Топологічне сортування. Операції над відношеннями. Замикання відношень.

Хороший приклад використання частково впорядкованих множин – процес топологічного сортування. Мається на увазі сортування елементів, для яких визначено відношення часткового порядку, тобто порядок задано не для всіх, а лише для деяких пар. Із цілком зрозумілих міркувань будемо вважати, що частково впорядкована множина, яка підлягає топологічному сортуванню, скінченна. Частковий порядок можна подати у вигляді діаграми Гассе. Мета топологічного сортування - перетворити частковий порядок на лінійний.

Топологічне сортування

Почнемо з означення. Лінійний порядок $\leq$ називають *сумісним* із частковим порядком R, якщо з aRb випливає $a \leq b$. Побудову лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком, називають *топологічним сортуванням*.

Наведемо два приклади застосування топологічного сортування.

1. Певна задача (наприклад, технічний проект) розпадається на низку підзадач. Виконання деяких підзадач можливе лише після завершення інших. Якщо підзадачу v потрібно виконати до підзадачі w, то будемо писати $v < w$. Топологічне сортування означає такий розподіл робіт, за якого кожна з підзадач не розпочнеться до завершення всіх підзадач, які потрібно виконати до неї.
2. В університетських програмах певні курси потрібно читати раніше за інші, бо останні грунтуються на попередньо викладеному матеріалі. Якщо для курсу w потрібно спочатку ознайомитись із курсом v, то пишемо $v < w$. Тут топологічне сортування означає, що жоден курс не можна читати раніше, ніж ті, що його підтримують.

ТЕОРМЕА 1. Кожна скінченна непорожня частково впорядкована множина *(A, R)* має принаймні один мінімальний елемент.

Опишемо роботу алгоритму топологічного сортування для довільної непорожньої частково впорядкованої множини *(A. R)*. Спочатку виберемо мінімальний елементa_1, (він існує за теоремою 1). Множина $(A/\{a_1\}, R)$ також частково впорядкована (обгрунтування цього пропонуємо як вправу). Якщо вона непорожня, то виберемо з неї мінімальний елемент a_2. Вилучимо a_2; якщо ще залишились елементи, то виберемо мінімальний елемент a_3з $A/\{a_{1,}a_2\}$. Продовжимо процес вибору мінімального елемента $a_{(k+1)}$ з $A/\{a_{1,}a_2, \ldots, a_k\}$, доки залишаються елементи.

Позаяк A - скінченна множина, то цей процес завершиться. Одержимо послідовність елементів $a_{1,}a_2, \ldots, a_n$. Шуканий лінійний порядок задають так:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots, a_n$$

Цей лінійний порядок сумісний із заданим частковим порядком. Щоб у цьому переконатись зазначимо, що коли $b < c$в заданому частковому впорядкуванні, то *c* вибирають як мінімальний елемент у момент роботи алгоритму, коли елемент b уже вилучено, бо інакше *c* не був би мінімальним елементом. Якщо є декілька мінімальних елементів, вибираємо будь-який. Дамо формальний опис алгоритму.

Алгоритм топологічного сортування

Крок 1. Ініціалізація. Виконати $k := 1$.
Крок 2. Виконати $a_k :=$ мінімальний елемент множини А.
Крок 3. Виконати $A := A/\{a_k\}$.
Крок 4. Виконати $k := k + 1$.
Крок 5. Закінчення. Якщо $A = \emptyset$ то зупинитись$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - результат топологічного сортування множини *A,*інакше перейти до кроку 2.

Приклад 1. У комп'ютерній компанії згідно з якимось проектом потрібно виконати сім завдань. Деякі з них можна розпочати лише після завершення певних інших завдань. Частковий порядок на множині завдань задамо так: $X < Y$, якщо завдання Y не можна розпочати до завершення завдання X. Діаграму Гассе для множини цих завдань подано на рис. 1.

Потрібно знайти порядок, у якому ці завдання можна виконати для завершення всього проекту.

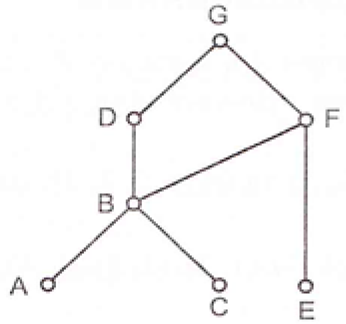

Рис. 1.

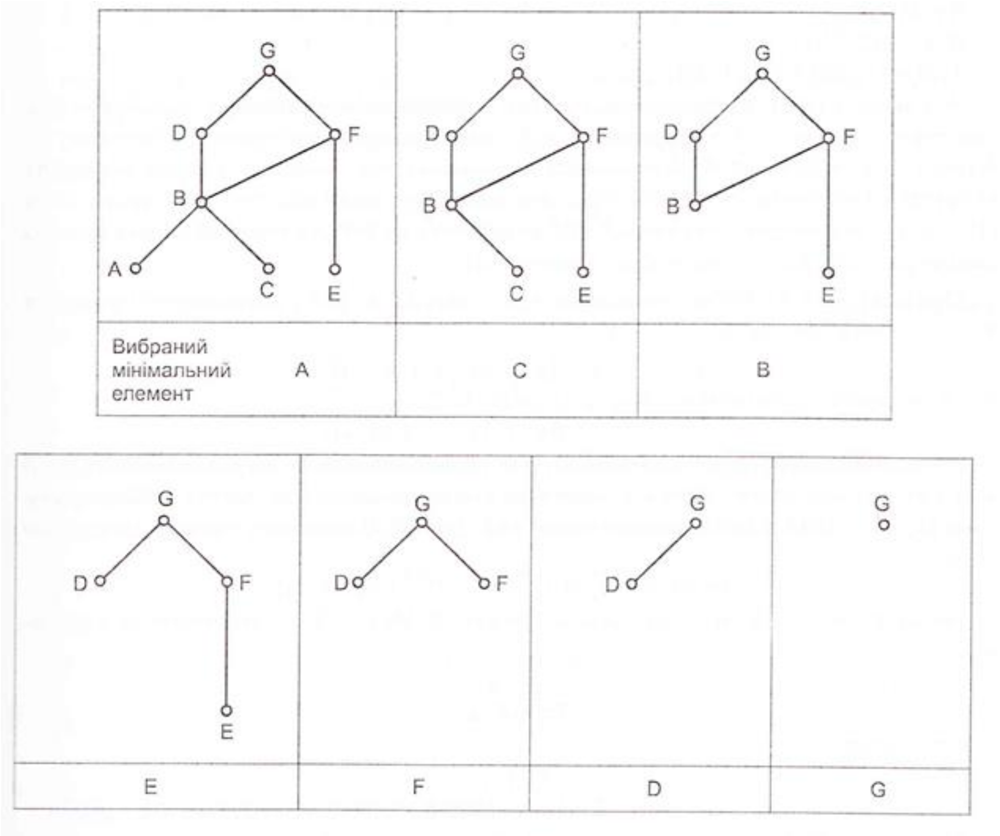

Рис. 2.

Очевидно, порядок виконання цих завдань можна дістати, виконавши топологічне сортування множин всіх завдань. Послідовність кроків такого сортування наведено на рис 2. Результат цього сортування $A < C < B < E < F < D < G$ визначає можливий порядок виконання завдань.

Основні операції над бінарними відношеннями

Над бінарними відношеннями можна виконувати такі основні операції: перетин, об'єднання, знаходження різниці, симетричної різниці, доповнення, оберненого відношення, композиції, звуження, включення.

Оскільки відношення з множини A в множину B – підмножина декартового д

Приклад 2. Нехай *A={1, 2, 3}* , *B= {1, 2, 3, 4}*. Означимо відношення R_1 і R_2 з A в B:

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}, \quad R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}.$$

Тоді,

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\},$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\},$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(2,2),(3,3)\},$$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}.$$

Розглянемо тепер іншу операцію – композицію відношень. Нехай R – відношення з множини A в множину B, а S – з множини B в множину C. Композицією відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a,c), де $a \in A, c \in C$ для яких існує такий елемент $b \in B$, що $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in S$. Композицію відношень R і S позначають $R \circ S$.

Знайдемо композицію відношень R і S, де R – відношення з множини A={1,2,3} в множину B={1,2,3,4}:

$R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$;

S – відношення з множини B в множину C={0,1,2}:

$S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$.

Композицію $R \circ S$ будують, використовуючи всі впорядковані пари з відношень R і S такі, що другий елемент пари з R збігається з першим елементом з пари S. Наприклад, пари $(2,3) \in R$ та $(3,1) \in S$ породжують пару $(2,1) \in S \circ R$. Виконавши описані дії, отримаємо:

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}.$$

Замикання відношень

Нехай R — відношення на множині A. Воно може не мати деяких властивостей. Наприклад, це відношення може не бути рефлексивним, симетричним або транзитивним.

Замикання відношень R за властивістю P називають найменше відношення $C \supset R$, яке має властивість P. Термін "найменше відношення" означає, що C — підмножина будь-якого відношення S, для якого виконуються такі умови.

1. S має властивість P.
2. $R \subset S$.

Можна довести, що замикання відношення R за властивістю P, якщо воно існує, являє собою перетин усіх відношень із властивістю P, які містять R.

Приклад 5. Відношення $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ не рефлексивне. Щоб отримати його рефлексивне замикання, додамо пари $(2,2)$та $(3,3)$, бо лише цих пар вигляду (a,a)не має в R. Очевидно, що це нове відношення рефлексивне, і R — його підмножина. Більше того, воно являє собою підмножину будь-якого рефлексивного відношення S, для якого $R \subset B$. Отже, ми справді одержали рефлексивне замикання відношення R.

З останнього прикладу зрозумілий спосіб побудови рефлексивного замикання: достатньо додати до відношення R усі ті пари (a,a) де $a \in A$, яких немає в R. Отже рефлексивне замикання R дорівнює $R \cup \Delta, \Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$. Відношення ΔНа множині A називають *діагональним.* Що стосується орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R, то рефлексивному замиканню відповідає граф, одержаний із нього додаванням петель у тих вершинах, де їх немає.

Приклад 6. Відношення $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ не симетричне. Для отримання його симетричного замикання додамо пари $(2,1)$ і $(1,3)$,бо лише цих пар вигляду (b,a), для яких $(a,b) \in R$,немає в R. Очевидно, це нове відношення симетричне, й R — його підмножина. Окрім того, воно являє собою підмножину будь-якого симетричного відношення S, для якого $R \in S$. Отже ми справді одержали симетричне замикання відношення R.

Наведені міркування мають загальний характер: для отримання симетричного замикання потрібно додати всі такі пари (b,a), що $(b,a) \notin R$, але $(a,b) \in R$.Отже, симетричне замикання відношення R дорівнює $R \cup R^{-1}$, де $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Це можна сформулювати й у термінах графа відношення R: якщо в ньому дуга (a,b), але немає дуги (b,a), то потрібно додати її.

Як знати транзитивне замикання відношення R? Спочатку на прикладі покажу, що попередня методика не приведе до успіху.

Приклад 7. Нехай на множині $\{1,2,3,4\}$задано відношення $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}$. Очевидно, що воно не транзитивне: не вистачає пар $(1,2), (2,3), (2,4), (3,1)$. Додавши ці пари, отримаємо відношення $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (2,4), (3,1)\}$. Воно також не транзитивне, бо містить пари $(3,1), (1,4)$, але не містить пари $(3,4)$.

Отже, побудувати транзитивне замикання відношення складніше, ніж рефлексивне чи симетричне.

Шляхом у відношенні R від елемента a до елемента b називають послідовність елементів множини A таких, що $(a, x_1) \in R^n$, $(x_1, x_2) \in R^n$, ... ,$(x_{n-1}, b) \in R^n$. Доведемо, що процедура відшукання транзитивного замикання відношення R еквівалентна процедурі визначення того, які пари вершин з'єднано шляхом. Зазначимо, що шлях у відношенні R від a до b відповідає шляху з вершини a у вершину b у графі G_R цього відношення.

ТЕОРЕМА 1. Нехай R — відношення на множині A. Шлях довжиною n від елемента a до елемента b у відношенні R існує тоді й лише тоді коли $(a, b) \in R^n$.

ТЕОРЕМА 2. Транзитивне замикання відношення R дорівнює з'єднувальному відношеннюR^*

ТЕОРЕМА 3. Нехай множина A має n елементів і R — відношення на множині A. Тоді

$$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$