a,b,c \in A$ з того, що $a,b \in R$ і $(b,c) \in R$, випливає $(a,c) \in R$. Відношення R_4 - R_6 з прикладу 4 транзитивні, відношення R_1 - R_3 не транзитивні: $(3,4) \in R_1, (4,1) \in R_1$ але $(3,1) \notin R_1; (2,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, але $(2,2) \notin R_2; (2,1) \in R_3$, $(1,4) \in R_3$, але $(2,4) \notin R_3$.

1.1. Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які мають водночас декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації. Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Два елементи множини A, пов'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними*. Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то кожний його елемент еквівалентний до самого себе. Більше того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що елементи a та b еквівалентні й b та c еквівалентні, випливає, що aта cтакож еквівалентні.

Приклад 5. Нехай R — таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a = b) \vee (a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому являє собою відношення еквівалентності.

1.2. Відношення часткового порядку

Відношення R на множині A називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину A з частковим порядком R називають *частково впорядкованою множиною* й позначають *(A,R).*

Приклад 6. Нехай A={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}. Відношення R задамо як звичайне порівняння чисел: $a,b \in R$тоді й лише тоді, коли $a \leq b (a,b \in A)$. Неважко безпосередньо переко- натись, що це частковий порядок на множині A.

Приклад 7. Нехай A – множина з прикладу 5.11. Відношення R_1 задамо так: $a,b \in R_1$ тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже: R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2,12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)}. Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині A.

2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Булевою називають функцію $f(x_1,\dots,x_n)$, область значень якої складається з 0 та 1, і яка залежить від змінних $x_1,\dots,x_n$, що приймають також лише ці два значення.

Множину всіх булевих функцій позначають P_2. Булеву функцію від n змінних називають *n-місною* і позначають $P_2(n)$. Областю її визначення є множина усіх можливих *n-місних*наборів (векторів) значень змінних. Ці набори називають двійковими наборами, або просто наборами.

Загалом кажучи, між логічними висловленнями, логічними зв'язуваннями й булевими функціями проглядається явна аналогія . Якщо логічні функції можуть приймати значення істинно або хибно, то для булевої функції аналогами цих значень будуть значення 0 або 1.

Двохелементна множина B і двійкові змінні, приймаючі значення із цієї множини. Її елементи часто позначають 0 й 1, однак вони, загалом кажучи, не є числами у звичайному змісті (хоча й схожі на них по деяких властивостях). Найпоширеніша інтерпретація двійкових змінних – логічна: “так” – “ні”, “істинно” – “хибно”. У контексті, що містить одночасно двійкові й арифметичні величини, а також функції, ця інтерпретація звичайно фіксується явно. Наприклад, у мовах програмування (Pascal й ін.) вводиться спеціальний тип змінної – логічна змінна, значення якої позначаються true й false. У даній лекції логічна інтерпретація двійкових змінних не скрізь є обов'язковою, тому будемо вважати, що $B=\{0;1\}$, розглядаючи 0 й 1 як формальні символи, що не мають арифметичного змісту.

Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями на ній, називається *алгеброю логіки*.

Функцією алгебри логіки (*логічною функцією*) називається $n-$арна операція на множині B.

Змінна x_i у функції $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ називається *несуттєвою* (*фіктивною*), якщо $f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних.

Інакше кажучи, змінна вважається несуттєвою, якщо зміна її значення в будь-якому наборі не змінює значення функції. У цьому випадку функція $f(x_1,\dots,x_n)$ власне кажучи залежить від $n-1$ змінної, тобто являє собою деяку функцію g від $n-1$ змінної. Говорять, що функція g отримана з функції f видаленням фіктивної змінної або, навпаки, що функція f отримана з функції

g додаванням фіктивної змінної. Наприклад, запис $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ означає, що при будь-яких значеннях x_1, x_2 виконується $f = g$ незалежно від значення x_3.

Функція $\psi_2(x_1, x_2)$ є *кон'юнкцією* змінних x_1 й x_2 (функцією І). Вона дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли обидві змінні рівні 1. Позначається: $x_1 \wedge x_2, x_1 \bullet x_2$, $x_1 \& x_2; x_1 \otimes x_2$. Її також називають *логічним множенням*, оскільки таблиця її дійсно збігається з таблицею звичайного множення для чисел 0 й 1. Тому, до речі, за аналогією зі звичайним множенням, знак операції між змінними часто опускають: $x_1 x_2$.

Операцію $\otimes$ будемо називати множенням по модулі 2 (див. нижче). Вона реалізує добуток залишків від розподілу чисел 0 й 1 на число 2.

Функція $\psi_8(x_1, x_2)$ називається *диз'юнкцією* змінних x_1 й x_2 (функцією АБО). Вона дорівнює 1, якщо значення x_1 або x_2 рівні 1. Союз "або" розуміється тут у нерозділовому змісті "хоча б один із двох". Позначається: $x_1 \vee x_2, x_1 + x_2$.

Функція $\psi_7(x_1, x_2)$ називається *нерівнозначністю* змінних x_1 й x_2. Вона дорівнює 1, коли значення аргументів різні, і дорівнює 0, коли значення аргументів однакові. Позначається: $x_1 \oplus x_2, x_1 \Delta x_2$.

Привести приклад такої функції більш складно. Для цього введемо наступне поняття, широко використовуване в теорії чисел.

Два цілих числа a й b називаються *порівнянними по модулі* $p, p \in N$, якщо при розподілі на це число вони дають однакові залишки.

Позначається: $a \equiv b (\mathrm{mod}\, p)$. Наприклад, $7 \equiv 10 (\mathrm{mod} 3)$, $11 \equiv 5 (\mathrm{mod} 6)$. Отож, функцію ψ_7 можна розглядати, як додавання по модулі 2. Дійсно, сума залишків від розподілу чисел 0 й 1 на число 2 дорівнює 1, а сума залишків від розподілу чисел 0 й 0, або 1 й 1 на 2 дорівнює 0.

Функція $\psi_{14}(x_1, x_2)$ називається *імплікацією* або *логічним проходженням*. Позначається: $x_1 \Rightarrow x_2, x_1 \to x_2, x_1 \supset x_2$.

Функція $\psi_{10}(x_1, x_2)$ називається *еквівалентністю* або *рівнозначністю*. Вона дорівнює 1, якщо значення змінних однакові й 0, якщо вони різні. Позначається: $x_1 \Leftrightarrow x_2, x_1 \equiv x_2, x_1 \sim x_2$.

Є ще дві функції двох змінних, що мають спеціальні назви. Функція $\psi_9(x_1, x_2)$ називається *стрілкою Пірса* й позначається $x_1 \downarrow x_2$. Функція $\psi_{15}(x_1, x_2)$ називається *штрихом Шеффера* й позначається $x_1 | x_2$. Інші функції спеціальних назв не мають й, як можна показати, легко виражаються через перераховані вище функції.

У функціях ψ_4 і ψ_{13} змінна x_2 фіктивна. З таблиці 3 видно, що $\psi_4(x_1, x_2) = x_1$, а $\psi_{11}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$. Аналогічно, у функціях ψ_6 і ψ_{11} змінна x_1 фіктивна: $\psi_6(x_1, x_2) = x_2$, а $\psi_{11}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$.

Доведено, що з ростом числа змінних n частка функцій, що мають фіктивні змінні, спадає й наближена до нуля.

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
f_0(x, y)	0	константа 0	будь-яке 0
f_1(x, y)	$x \wedge y$=xy	кон'юнкція(логічне і)	x і y
f_2(x, y)	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації (\)	x і не y
f_3(x, y)	x	повторення першого аргумента	як x
f_4(x, y)	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
f_5(x, y)	y	повторення другого аргументу	як y
f_6(x, y)	$x \oplus y$	що виключає «або»	x не як y
f_7(x, y)	$x \vee y$	диз'юнкція(логічне «або»)	x або y
f_8(x, y)	$x \downarrow y$	заперечення диз'юнкції (стрілка Пірса) $\overline{\vee}$	не x і не y
f_9(x, y)	x~y	еквівалентність $\Leftrightarrow$	x як y
f_{10}(x, y)	$\bar{y}$	заперечення другого аргументу	не y
f_{11}(x, y)	$y \to x$	обернена імплікація $\subset$	x, якщо y (x або не y)
f_{12}(x, y)	$\bar{x}$	заперечення першого аргументу	не x
f_{13}(x, y)	$x \to y$	імплікація $\supset, \Rightarrow$	якщо x , то y (не x або y)
f_{14}(x, y)	x| y	заперечення кон'юнкції (штрих Шеферра) $x \overline{\wedge} y$	не x або не y
f_{15}(x, y)	1	константа 1	будь-яке 1, константа 1

Для булевих функцій також можна скласти таблиці значень, що відповідають основним логічним операціям:

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_1 \& X_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \Rightarrow X_2$	$X_1 \Leftrightarrow X_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Булева функція задається кінцевим набором значень, що дозволяє представити її у вигляді таблиці істинності.

Приклад 8. Потрібно задати функцію $f(x,y,z)=\overline{x}\rightarrow(\overline{z}\sim(y\oplus xz))$ таблицею істинності.

x	y	z	xz	$y\oplus xz$	$\overline{z}$	$\overline{z}\sim(y\oplus xz)$	$\overline{x}$	$\overline{x}\rightarrow(\overline{z}\sim(y\oplus xz))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

2.1. Закони булевої алгебри

1. Комутативністькон'юнкції та диз'юнкції
   $x\vee y=y\vee x$
2. Асоціативністькон'юнкції та диз'юнкції
   $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$, $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$.
3. Дистрибутивністькон'юнкції та диз'юнкціївідносно одна одній
   $x\wedge(y\vee z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$, $x\vee(y\wedge z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$.
4. Ідемпотентністькон'юнкції та диз'юнкції
   $x\vee x=x$, $x\wedge x=x$.
5. Законвиключеноготретього $x\vee\overline{x}=1$.
6. Законпротиріччя $x\wedge\overline{x}=0$.
7. Тотожності з константами
   $x\vee 0=x$, $x\wedge 1=x$, $x\vee 1=1$, $x\wedge 0=0$.
8. Законипоглинання
   $x\wedge(x\vee y)=x$, $x\vee(x\wedge y)=x$.
9. Закон подвійногозаперечення
   $\overline{\overline{x}}=x$.

10. Закони де Моргана

$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

2.2. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)

Елементарною кон'юнкцією k або кон'юнктом називається кон'юнкція деякого кінцевого набору змінних x_{ij} з множини X або їх заперечень, причому кожна змінна x_{ij} зустрічається не більше одного разу.

Елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X, називають конституентою одиниці.

Диз'юнктивною нормальноюформою або ДНФ називають диз'юнкцію $D = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_s$ елементарних кон'юнкцій k_j, у якій k_j попарно різні.

Алгоритм побудови для будь-якої формули булевої алгебри рівносильну до неї ДНФ:

1. Формулу перетворюють на рівносильну, побудовану зі змінних та їх заперечень за допомогою лише кон‘юнкцій і диз‘юнкцій (заперечення можуть стояти лише над змінними). Для цього використовують закони де Моргана та закон подвійного заперечення.

2. Усі кон‘юнкції мають виконуватись раніше, ніж диз‘юнкції – для цього розкривають дужки на підставі дистрибутивного закону для кон‘юнкції $(x \vee y)z = xz \vee xy$ або рівносильності $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$. Далі з використанням співвідношень для констант і закону суперечності вилучають нулі та, виходячи із законів ідемпотентності, об‘єднують рівні члени.

Приклад 9. Звести формулу $\overline{x \vee z}(x \to y)$ до ДНФ. Згідно алгоритму, запишемо:

$$\overline{x \vee z}(x \to y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}\bar{x} \vee \bar{x}\bar{z}y = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою або ДДНФ, у якій кожна елементарна кон‘юнкція $k_j \, (j = 1,.., s)$ – конституента одиниці.

Будь-яку ДНФ можна звести до ДДНФ розщепленням кон‘юнкцій, які містять не всі змінні: якщо кон‘юнкція k не містить змінної x, то

$$k = k(x \vee \bar{x}) = kx \vee k\bar{x}$$

Приклад 10. Перетворимо $\bar{x}z \vee \bar{x}yz$ ДНФ на досконалу. Для цього застосуємо розщеплення для кон‘юнкції та одержимо

$$\bar{x}z \vee \bar{x}yz = \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$$

2.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

Елементарною диз'юнкцією або диз'юнктом d називається диз'юнкція однієї або декількох змінних x_{ij} з множини X або їх заперечень, у якому всі x_{ij} різні.Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називають кон‘юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge ... \wedge d_s$ елементарних диз‘юнкцій d_j, у якій усі d_j різні.

Алгоритм побудови для будь-якої формули булевої алгебри рівносильну до неї КНФ:

1. Перший етап цього алгоритму такий самий як і для побудови ДНФ.
2. Усі диз‘юнкції мають виконуватись раніше кон‘юнкцій – для цього розкривають дужки на підставі дистрибутивного закону $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ або наслідком із нього $xy \vee zu = (x \vee y)(x \vee u)(y \vee z)(y \vee u)$. Далі на підставі співвідношень для констант і закону виключення третього вилучають одиниці та, виходячи із законів ідемпотентності, об‘єднують рівні члени.

Приклад 11. Знайти КНФ для формули $\overline{x \vee z}(x \to y)$. Згідно алгоритму, запишемо:

$$\overline{x \vee z}(x \to y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y)$$

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ), у якій кожна елементарна диз‘юнкція $d_j\,(j = 1,.., s)$ – конституента нуля.

За допомогою тотожних перетворень будь-яку КНФ можна перетворити на ДКНФ. Якщо в якусь елементарну диз‘юнкцію d не входить змінна x, то потрібно записати рівносильний вираз $d \vee x\bar{x}$ та застосувати дистрибутивний закон: $d \vee x\bar{x} = (d \vee x)(d \vee \bar{x})$. Після перетворень отримаємо ДКНФ.

Приклад 12. Перетворимо КНФ $\bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y)$ на ДКНФ. Для цього застосуємо розщеплення для диз‘юнкції та одержимо

$$\begin{aligned}
&\bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y) = (\bar{x} \vee y\bar{y} \vee z\bar{z})(x\bar{x} \vee y\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z}) = \\
&= (\bar{x} \vee (y \vee z)(y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})) \wedge \\
&\wedge ((x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee \bar{z})(\bar{x} \vee (y \vee z)(y \vee \bar{z})) = \\
&= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge \\
&\wedge (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\
&= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})
\end{aligned}$$

Функцію $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називають *двоїстою* до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$. Візьмемо заперечення над обома частинами рівності і підставимо $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ замість $x_1, \ldots, x_n$. Отримаємо $\overline{f^*}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = = \overline{\overline{f}}\left(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}}\right) = f(x_1, \ldots, x_n)$, тобто функція f двоїста до f^*, тобто $(f^*)^* = f$. Отже, відношення двоїстості між функціями симетричне. Пару двоїстих функцій складають, наприклад, кон'юнкція та диз’юнкція. Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного порядку наборів отримується із таблиці для функції$f\left(x_{1,}\ldots,x_n\right)$інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції і перевертанням цього стовпчика.

З означення двоїстості випливає, що для довільної функції двоїсту функцію визначають однозначно. Зокрема, може з'ясуватись, що функція є двоїстою самої себе. У цьому випадку її називають самодвоїстою. Наприклад, заперечення $\bar{x}$ та функція $x \oplus y \oplus z$- самодвоїсті функції.

Приклад 13. Знайти функцію, двоїсту до $f(x,y,z) = xy \vee \bar{z}\left(x \vee \bar{t}y\right)$.За принципом двоїстості матимемо

$$f^*(x,y,z) = \overline{\bar{\mathrm{x}}\bar{y} \vee \bar{\bar{z}}\left(\bar{x} \vee \bar{\bar{t}}\bar{y}\right)} = \overline{\bar{\mathrm{x}}\bar{y} \vee \mathrm{z}(\bar{x} \vee t\bar{y})} = \overline{(\bar{\mathrm{x}}\bar{y})}\left(\overline{\mathrm{z}(\bar{x} \vee t\bar{y})}\right) =$$

$$= (\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}})\left(\bar{z} \vee \overline{(x \vee t\bar{y})}\right) = (x \vee \mathrm{y})(\bar{z} \vee \bar{x}\overline{(t\bar{y})}) = (x \vee \mathrm{y})(\bar{z} \vee \bar{x}(\bar{t} \vee y)).$$

У разі використання принципу двоїстості потрібно враховувати пріоритет операцій, отже, у разі необхідності розставляти дужки. Так, у формулі$xy \vee \bar{z}\left(x \vee \bar{t}y\right)$спочатку виконуються кон'юнкції xy та$\bar{t}y$; отже, у формулі, яка реалізує двоїсту функцію, спочатку треба виконувати диз'юнкції$x \vee y$та$\bar{t} \vee y$, для чого потрібно ввести дужки.

Мінімізація булевої функції — це відшукання найпростішого її подання у вигляді суперпозиції функцій якоїсь функціонально повної системи.

Мінімальною диз'юнктивної нормальною формою (далі ДНФ) булевої функції називають її ДНФ, що складається з найменшої можливої кількості букв. При цьому кожну букву враховують стільки разів, скільки вона зустрічається в ДНФ. Наприклад, ДНФ$\bar{a}b \vee a\bar{b} \vee ac$ складається з шести букв.

Елементарну кон'юнкцію k імплікантою булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, якщо на довільному наборі значень змінних, на якому k =1, значення функція f також дорівнює 1.

Елементарну кон'юнкцію k називаються простою кон'юнкцією булевої функції *f*, якщо k – імпліканта функція *f*, а елементарна кон'юнкція, одержана з k вилученням довільної букви, – не імпліканта. ДНФ, що складається з усіх просто імплакант булевої функції, називають її скороченою диз'юнктивною формою (СДНФ).

2.4. Методи побудови скороченої ДНФ

Один з методів знаходження СНДФ булевої функції запропонував 1952 року Куайн (W.Quine). Згідно з цим методом до ДДНФ булевої функції послідовно застосовують такі рівносильності:

неповне склеювання: $ku \vee k\bar{u} = k \vee ku \vee k\bar{u}$

поглинання члена ku: $ku \vee k = k,$

де k– елементарна кон'юнкція, u – змінна.

Члени kuта $k\bar{u}$склеюються по змінній u та в результаті дають k. Склеювання називається неповним, оскільки члени kuта $k\bar{u}$залишаються у правій частині.

Алгоритм Куайна

Крок 1. Булеву функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$, яку потрібно мінімізувати, записати в ДДНФ;позначити її f_0. Виконати $i:=0$.

Крок 2. Якщо до ДНФ f_iне можна застосувати жодного неповного склеювання, то зупинитись: f_i– СНДФ. Інакше на основі ДНФ f_iпобудувати ДНФ $f_{(i+1)}$за таким правилом: у формі f_iвиконати всі неповні склеювання, які можна застосувати до елементарних кон'юнкцій із рангом $n-i$, а потім вилучити всі елементарні кон'юнкції із рангом $n-i$, до яких можна застосувати поглинання.

Крок 3. Виконати $i:=i+1$ та перейти до пункту 2.

Отже, в алгоритмі Куайна, починаючи з ДДНФf_0будують послідовність ДНФ $f_0, f_1, f_2, \ldots$ доти, доки не отримають СДНФ.

Приклад 2.Побудова СДНФ булевої функції, яку задано досконалою ДНФf_0 :

$$f_0 = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

Виконаємо$i:=0$. Застосувавши неповне склеювання до членів 1 і 2, 2 та 5, 3 та 4, 4 та 5, одержимо:

$$f'_0 = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}y \vee yz \vee x\bar{y} \vee xz$$

Після п'ятикратного застосування поглинання отримаємо$f_1 = \bar{x}y \vee yz \vee x\bar{y} \vee xz$.

Виконаємо$i:=1$. Оскільки жодне неповне склеювання не застосоване до функції f_1, то ми маємо кінцевий результат, й f_1— СДНФ.

Алгоритм Мак-Класкі

Мак-Класкі (E. McCluskey) удосконалив алгоритм Куайна.

Крок 1. Записати булеву функцію, яку потрібно мінімізувати, у ДДНФ.

Крок 2. Упорядкувати змінні й записати їх у кожній елементарній кон'юнкції у вибраному порядку. Після цього подати кожну елементарну кон'юнкцію послідовністю з 1, 0 і — (рисок): на і-й позиції записати 1, якщо і-та змінна входить до елементарної кон'юнкції без заперечень, 0 — якщо вона входить із запереченням, і риску — якщо зовсім не входить. Наприклад, елементарні кон'юнкції $xyz, x\bar{z}, x\bar{u}$записують відповідно у вигляді 111 — , 1 — 0 —, 1— — 0.

Крок 3. Розбити двійкові вирази, які відповідають елементарним кон'юнкціям, на класи за кількістю одиниць і розмістити списки цих класів за зростанням кількості одиниць. Наприклад, для ДДНФ $f_0 = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$отримаємо список із п'яти елементів, розбитих на три класи:

$$\begin{array}{c} 010 \\ \underline{100} \\ 011 \\ \underline{101} \\ 111 \end{array}$$

Крок 4. Виконати всі можливі склеювання $ku \vee k\bar{u} = k$. Їх можна застосовувати лише до тих елементів списку, які містяться у сусідніх класах. Склеювані елементи знаходяться у сусідніх класах простим порівнянням: ці елементи мають різнитися точно однією позицією, і в цій позиції має бути не риска.

Крок 4 повторюю доти, доки можна застосувати склеювання. Якщо помістити до одного класу всі імпліканти, отримані з двох сусідніх класів, то на черговому повторенні кроку 4 знову доведеться порівнювати лише елементи із сусідніх класів. Склеювані елементи позначають *; надалі вони не увійдуть у список простих імплікант. Попередній список після опрацювання має такий вигляд:

$$\begin{array}{cc} *010 & \\ \underline{*100} & 01- \\ *011 & \\ \underline{*101} & \underline{10-} \\ *111 & \\ & -11 \\ & 1-1 \end{array}$$

Далі неможливо застосувати склеювання. Непозначеними залишаться чотири елементи:

01— , 10—, —11, 1—1.

Отже, множина всіх простих имплакант функції f_0така: $\{\bar{x}y, x\bar{y}, yx, xz\}$, а її СДНФ — $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yx \vee xz$.

3. ЗАВДАННЯ

Порядок виконання роботи: Скласти комп'ютерну програму із зазначеними вхідними даними та результатами для завдання 1.

Завдання 1: Задано бінарне відношення R_1 як перелік елементів на множині А={1,2,3,4}, $R_1 \subseteq A^2$ (табл. 1):

- Задати відношення за допомогою матриці та графа.
- Записати властивості відношення. Перевірити чи є відношеннявідношенням еквівалентності, часткового порядку.
- Визначити, чи є дане відношення рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне.

- За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання наведених нижче відношень.

Таблиця 1. Бінарні відношення

Варіант	**Відношення**
1.	R 1 = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}
2.	R 1 = {(1,1),(1,2),(2,1)}
3.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}
4.	R 1 = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}
5.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}
6.	R 1 = {(4,3)}
7.	R 1 = {(3,4)}
8.	R 1 = {(1,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,4)}
9.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,3)}
10.	R 1 = {(1,1),(2,1),(2,2),(2,3)}
11.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}
12.	R 1 = {(1,3),(3,1)}
13.	R 1 = {(1,3),(1,4),(2,3),(2,4) ,(3,1),(3,4)}
14.	R 1 = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}
15.	R 1 = {(1,2), (2,3),(3,4)}
16.	R 1 = {(2,4),(4,2)}
17.	R 1 = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2) ,(3,3),(4,4)}
18.	R 1 = {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}
19.	R 1 = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)}
20.	R 1 = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)}
21.	R 1 = {(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)}
22.	R 1 = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)}
23.	R 1 = {(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}
24.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}
25.	R 1 = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3)}
26.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4)}
27.	R 1 = {(1,1), (1,4),(2,2) (2,3),(3,3),(4,4)}
28.	R 1 = {(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(4,1),(4,4)}
29.	R 1 = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)}

30.	R 1 = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}

Завдання 2: Задана формула *f(x,y,z)* булевої алгебри (табл. 2):

- Спростити формулу f(x,y,z).
- Побудувати таблицю істинності до заданої формули.
- Записати ДДНФ та ДКНФ для заданої формули.
- Записати диз'юнктивне розкладання функції за змінними x,z.
- Записати кон'юнктивне розкладання функції за змінними y,z.
- Визначити, чи є задана функція самодвоїстою.
- Для кожної функції побудувати СДНФ методом Куайна та методом Мак-Класкі.

Таблиця 2. Формули f(x,y,z) булевої алгебри

№	Формула	№	Формула
1	$x\cdot(\overline{y\cdot z\cdot x}\to\overline{y\cdot z})\cdot y\cdot x$	2	$y\cdot\overline{y\cdot x\cdot z\to(\bar{z}\cdot x)}\vee y\cdot x$
3	$x\cdot y\cdot\overline{z\to z\cdot x}\to(z\cdot x\cdot y)$	4	$\overline{y\cdot\overline{x\cdot z}\vee y\cdot x}\to y\cdot x$
5	$x\cdot\overline{\overline{y}\cdot z}\vee(z\cdot\overline{y\to x\cdot z})$	6	$\overline{y\cdot z}\cdot x\vee\overline{\overline{x\to y\cdot z}}\to z\cdot y$
7	$x\cdot\overline{y\cdot z\cdot x}\to x\cdot\bar{y}\vee y\cdot z$	8	$\overline{x\cdot z\to(z\cdot x}\to\overline{z\cdot x\cdot y}$
9	$\overline{x\cdot\bar{t}\cdot y}\to y\cdot x\cdot\overline{x\cdot z}$	10	$(y\cdot(x\cdot\overline{z\cdot x}\to\overline{x\cdot z\cdot y}))\cdot y$
11	$\overline{y\to z\cdot x}\to x\cdot\bar{z}\vee y\cdot z\cdot\bar{t}$	12	$\overline{y\cdot x\cdot z}\to\overline{y\cdot x)\cdot\overline{\overline{x\cdot z\cdot\overline{\overline{y}}}}}$
13	$\overline{z\cdot x}(\overline{y\cdot z\to y)}\to z\cdot y$	14	$\overline{(y\cdot x\cdot z}\to\overline{x\cdot y)}\vee y\cdot z$
15	$\overline{y\cdot x}\to(y\cdot z\cdot\overline{x\cdot y\to z\vee x)}$	16	$\overline{y\cdot x\cdot z\to z}\to y\cdot x\cdot z$
17	$\overline{x\cdot y\to\cdot x}\to\overline{\overline{x\cdot y}\cdot z}\vee x$	18	$z\cdot y\to\overline{z\cdot\bar{y}\vee\bar{z}\cdot y)}\vee y\cdot z$
19	$x\cdot\overline{y\cdot z\to(\bar{z}\cdot x)}\to z\cdot x$	20	$x\cdot\bar{z}\cdot y\to\overline{z\cdot x\to x)}\cdot z$
21	$\bar{x}\cdot y\to\overline{z}\cdot\overline{x\to z)}\to x\cdot z\vee y$	22	$(\overline{x\cdot y\to z}\cdot z)\cdot y\cdot x\to z$
23	$(x\cdot\overline{y\cdot z}\vee x\cdot\overline{y\to z)}\vee y\cdot z$	24	$x\cdot(y\cdot\overline{x\cdot z}\to\overline{z\cdot x})\to y\cdot z$
25	$x\cdot\overline{y}\cdot z\to\overline{y\to z)}\vee\overline{x\cdot y\cdot z}$	26	$x\cdot y\cdot(\overline{y\to y\cdot z}\to(x\cdot y\cdot z)$
27	$\overline{z\cdot x\to y}\cdot x\cdot y\to\overline{x\cdot y}\cdot z$	28	$\overline{x\cdot y}\cdot z\to y\cdot z\cdot(\overline{x\cdot y)\cdot z}$
29	$\overline{y\cdot x\to x}\to\overline{x\cdot z}\cdot(x\to\overline{x\cdot z})$	30	$x\cdot(y\to x\cdot y)\vee\overline{z\cdot x\to x\cdot z}$

4. ВИМОГИ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Кожен студент отримує набір завдань відповідно до свого порядкового номеру у списку групи або відповідно до номеру залікової книжки.
2. Звіт про виконання роботи оформляються у вигляді завдань та розв'язку до них.
3. Звіт акуратно оформляється на аркушах А4 та скріпляються скріпкою.

4. Звіт про виконання лабораторної роботи необхідно захистити у строго визначені терміни.

5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що такевідношення. Властивості відношення.
2. Відношення еквівалентності та часткового порядку.
3. Операції над відношеннями.
4. Замикання відношень.
5. Бази даних і відношення.

6. ЗМІСТ ЗВІТУ ПО РОБОТІ

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Теоретична частина (відношення та їх властивості, відношення еквівалентності та часткового порядку, операції над відношеннями, замикання відношень, бази даних і відношення).
4. Опис виконаної роботи та отриманих результатів (запрограмувати завдання 1 – 2):

- завдання;
- текст програми;
- результати виконання програми;

5. Висновки.

ДодатокА

ТИТУЛЬНА СТОРІНКА ЗВІТУ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Львівська політехніка”

Кафедра інформаційних

систем та мереж

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Звіт

до лабораторної роботи №__

____

(назва лабораторної роботи)

Виконав:

студент гр.__________

(назва групи)

____

(прізвище та ініціали студента)

Прийняв:

____

(прізвище та ініціали викладача)

Львів – 20__