Рекурентні рівняння. Принцип коробок Діріхле. Принцип включення-виключення.

Означення рекурентного рівняння

Рекурентне рівняння (рекурентне співвідношення) — називається формула виду $a_{n+1} = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1})$, де F деяка функція від k аргументів, яка дозволяє обчислити наступні члени числової послідовності через значення попередніх членів. Таким рівняння (співвідношення) описується залежність n-ого елемента послідовності від попередніх елементів цієї числової послідовності.

Розв'язком рекурентного рівняння є формула по якій можна знайти a_nпідставивши у неї лише саме *n*. Тобто у цій формулі, немає залежності від попередніх елементів, а існує лише залежність від самого значення *n*.

Для більш наглядного пояснення наведемо приклад:

$$a_n = a_{n-1} + 2\mathrm{a}_{n-2}, n = 2,3\ldots, a_0 = 2, a_1 = 7.$$

Його розв'язок — послідовність $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.Справді,

$$a_0 = 3 - 1 = 2,$$
$$a_1 = 6 + 1 = 7,$$
$$a_{n-1} + 2\mathrm{a}_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2} =$$
$$= 3 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1} =$$
$$= 3 \cdot 2^n - (-1)^n = a_n.$$

Розглянемо дві задачі, що приводять до рекурентних рівнянь.

Числа Фібоначчі. Цю задачу дослідив у XIII ст. Леонардо Пізанський. Відомий як Фібоначчі. Молоду різностатеву пару кролів завезли на острів. Після досягнення двомісячного віку кожна пара щомісяця дає приплід - нову пару. Потрібно визначити кількість пар кролів на острові через ***n*** місяців.

У перший місяць на острові буде лише 1 пара. Очевидно, що і в другому місяці залишиться та ж пара, оскільки ця пар ще не дала приплоду. Звідси $a_1 = 1, a_2 = 1$,
$a_3 = 2$- (I пара + I приплід), $a_4 = 3$- (I пара + I і II приплід, (I приплід - стає II парою), $a_5 = 5$- (I і II пара + II і III приплід I пари і I приплід II пари)... Можна побачити закономірність $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,а й справді кількість пар у *n* місяці буде становити сумі кількості пар у попередньому місяці і кількості новонароджених у $\mathrm{т} - 2$ місяці.

Отже, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,з початковими умовами $a_0 = 0$і $a_1 = 1$.Члени послідовності (a_n)називаються числами Фібоначчі.

Задача про многокутник. У коло вписано правильний *2n*-кутник. Скількома способами можна попарно з'єднати його вершини так. щоб отримані відрізки не перетинались?

Припустимо, що x_n(I припущення) - кількість способів з'єднання, а точки з'єднання назвемо $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{2\mathrm{n}}$.Точку A_1можна з'єднати тільки з $A_2, A_4, \ldots A_{2\mathrm{n}}$оскільки тільки при такому з'єднанні утворена хорда буде поділяти остачу точок так, що по кожну сторону від хорди у нас буде парна кількість не з'єднаних точок, а це нам потрібно для подальшого попарного з'єднання. Якщо позначити кількість точок по одну сторону від хорди $2\mathrm{k} - 2$- згідно з I припущенням цю кількість точок можна з'єднати x_{k-1}способами, а кількість точок по іншу сторону від хорди буде становити $2(n-k)$- відповідно кількість комбінацій з'єднань становитиме x_{n-k}. Згідно з правилом добутку кількість способів попарного з'єднання, коли A_1з'єднано з $A_{2\mathrm{n}}$, дорівнює $x_{n-k} \cdot x_{k-1}$. Параметр *k* може набувати значень 1, 2, ... *n*.

Отже, як висновок маємо:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \cdot x_1 + \ldots + x_{n-k} \cdot x_{k-1} + \ldots + x_1 \cdot x_{n-2} + x_{n-1}$. (1)

Розв'язування рекурентних рівнянь

Не існує єдиного методу для розв'язування рекурентних рівнянь. Проте певний підтип цих рівнянь можна розв'язувати один методом.

Рекурентне рівняння називають *лінійним однорідним порядку k зі сталими коефіцієнтами,* якщо воно має вигляд:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k},$$

Де $c_1, c_2, \ldots, c_k$- дійсні числа та $c_k \neq 0$.

Приклад 1. Розглянемо рекурентні рівняння:
- $a_n = 1{,}11 a_{n-1}$- лінійне однорідне першого порядку;
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$- лінійне однорідне другого порядку;
- $a_n = a_{n-5}$- лінійне однорідне п'ятого порядку;
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}^2$- нелінійне;
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \cdot a_{n-3}$- нелінійне;
- $a_n = 2\mathrm{a}_{n-1} + 1$- лінійне неоднорідне;
- $a_n = 4\mathrm{a}_{n-1} - 1\mathrm{a}_{n-2} + n2^n$- лінійне неоднорідне;
- $a_n = n \cdot a_{n-1}$- лінійне однорідне, але не зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рекурентного рівнянь k-го порядку називають *загальним*, якщо він залежить від k довільних сталих $B_1, \ldots, B_k$і будь-який його розв'язок можна одержати підбором цих сталих. Для того, щоб рекурентне рівняння було формулою для визначення деякої послідовності, потрібно знати k початкових умов: $a_0 = A_0, a_1 = A_1, \ldots, a_{k-1} = A_{k-1}$. Із цих умов і визначають сталі $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Теорема 1. Якщо послідовність $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p)}$- це розв'язки рекурентного рівняння (1), то для довільних чисел $B_1, B_2, \ldots, B_p$послідовність

$$a_n = B_1 \cdot a_n^{(1)} + B_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + B_p \cdot a_n^{(p)}$$

також являє собою розв'язок цього рівняння.

Доведення. Кожну з тотожностей

$$a_n^{(i)} = c_1 \cdot a_{n-1}^{(i)} + c_2 \cdot a_{n-2}^{(i)} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}^{(i)}, \qquad i = 1,2, \ldots, p,$$

помножимо на B_iта додамо результати.

Теорема 2. Якщо число r_1- корінь рівняння:

$$r^k = c_1 \cdot r^{k-1} + c_2 \cdot r^{k-2} + \ldots + c_k,$$

то послідовність r_1^n(n=1, 2, …) - розв'язок рекурентного рівняння (1).

Доведення. Нехай $a_n = r_1^n$.Підставимо a_nу рівняння (1) і одержимо рівність $r_1^n = c_1 \cdot r_1^{n-1} + c_2 \cdot r_1^{n-2} + \cdots + c_k \cdot r_1^{n-k}$.Вона правильна, оскільки за умовою теорему виконується рівність $r^k = c_1 \cdot r_1^{k-1} + c_2 \cdot r_1^{k-2} + \cdots + c_k$,і залишається помножити обидві частини цієї рівності на r_1^{n-k}. Теорему доведено.

Рівняння (2) називають *характеристичним* для рекурентного рівняння (1). Це алгебраїчне рівняння степеня k; його корені можуть бути як простими, так і кратними.

Нехай усі корені характеристичного рівняння прості. Тоді за теоремою 2 можна навести k різних розв'язків рекурентного рівняння (1): $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n$де r_i*(i = 1.2, ... k)* - корені характеристичного рівняння (2). Зазначимо, що всі r_i. відмінні від нуля. Якщо б це було не так, то $c_k = 0$.Доведемо, що коли всі корені характеристичного рівняння прості, то загальний розв'язок рекурентного рівняння має вигляд:

$$a_n = B_1 \cdot r_1^n + B_2 \cdot r_2^n + \ldots + B_k \cdot r_k^n. \quad (3)$$

Безпосередньо з теорем 1 і 2 випливає, що послідовність (3) задовольняє рівняння (1). Отже, залишилося довести, що будь-який розв'язок рекурентного рівняння (1) можна подати у вигляді (3). Позаяк будь-який розв’язок повністю визначається значеннями $a_0 = A_0, a_1 = A_1, \ldots, a_{k-1} = A_{k-1}$,то достатньо показати, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + \cdots + B_k = A_0 \\ B_1 \cdot r_1 + B_2 \cdot r_2 + \cdots + B_k \cdot r_k = A_1 \\ B_1 \cdot r_1^2 + B_2 \cdot r_2^2 + \cdots + B_k \cdot r_k^2 = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_1 \cdot r_1^{k-1} + B_2 \cdot r_2^{k-1} + \cdots + B_k \cdot r_k^{k-1} = A_{k-1} \end{cases} \quad (4)$$

має розв’язок за будь-яких $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$.

Визначник системи (4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & r_3^{k-1} & r_4^{k-1} \end{vmatrix}$$

- це визначник Вандермонда. він дорівнює добутку $\prod_{i>j} r_i - r_j$. Оскільки всі r_jрізні, то визначник відмінний від 0, і система (4) має єдиний розв’язок за будь-яких $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$.

Розглянемо тепер випадок кратних коренів. Вираз (3) у цьому разі - уже не загальний розв’язок. Справді, нехай, наприклад $r_1 = r_2$,тоді

$$a_n = (B_1 + B_2) \cdot r_1^n + B_3 \cdot r_3^n + \cdots + B_k \cdot r_k^n = B \cdot r_1^n + B_3 \cdot r_3^n + \cdots + B_k \cdot r_k^n.$$

Залишилося $(k-1)$довільних сталих, а визначити їх потрібно так, щоб задовольнити k початкових умов $a_0 = A_0, a_1 = A_1, \ldots, a_{k-1} = A_{k-1}$.Зробити це в загальному випадку неможливо. Нехай характеристичне рівняння (2) має s різних коренів $r_1, r_2, \ldots, r_k$, кратність яких дорівнює, відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_s (k_1 + k_2 + \ldots + k_s = k)$.Щоб побудувати загальний розв’язок рекурентного рівняння (1) у цьому разі, потрібно доповнити кількість розв’язків, яких не вистачає через кратність коренів $r_1, r_2, \ldots, r_s$.Можна довести, що окрім r_j^nрозв’язки рівняння (1) - це також $n \cdot r_j^n, n^2 \cdot r_j^n, \ldots, n^{k \cdot j-1} \cdot r_j^n (j = 1,2, \ldots, s)$.Загальний розв'язок у випадку кратних коренів має такий вигляд:

$$a_n = (B_{j1} + B_{j2} \cdot n + \ldots + B_{jk_j} \cdot n^{kj-1}) r_j^n.$$

Приклад 2. Послідовність чисел Фібоначчі задає рекурентне рівняння другого порядку $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$з початковими умовами $f_0 = 0, f_1 = 1$.Характеристичне рівняння $r^2 - r - 1 = 0$,тобто $r^2 - r - 1 = 0$, звідки

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже,

$$f_n = B_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Для визначення констант B_1та B_2, скористаємося початковими умовами:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 0 \\ B_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Отримаємо $B_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; B_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,отже, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Приклад 3. Розглянемо рекурентне рівняння четвертого порядку **,** $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, початкові умови $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 8$. Характеристичне рівняння $r^4 - r^2 + 4 = 0$. Розклавши ліву частину на множники, послідовно одержимо

$$r^4 - 5r^2 + 4 = (r^2 - 1)(r^2 - 4) = (r-1)(r+1)(r-2)(r+2),$$
$$(r-1)(r+1)(r-2)(r+2) = 0,$$
$$r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2, r_4 = -2.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $a_n = B_1 + B_2(-1)^n + B_3 2^n + B_4(-2)^n$.

Скориставшись початковими умовами, запишемо систему рівнянь для визначення констант:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 3, \\ B_1 - B_2 + 2B_3 - 2B_4 = 2, \\ B_1 + B_2 + 4B_3 + 4B_4 = 6, \\ B_1 - B_2 + 8B_3 - 8B_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо $B_1 = B_2 = B_3 = 1, B_4 = 0$. Отже, $a_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.

Приклад 4. Нехай задано рекурентне рівняння $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = -3$. Характеристичне рівняння $r^2 + 6r + 9 = 0$, звідки $r_1 = r_2 = -3$. Загальний розв'язок має вигляд

$$a_n = B_1(-3)^n + B_2 \cdot n(-3)^n.$$

Для визначення констант, виходячи з початкових умов, складемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 = 3, \\ -3B_1 - 3B_2 = -3, \end{cases}$$

з якої знаходимо $B_1 = 3, B_2 = -2$. Отже, $a_n = 3(-3)^n - 2n(-3)^n = (3 - 2n)(-3)^n$.

Коротко розглянемо лінійні неоднорідні рекурентні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} + q_n, \qquad (5)$$

де q_n- відома послідовність.

Теорема 3. Загальний розв'язок a_nлінійного неоднорідного рівняння (5) дорівнює сумі його часткового розв'язку $\tilde{a}_n$і загального розв'язку a_nвідповідного лінійного однорідного рівняння.

Доведення. Нехай $\tilde{a}_n$- будь-який частковий розв'язок неоднорідного рівняння (5).
Тоді замінимо a_nна $\tilde{a}_n + a_n$і отримаємо

$$\tilde{a}_n + a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i(\tilde{a}_{n-i} + a_{n-i}) + q\,.$$

Оскільки $\tilde{a}_n$- частковий розв'язок неоднорідного рівняння, то

$$\tilde{a}_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \tilde{a}_{n-i} + q\,.$$

Отже, a_nзадовольняє однорідному рекурентному рівнянню $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$.

Теорема 3 зводить задачу знаходження загального розв'язку неоднорідного рекурентного рівняння (5) до відшукання будь-якого його часткового розв'язку. У застосуваннях часто зустрічається випадок, коли

$$q_n = (b_0 + b_1 \cdot n + b_2 \cdot n^2 + \cdots + b_p \cdot n^p) \cdot z^n, \qquad (6)$$

де $b_0, b_1, \ldots, b_p, z$— задані дійсні числа.

Опишемо метод знаходження часткового розв'язку неоднорідного рекурентного рівняння (5) із q_nу вигляді (6). Припустимо, що відомі корені $r_1, r_2, \ldots, r_s$характеристичного рівняння (2), кратності яких дорівнюють відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_s$, причому$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k$. Можна показати, що тоді існує частковий розв'язок рівняння (5)$\tilde{a}_n = n^t \cdot (D_0 + D_1 \cdot n + D_2 \cdot n^2 + \cdots + D_p \cdot n^p) \cdot z^n$, де $t = 0$, якщо $z \neq r_i (i = 1, \ldots, s)$і $t = k_j$, якщо $z = r_j$для деякого j (тобто t дорівнює кратності кореня r_j, якщо $z = r_j$).

Приклад 5. Розв'яжемо неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = a_{n-2} + n + 1$із початковими умовами: $a_0 = 5, a_1 = -1$.

Запишемо відповідне однорідне рівняння $a_n = a_{n-2}$. Характеристичне рівняння матиме вигляд $r^2 - 1 = 0$, його корені $r_1 = -1, r_2 = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$a_n = B_1(-1)^n + B_2 1^n = B_1(-1)^n + B_2.$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{a}_n = n \cdot (D_0 + D_1 n)$. Підставивши його в неоднорідне рівняння, одержимо

$$D_0 \cdot n + D_1 \cdot n^2 = D_0(n-2) + D_1(n-2)^2 + n + 1,$$
$$(4D_1 - 2D_0 + 1) + (1 - 2D_1) \cdot n = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} 1 - 2D_1 = 0, \\ 4D_1 - 2D_0 + 1 = 0. \end{cases}$$

З останньої системи одержимо $D_1 = 1/2, D_0 = 3/2$. Отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $\tilde{a}_n = 3n/2 + n^2/2$. На підставі теореми 3 записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$a_n = \tilde{a}_n + a_n = 3n/2 + n^2/2 + B_1(-1)^n + B_2.$$

Підставивши початкові умови, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення констант B_1та B_2:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 5, \\ -B_1 + B_2 = -3, \end{cases}$$

звідки $B_1 = 4, B_2 = 1$. Отже, $a_n = 4(-1)^n + 1 + 3n/2 + n^2/2$.

Приклад 6. Знайдемо загальний розв'язок рекурентного рівняння

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n.$$

Характеристичне рівняння має двократний корінь $r = 2$. Отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $\tilde{a}_n = n^2(D_0 + D_1 n)2^n$. Після підстановки його у вихідне рівняння та зробивши скорочення на 2^n, одержимо

$$n^2(D_0 + D_1 n) = (6D_1 - 2D_0) + (1 - 6D_1)n + (D_0 + D_1 n)n^2,$$

звідки можемо записати систему

$$\begin{cases} 6D_1 - 2D_0 = 0, \\ 1 - 6D_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо $D_0 = 1/2, D_1 = 1/6$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $a_n = (B_0 + B_1 n)2^n$, а неоднорідного -

$$a_n = (B_0 + B_1 n)2^n + n^2(½ + n/6)2^n.$$

Принцип коробок Діріхле

Принцип коробок Діріхле — це один з найважливіших методів доведення, який має особливо широке застосування в теорії скінченних автоматів, теорії чисел та інших розділах.

Теорема 1(принцип коробок Діріхле).

Якщо $k + 1$або більше предметів розкладено в kкоробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два або більше предметів.

Доведення 1.

Припустимо,що жодна коробка не містить більше одного предмета. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільшеk. Це суперечить тому,що є щонайменше $k + 1$предмет.

Приклад 1.

У будь-якій групі з 367 чоловік принаймні двоє народилися в один день(можливо, у різні роки).

Нагадаємо, що як $[x]$позначають найменше ціле число, яке не менше x.

Теорема 2(узагальнений принцип коробок Діріхле).

Якщо Nпредметів розкладено в kкоробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $[N/k]$предметів.

Доведення 2.

Зазначимо, що справджується нерівність $[N/k] < (N/k) + 1$. Припустимо, що жодна коробка не містить більше ніж $[N/k] - 1$предметів. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше

$$k([N/k]-1) < k(((N/k)+1)-1) = N$$

Це суперечить умові теореми, що загальна кількість предметів дорівнює N.

Приклад 2.

Серед 100 чоловік принаймні $[100/12] = 9$народилися в одному місяці.

Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповіді на питання, як визначити кількість елементів у об‘єднанні множин. Для двох множин правдива формула:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об'єднанні ускладнюється:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$