Мінімізація булевих функцій. Реалізація булевих функцій схемами.

Мінімізація булевих функцій

Найважливішим допоміжним засобом для визначення найбільш простий логічної функції є карта Карно. Це не що інше, як змінена запис таблиці істинності. У цьому випадку значення аргументів не просто записуються поруч один з одним, а розміщуються по горизонталі і вертикалі таблиці, ділячи її, на зразок шахової дошки, на окремі квадрати. При парній кількості аргументів половину з них записують по горизонталі, а половину - по вертикалі. При непарному числі аргументів по горизонталі розміщується на один аргумент більше, ніж по вертикалі.

Мінімізація — це процес приведення булевих функцій до такого вигляду, який допускає найбільш просту, з найменшою кількістю елементів, фізичну реалізацію функції.

Для мінімізації функцій застосовують різні методи: послідовного виключення змінних за допомогою законів алгебри логіки, з використанням діаграм Венна, карт Карно, Вейча та інші.

Для мінімізації функцій із кількістю букв $n \leq 6$ застосовують карти Карно. Кожна клітинка карти Карно однозначно відповідає одному наборові таблиці істинності для функції n змінних або мінтермам цієї функції.

Наведемо загальні правила мінімізації.

Зображають карту Карно для n змінних і розмічають її рядки та стовпчики. У клітинки таблиці, які відповідають мінтермам функції, записують одиницю.

Склеюють прямокутні конфігурації, які заповнені одиницями і містять 1, 2, 4 або 8 клітинок. Верхні й нижні рядки, крайні ліві і праві стовпчики карти теж ніби склеюються, створюючи поверхню циліндра.

Множина прямокутників, які покривають усі одиниці, називається покриттям. Чим менше прямокутників і чим більше клітинок у прямокутниках, тим краще покриття. З декількох варіантів вибирають той, у якого менший коефіцієнт покриття $z = r / s$, де r – загальна кількість прямокутників; s – їх сумарна площа в клітинках.

Формули, отримані в результаті мінімізації, містять r елементарних кон’юнкцій (за кількістю прямокутників у покритті). Кожна кон’юнкція містить тільки ті змінні, які не змінюють свого значення в наборах, що склеюються у відповідному прямокутнику.

Приклад. Дано таблицю істинності функції F.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	F
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	1
4	0	0	1	1	1
5	0	1	0	0	0
6	0	1	0	1	1
7	0	1	1	0	0
8	0	1	1	1	1
9	1	0	0	0	1

10	1	0	0	1	1
11	1	0	1	0	0
12	1	0	1	1	0
13	1	1	0	0	0
14	1	1	0	1	1
15	1	1	1	0	1
16	1	1	1	1	0

Для даної функції необхідно записати ДДНФ та провести її мінімізацію за допомогою карти Карно.

Розв'язання: ДДНФ для даної функції має вигляд:

$$F = \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \vee \overline{X}_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4 \vee \overline{X}_1\overline{X}_2X_3X_4 \vee \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4 \vee \overline{X}_1X_2X_3X_4 \vee$$
$$\vee X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \vee X_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4 \vee X_1X_2\overline{X}_3X_4 \vee X_1X_2X_3\overline{X}_4.$$

Побудуємо карту Карно:

X_1X_2 \ X_3X_4	**00**	**01**	**11**	**10**
00	**1**		**1**	**1**
01		**1**	**1**	
11		**1**		**1**
10	**1**	**1**		

Результати мінімізації:

$$F = \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_4 \vee \overline{X}_1X_3X_4 \vee X_2\overline{X}_3X_4 \vee X_1\overline{X}_2\overline{X}_3 \vee X_1X_2X_3\overline{X}_4; \qquad z = 5/9.$$

Для побудови схеми на універсальних логічних елементах І-НЕ рівняння перетворюються на основі правила подвійної інверсії та правила де Моргана до такого вигляду:

$$F = \overline{\overline{\overline{\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_4} \cdot \overline{\overline{X}_1X_3X_4} \cdot \overline{X_2\overline{X}_3X_4} \cdot \overline{X_1\overline{X}_2\overline{X}_3} \cdot \overline{X_1X_2X_3\overline{X}_4}}}$$

Реалізація булевих функцій схемами.

Булевою називають функцію $f(x_{1,}\dots,x_n)$ з областю значень $\{0, 1\}$, змінні $x_{1,}\dots,x_n$ якої також набувають лише цих двох значень. Множину всіх булевих функцій позначають P_2, множину всіх булевих функцій від n змінних — $P_2(n)$).

Булеву функцію від n змінних називають n-місною. Область її визначення — множина E_2^n усіх можливих двійкових наборів довжиною n. Отже, область визначення n-місної булевої функції скінченна й складається з 2^n наборів. Для набору $(a_{1,}\dots,a_n)$ у цьому розділі будемо використовувати позначення an або a (якщо довжина набору зрозуміла з контексту).

Під функціональним елементом розуміють пристрій із такими властивостями: він має $n \geq 1$ впорядкованих відростків зверху — входів — і один відросток знизу — вихід; на входи цього пристрою можуть подаватися сигнали, які мають значення 0 і 1; на кожному наборі сигналів на входах у той самий момент, коли вони надійшли, пристрій видає на виході один із сигналів (0 або 1); набір сигналів на входах однозначно задає сигнал на виході, тобто якщо в різні моменти на входи надійшли однакові набори сигналів, то в ці моменти на виході буде один і той самий сигнал. Кожному функціональному елементу з n входами співвідносять булеву функцію від n змінних f(xn) таким способом. Входу з номером i $(1 \leq i \leq n)$ставлять у відповідність змінну xi та з кожним набором an $(a_{1,}\dots, a_n)$значень змінних співвідносять число f(an), яке дорівнює 0 чи 1 залежно від сигналу на виході в разі подання цього набору сигналів на входи функціонального елемента. Щодо функції f(xn) говорять, що даний функціональний елемент реалізує її.

Далі ми розглядатимемо лише функціональні елементи, зображені на рис. 1, які реалізують відповідно булеві функції заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію.

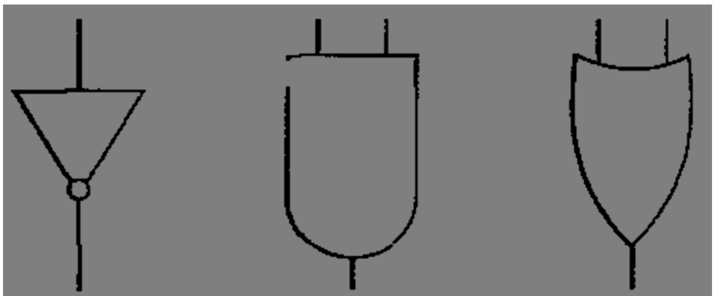

Рис. 1

Тепер означимо поняття схеми з функціональних елементів і її входи й вихід.

1.Кожний функціональний елемент являє собою схему з функціональних елементів із тими самими входами та виходом, що й у цього елемента.

2. Якщо S_1— схема з функціональних елементів і два її входи з'єднано (рис.2), то одержана конструкція Sявляє собою схему з функціональних елементів. Входи схемиS — усі не з'єднані входи S_1і ще один вхід, який відповідає двом з'єднаним входам схеми S_1.

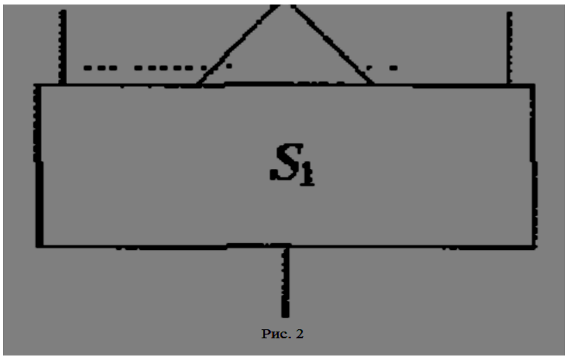

Рис. 2

3. Якщо S_1і S_2— дві схеми з функціональних елементів, то конструкція S, яку одержано з'єднанням якогось входу схеми S_2 з виходом схеми S_1 також являє собою схему з функціональних елементів (рис. 3). Входи схеми S— усі входи схеми S_1і всі входи схеми S_2, окрім того, який з'єднано з виходом схеми S_1. Вихід схеми S— вихід схеми S_2.

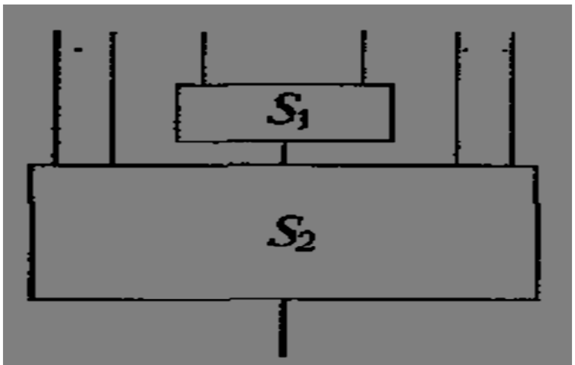

Рис. 3

4. Якщо в схемі з функціональних елементів S, її вхід з'єднати з виходом якогось функціонального елемента схеми S_1 без утворення циклу для жодного функціонального елемента (тобто вихід жодного функціонального елемента не має бути з'єднано з його ж входом — можливо, через інші елементи схеми), то отримана конструкція являє собою схему з функціональних елементів (приклад такої конструкції наведено на рис. 4)

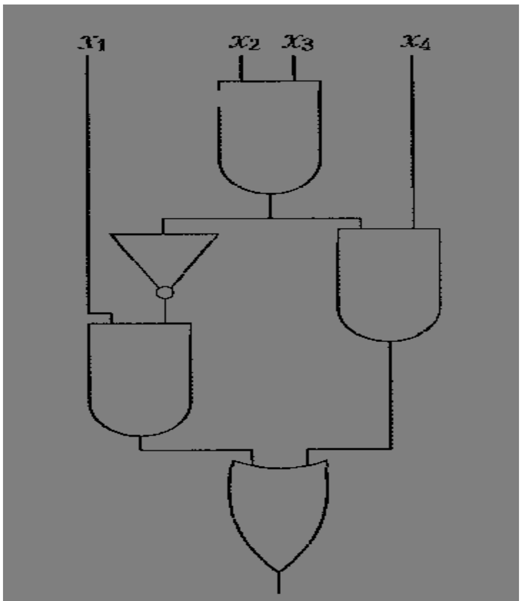

Рис. 4

Означення схеми з функціональних елементів завершено. Згідно з ним схема з функціональних елементів — це математичний об'єкт. Вона має різні технічні застосування.

Очевидно, що схема з функціональних елементів реалізує певну булеву функцію.

Оскільки в ній допустимі з'єднання елементів, які відповідають суперпозиціям функцій системи , $\{x,\ x \wedge y,\ x \vee y\}$ а ця система повна, то будь-яку булеву функцію можна реалізувати схемою з функціональних елементів, зображених на рис. 1.

Приклад. Побудувати схему з функціональних елементів, яка реалізує булеву функцію

$f = xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz$

За методом карт Карно знаходимо мінімальну ДНФ $fmin = y \vee xz$ Відповідну схему наведено на рис. 5.

Зауважимо, що мінімізація булевих функцій не вичерпує всіх можливостей мінімізації схем. Наприклад, схема, зображена на рис. 4, реалізує булеву функцію $f(x4) = x1x2x3 \vee x2x3x4$. Вона має п'ять елементів. Це менше, ніж символів операцій у будь-якій формулі булевої алгебри, яка реалізує цю функцію.

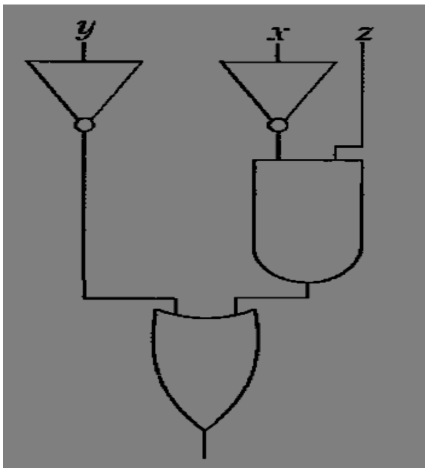

Рис. 5

Нехай S— схема з елементів кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, яка реалізує булеву функцію f, а $L_f(S)$— кількість її елементів. Нехай також $L(f) = minL_f(S)$, де мінімум узято за всіма схемами S, які реалізують функцію f. Нарешті, уведемо функцію $L(n) = maxL(f)$, де максимум узято за всіма булевими функціями від n змінних.

ТЕОРЕМА (Шеннона-Лупанова). Для функції $L(n)$виконується співвідношення

$L(n) \sim \frac{2^n}{n}$ причому для довільного ε > 0 кількість булевих функцій f, для яких $L(f) \le (1 - \varepsilon) * (\frac{2^n}{n})$, прямує до 0 зі зростанням n.

Зауваження. 1. Функцію $L(n)$називають функцією Шеннона (на честь американського математика К, Шеннона). 2. Символ ~ означає асимптотичну рівність: $\lim(n \to \infty)(nL(n)/2^n) = 1$. Зміст другого твердження теореми полягає в тому, що зі зростанням n майже всі булеві функції реалізуються зі складністю, близькою до верхньої межі, тобто $L(n)$.

Теорема свідчить, що більшість булевих функцій (у разі $n \to \infty$) мають складні мінімальні схеми. З огляду на побудову схем практичну цінність має лише достатньо вузький клас булевих функцій. Тому разом з універсальними методами побудови схем потрібно мати й такі, що призначені для певних класів булевих функцій, тому що в них краще враховано їх властивості. Розглянемо один підхід до реалізації достатньо вузького класу функцій. Покажемо, як схеми з функціональних елементів можна використовувати для додавання двох цілих додатних чисел, заданих у двійковій системі числення. Спочатку побудуємо схему, яка обчислює x + y, де x та y — біти. Входи схеми — x та y; на кожний із них може бути поданий сигнал 0 або 1. Наша конструкція буде об'єднанням двох схем (матиме два виходи). Вихід s дає суму бітів у даному розряді, а вихід c використано для біта перенесення в наступний розряд. У табл. 1 наведено значення на входах і виходах схеми, яку називають півсуматором. Саму схему наведено на рис. 6. Зазначимо, що з табл. 1 маємо: $c = xy$; $s = xy \vee xy = (x \vee y)xy$.

Таблиця 1

Вхід		*Вихід*	
x	*e*	*s*	*c*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

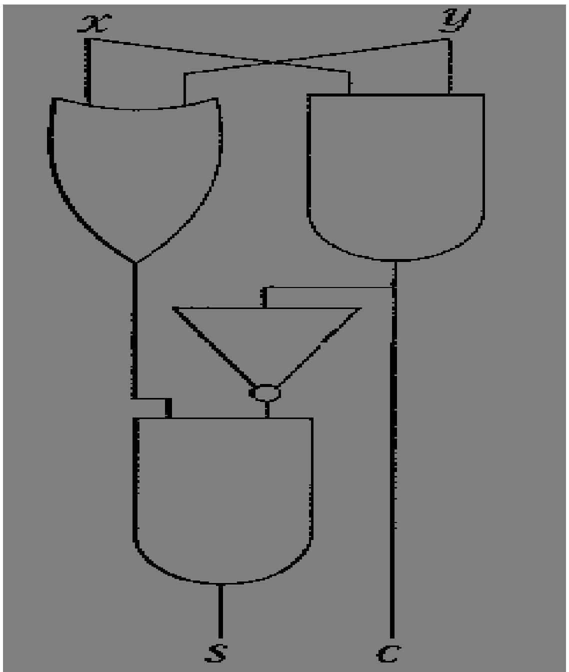

Рис. 6

Щоб урахувати біт перенесення c, використовують схему, яку називають повним суматором. Її входи — x, y і біт перенесення з попереднього розряд c_i . Виходів два: сума *s* у даному розряді та нове перенесення $c_{(i-1)}$ (у наступний розряд). Відповідні булеві функції задано в табл. 2.

Таблиця 2

Вхід			**Вихід**	
x	**y**	**c_i**	**s**	**c_{i+1}**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Подамо функції s і ci+1 у ДДНФ: s = xyci ∨ xyci ∨ xyci ∨ xyci ; ci+1 = xyci ∨ xyci ∨ xyci ∨ xyci. Замість того, щоб будувати повні суматори безпосередньо за зазначеними формулами, використаємо півсуматори (рис. 7).

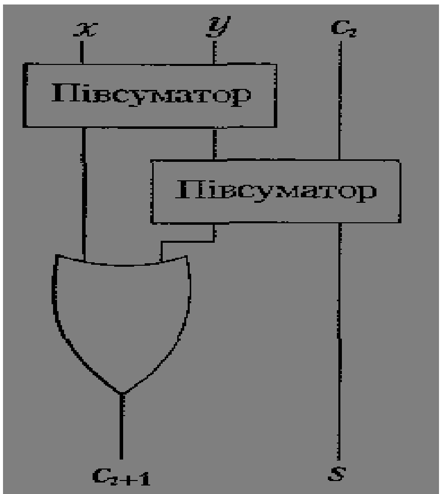

Рис. 7

Нарешті, на рис. 8 показано, як повні суматори та півсуматор можна використати для додавання трирозрядних цілих чисел $x_3x_2x_1$та $y_3y_2y_1$у двійковій системі числення. Результат —двійкове число $s_4s_3s_2s_1$. Зазначимо, що s_4, (старший розряд суми) збігається з c_3.

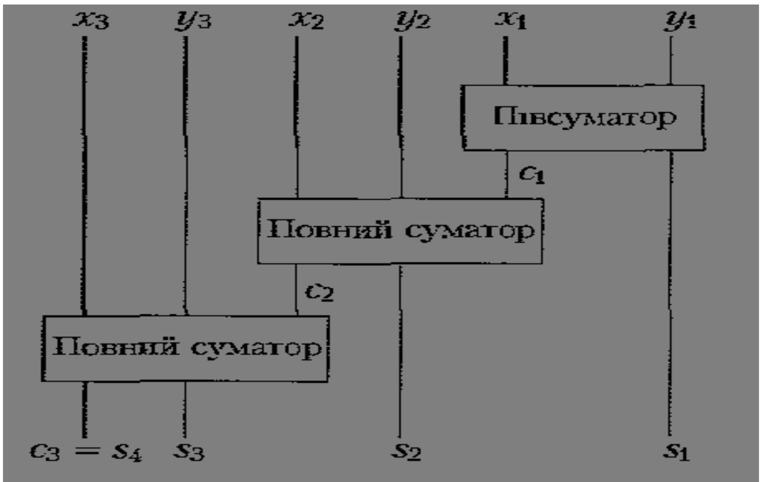

Рис. 8

Аналогічно будують схему для додавання n-розрядних двійкових чилес $x_n x_{(n-1)} \dots x_1$та $y_n y_{(n-1)} \cdots y_1$.