Логіка висловлювань. Закони логіки висловлювань. Нормальні форми логіки висловлювань

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно чи істинне, чи хибне, але не одне й інше водночас. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або логікою висловлювань.

Значення „істина" чи „хибність", яких набуває висловлювання, називають його значенням істинності. Значення „істина" позначають буквою Т (від англ. „true"), а „хибність" — буквою F (від „false"). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви з індексами чи без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають атомарними формулами чи атомами.

Багато речень утворюють об'єднанням одного чи декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають складним. Побудову складних висловлювань уперше розглянуто 1845 р. в книзі англійського математика Дж. Буля (C. Boole) „The Laws of Truth". Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою логічних операцій. У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій:

-заперечення (читають «не» та позначають знаком —).

-кон'юнкцію (читають «і (та)» й позначають знаком Λ).

-диз'юнкцію (читають «або (чи)» та позначають знаком V).

-імплікацію (читають «якщо…, то» та позначають знаком →).

-еквівалентність (читають «тоді й лише тоді» та позначають знаком ~).

У логіці висловлювань атом p чи складне висловлювання називають правильно побудованою формулою. Вивчаючи формули, розглядають два аспекти — синтаксис і семантику.

Синтаксис - це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. Формули в логіці висловлювань означають за такими правилами:

- атом - це формула;
- якщо p - формула, то $\bar{p}$- також формула;
- якщо p та q – формули, то $(p \wedge q)$; $(p \vee q)$; $(p \rightarrow q)$; $(p \sim q)$- формули;
- формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань указаних правил.

Логічна операція «диз'юнкція» відповідає одному з двох способів уживання слова «чи (або)» в українській мові. Диз'юнкція істинна, якщо істинне принаймні одне з двох висловлювань. Розглянемо речення «Лекції з логіки можуть відвідувати студенти, які прослухали курси математичного аналізу чи дискретної математики». Його зміст полягає в тому, що лекції можуть відвідувати як студенти, які прослухали обидва курси, так і ті, хто прослухав тільки один із них. Але є й інше, альтернативне «чи (або)». Розглянемо речення «Лекції з логіки мають відвідувати студенти, які прослухали тільки один із двох курсів математичного аналізу чи дискретної математики». Зміст цього речення полягає в тому, що студенти, які прослухали обидва ці курси, уже не повинні слухати лекції з логіки. Аналогічно, якщо в меню зазначено «Закуску чи салат подають із першою стравою», то це майже завжди означає, що з першою стравою буде подано чи закуску, чи салат, а не обидві страви. В останніх двох реченнях використано альтернативне «чи (або)»; його позначають знаком «$\oplus$» .

Імплікацію як логічну операцію називають також умовним реченням. Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв'язок обов'язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: «Якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку». Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають усіх завдань, то вони можуть отримати оцінку «відмінно», а можуть і не отримати її залежно від інших обставин. Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку «відмінно», то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації p→ q припущення p «Ви виконаєте всі завдання» істинне, а її висновок q «Ви отримаєте відмінну оцінку» хибний.

Семантика - це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності. Нехай p та q - формули. Тоді значення істинності формул $(\neg p)(p \wedge q)(p \vee q)(p \rightarrow q)(p \sim q)$так пов'язані зі значеннями істинності формул p та q.

1. Формула $\bar{p}$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли формула p істинна. Формулу $\bar{p}$ читають „не p" чи „це не так, що p" та називають запереченням формули p.
2. Формула (p $\wedge\, q$)істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула (p $\wedge\, q$)хибна. Формулу (p $\wedge\, q$) читають „p і q" й називають кон'юнкцією формул p та q.
3. Формула (p $\vee\, q$)хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках (p $\vee\, q$)істинна. Формулу (p $\vee\, q$)читають „p або q" й називають диз'юнкцією формул p та q.
4. Формула (p $\rightarrow q$)хибна, якщо формула p істинна, а q - хибна. У всіх інших випадках вона істинна. Формулу (p $\rightarrow q$)називають імплікацією, атом p - припущенням імплікації, а q - її висновком. Оскільки імплікацію використовують у багатьох математичних міркуваннях, то існує багато термінологічних варіантів для формули (p $\rightarrow q$). Ось деякі з них: „якщо p, то q", „з p випливає q", „p лише тоді, коли q", „p достатнє для q", „q, якщо p", „q необхідне для p".
5. Формула(p $\sim q$)істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула (p $\sim q$)хибна. Формулу (p $\sim q$)читають „p тоді й лише тоді, коли q" чи „p еквівалентне q" та називають еквівалентністю формул p та q.

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць, які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Такі таблиці називають таблицями істинності.

Конструкція „якщо p, то q", використовувана у вигляді „if p then q" в алгоритмічних мовах, відрізняється за змістом від імплікації в логіці. Тут p - висловлювання, а q - програмний сегмент, який складається з одного чи багатьох операторів. Програмний сегмент q виконується, якщо висловлювання p істинне, і не виконується, якщо воно хибне. Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називають її **інтерпретацією**.

Формулу fназивають **виконанною**, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій fнабуває значення T. У такому разі говорять, що формула fвиконується в цій інтерпретації.

Формулу f логіки висловлювань називають **загальнозначущою чи тавтологією**, якщо вона виконується в усіх інтерпретаціях. Якщо формула f- тавтологія, то використовують позначення / Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях, називають заперечуваною, невиконанною чи суперечністю. Оскільки кожна формула логіки висловлювань має скінченну кількість інтерпретацій, то завжди можна перевірити її загальнозначущість або заперечуваність, знайшовши значення істинності в усіх можливих інтерпретаціях.

Бітовим рядком називають скінченну послідовність бітів. Розглядають також рядок, який не містить жодного біта порожній рядок. Довжиною бітового рядка називають кількість бітів у ньому.

Операції над бітами можна узагальнити на бітові рядки. Означимо порозрядне OR, порозрядне AND і порозрядне XOR двох бітових рядків з однією довжиною як бітовий рядок, який має таку саму довжину, а його біти — відповідно результати операцій OR, AND і XOR над відповідними бітами цих рядків.

ДНФ та КНФ

Визначення або обґрунтування семантичної властивості будь-якої довільної складної формули в логіці висловлювань може здійснюватися і на синтаксичному рівні, тобто на підставі аналізу зовнішнього вигляду самої формули. Для цього використовують розв'язувальну процедуру - зведення формули до її **кон'юнктивної нормальної форми** (КНФ) або **диз'юнктивної нормальної форми** (ДНФ).

Якщо нормальна форма є формулою, яка містить лише логічні операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, то **кон'юнктивою нормальною формою** називають формулу, яка є кон'юнкцією елементарних диз'юнкцій, тобто диз'юнкцій простих формул або їх заперечень, а **диз'юнктивною нормальною формою** називають формулу, що є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій (тобто кон'юнкції простих формул або їх заперечень).

Формула тотожно-істинна, якщо в кожну елементарну диз'юнкцію її КНФ одночасно входить будь-яка її проста формула разом зі своїм запереченням, таке входження ще називають регулярним.

Формула тотожно-хибна, якщо в кожну елементарну кон'юнкцію її ДНФ одночасно входить будь-яка її проста формула разом зі своїм запереченням, оскільки диз'юнкція всіх хибних підформул - хибна формула. Якщо ні КНФ, ні ДНФ конкретної складної формули не містить у своїх підформулах регулярних входжень, то таку складну формулу вважають нейтральною або виконуваною, і її істинне значення залежить не лише від логічної структури, а й від конкретних властивостей простих висловлювань бути істинними чи хибними.

У логіці висловлювань будь-яку правильно побудовану складну формулу можна звести або до КНФ, або до ДНФ через рівносильні перетворення, причому кількість КНФ чи ДНФ для однієї формули може бути довільною, тобто кожна формула може мати не одну КНФ або ДНФ, а низку множинностей КНФ чи ДНФ. Рівносильні перетворення полягають у заміні формули одного вигляду на формулу іншого вигляду за умови, що ці дві формули рівносильні.

Рівносильні формули логіки висловлювань

Формули називаються рівносильними, якщо таблиці істинності цих формул будуть збігатися. Рівносильні формули називаються ще еквівалентними, бо в процесі кожного набору значень для своїх змінних вони набувають однакового значення істинності або значення хибності

Рівносильну формулу можна отримати внаслідок заміни пропозиційних зв'язок на підставі відношення залежності між ними. Визначають, що для будь-якої формули можна назвати рівносильну для неї формулу, яка містить символи — ¬, V, Λ.

Рівносильні формули називаються **законами логіки висловлювань**.

Закони логіки висловлювань - рівносильні, тотожно-істинні формули, що входять до структури класичної символічної логіки як формальної системи. До них належать:

Закони логіки висловлювань

1. Закон комутативності $p \vee q = q \vee p; p \wedge q = q \wedge p$
2. Закон асоціативності $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r); (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
3. Закон дистрибутивності $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \vee (q \wedge r) = (p \wedge q) \vee (p \vee r)$
4. Закон суперечності $p \wedge \bar{p} = F$
5. Закон виключеного третього $p \vee \bar{p} = T$
6. Закон подвійного заперечення $\bar{\bar{p}} = p$
7. Закон ідемпотентності $p \vee p = p; p \wedge p = p$
8. Закон де Моргана $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q};$
   $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
9. Закон поглинання $(p \vee q) \wedge p = p;$
   $(p \wedge q) \vee p = p$
10. Співвідношення для сталих $p \vee T = T; p \wedge T = p;$
    $p \vee F = p; p \wedge F = F$

Закони асоціативності дають змогу записувати багатомісні диз'юнкції та кон'юнкції без дужок.

За допомогою правил $p \to q = \bar{p} \vee q; p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ можна усувати логічні операції імплікації й еквівалентності з формул. Ці правила можна використовувати також для введення імплікації й еквівалентності.

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів — p, q, r. Літерал називають позитивним, якщо він не має знака заперечення, і негативним, якщо має. Пару літералів {p, p} називають контрарною. Говорять, що формулу f записано в кон'юнктивній нормальній формі (КНФ), якщо вона має вигляд $f = f1 \vee f2 \vee \ldots \vee fn (n \geqslant 1)$, де кожна з формул $f_1, f_2 \ldots f_n$— літерал або диз'юнкція літералів і всі формули $fi(\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$різні.

Говорять, що формулу f записано в диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ), якщо вона має вигляд $f = f1 \vee f2 \vee \ldots \vee fn (n \geqslant 1)$, де кожна з формул $f1, f2, \ldots, fn$— літерал або кон'юнкція літералів і всі $fi(\mathrm{i} = 1,2,\ldots,n)$різні.

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм, застосувавши закони логіки висловлювань. Для побудови нормальних форм потрібно виконати таку послідовність еквівалентних перетворень:

1. Застосувати правила $f \to g = \bar{f} \vee g$ та $f \sim g = (f \to g) \wedge (g \to f)$ для усунення

логічних операцій “→” та “~”.

2. Застосувати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

3. Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції. Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції.