Спеціальні форми подання булевих функцій. Повнота та замкненість.

Спеціальні форми подання булевих функцій.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ).

Простою кон’юнкцією або кон’юнктивом називається кон'юнкція деякого кінцевого набору змінних або їх заперечень, причому кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Диз’юнктивною нормальною Формою або ДНФ називається диз'юнкція простих кон'юнкцій. Елементарна кон'юнкція:

- Правильна, якщо кожна змінна входить в неї не більше одного разу (включаючи заперечення);
- Повна, якщо кожна змінна (або її заперечення) входить до неї рівно 1 раз;
- Монотонна, якщо вона не містить заперечень змінних.

Наприклад $a\bar{b}c \vee bc \vee \bar{a}$ – є ДНФ.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою або ДДНФ щодо деякого заданого кінцевого набору змінних називається така ДНФ, у якої в кожну кон'юнкцію входять всі змінні даного набору, причому в одному і тому ж порядку. Наприклад: $a\bar{b}c \vee abc \vee \bar{a}b\bar{c}$.

Легко переконатися, що кожній булевої функції відповідає деяка ДНФ, а функції, відмінної від тотожного нуля — навіть ДДНФ. Для цього достатньо в таблиці істинності цієї функції знайти всі булеві вектори, на яких її значення дорівнює 1 , і для кожного такого вектора $b=(b1,b2,b3....bn)$ побудувати кон'юнкцію $x1(b1),x2(b2)...xn(bn)$, де $xi = bi; xi = 0$. Диз'юнкція цих кон'юнкцій є ДДНФ вихідної функції, оскільки на всіх булевих векторах її значення збігаються зі значеннями вихідної функції. Наприклад, для імплікації $x \rightarrow y$ результатом є $xy \vee x$, $y \vee xy$, що можна спростити до $x \vee y$.

Кон’юнктива нормальна форма (КНФ)

Кон’юнктивна нормальна Форма (КНФ) визначається двояко до ДНФ. Простою диз’юнкцією або диз’юнктивом називається диз'юнкція однієї або декількох змінних або їх заперечень, причому кожна змінна входить в неї не більше одного разу. КНФ — це кон'юнкція простих диз'юнкцій.

Досконалою кон’юктивною нормальною формою (ДКНФ), щодо деякого заданого кінцевого набору змінних, називається така КНФ, у якої в кожну диз'юнкцію входять всі змінні даного набору, причому в одному і тому ж порядку. Оскільки (Д)КНФ і (Д)ДНФ взаємодвійні, властивості (Д)КНФ повторюють всі властивості (Д)ДНФ "з точністю до навпаки".

КНФ може бути перетворена до еквівалентної їй ДНФ шляхом розкриття дужок за правилом:

$$a(b \vee c) \rightarrow ab \vee ac$$

яке виражає дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції. Після цього необхідно в кожній кон'юнкції видалити повторювані змінні або їх заперечення, а також викинути з диз'юнкції всі кон'юнкції, в яких зустрічається мінлива разом зі своїм запереченням. При цьому результатом не обов'язково буде СДНФ, навіть якщо вихідна КНФ була СКНФ. Точно також можна завжди перейти від ДНФ до КНФ. Для цього слід використовувати правило

$$a \vee bc \rightarrow (a \vee b)(a \vee c)$$

виражає дистрибутивність диз'юнкції щодо кон'юнкції. Результат потрібно перетворити описаним вище способом, замінивши слово " кон'юнкція " на " диз'юнкція" і навпаки.

Алгебраїчна нормальна форма (АНФ або поліном Жегалкіна)

Алгебраїчна нормальна форма(загальноприйнята назва в зарубіжній літературі) або поліном Жегалкіна (назва, що використовується у вітчизняній літературі) — це форма подання логічної функції у вигляді поліному а з коефіцієнтами виду 0 і 1 , в якому в якості твору використовується операціякон'юнкції ("I ", AND), а в якості складання — додавання по модулю 2 (що виключає «АБО», XOR). Для отримання полінома Жегалкіна слід виконати наступні дії:

1. Отримати ДДНФ функції
2. Всі «АБО» замінити на «Виключаюче АБО»
3. У всіх термах замінити елементи з запереченням на конструкцію: («елемент» "виключаюче АБО" 1)
4. Розкрити дужки за правилами алгебри Жегалкіна і привести попарно однакові терми.

Повнота та замкненість булевих функцій

Існує два способи подання булевих функцій – табличний і формульний. Таблиця задає функцію безпосередньо як відповідність між двійковими наборами та значеннями функцій на них. Єдина вада подання булевих функцій табличним способом – це його громіздкість. Формула значно компактніший спосіб подання функції, проте вона задає одну функцію через іншу.

Систему булевих функцій *Q* називають функціонально повною, якщо довільну булеву функцію можна подати формулою над *Q* тобто вона являє собою суперпозицію функції із *Q*.

Теорема

Нехай задано дві системи булевих функцій *Q1* і *Q2* причому система *Q1* повна, і кожну її функцію можна виразити формулою через функцію системи *Q2*. Тоді система *Q2* функціонально повна.

Доведення.

Нехай *f* – довільна булева функція. Оскільки система *Q1* повна, то функцію *f* можна виразити за формулою *F1*, яка містить скінченну кількість функцій системи *Q1*.

Нехай це функція *g1,g2….gn*. За умовою теореми кожну з цих функцій можна виразити формулою через скінченну кількість функцій системи *Q2*, нехай це функції *h1,h2…hm*, тому у формулі *F1* ми можемо виключити входження функцій *g1,g2…gn*, замінивши їх формулами, які містять функції *h1,h2…hm*, Одержимо формулу *F2*, що містить лише функції *h1,h2…hm*.

Отже, ми виразили функцію *f* як формулу *F2* через функції *h1,h2…hm* системи *Q2* Якщо функція *f* довільна то система *Q2* функціонально повна.

Множину *K* булевих функцій називають замкненим класом, якщо довільна суперпозиція функції із *K* також належить *K*. Будь-яка система *Q* булевих функцій породжує замкнений клас.

Особливо важливими замкнутими класами є так звані передповні класи:

- клас функцій, що зберігають константу *0*: $T0=f(x1,...,xn):f(0,...,0)=0$
- клас функцій, що зберігають константу *1*: $T1=f(x1,...,xn):f(1,...,1)=1$
- клас самодвоїстих функцій: $S=f(x1,...,xn):f(x1,...,xn)=f(x1,...,xn)$
- клас монотонних функцій: $M=f(x1,...,xn): \forall i(ai\leq bi)\Rightarrow f(a1,...,an)\Rightarrow f(b1,...,bn)$
- клас лінійних функцій: $L=x1,...,xn:f(x1,...,xn)=a0+a1,x1+...+ an, xn, ai \in 0, 1$

Розглянемо ці класи:

Клас *T0*: Булеву функцію $f(x1,...xn)$, називають функцією яка зберігає *0*, якщо $f(0,...0)=0$

Теорема

- $T0$ – замкнений клас. Інакше кажучи, із функції, що зберігають 0, суперпозицією можна одержати лише функції, які зберігають 0.

Наслідок:

Повна система функцій має містити хоча б одну функцію яка не зберігає 0. Інакше кажучи повна система функцій не може цілком містити у замкненому класі $T0$.

- Клас *T1*. Булеву функцію $f(x1,...xn)$, називають функцією, яка зберігає 1, якщо $f(1...1)=1$.

Наприклад функції 1,$x,xy,$належать класу *T1*а функції 0,$x+y$-ні

Теорема

$T1$ - замкнений клас.

Доведення.

Клас $T1$ містить тотожну функцію, отже досить довести що функція $F(x1\ldots xn)=f(f1(x1\ldots xn).....fm(x1\ldots xm))$, зберігає 1, якщо функції $f,f1,f2,...fm,$зберігають 1.

Наслідок.

Повна система функцій має містити хоча б одну функцію, яка не зберігає 1. Інакше кажучи повна система функцій не може цілком міститися у замкненому класі $T1$.

Клас S.

Нагадаємо означення самодвоїстої функції, функція називається самодвоїстою, якщо вона двоїста до самої себе $f^*=f$.

Пригадавши означення двоїстої функції, можна дати таке означення самодвоїстої функції, еквівалентне до попереднього. Булеву функцію називають самодвоїстою, якщо вона набуває протилежних значень на протилежних наборах значень змінних. Звідси зокрема випливає, що самодвоїсту функцію можна повністю задати її значеннями, на першій половині набору.

Теорема

Клас S сомодвоїстої функції замкнений.

Доведення.

Оскільки тотожня функція належить класу S, достатньо довести, що функція

$F(x1\dots xn)=f(f1(x1\dots xn).....fm(x1\dots xm))$, самодвоїста на функції $f, f1, f2, \dots fm$, сомодвоїсті.

Наслідок.

Повна система булевих функції повинна містити хоча б одну несамодвоїсту функцію.

Лема (про несамодвоїсту функцію.)

З будь-якої несамодвоїстої функції алгебри логіки $f(x1,\dots,xn)$, підставляючи замість усіх змінних функції xi x, можна отримати $\varphi(x)=const$.

Доведення.

Нехай $f \notin S$, тоді $f(x1,\dots,xn) \neq f(x1,\dots,xn) \Rightarrow \exists =(\sigma1,\dots,\sigma n)$

$f(\sigma1,\dots,\sigma) \neq f(\sigma1,\dots,\sigma n) \Leftrightarrow f(\sigma1,\dots,\sigma n)=f(\sigma1,\dots,\sigma n)$
Побудуємо функцію $\varphi(x)$так: $\varphi(x)=f(x\oplus\sigma1,\dots,x\oplus\sigma n)$
Дійсно $\varphi(0)=f(\sigma1,\dots,\sigma n)$,$\varphi(1)=f(\sigma1,\dots,\sigma n)$, $\varphi(0)=\varphi(1)\Rightarrow\varphi(x)=const$
Зауважимо, що підстановка задовольняє умові теореми, так $x\oplus\sigma=0\vee1$
Клас М
Уведемо на множині $E2n$ усіх n-місних двійкових наборів відношення часткового порядку.
Нехай $an=(a1,\dots,an)$, $bn=(b1,\dots,bn)$ – двійкові набори.$an<bn$, якщо $ain<bin$ для всіх $i=1,2,\dots,n$.
Функія $f(x-n)=f(x1,\dots,xn)$ – називають монотонною, якщо для будь-яких двійкових наборів $a-n$і bn із того, що $an<bn$ випливає, що$f(an)<f(bn)$.
Щоб перевірити функцію на монотонність безпосередньо за означенням , потрібно проаналізувати таблицю функції, що може виявитися досить громіздкою справою. Проте часто досить легко виявити, що функція немонотонна.
Теорема
Нехай $f(xn)$ – монотонна функція, якщо та функція не зберігає 0, то вона тотожньо дорівнює 1. Якщо функція $f(x\text{-}n)$ не зберігає 1, то вона тотожньо дорівнює 0.
Доведення.
Для будь-якого набору $a-n=(a1,\dots,an)$ виконується умова $(0,\dots,0)<(a1,\dots,an)$.
Далі $1=f(0,\dots,0)<f(a1,\dots,an)$.Отже $f(a-n)=1$
Лема (про немонотонну функцію.)
З будь-якої немонотонної функції алгебри логіки $f(x1,\dots,xn)$, підставляючи замість усіх змінних функції x, 0, 1, можна отримати функцію φ (x)=x.
Доведення
Нехай $f\notin M$. Тоді існують такі набори $a=(a1,\dots,an)$і$B=(B1,\dots,Bn)$, що $A<B$і $A\neq B)$ і$f(a)<f(b)$. Виділимо ті розряди $i1,\dots,ik$ наборів AIB, в яких вони відрізняються. Очевидно, в наборі a ці розряди рівні 0, а в наборі $B-1$. Розглянемо послідовність наборів $a0,a1,a2,\dots,an$ таких, що $a=a0<a1<a2\dots an=B$, де $ai+1$ виходить з ai заміною одного з нулів, розташованого в одній з позицій $i1,\dots,ik$, на одиницю (при цьому набори aiі $ai+1$- сусідні).

Оскільки $f(a)=1$, а $f(B)=0$, серед наборів $a0,a1,a2,\dots,an$ знайдуться два сусідні aiі$ai+1$, такі що $f(ai)=1$і$f(ai+1)=0$. Нехай вони відрізняються в r-му розряді: $ai=(a1, a2, \dots, ar-1, ar+1, \dots, an)$, $ai+1=(a1, a2,\dots, ar-1, ar+1, \dots, an)$. Тоді визначимо функцію $\varphi(x)$ так: $\varphi(x)=f(a1,a2,\dots,ar-1,x,ar=1,\dots,an)$

Справді, тоді: $\varphi(x)=f(ai)=1$, $\varphi(1)=f(ai+1)$і $\varphi(1)=x$

Клас L.

Булеву функцію $f(x-n)=f(x1,x2,...,xn,)$, називають лінійною, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд $f(x-n)=c0\oplus c1x1\oplus c2x2\oplus\ldots\oplus cnxn$. Це поліно називають поліном першого ступеня,або лінійним поліном. Воно не має багатомісних кон'юнкцій $xi,xj,\ xi,xj,xk$. Коуфіцієнти $c1,c2,...,cn$лінійного полінома можуть утворювати довільний набір значень з $n+1$нулів і одиниць. Унаслідок єдиності полінома Жегалкіна різним наборам коуфіцієнтів відповідають різні булеві значення.

Теорема

Клас L лінійних функцій замкнений.

Доведення.

Множина L лінійних функцій- замкнений клас, бо підстановка формул вигляду

$c0\oplus c1x1\oplus c2x2\oplus\ldots\oplus cnxn$, у формулу такого самого вигляду знов дає формулу такого самого вигляду.

Наслідок.

Повна система булевих функцій має містити хоча б одну нелінійну функцію.

Лема (про нелінійну функцію.)

З будь-якої нелінійної функції алгебри логіки $f(x1,...,xn)$, підставляючи замість усіх змінних $x,x,y,y,0,1$, можна отримати $\varphi(x,y)=x\cdot y$або $\varphi(x,y)=x\cdot y$

Доведення.

Нехай $f(x1,...,xn)\notin L$. Розглянемо поліном Жегалкіна цієї функції. З її нелінійності випливає, що в ньому присутні складові виду$xi1\cdot xi2\cdot...$. Будемо вважати, що існує добуток $x1\cdot x2\cdot...$ Таким чином, поліном Жегалкіна цієї функції виглядає так

$f(x1,...,xn)=x1\cdot x2\cdot P1(x3,...,xn)\oplus x1\cdot P2(x3,...,xn)\oplus x2\cdot P3(x3,...,xn)\oplus x\cdot P4(x3,...,xn)$, причому $P1(x3,...,xn)\neq 0$. Інакше кажучи, $\exists a3,a4,...,an\in E20,1$ такі, що $P1(a3,a4,...,an)$.

Критерії функціональної повноти системи булевих функцій.

Теорема

Для того щоб система булевих функцій Q була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила:

1) функцію, яка зберігає 0.
2) функцію, яка зберігає 1.
3) несамодвоїсту функцію.
4) немонотонну функцію.
5) нелінійне функцію.

Інакше кажучи для повноти системи Q необхідно і достатньо, щоб для кожного з п’яти замкнених класів, вона містила функцію, яка цьому класу не належить.

Функціональна повнота булевих функцій — це можливість подати всі можливі значення таблиці істиності за допомогою формул із елементів цієї множини.

У логіці зазвичай застосовують такий набір операцій: кон'юнкція (∧), диз'юнкція (∨), імплікація (→) та еквівалентність (↔). Ця множина операцій є функціонально повною. Але вона не є мінімальною функціонально повною системою, оскільки:

A→B=¬A∨B

A⇔B=(A→B)∨(B→A)

Отже ¬,∧,∨,також є функціонально повною системою. Але ∨також може бути виражене (за законом де Моргана) як:

$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$\wedge$ також може бути визначено через $\vee$ подібним чином.

Також $\vee$ може бути виражена через $\rightarrow$таким чином:

$A \vee B := (A \rightarrow B) \rightarrow B$

Отже $\neg$,та одна з $\{\vee, \rightarrow,\}$є мінімальною функціонально повною системою.

Критерій Поста сформульовано американським математиком Емілем Посторм. Він описує необхідні та достатні умови функціональної повноти для множини булевих функцій.

Критерій: Множина булевих функцій є функціонально повною тоді , коли вона не міститься повністю ні в одному з передповних класів.

Критерій Поста — одна з центральних теорем математичної логіки, описує необхідні та достатні умови функціональної повноти множини булевих функцій. Був сформульований американським математиком Емілем Постом в 1941. Отже, для того щоб наша система була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила хоча б одну нелінійну функцію, хоча б одну несамодвоїсту, хоча б одну немонотонну, хоча б одну функцію, яка не зберігатиме нуль та хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю.

Булева n-арна функція, це функція BnB, де $B=\{0,1\}$ — булева множина. Кількість n-арних булевих функцій дорівнює $22n$, а загалом, існує нескінченна кількість булевих функцій.