FDU 高等线性代数 Homework 01

Due: Sept. 9, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

设 n 为给定的正整数，求 n 阶矩阵 A 的所有特征值和特征向量.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- **Insight:**
  实际上，我们观察到 A 是一个 **Frobenius 友型**，
  故其特征多项式可以一眼看出来: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1$.
  因此其特征值为 $\lambda_k = \omega^k$，对应的特征向量为 $[1, \omega^k, \cdots, \omega^{(n-2)k}, \omega^{(n-1)k}]^{\mathrm{T}}$，
  其中 $\omega = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$，$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

  一般的 **Frobenius 友型**形如

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

  可以证明其极小多项式 $m_A(t)$ 和特征多项式 $p_A(t)$ 均为 $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0$.
  特别地，取 A 为第一种形式的 Frobenius 友型，则我们有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \lambda.$$

  这说明，若 λ 为 A 的特征值 (即满足 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$),
  则 $[1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-1}]^{\mathrm{T}}$ 为对应的特征向量.

Solution:
(我们这里给出最基础的做法，不使用 Frobenius 友型的结论)
方阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix}_n \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + 1 \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \lambda^n - 1. \end{aligned}$$

令 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1 = 0$，可解得 n 个根为

$$\lambda_k = \sqrt[n]{1}\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)\right\} = \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right)\right)^k \ \ (k=0,1,\ldots,n-1).$$

若记 $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$，则我们可以将方阵 A 的 n 个特征值写为

$$\lambda_k = \omega^k \ \ (k=0,1,\ldots,n-1).$$

求解 λ_k 对应的特征向量就是要求解如下方程组:

$$(\lambda_k I_n - A)x = \begin{bmatrix} \lambda_k & -1 & & & \\ & \lambda_k & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & -1 \\ -1 & & & & \lambda_k \end{bmatrix} x = 0_n$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x_2 = \lambda_k x_1 \\ x_3 = \lambda_k x_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda_k x_{n-1} \\ x_1 = \lambda_k x_n. \end{cases}$$

我们可以取 $\lambda_k = \omega^k\ (k=0,1,\ldots,n-1)$ 对应的特征向量 $x^{(k)}$ 为

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{bmatrix}.$$

Problem 2

试证明复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ 的充要条件是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0.$$

- **Lemma 1:**
  设 $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$，则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k &= 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} \\ &= \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \quad (\text{note that } \omega^n = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\cdot n\right) = \exp(2\pi\mathrm{i}) = 1) \\ &= \frac{1-1}{1-\omega} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- **Lemma 2 (两个非零复数的乘积也不是零):**
  若 $z_1z_2 = 0$，则 z_1 和 z_2 至少有一个是零.
  - 当 $z_1 = 0$ 时，结论成立.
  - 当 $z_1 \neq 0$ 时，可知逆元 z_1^{-1} 存在，我们有 $z_2 = z_2(z_1z_1^{-1}) = z_1^{-1}(z_1z_2) = z_1^{-1}\cdot 0 = 0$.

Solution:
若 z_1, z_2, z_3 中有任意两个是相等的，
则可根据 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 0$ 推出 $z_1 = z_2 = z_3 = 0$，
进而有 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0$.
此时命题成立.

下证 z_1, z_2, z_3 互不相同时命题成立.

- **① 必要性:**

  若 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$，则 z_1, z_2, z_3 三点确定了一个正三角形.
  记 $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$，则我们有

$$\begin{cases} z_2 - z_3 = (z_2 - z_1)\omega \\ z_1 - z_3 = (z_2 - z_1)\omega^2, \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}(z_1 - z_3)^2 \\ &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2(1 + \omega^2 + \omega^4) \quad (\text{note that } \omega^3 = 1) \\ &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2(1 + \omega^2 + \omega) \quad (\text{utilize Lemma 1}) \\ &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- **② 充分性:**
  根据 **Lemma 1** 我们有 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$，即有 $\omega^2 + \omega = -1$.
  若 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$，则我们有

  $$\begin{aligned} 0 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 \quad (\text{note that } \omega^3 = 1 \text{ and } \omega^2 + \omega = -1) \\ &= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + (\omega^2 + \omega) z_1 z_2 + (\omega^2 + \omega) z_2 z_3 + (\omega^2 + \omega) z_3 z_1 \\ &= (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3). \end{aligned}$$

  根据 **Lemma 2** 可知 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3$ 和 $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3$ 至少有一个是零.
  不失一般性，设 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$，则左右同乘 $(\omega^2 - \omega)$ 可得

  $$\begin{aligned} 0 &= (\omega^2 - \omega)(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \\ &= (\omega^2 - \omega) z_1 + (\omega^3 - \omega^2) z_2 + (\omega^4 - \omega^3) z_3 \\ &= (\omega^2 - \omega) z_1 + (1 - \omega^2) z_2 + (\omega - 1) z_3 \\ &= (\omega - 1)(z_3 - z_1) + (\omega^2 - 1)(z_1 - z_2) \\ &= (\omega - 1)((z_3 - z_1) + (\omega + 1)(z_1 - z_2)) \\ &= (\omega - 1)((z_3 - z_2) + \omega(z_1 - z_2)). \end{aligned}$$

  由于 $\omega - 1 = \exp(2\pi\mathrm{i}/3) - 1 =\neq 0$，故根据 **Lemma 2** 可知

  $$\begin{cases} (z_3 - z_1) + (\omega + 1)(z_1 - z_2) = 0 \\ (z_3 - z_2) + \omega(z_1 - z_2) = 0. \end{cases}$$

  注意到

  $$\begin{cases} |\omega + 1| = |-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + 1| = 1 \\ |\omega| = |\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\right)| = 1, \end{cases}$$

  于是我们有

  $$\begin{aligned} |z_3 - z_1| &= |-(\omega + 1)(z_2 - z_1)| \\ &= |\omega + 1| \cdot |z_2 - z_1| \\ &= 1 \cdot |z_2 - z_1| \\ &= |z_2 - z_1| \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} |z_3 - z_2| &= |-\omega(z_2 - z_1)| \\ &= |\omega| \cdot |z_2 - z_1| \\ &= 1 \cdot |z_2 - z_1| \\ &= |z_2 - z_1|, \end{aligned}$$

  因此 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

综上所述，命题得证.
事实上，下列命题是等价的:

- $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$
- $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = \frac{1}{2}[(z_2 - z_1)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_1 - z_3)^2] = 0$
- $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ (其中 $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$)

(2025 补充习题)
已知 $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$，试求复数 z_3 使得 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Solution:
根据 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ 可知 z_1,z_2,z_3 在复平面中构成正三角形的顶点.
因此令 z_2-z_1 顺/逆时针旋转 $\pi/3$ 便可得到 z_3-z_1.
根据 $z_3-z_1=\exp(\pm\pi\mathrm{i}/3)(z_2-z_1)$ 可知

$$\begin{aligned}z_3&=z_1+\exp(\pm\pi\mathrm{i}/3)(z_2-z_1)\\&=1-\mathrm{i}+\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}-1+\mathrm{i})\\&=\frac{1}{2}(3\mp4\sqrt{3}+(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}).\end{aligned}$$

因此 z_3 有两个解:

- 一个是 $\frac{1}{2}(3-4\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\mathrm{i})$
- 一个是 $\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\mathrm{i})$

Problem 3

给定的正整数 m,n，记 $\omega=\exp(2\pi\mathrm{i}/m)$.
试证明对任何 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都有

$$A^m+B^m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^kB)^m.$$

- **Lemma (两个非零复数的乘积也不是零):**
  若 $z_1z_2=0$，则 z_1 和 z_2 至少有一个是零.
  - 当 $z_1=0$ 时，结论成立.
  - 当 $z_1\neq0$ 时，可知逆元 z_1^{-1} 存在，我们有 $z_2=z_2(z_1z_1^{-1})=z_1^{-1}(z_1z_2)=z_1^{-1}\cdot0=0$.

Solution:
注意到 A,B 不一定是可交换的 (即 $AB=BA$).
因此 $(A+B)^m$ 不能简单展开为 $\sum_{j=0}^m\binom{m}{j}A^{m-j}B^j$.

我们记 $(A+B)^m$ 的展开式中 $\binom{m}{j}$ 个由 $m-j$ 个 A 和 j 个 B 构成的项之和为 $\operatorname{term}(A,B,j)$.
显然我们有 $\operatorname{term}(A,\omega^kB,j)=\omega^{jk}\operatorname{term}(A,B,j)$ 成立.

因为有限求和是可以交换次序的，所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^kB)^m&=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{m}\operatorname{term}(A,\omega^kB,j)\right\}\\&=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{m}\omega^{jk}\operatorname{term}(A,B,j)\right\}\\&=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}\right)\operatorname{term}(A,B,j)\right\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

注意到 $\omega^m=1$ (即 ω 是 1 的一个 m 次复根).

- 当 j 为 m 的整数倍 (即 j 为 0 或 m) 时，我们有

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}=\sum_{k=0}^{m-1}1=m.$$

- 当 j 不为 m 的整数倍 (即 $j=1,\dots,m-1$) 时，我们有

$$\begin{aligned}\omega^j\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}&=\omega^j(1+\omega^j+\cdots+\omega^{(m-2)j}+\omega^{(m-1)j})\\&=\omega^j+\omega^{2j}+\cdots+\omega^{(m-1)j}+\omega^{mj}\quad(\text{note that }\omega^m=1)\\&=\omega^j+\omega^{2j}+\cdots+\omega^{(m-1)j}+1\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}.\end{aligned}$$

  于是有 $(\omega^j-1)\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}=0$ 成立.
  由于 $\omega^j-1=\exp\left(\frac{2j\pi\mathrm{i}}{m}\right)-1\neq0$，故根据 **Lemma** 可知 $\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}=0$.

综上所述，我们有

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}=\begin{cases}m, & \text{if } j=0,m\\ 0, & \text{if } j=1,\ldots,m-1.\end{cases}$$

将上述结果代入 (3.1) 式中我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^k B)^m&=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}\right)\text{term}(A,B,j)\right\}\\&=\frac{1}{m}(mA^m+mB^m)\\&=A^m+B^m.\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 4

> 以下内容均来自 **Complex Variables and Applications (9th Edition J. Brown, R. Churchill) Chaper 6**
>
> **(Complex Variables and Applications 第 74 节)**
> 若函数在简单闭围道 C 的内部除了有限多个奇点以外处处解析，则这些奇点必定是孤立奇点.
> 特殊地，有理函数 (即两个多项式函数的商) 的奇点总是孤立奇点，因为分母中的多项式函数仅有有限个零点.
>
> **(Complex Variables and Applications 第 75 节)**
> 若 z_0 是函数 f 的孤立奇点，则存在正数 $R>0$ 使得 f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中的任意一点 z 处解析
> 因此函数 f 关于 z_0 的 Laurent 级数展开式为
>
> $$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\\a_n&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\qquad(n=0,1,\ldots)\\b_n&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}z\qquad(n=1,2,\ldots),\end{aligned}$$
>
> 其中 C 为 $0<|z-z_0|<R$ 中任意围绕 z_0 的简单正向闭围道.
>
> 特别地，b_1 的表达式为
>
> $$b_1=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z.$$
>
> 我们称其为函数 f 在孤立奇点 z_0 处的**留数** (residue)，记为 $\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$，于是我们有
>
> $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z).$$
>
> **(Cauchy 留数定理, Complex Variables and Applications 第 76 节)**
> 设 C 为正向简单闭围道.
> 若函数 f 在 C 及其内部除了有限多个奇点 z_k $(k=1,\ldots,n)$ 以外处处解析 (自然是孤立奇点),
> 则我们有
>
> $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z).$$
>
> 即 f 沿 C 的积分值 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 为其内部有限个奇点处的留数之和的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍.
>
> 下面的定理仅仅涉及一个留数，故运用起来有时比 Cauchy 留数定理更加方便.
> **(Complex Variables and Applications 第 77 节 定理)**
> 若函数 f 在有限平面上除了有限多个奇点以外处处解析，且这些奇点落在一条正向简单闭围道 C 的内部,
> 则我们有
>
> $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

计算复积分:

$$\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2-3z+2}\mathrm{d}z$$

记围道 C 为 $|z|=4$ 确定的正向圆周 (即逆时针方向).
注意到多项式函数 $p(z)=z^2-3z+2$ 在整个复平面都是解析的，且仅有 $z=1,2$ 两个零点.
因此 $f(z)=1/p(z)$ 在复平面上仅有 $z=1,2$ 两个孤立奇点，且都落在围道 C 的内部.

Solution 1:
最直接的做法是计算 $f(z)$ 的留数.

- 计算 $f(z)$ 在 $z=1$ 附近的 Laurent 级数展开:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2-3z+2} \quad (\text{suppose that } |z-1|<1) \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad (\text{denote } w:=z-1) \\
&= \frac{1}{w(w-1)} \quad \left(\text{note that } \frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n, \text{ whenever } |w|<1\right) \\
&= -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} w^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} w^{n-1}.
\end{aligned}$$

  其 $1/w$ 项的系数为 -1，故 $f(z)$ 在 $z=1$ 处的留数 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=-1$.

  > 事实上，由于 $z=1$ 是 $f(z)$ 的简单奇点，我们可通过极限计算对应的留数:
  >
  > $$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1-2}=-1.$$

- 计算 $f(z)$ 在 $z=2$ 附近的 Laurent 级数展开:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2-3z+2} \quad (\text{suppose that } |z-2|<1) \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad (\text{denote } w:=z-2) \\
&= \frac{1}{(w+1)w} \quad \left(\text{note that } \frac{1}{1+w}=\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n, \text{ whenever } |w|<1\right) \\
&= \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^{n-1}.
\end{aligned}$$

  其 $1/w$ 项的系数为 1，故 $f(z)$ 在 $z=2$ 处的留数 $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=1$.

  > 事实上，由于 $z=2$ 是 $f(z)$ 的简单奇点，我们可通过极限计算对应的留数:
  >
  > $$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2-1}=1.$$

根据 Cauchy 留数定理可知

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=4} f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\cdot(-1+1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Solution 2:
另一种方法是计算 $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ 在 $z=0$ 处的留数.
定义 $g(z):=\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$，则我们有

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^2}{1-3z+2z^2} \\
&= \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.
\end{aligned}
$$

根据 **Lemma** 可知 $g(z)$ 的 Laurent 级数中 $1/z$ 项的系数即为所求留数.
注意到 $g(z)$ 在 $z=0$ 处是解析的，其 Laurent 级数展开即为 Taylor 级数展开，
因此没有 $1/z$ 项，于是有

$$
\operatorname*{Res}_{z=0} \left\{ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right\} = 0.
$$

因此 f 在 C 上的积分为

$$
\oint_C f(z) \mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{z^2-3z+2} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \left\{ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right\} = 2\pi \mathrm{i} \cdot 0 = 0.
$$

Problem 5

试证明任何复方阵都可以在复数域上相似上三角化，
即对于任意复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 总存在非奇异阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为上三角矩阵.

Solution:
当 $n=1$ 时，命题显然成立.
当 $n \geq 2$ 时，假设对于所有维数小于 n 的复方阵，上述命题都成立.
下面对 n 维复方阵证明该命题.

设 (λ_1, x_1) 是 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个特征对，即满足 $A_1 x_1 = x_1 \lambda_1$.
将 x_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $x_1, v_2, \dots, v_n$，
定义非奇异阵 $P_1 := [x_1, v_2, \dots, v_n] = [x_1, V]$，则我们有

$$
\begin{aligned}
AP_1 &= A[x_1, V] \\
&= [Ax_1, AV] \\
&= [x_1\lambda_1, AV] \\
&= [x_1, V][\lambda_1 e_1, P_1^{-1}AV] \quad \left(\text{denote } P_1^{-1}AV = \begin{bmatrix} * \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times(n-1)}\right) \\
&= [x_1, V] \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_2 \end{bmatrix} \\
&= P_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

根据归纳假设可知，存在非奇异阵 $\widetilde{P}_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得 $T_2 := \widetilde{P}_2^{-1} A_2 \widetilde{P}_2$ 为上三角阵.
定义 $P_2 := 1 \oplus \widetilde{P}_2$ 和 $P = P_1 P_2$ 可知

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P_2^{-1} P_1^{-1} A P_1 P_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \\ & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & P_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & P_2^{-1} A_2 P_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & T_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此 $T := P^{-1}AP$ 为上三角阵.
根据数学归纳法，命题得证.

Problem 6 (optional)

设 n 为正整数.
已知 n 次系数多项式 $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 的系数满足 $a_0 > \cdots > a_n > 0$
证明: $f(z)$ 的所有复根都在单位圆外.

- **Hint:** 考察 $g(z)=(1-z)f(z)$.

Solution:
当 $|z|\le 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
|g(z)| &= |(1-z)f(z)| \\
&= \left|(1-z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \\
&= \left|a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})z^k-a_nz^{n+1}\right| \quad (\text{triangle inequality}) \\
&\ge |a_0|-\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})z^k-a_nz^{n+1}\right| \quad (\text{triangle inequality and } |z_1z_2|=|z_1||z_2| \text{ for all } z_1,z_2\in\mathbb{C}) \\
&\ge |a_0|-\sum_{k=1}^{n}|a_k-a_{k-1}||z|^k-|a_n||z|^{n+1} \quad (\text{note that } a_0>\cdots>a_n>0) \\
&= a_0-\sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)|z|^k-a_n|z|^{n+1} \quad (\text{note that } |z|\le 1) \\
&\ge a_0-\sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)\cdot 1-a_n\cdot 1 \\
&= a_0-(a_0-a_n)-a_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

上述三个不等号同时取等的充要条件是:

- ① $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})z^k-a_nz^{n+1}$ 与 a_0 反方向 (即与 1 反方向)
(注意 a_0 是正实数，而 $a_k-a_{k-1}<0$ $(k=1,\dots,n)$)
- ② $z,z^2,\dots,z^{n+1}$ 同方向
- ③ $|z|=1$

容易验证这样的 z 只能是 $z=\exp(2m\pi\mathrm{i})=1\ \ (m\in\mathbb{Z})$.
因此当 $|z|\le 1$ 且 $z\ne 1$ 时，我们都有 $|g(z)|>0$ 成立，表明这样的 z 不是 $g(z)$ 的根.
于是 $g(z)$ 的根要么是 $z=1$，要么满足 $|z|>1$.

注意到 $g(z)=(1-z)f(z)$ 的复根除了额外的 1 以外，其余复根都与 $f(z)$ 的相同.
而根据 $f(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k>0$ 可知 $z=1$ 不是 $f(z)$ 的根.
因此 $f(z)$ 的所有根都满足 $|z|>1$，即都落在单位圆周 $|z|=1$ 的外部.

Problem 7 (optional)

证明下面的函数不是解析函数，但在复平面上处处满足 Cauchy–Riemann 方程:

$$f(z)=\begin{cases}\exp\left(-z^{-4}\right), & z\ne 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

- **(可导的必要条件, Complex Variables and Applications 第 21 节)**
设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=(x_0,y_0)$ 处可导,
则 u,v 在 (x_0,y_0) 处可偏导，且其一阶偏导数满足 **Cauchy–Riemann 方程**

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0).\end{cases}$$

此时导数 $f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0)$.

(极坐标形式)
设函数 $f(z)=u(\rho,\theta)+\mathrm{i}v(\rho,\theta)$ 在点 $z_0=\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 处可导,
则 u,v 在 (ρ_0,θ_0) 处可偏导，且其一阶偏导数满足 **Cauchy–Riemann 方程**

$$\begin{cases}\rho u_\rho(\rho_0,\theta_0)=v_\theta(\rho_0,\theta_0)\\ u_\theta(\rho_0,\theta_0)=-\rho v_\rho(\rho_0,\theta_0).\end{cases}$$

此时导数 $f'(z_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}(u_\rho(\rho_0,\theta_0)+\mathrm{i}v_\rho(\rho_0,\theta_0))$.

Solution:
当 $z=0$ 时:

- 计算 $u_x(0,0)$ 和 $v_x(0,0)$:
  (取 $z=h$，从实轴方向逼近 0)

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}\{\exp\left(-h^{-4}\right)\}-0}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\exp\left(-h^{-4}\right)-0}{h-0}=0$$
$$v_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Im}\{\exp\left(-h^{-4}\right)\}-0}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h-0}=0.$$

- 计算 $u_y(0,0)$ 和 $v_y(0,0)$:
  (取 $z=\mathrm{i}h$，从虚轴方向逼近 0)

$$u_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}\{\exp\left(-(\mathrm{i}h)^{-4}\right)\}-0}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\exp\left(-h^{-4}\right)-0}{h-0}=0$$
$$v_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Im}\{\exp\left(-(\mathrm{i}h)^{-4}\right)\}-0}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h-0}=0.$$

因此我们有

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)=0\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

即 f 在 $z=0$ 处满足 Cauchy–Riemann 方程.

当 $z\neq 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}f(z)&=\exp\left(-z^{-4}\right)\\&=\exp\left(-\rho^{-4}e^{-4\mathrm{i}\theta}\right)\\&=\exp\left(-\rho^{-4}(\cos(-4\theta)+\mathrm{i}\sin(-4\theta))\right)\\&=\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\cdot\exp\left(\mathrm{i}\cdot\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\right)\right)\\&=\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\cdot\left(\cos\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\right)\right)\\&=u(\rho,\theta)+\mathrm{i}v(\rho,\theta),\end{aligned}$$

其中我们记

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\cos\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\right)=g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))\\ v(\rho,\theta)&=\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\sin\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\right)=g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))\end{aligned}$$
$$\text{where }\begin{cases}g(\rho,\theta)=\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\\ h(\rho,\theta)=-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_\rho(\rho,\theta)=4\rho^{-5}\cos(-4\theta)g(\rho,\theta)\\ g_\theta(\rho,\theta)=-4\rho^{-4}\sin(-4\theta)g(\rho,\theta)\\ h_\rho(\rho,\theta)=4\rho^{-5}\sin(-4\theta)\\ h_\theta(\rho,\theta)=4\rho^{-4}\cos(-4\theta)\end{cases}$$

经计算可得

$$\begin{aligned}u_\rho(\rho,\theta)&=g_\rho(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)[-\sin(h(\rho,\theta))h_\rho(\rho,\theta)]\\&=4\rho^{-5}\cos(-4\theta)g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))-g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))4\rho^{-5}\sin(-4\theta)\\&=4\rho^{-5}g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta)-4\theta)\\ \hline u_\theta(\rho,\theta)&=g_\theta(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)[-\sin(h(\rho,\theta))h_\theta(\rho,\theta)]\\&=-4\rho^{-4}\sin(-4\theta)g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))-g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))4\rho^{-4}\cos(-4\theta)\\&=-4\rho^{-4}g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta)-4\theta)\\ \hline v_\rho(\rho,\theta)&=g_\rho(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))h_\rho(\rho,\theta)\\&=4\rho^{-5}\cos(-4\theta)g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))4\rho^{-5}\sin(-4\theta)\\&=4\rho^{-5}g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta)-4\theta)\\ \hline v_\theta(\rho,\theta)&=g_\theta(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))h_\theta(\rho,\theta)\\&=-4\rho^{-4}\sin(-4\theta)g(\rho,\theta)\sin(h(\rho,\theta))+g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta))4\rho^{-4}\cos(-4\theta)\\&=4\rho^{-4}g(\rho,\theta)\cos(h(\rho,\theta)-4\theta).\end{aligned}$$

因此对于任意 $\rho>0$ 和 $\theta\in\mathbb{R}$ 我们都有

$$\begin{cases}\rho u_\rho(\rho,\theta)=v_\theta(\rho,\theta)\\ u_\theta(\rho,\theta)=-\rho v_\rho(\rho,\theta).\end{cases}$$

因此 f 在任意 $z\neq 0$ 处都满足 Cauchy–Riemann 方程.
综上所述，f 在复平面上处处满足 Cauchy–Riemann 方程.

解析函数要求在定义域内处处可导，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可导.
我们考虑 $|f(z)|$ 在 $z\to 0$ 时的极限行为:

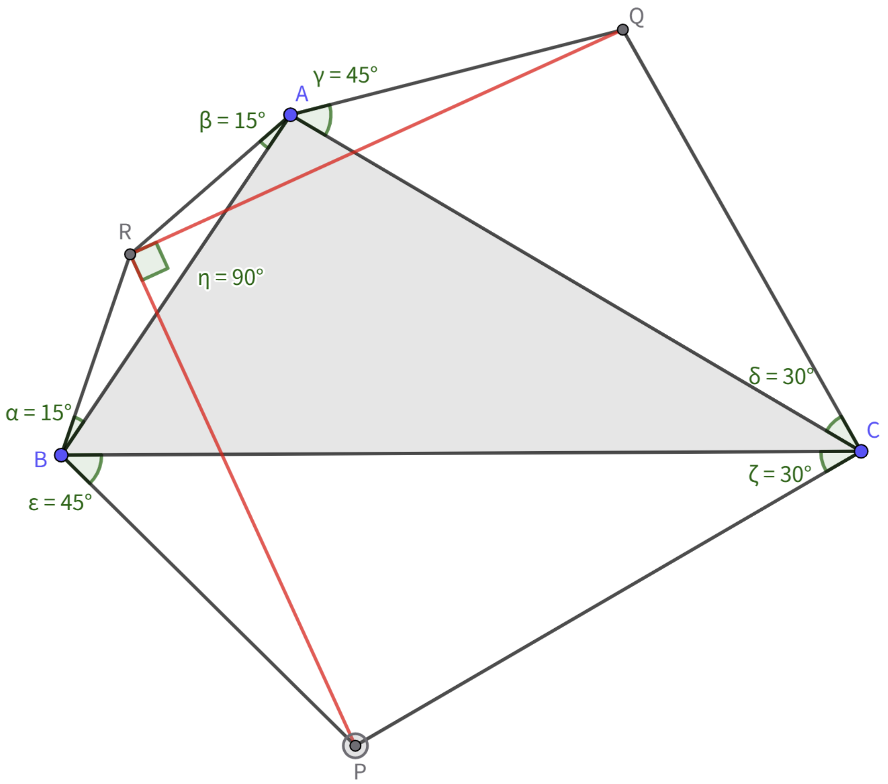
$$\begin{aligned}|f(z)| &= |\exp(-z^{-4})| \\ &= \left|\exp\left(-\rho^{-4}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right)\right| \\ &= \left|\exp\left(-\rho^{-4}\cos(-4\theta)\right)\exp\left(-\rho^{-4}\sin(-4\theta)\mathrm{i}\right)\right| \\ &= \exp\left(-\rho^{-4}\cos(4\theta)\right).\end{aligned}$$

- 若 $\cos(4\theta)>0$，则当 $\rho\to 0_+$ 时有 $|f(z)|\to 0$.
- 若 $\cos(4\theta)=0$，则 $|f(z)|=1\ (\forall\,\rho\geq 0)$.
- 若 $\cos(4\theta)<0$，则当 $\rho\to 0_+$ 时有 $|f(z)|\to\infty$.

因此 f 在 $z=0$ 处不连续，更谈不上在 $z=0$ 处复可微了.
故 f 不是解析函数.

Problem 8 (optional)

对于 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 内的任意三角形 $\triangle ABC$
向外作 $\angle ABR, \angle BCP, \angle CAQ$ 使得 $\begin{cases}\angle CBP=\angle CAQ=45^\circ \\ \angle BCP=\angle ACQ=30^\circ \\ \angle ABR=\angle BAR=15^\circ\end{cases}$.
试利用复数证明 $\angle QRP=90^\circ$ 且 $|QR|=|RP|$.



Solution:
记 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OR},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$ 的复数表示为 a,b,c,z_1,z_2,z_3.

根据 $1-2(\sin(\frac{\pi}{12}))^2=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可解得 $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，进而有 $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
根据正弦定理可知

$$\begin{aligned}\frac{|BR|}{|BA|}&=\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{\sin(\frac{\pi}{12})}{\sin(\frac{5\pi}{6})}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{|BP|}{|BC|}&=\frac{|AQ|}{|AC|}=\frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{7\pi}{12})}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

记 $\omega=\exp(\pi\mathrm{i}/12)$，则我们有

$$\begin{cases} z_1 - b = \overrightarrow{BR} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega\overrightarrow{BA} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega(a-b) \\ z_1 - a = \overrightarrow{AR} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}\overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}(b-a) \\ z_2 - b = \overrightarrow{BP} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3(c-b) \\ z_3 - a = \overrightarrow{AQ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3(c-a) \end{cases} \text{where } \begin{cases} \omega = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} \\ \bar{\omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} \\ \bar{\omega}^3 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ \omega^3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}. \end{cases}$$

要证明 "$\angle QRP = 90^\circ$ 且 $|QR| = |RP|$"，即要证 $\overrightarrow{RQ} = \exp(\pi\mathrm{i}/2)\overrightarrow{RP}$，
也就等价于证明 $z_3 - z_1 = \mathrm{i}(z_2 - z_1)$.

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 - i(z_2 - z_1) &= ((z_3 - a) - (z_1 - a)) - \mathrm{i}((z_2 - b) - (z_1 - b)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3(c-a) - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}(b-a)\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3(c-b) - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega(a-b)\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}(\omega^3(c-a) - \bar{\omega}(b-a) - \mathrm{i}\bar{\omega}^3(c-b) + \mathrm{i}\omega(a-b)) \end{aligned}$$

因此要证明 $z_3 - z_1 - \mathrm{i}(z_2 - z_1) = 0$，等价于证明 $\omega^3(c-a) - \bar{\omega}(b-a) - \mathrm{i}\bar{\omega}^3(c-b) + \mathrm{i}\omega(a-b) = 0$，
也就等价于证明 a, b, c 项的系数分别为 0:

- a 的系数为:

$$\begin{aligned} -\omega^3 + \bar{\omega} + \mathrm{i}\omega &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- b 的系数为:

$$\begin{aligned} -\bar{\omega} + \mathrm{i}\bar{\omega}^3 - \mathrm{i}\omega &= -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- c 的系数为:

$$\begin{aligned} \omega^3 - \mathrm{i}\bar{\omega}^3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

命题得证.

Problem 9

记 $z = x + \mathrm{i}y\ (x, y \in \mathbb{R})$.
关于复变量 z 的函数 f 可以视为关于独立实变量 x, y 的二元函数，
而 x, y 与 $z, \bar{z}$ 可以互相线性表示，因此函数 f 从形式上可视为关于独立变量 $z, \bar{z}$ 的二元函数.
试证明在此意义下 Cauchy–Riemann 方程可表示为 $\partial f/\partial\bar{z} = 0$.

Solution:
注意到 x, y 与 $z, \bar{z}$ 可以互相线性表示

$$\begin{cases} z = x + \mathrm{i}y \\ \bar{z} = x - \mathrm{i}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \bar{z}). \end{cases}$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\mathrm{d}\bar{z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}\bar{z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\bar{z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

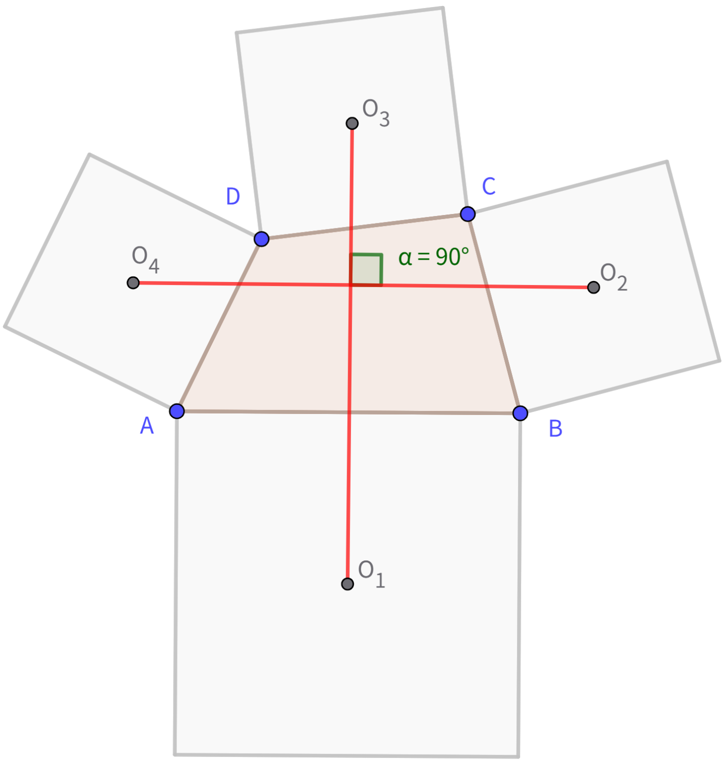
记 $f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}(u_x + \mathrm{i}v_x + \mathrm{i}(u_y + \mathrm{i}v_y)) \\
&= \frac{1}{2}(u_x - v_y + \mathrm{i}(v_x + u_y)).
\end{aligned}
$$

因此 Cauchy–Riemann 方程 $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ 就等价于 $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

Problem 10 (optional)

利用复数证明 **Van Aubel 定理**:
在 Euclid 平面内，由凸四边形 $ABCD$ 的各边分别向外作正方形，
其中心依次记为 O_1, O_2, O_3, O_4，那么 $O_1O_3 \perp O_2O_4$，且 $|O_1O_3| = |O_2O_4|$.



Solution:
设 $A, B, C, D, O_1, O_2, O_3, O_4$ 对应的复数为 $z_1, z_2, z_3, z_4, v_1, v_2, v_3, v_4$，
记 $\omega = \exp(\pi\mathrm{i}/4)$，则我们有

$$
\begin{aligned}
v_1 - z_2 &= \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) \\
v_2 - z_3 &= \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_2 - z_3) \\
v_3 - z_4 &= \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_3 - z_4) \\
v_4 - z_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_4 - z_1).
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
v_3 - v_1 &= \left(z_4 + \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_3 - z_4)\right) - \left(z_2 + \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}((-z_1 - z_2 + z_3 + z_4) + \mathrm{i}(-z_1 + z_2 + z_3 - z_4)) \\
v_4 - v_2 &= \left(z_1 + \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_4 - z_1)\right) - \left(z_3 + \frac{\omega}{\sqrt{2}}(z_2 - z_3)\right) \\
&= \frac{1}{2}((z_1 - z_2 - z_3 + z_4) + \mathrm{i}(-z_1 - z_2 + z_3 + z_4)).
\end{aligned}
$$

于是我们有 $v_4 - v_2 = \mathrm{i}(v_3 - v_1)$ 成立.
注意到 $\mathrm{i} = \exp(\pi\mathrm{i}/2)$，故 O_2O_4 是由 O_1O_3 顺时针旋转 90° 得到的，
即有 $O_1O_3 \perp O_2O_4$ 和 $|O_1O_3| = |O_2O_4|$ 成立.

Problem 11 (optional)

定义:

$$
\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.
$$

试证明 $\mathbb{H}$ 对矩阵加法和乘法封闭，并建立这两种运算所满足的运算律.

- **Insight:**
  作为 4 维实代数，$\mathbb{H}$ 与 Hamilton 的四元数代数同构.
  换言之，它就是四元数代数 $\{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$的一个 2×2 复矩阵表示，
  其中 $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ 满足 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$.
  根据邵老师课上的内容我们知道，四元数代数亏损了乘法交换律，因此不是数域.

Solution:
定义:

$$
M(\alpha, \beta) := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}).
$$

- 对矩阵加法封闭.
  对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$，我们都有

$$
\begin{aligned}
M(\alpha_1, \beta_1) + M(\alpha_2, \beta_2) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ -\overline{\beta_1 + \beta_2} & \overline{\alpha_1 + \alpha_2} \end{bmatrix} \\
&= M(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \in \mathbb{H}.
\end{aligned}
$$

- 对矩阵乘法封闭.
  对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$，我们都有

$$
\begin{aligned}
M(\alpha_1, \beta_1) \cdot M(\alpha_2, \beta_2) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar{\beta}_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar{\alpha}_2 \\ -\bar{\beta}_1\alpha_2 - \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 & -\bar{\beta}_1\beta_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \\
&= M(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar{\beta}_2, \alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar{\alpha}_2) \in \mathbb{H}.
\end{aligned}
$$

根据矩阵加法和乘法的性质可知，$\mathbb{H}$ 几乎满足所有的运算律，唯独不满足乘法交换律.

- **(矩阵加法)** 对于任意 $M, M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{H}$ 我们有:
  - 封闭 (closed): $M_1 + M_2 \in \mathbb{H}$
  - 可结合 (associative): $(M_1 + M_2) + M_3 = M_1 + (M_2 + M_3)$
  - 可交换 (commutative): $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$
  - 单位元 (identity): $0_{2\times 2} \in \mathbb{H}$ such that $M + 0_{2\times 2} = M$
  - 逆元 (inverse): $\exists\, (-M) \in \mathbb{H}$ such that $M + (-M) = 0_{2\times 2}$
- **(矩阵乘法)** 对于任意 $M, M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{H}$ 我们有:
  - 封闭: $M_1 \cdot M_2 \in \mathbb{H}$
  - 可结合: $(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$
  - 单位元: $I_2 \in \mathbb{H}$ such that $M \cdot I_2 = M$
  - 逆元: 若 $\det(M) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$,
    则 $\exists\, M^{-1} = \dfrac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$ such that $M \cdot M^{-1} = I_2$

  通常不可交换: $M_1 \cdot M_2$ 通常不等于 $M_2 \cdot M_1$.

Problem 12

给定正整数 m, n, 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
试证明 $\mathrm{vec}(AXB) = (B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{vec}(X)$.

Solution:
我们首先证明此命题的一个简化版本.
设 $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in \mathbb{C}^n$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则 $a^{\mathrm{T}} X b = (b^{\mathrm{T}} \otimes a^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X)$.

$$\begin{aligned} (b^{\mathrm{T}} \otimes a^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) &= \begin{bmatrix} b_1 a^{\mathrm{T}} & b_2 a^{\mathrm{T}} & \cdots & b_n a^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j a^{\mathrm{T}} x_j \\ &= a^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a^{\mathrm{T}} X b. \end{aligned}$$

现将 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 记为

$$A = \begin{bmatrix} a_1^{\mathrm{T}} \\ a_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ a_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix},$$

则我们有

$$(B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{vec}(X) = \left[\begin{array}{c} b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}} \\ b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}} \\ \hline b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}} \\ b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots \\ \hline b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}} \\ b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}} \end{array}\right] \mathrm{vec}(X) = \left[\begin{array}{c} (b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ (b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ \vdots \\ (b_1^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ \hline (b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ (b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ \vdots \\ (b_2^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ \hline \vdots \\ \hline (b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_1^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ (b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_2^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \\ \vdots \\ (b_n^{\mathrm{T}} \otimes a_m^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_1^{\mathrm{T}} X b_1 \\ a_2^{\mathrm{T}} X b_1 \\ \vdots \\ a_m^{\mathrm{T}} X b_1 \\ \hline a_1^{\mathrm{T}} X b_2 \\ a_2^{\mathrm{T}} X b_2 \\ \vdots \\ a_m^{\mathrm{T}} X b_2 \\ \hline \vdots \\ \hline a_1^{\mathrm{T}} X b_n \\ a_2^{\mathrm{T}} X b_n \\ \vdots \\ a_m^{\mathrm{T}} X b_n \end{array}\right] = \mathrm{vec}(AXB).$$

The End