“Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення .Обчислення кількості розміщень і сполучень. Перестановки.”

Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення .

Правила суми та добутку

Правило суми. Якщо об’єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об’єкт y – n_2 способами, то можна вибрати або x, або y $n_1 + n_2$способами.Наприклад, у ящику знаходиться 20 кульок: 5 білих, 6 чорних, 7 синіх та 2 червоних. Скількома способами можна взяти з ящику одну кольорову кульку? Тут передбачається, що кольорова кулька – це або синя, або червона кулька, тому потрібно застосовувати правило суми. Кольорову кульку можна вибрати $7 + 2 = 9$способами.

Приклад, студент має вибрати тему реферату зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір? За правилом суми кількість тем для вибору становить $20 + 15 + 17 = 52$.

Правило добутку. Якщо об’єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об’єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об’єктів (x,y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 \times n_2$ способами.

Це правило можна узагальнити на довільну кількість елементів. Нехай є n об’єктів. Якщо об’єкт x_1 можна вибрати n_1 способами, після чого об’єкт x_2 можна вибрати n_2 способами, і для будь-якого j,$2 \leq j \leq m - 1$, після вибору об’єктів $x_1,\ldots,xj$ об’єкт xj+1 можна вибрати $nj + 1$способами, то вибір упорядкованої послідовності m об’єктів (x_1, $x_2,\ldots,x_m$) може бути здійснений $n_1 * n_2 *\ldots* n_m$способами.

Наприклад, скільки може бути різних комбінацій випадання граней коли підкидують дві гральні кісті (гральна кість – це кубик, на гранях якого нанесені числа 1, 2, 3, 4, 5, 6)? На першій кісті може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6, тобто всього буде 6 варіантів. Так само й на другій кісті. Отримуємо 6×6 = 36 способів.

Припустимо, що певний шифр містить дві літери українського алфавіту, за якими йдуть три цифри. Тоді існує 33 способи вибору кожної літери та 10 способів вибору кожної цифри. Таким чином, загальна кількість можливих шифрів складатиме:33 × 33 × 10 × 10 × 10 = 1089000.

З міста А у місто В йде 5 доріг, а з міста В у місто С – 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста А до міста С? Щоби проїхати з А до С, треба проїхати з А до В та з В до С, тому застосуємо правило добутку: 5×3 = 15.

Розглянемо основні комбінаторні об’єкти - розміщення та сполучення, - попередньо означивши важливе поняття вибірки.Нехай задано скінченну непорожню множину A = $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент x_1.

Крок 2. Із множини A чи з множини $A/\{x_1\}$вибирають якийсь елемент x_2.

…...

Крок r. Якщо$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ – елементи, які вибрані на перших r–1 кроках (r≥3), то на цьому кроці вибирають якийсь елемент x,із множини A чи множини $A/\{x_1,x_2,...,x_{n-1}\}$.Тоді елементи $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$утворюють вибірку обсягом r, або r-вибірку, з множини A.Вибірку називають впорядкованою, якщо задано порядок її елементів, а якщо порядок не задано, то – невпорядкованою.

Наприклад, з цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаємо трьохзначні числа 123, 431, 524,... і т.д. Це впорядковані трьохзначні вибірки, тому що 123 та 132 – різні числа. Інший **приклад**: з 20 учнів класу будемо обирати двох чергових. Будь-яка пара чергових є невпорядкована двохелементна вибірка, тому що порядок їх вибору не важливий.

Означення. Впорядковані r-вибірки з n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по r, а невпорядковані – сполученнями з n елементів по r. Розміщення з n елементів по n називається перестановкою. Використовують також поняття r-розміщення, r-сполучення та n-перестановки.

Розглянемо два способи вибору елементів. Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини А. Отже, один й той самий елемент із множини А може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називають вибірками з повтореннями.

У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини А. Це означає, що на кожному j-му кроці$(1 \le j \le k)$ вибирають елемент із множини $A/\{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\}$, і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають вибірками без повторень. **Наприклад**, задано множину A = {a, b, c}, тобто n=3.

Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто r = 2: (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b);

Розміщення з повтореннями з трьох елементів по два: (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c);

Сполучення без повторень із трьох елементів по два:(a,b), (a,c), (b,c);

Сполучення з повтореннями з трьох елементів по два: (a,b), (a,c), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c).

Обчислення кількості розміщень і сполучень

Розміщення

Кількість усіх розміщень без повторень з n елементів по r позначають якA_n^rабо A(n,r), де r і n – невід'ємні цілі числа, причому r≤n. Справджується рівність $A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Доведення. Кожне r-розміщення є впорядкованою послідовністю завдовжки r, члени якої – по парно різні й вибираються з n-елементної множини. Тоді перший член цієї послідовності може бути вибраний n способами, після кожного вибору першого члена послідовності другий –$(n-1)$способами і т.д. Відповідно після кожного вибору першого, другого і т.д., аж до $(r-1)$-го членів послідовності r-й член може бути вибраний $n-(r-1) = n-r+1$ способами, звідки за узагальненим правилом добутку дістаємо наведену вище формулу.

Знайдемо, на приклад, число розміщень з 7 по 3. Тут$n = 7, n-r+1 = 5.$ Значить$A_7^3 = 7 * 6 * 5 = 210.$ Відмітимо, що верхній індекс показує яку кількість співмножників потрібно взяти у добутку.

Множину r-розміщень з n елементів можна розбити на два класи так, щоб розміщення одного з них не містили деякого фіксованого елемента початкової множини, а всі розміщення іншого класу обов'язково його містили. Очевидно, перший клас складається з A_{n-1}^rрозміщень, а другий – з rA_{n-1}^{r-1}, оскільки фіксований елемент може займати одне з r положень у кожному зA_{n-1}^{r-1} розміщень. Отже, рекурентна формула має вигляд: $A_n^r = (A_{n-1}^r) + A_{n-1}^{r-1}$,де $A_k^0 = 1$ (не має комбінаторного значення); $A_k^1 = k, \forall k; A_k^s = 0$при k<s.

Наприклад, на п'яти картках написані числа 1, 2, 3, 4, 5. Скільки різних трьохзначних чисел можна з них скласти? Трьохзначні числа представляють собою трьохелементі вибірки з п'яти цифр, причому, вибірки впорядковані, оскільки порядок цифр в числі є важливим. Відповідно цих чисел буде стільки, скільки існує з п'яти елементів по 3:$A_5^3 = 5 * 4 * 3 = 60$.

Кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\tilde{A}_n^r$або $\tilde{A}(n, r)$, де r і n – невід'ємні цілі числа.

Доведення. Кожне з шуканих розміщень є впорядкованою послідовністю завдовжки r,причому кожний член цієї послідовності може бути вибраний будь-яким з n способів, звідки за узагальненим правилом добутку отримуємо шукану формулу$\tilde{A}_n^r = n^r$

Наприклад, скільки "слів" з чотирьох літер можна скласти з літер "М" та "А"?Складемо декілька таких "слів": ММMA, MAMA, MAAA ... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється, порядок елементів у виборці є суттєвим. Значить, це – розміщення з повторенням з 2-х літер "М" та "А" по 4 літери:$\tilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Інший приклад: вздовж дороги стоять 6 світлофорів. Скільки може бути різних комбінацій їх сигналів, якщо кожний світлофор має 3 стани: "червоний", "жовтий","зелений"? Випишемо декілька комбінацій: ЧЧЧЖЗЗ, ЗЗЗЗЗЗ, ЧЖЗЧЖЗ,... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється і порядок елементів є суттєвим (якщо, наприклад, у вибірці ЧЖЗЧЖЗ замінити місцями Ч та Ж, то ситуація на дорозі стане іншою). Тому застосовуємо формулу розміщень з повтореннями з 3 по 6:$\tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729$.

Сполучення

Кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r позначають як або$C(n, r)$, де r і n – невід'ємні цілі числа, причому r≤n. Щоб знайтиC_n^r ,задамося питанням, скільки r-розміщень можна утворити з кожного r-сполучення. Очевидно, що r!. Тому шукане число, буде в r! разів меншим, ніж число r-розміщень з n елементів. Справджується рівність:$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. .

Наприклад, потрібно скласти всі сполучення з трьох літер A, B, C по дві літери. Це будуть AB, AC, BC. Перевіримо це за формулою:$C_3^2 = \frac{3*2}{1*2} = 3$.

З 20 учнів потрібно обрати двох чергових. Скількома способами це можна зробити? Потрібно обрати двох людей з 20. Ясно, що від порядку вибору нічого не залежить, тобто Іваненко-Петренко та Петренко-Іваненко – це одна й та сама пара чергових. Відповідно, це буде сполучення з 20 по 2:$C_{20}^2 = \frac{20*19}{1*2} = 190$.

Скількома способами можна групу з 15 студентів розбити на дві групи так, щоби в одній групі було 4, а в іншій – 11 людей? Щоб це зробити, достатньо вибрати 4 людини з 15, а решта самі утворять іншу групу. А обрати 4 людини з 15 можнаC_{15}^4 способами. Цю задачу можна розв'язати інакше: з 15 студентів обрати 11, а решта 4 утворять другу групу. Це можна зробитиC_{15}^{11}способами. Отримуємо ту ж саму відповідь і виникає підозра, що$C_{15}^{11} = C_{15}^4$. Це дійсно так. Сполучення мають властивість:$C_n^r = C_n^{n-r}$.В цьому легко переконатись: $C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^{n-r}$.

Кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по r позначають як або$\tilde{C}(n, r)$, де r і n – невід'ємні цілі числа.

Доведення рівності $\tilde{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \tilde{C}_{n+r-1}^r$ Кожному сполученню поставимо у відповідність рядок, в якому всі елементи заданого сполучення закодовано одиницями, причому різні класи елементів розділяються нулем (навіть тоді, коли елементи яких-небудь класів не ввійшли в сполучення).Наприклад, для множини A = {a, b, c, d, e} 5-сполученню abbce відповідає рядок 101101001;5-сполученню bbbee – рядок 011100011: 7-сполученню aabbdde – рядок

11011001101.Очевидно, кожний рядок для r-сполучень з n елементів із повтореннями містить r одиниць і n–1 нулів, тобто це є перестановка з повтореннями з r+n–1, яка містить r одиниць та n–1 нулів. Відповідність між множиною таких перестановок і множиною сполучень, що розглядається, є ін'єкцією. Отже, їхні потужності однакові, тобто шукане число r-сполучень збігається з числом перестановок з обмеженими повторенням з r+n–1 елементів.

Розглянемо наступний **приклад**. У хлібному відділі магазину є буханки білого та чорного хлібу. Скількома способами можна купити 6 буханок хлібу? Позначаючи буханки білого та чорного хлібу літерами Б та Ч, складемо декілька вибірок: БББЧЧЧ, БЧБЧБЧ,БББББЧ... Склад змінюється від вибірки до вибірки, значить це вже не перестановки; порядок елементів несуттєвий – це сполучення з повторенням з 2 по 6:$\tilde{C}_{2}^{6} = \tilde{C}_{2+6-1}^{6} = \tilde{C}_{7}^{6} = 7$.Зробимо перевірку та випишемо всі варіанти покупок: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ,БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Їх дійсно 7.

Перестановки

Кількість різних перестановок позначають як P_n.Формулу для P_n одержують із формули для$A_{n}^{r} = n!$.

Наприклад, потрібно знайти кількість способів складання 7 книжок у стопку. Кожна стопка буде відрізнятись від іншої порядком слідування книжок. Тому це буде перестановка з семи елементів $P_7 = 7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число$n_j (j = 1, \ldots, k)$– кількість елементів j-го типу.Очевидно, що$n_1 + \ldots + n_k = n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають перестановками з повтореннями. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, \ldots, n_k)$.Щоб знайти явний вираз для$P_n(n_1, \ldots, n_k)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними. Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати з узятої однієї перестановки, дорівнює $n_1! * n_2!! * \ldots * n_k!$. Якщо зробити це для кожної перестановки, то одержимо n! перестановок. Отже:$P_n(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * \ldots * n_k!.}$ **Наприклад**, знайдемо кількість слів, які можна утворити, переставляючи літери слова СОНЦЕ. Оскільки кожна літера тут не повторюється, то можна утворити P_5 = 5! = 120 слів. Тепер знайдемо теж саме для слова МАТЕМАТИКА. У цьому слові є повторні входження літер, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!*3!*2!*1!*1!*1!} = 151200$.

Скількома способами можна розставити білі фігури (2 ладі, 2 коня, 2 слона, ферзя та короля) на першій лінії шахової дошки? Перша лінія шахової дошки являє собою 8 клітин, на яких і потрібно розташувати ці 8 фігур. Різні варіанти будуть відрізнятися тільки порядком фігур, тому, це буде перестановка з повторенням $P_8(2,2,2,1,1) = 5040$.