第三部分 图论

本部分主要内容

- 图的基本概念
- 树
- 欧拉图与哈密顿图
- 二部图与匹配
- 平面图
- 着色

第十一章 图的基本概念

主要内容

- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示

预备知识

- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序集——$A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

11.1 图

定义11.1 无向图$G = \langle V,E \rangle$, 其中

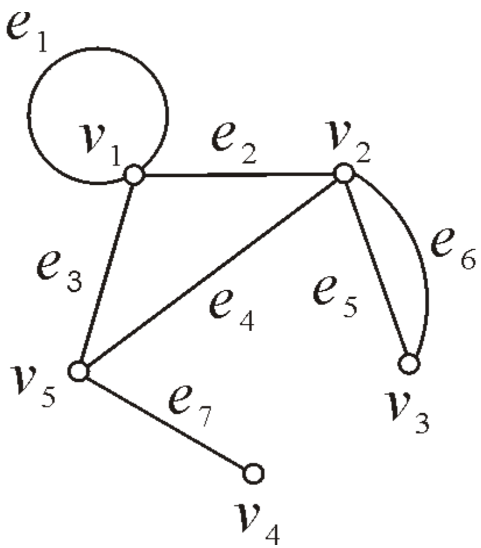
(1) V为非空有穷集, 称为顶点集，其元素称为顶点

(2) E为$V\&V$ 的多重有穷集, 称为边集, 其元素称为无向边, 简称边

例 无向图$G = \langle V,E \rangle$, 其中

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$



有向图

定义11.2 有向图$D=\langle V,E\rangle$,其中

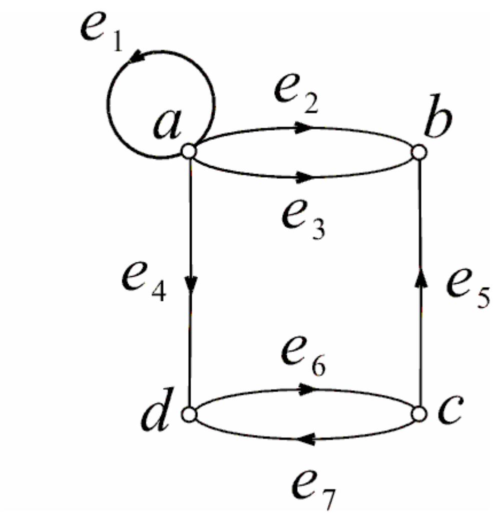
(1) V 为非空有穷集, 称为**顶点集**，其元素称为**顶点**

(2) E为$V\times V$ 的多重有穷集, 称为**边集**, 其元素称为**有向边**, 简称**边**

例 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,$
$\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$



注意：图的集合表示与图形表示之间的对应

相关概念

1. 无向图和有向图通称图. 记顶点集$V(G)$, 边集$E(G)$.
2. 图的阶, n阶图.
3. n 阶零图N_n, 平凡图N_1.
4. 空图$\varnothing$.
5. 标定图与非标定图.
6. 有向图的基图.
7. 无向图中顶点与边的关联及关联次数, 顶点与顶点、边与边的相邻关系.
8. 有向图中顶点与边的关联, 顶点与顶点、边与边的相邻关系.
9. 环, 孤立点.

多重图与简单图

定义11.3 无向图中关联同一对顶点的2条和2条以上的边称为**平行边**. 有向图中2条和2条以上始点、终点相同的边称为**平行边**. 平行边的条数称为**重数**.

含平行边的图称为**多重图**, 不含平行边和环的图称为**简单图**.

定义11.4 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $\forall v\in V$, 称v作为边的端点的次数之和为v的**度数**, 简称**度**, 记作$d(v)$.

设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $\forall v\in V$, 称v作为边的始点的次数之和为v的**出度**, 记作$d^+(v)$; 称v作为边的终点的次数之和为v的**入度**, 记作$d^-(v)$; 称$d^+(v)+d^-(v)$为v的**度数**, 记作$d(v)$.

顶点的度数

设$G=<V,E>$为无向图,

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

G的最小度 $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

设$D=<V,E>$为无向图,

D的最大度$\Delta(D)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

D的最小度 $\delta(D)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

D的最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v) \mid v\in V\}$

D的最小出度 $\delta^+(D)=\min\{d^+(v) \mid v\in V\}$

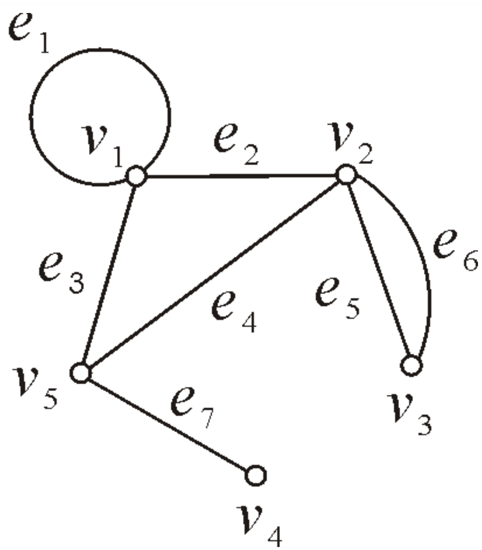
D的最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v) \mid v\in V\}$

D的最小入度 $\delta^-(D)=\min\{d^-(v) \mid v\in V\}$

悬挂顶点: 度数为1的顶点, 悬挂边: 与悬挂顶点关联的边.

偶度(奇度)顶点: 度数为偶数(奇数)的顶点

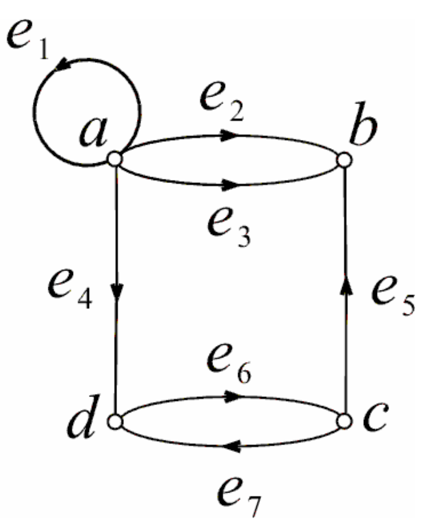
实例



$d(v_1)=4$, $d(v_2)=4$, $d(v_3)=2$, $d(v_4)=1$, $d(v_5)=3$.

$\Delta=4$, $\delta=1$.

v_4是悬挂点，e_7是悬挂边.



$d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

$d^+(c)=2$, $d^-(c)=1$, $d(c)=3$,

$d^+(d)=1$, $d^-(d)=2$, $d(d)=3$,

$\Delta^+=4$, $\delta^+=0$, $\Delta^-=3$, $\delta^-=1$, $\Delta=5$, $\delta=3$.

握手定理

定理11.1 在任何无向图中, 所有顶点的度数之和等于边数的2倍.

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理11.2 在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的2倍; 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和, 都等于边数.

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 由握手定理, 所有顶点的度数之和是偶数, 而偶度顶点的度数之和是偶数, 故奇度顶点的度数之和也是偶数. 所以奇度顶点的个数必是偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余均为2度顶点度，问G的阶数n为几?

解 本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点, 由握手定理,

$$16\times2=32 = 3\times4+4\times3+2x$$

解得 $x = 4$, 阶数 $n = 4+4+3=11$.

例2 在一个部门的25个人中间，由于意见不同，是否可能每个人恰好与其他5个人意见一致?

解：不可能。考虑一个图，其中顶点代表人，如果两个人意见相同，可用边连接，所以每个顶点都是奇数度。存在奇数个度为奇数的图，这是不可能的。

定理11.3 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G)\leq n-1$.

图的同构

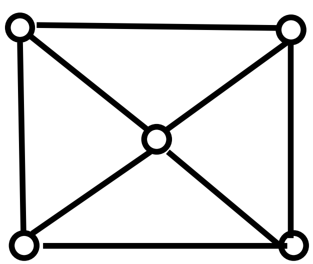
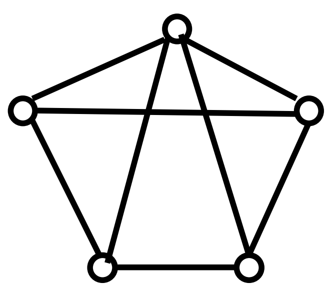
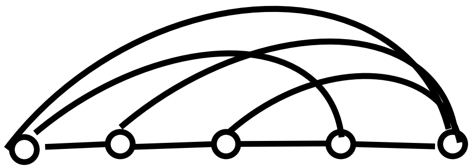
定义11.5 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$, 使得$\forall v_i,v_j\in V_1$,

$$(v_i,v_j)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i),f(v_j))\in E_2$$

$$（<v_i,v_j>\in E_1 \text{ 当且仅当 } <f(v_i),f(v_j)>\in E_2）$$

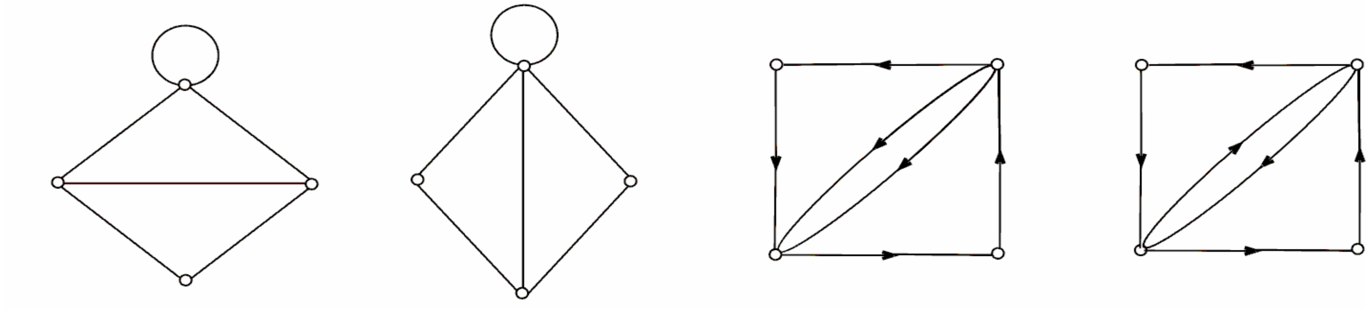
并且, (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同，则称G_1与G_2是**同构**的，记作$G_1\cong G_2$.

例

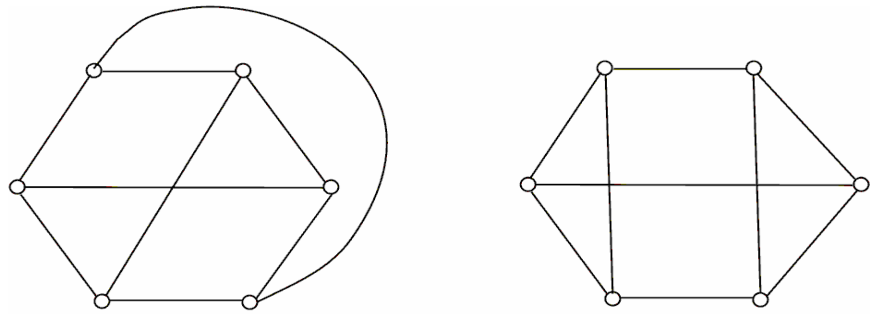




图同构的实例

(1)与(2)，(3)与(4)，(5)与(6)均不同构.



(1) (2) (3) (4)



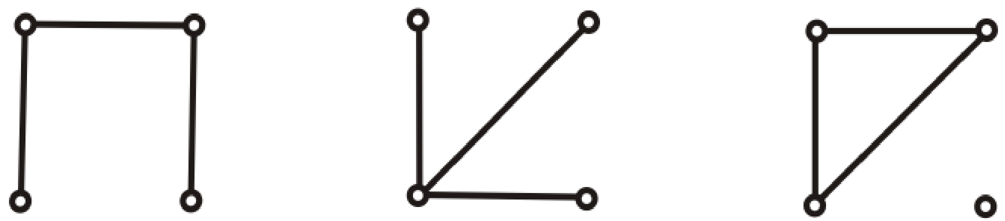
(5) (6)

说明: 1. 图的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

2. 判断两个图同构是个难题

图同构的实例

所有4阶3条边非同构的简单无向图



(a) (b) (c)

所有3阶2条边非同构的简单有向图

(d) (e) (f) (g)

补图与自补图

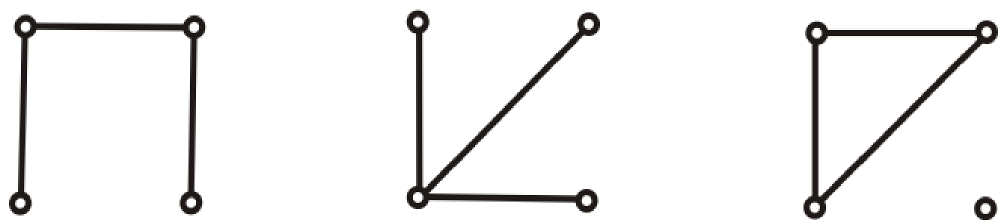
定义11.6 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，令

$$\overline{E}=\{(u,v)\mid u\in V\wedge v\in V\wedge u\neq v\wedge (u,v)\notin E\},$$

称$\overline{G}=<V,\overline{E}>$为$G$的补图.

若$G\cong\overline{G}$则称G是自补图.

例



(a) (b) (c)

(b)与(c)互为补图，(a)是自补图.

完全图与竞赛图

定义11.7

(1) n ($n\geq 1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

(2) n ($n\geq 1$)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

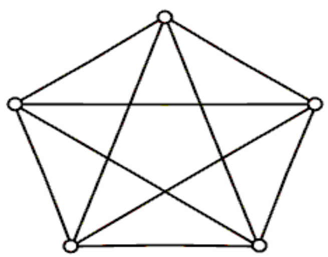
简单性质： $m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$

$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$

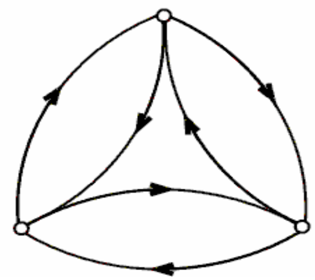
(3) n ($n\geq 1$) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质： $m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

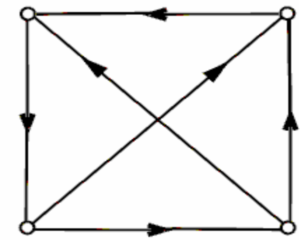
正则图



K_5



3阶有向完全图



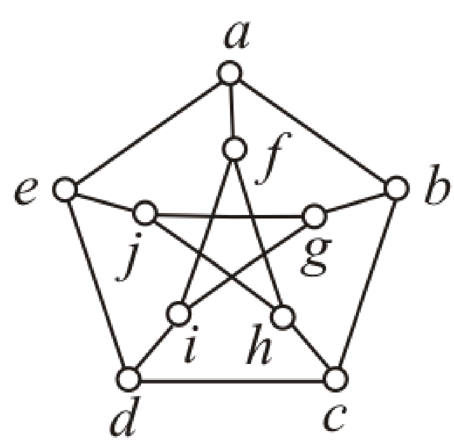
4阶竞赛图

定义11.8 *k*-正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

简单性质：$m=kn/2$, 当k是奇数时, n必为偶数.

例 K_n是 $(n-1)$-正则图

彼得松图是3-正则图

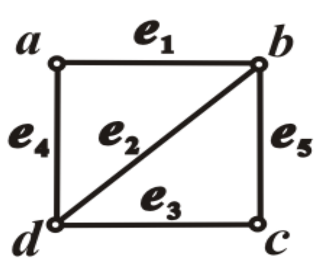


子图

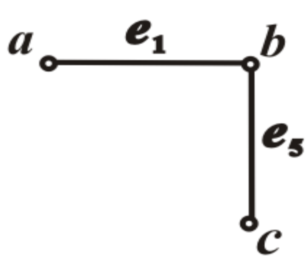
定义11.9 设两个图$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$（同为无向图或同为有向图），若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G'是G的**子图**，G为G'**母图**，记作$G'\subseteq G$. 又若$V'\subset V$或$E'\subset E$，则称G'为G的**真子图**. 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的**生成子图**.

设$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$, 称以V_1为顶点集, 以G中两个端点都在V_1中的边组成边集的图为G中V_1的**导出子图**, 记作$G[V_1]$. 设$E_1\subset E$且$E_1\neq\varnothing$, 称以E_1为边集, 以E_1中边关联的顶点为顶点集的图为G中E_1的**导出子图**, 记作$G[E_1]$.

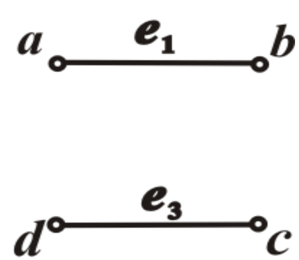
例



G



$G[\{a,b,c\}]$



$G[\{e_1,e_3\}]$

删除, 收缩与加新边

定义11.10 设$G=<V,E>$为无向图.

(1) 设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e，称为删除边e. 又设$E'\subset E$，用 $G-E'$表示从G中删除E'中的所有边，称为删除E'.

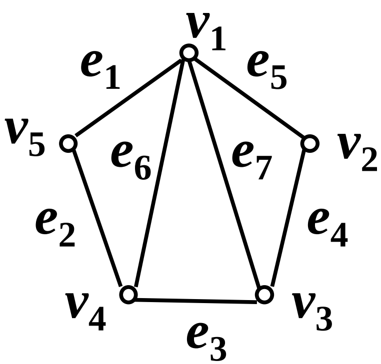
(2) 设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的所有边，称为删除顶点v. 又设$V'\subset V$，用$G-V'$表示从G中删除V'中所有的顶点，称为删除V'.

(3) 设$e=(u,v)\in E$，用$G\setminus e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u,v用一个新的顶点w（可以用u或v充当w）代替，并使w关联除e以外u,v关联的所有边，称为收缩边e .

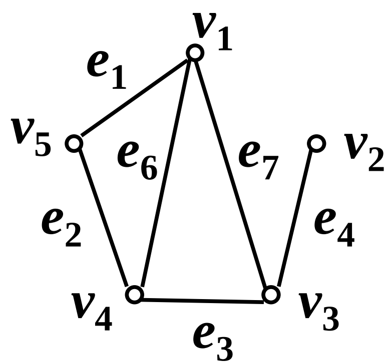
(4) 设$u,v\in V$（u,v可能相邻，也可能不相邻），用$G\cup(u,v)$（或$G+(u,v)$）表示在u,v之间加一条边(u,v)，称为加新边.

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.

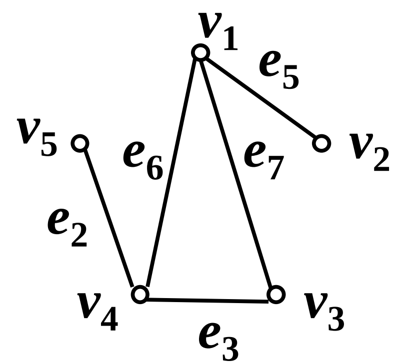
实例



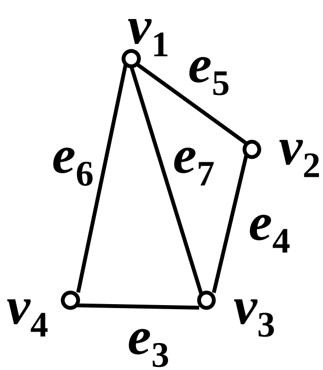
G



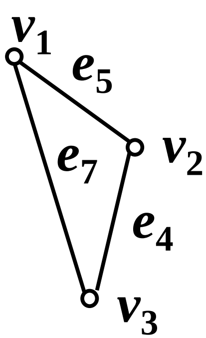
G-e_5



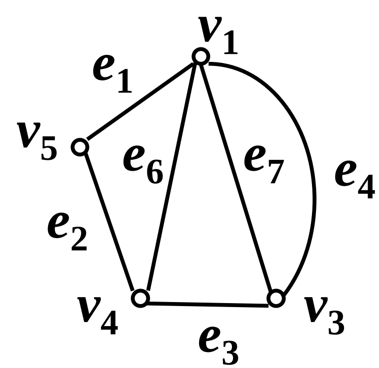
G-$\{e_1,e_4\}$



G-v_5



G-$\{v_4,v_5\}$



$G \setminus e_5$

11.2 通路与回路

定义11.11 设图$G=<V,E>$ (无向或有向的), G中顶点与边的交替序列 $\Gamma= v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$, 如果$v_{i-1}$, v_i是 e_i的端点(始点和终点), $1\le i\le l$, 则称Γ为v_0到v_l的通路. v_0,v_l分别称作Γ的始点和终点. Γ中的边数l称作它的长度. 又若 $v_0=v_l$, 则称Γ为回路. 若所有的边各异, 则称Γ为简单通路. 又若$v_0=v_l$, 则称Γ为简单回路. 若Γ中所有顶点各异(除v_0和v_l可能相同外)且所有边也各异, 则称Γ为初级通路或路径. 若又有$v_0=v_l$, 则称Γ为初级回路或圈. 长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈.

若Γ中有边重复出现, 则Γ称为复杂通路. 若又有$v_0=v_l$, 则称Γ为复杂回路.

通路与回路

定理11.4 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理11.5 在n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则一定存在v到自身的长度小于或等于n的初级回路.

同构意义下和定义意义下的圈

例2 无向完全图K_n（n≥3）中有几种非同构的圈？

解 长度相同的圈都是同构的．易知$K_n(n\geq 3)$中含长度3,4,…,n的圈，共有n–2种非同构的圈．

长度相同的圈都是同构的, 因此在同构意义下给定长度的圈只有一个. 在标定图中, 圈表示成顶点和边的标记序列. 如果只要两个圈的标记序列不同, 称这两个圈在定义意义下不同.

例3 无向完全图K_3的顶点依次标定为a,b,c．在定义意义下K_3中有多少个不同的长度为3的圈？

解 在定义意义下, 不同起点(终点)的圈是不同的, 顶点间排列顺序不同的圈也是不同的, 因而K_3中有3!=6个不同的长为3的圈：*abca*，*acba*，*bacb*，*bcab*，*cabc*，*cbac*．

带权图与最短路径

定义11.12 设图$G=<V,E>$ (无向图或有向图), 对G的每一条边e, 给定一个数$W(e)$,称作边e的**权**. 把这样的图称为**带权图**, 记作$G=<V,E,W>$. 当$e=(u,v)(<u,v>)$时, 把$W(e)$记作$W(u,v)$.

设P是G中的一条通路, P中所有边的权之和称为P的**长度**, 记作$W(P)$. 类似地, 可定义回路C的长度$W(C)$.

设带权图$G=<V,E,W>$ (无向图或有向图), 其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数. $\forall u,v\in V$, 当u和v连通(u可达v)时, 称从u到v长度最短的路径为从u到v的**最短路径**, 称其长度为从u到v的**距离**, 记作$d(u,v)$. 约定: $d(u,u)=0$; 当u和v不连通(u不可达v)时, $d(u,v)=+\infty$.

最短路问题

最短路问题: 给定带权图$G=<V,E,W>$及顶点u和v, 其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数, 求从u到v的最短路径.

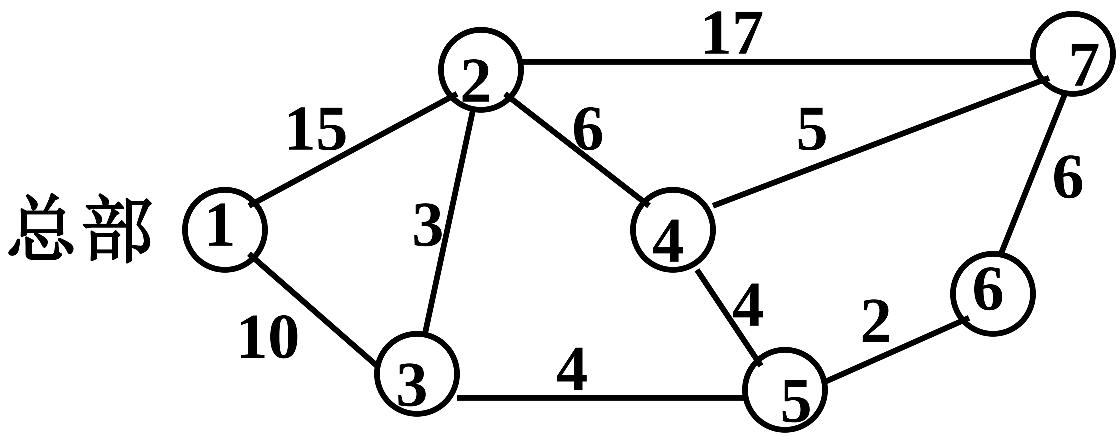
Dijkstra标号法 (求从s到其余各点的最短路径和距离)

1. 令$l(s)\leftarrow(s,0)$, $l(v)\leftarrow(s,+\infty)$ $(v\in V\text{-}\{s\})$, $i\leftarrow 1$,
   $l(s)$是永久标号, 其余标号均为临时标号, $u\leftarrow s$
2. for 与u关联的临时标号的顶点v
3. if $l_2(u)+W(u,v)< l_2(v)$ then 令$l(v)\leftarrow(u,l_2(u)+W(u,v))$
4. 计算$l_2(t)=\min\{ l_2(v) \mid v\in V$且有临时标号$\}$, $l(t)$改为永久标号
5. if $i<n$ then 令$u\leftarrow t$, $i\leftarrow i+1$, 转2

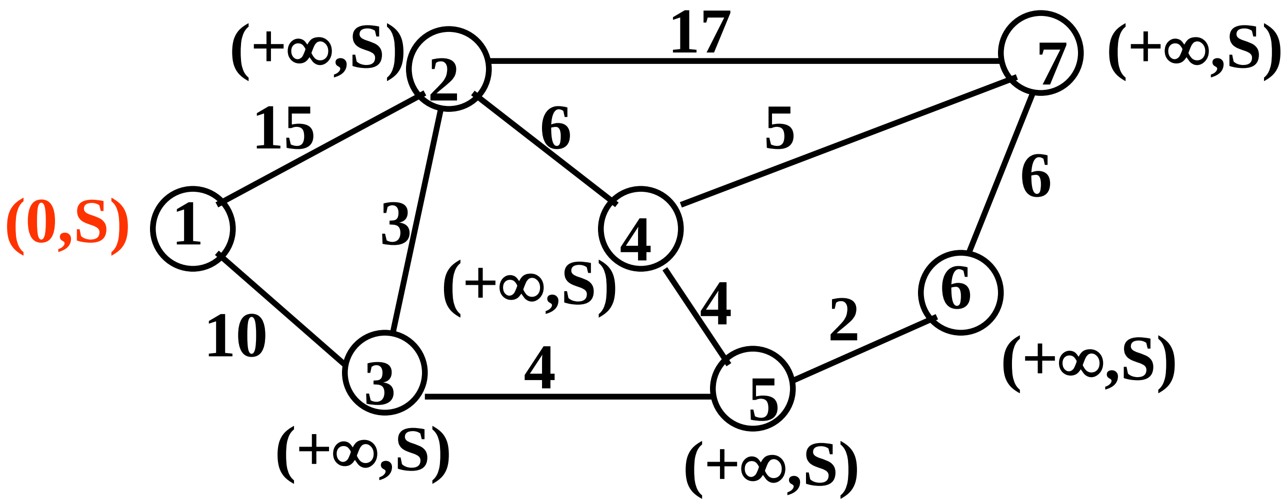
对每一个u, $d(s,u)= l_2(u)$,根据$l_1(v)$回溯找到s到u的最短路径.

实例

例11.5 一个总部和6个工地, 求从总部到各工地的最短路径

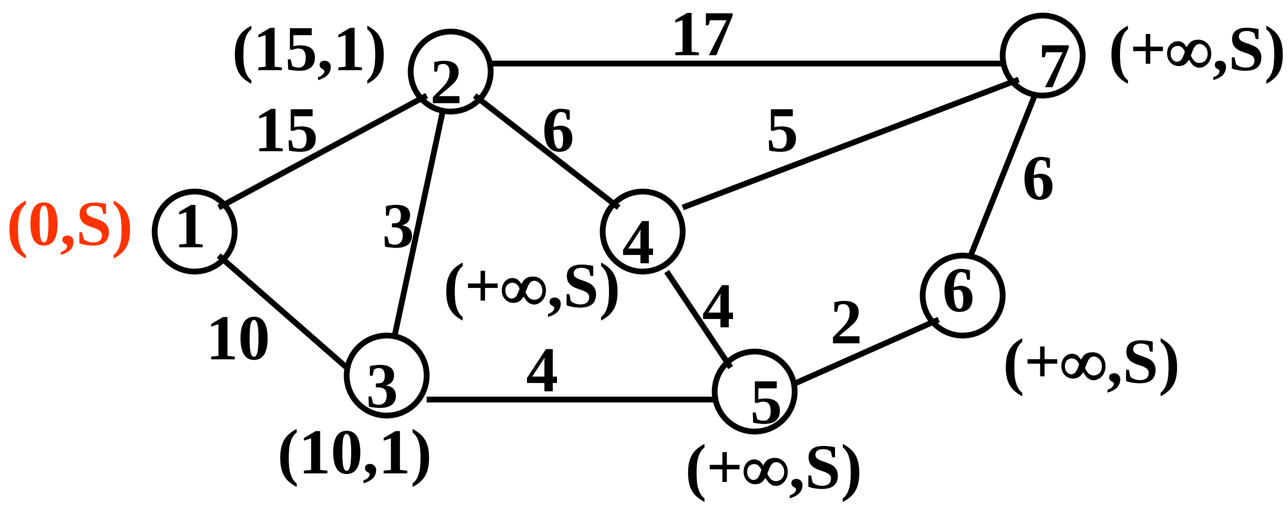


解

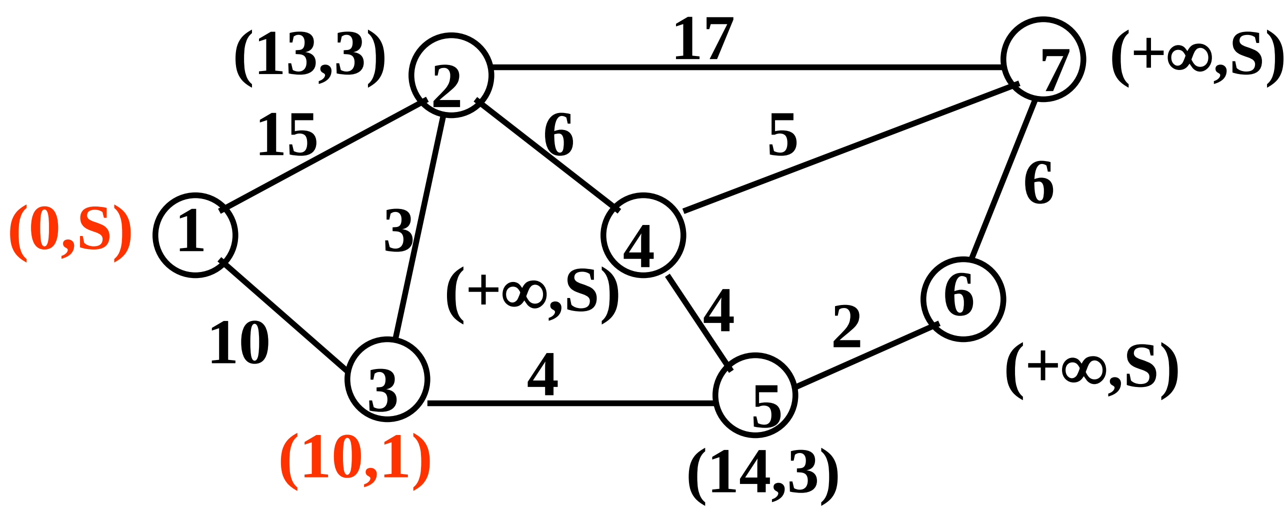


实例

u=1

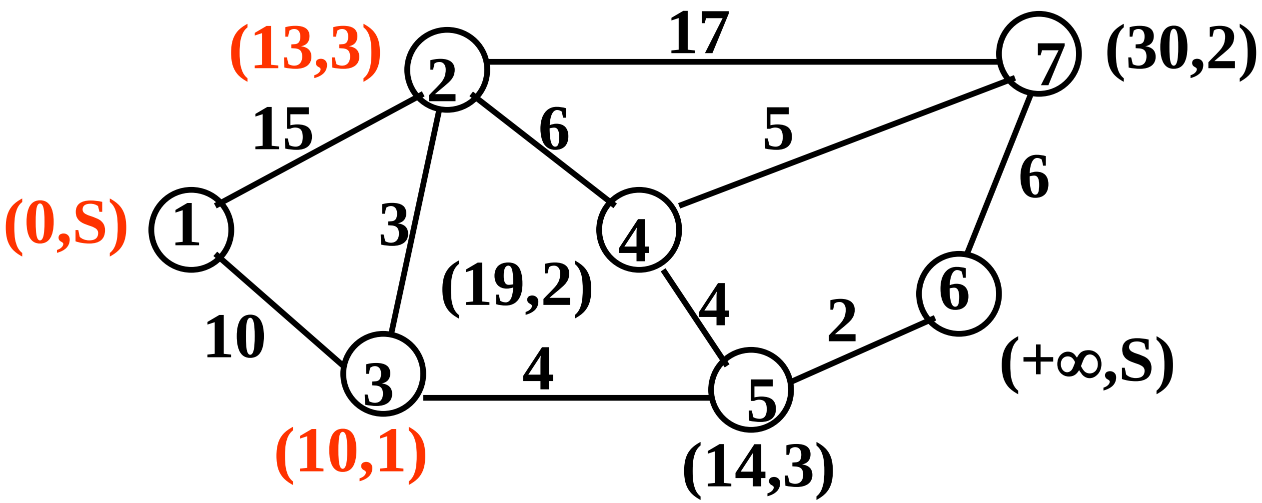

(15,1)
2
17
7
(+∞,S)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(+∞,S)
4
2
6
10
3
4
5
(+∞,S)
(10,1)
(+∞,S)

u=3

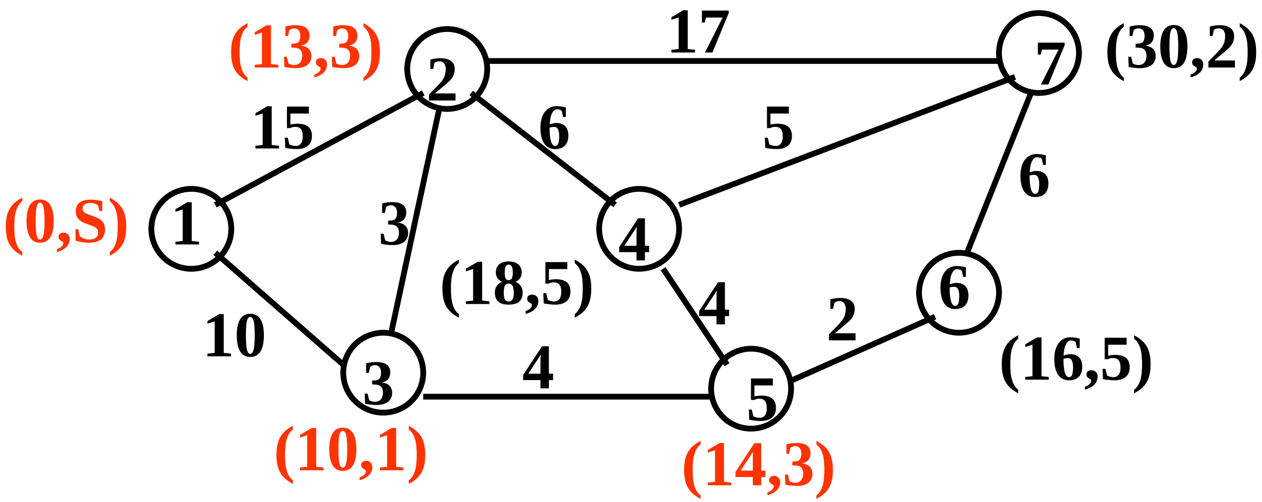

(13,3)
2
17
7
(+∞,S)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(+∞,S)
4
2
6
10
3
4
5
(+∞,S)
(10,1)
(14,3)

实例

u=2

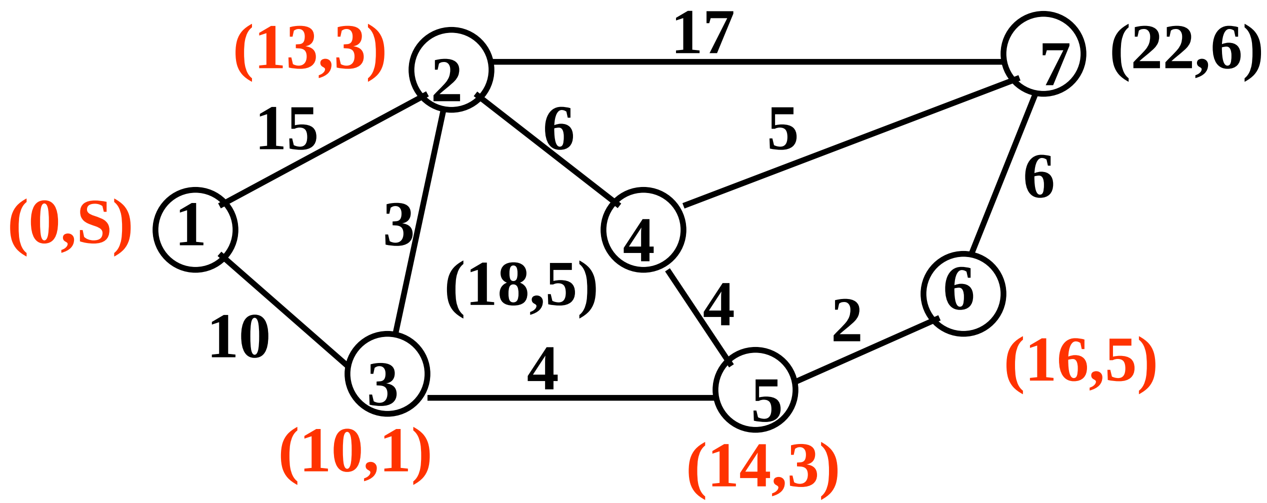

(13,3)
2
17
7
(30,2)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(19,2)
4
2
6
10
3
4
5
(+∞,S)
(10,1)
(14,3)

u=5

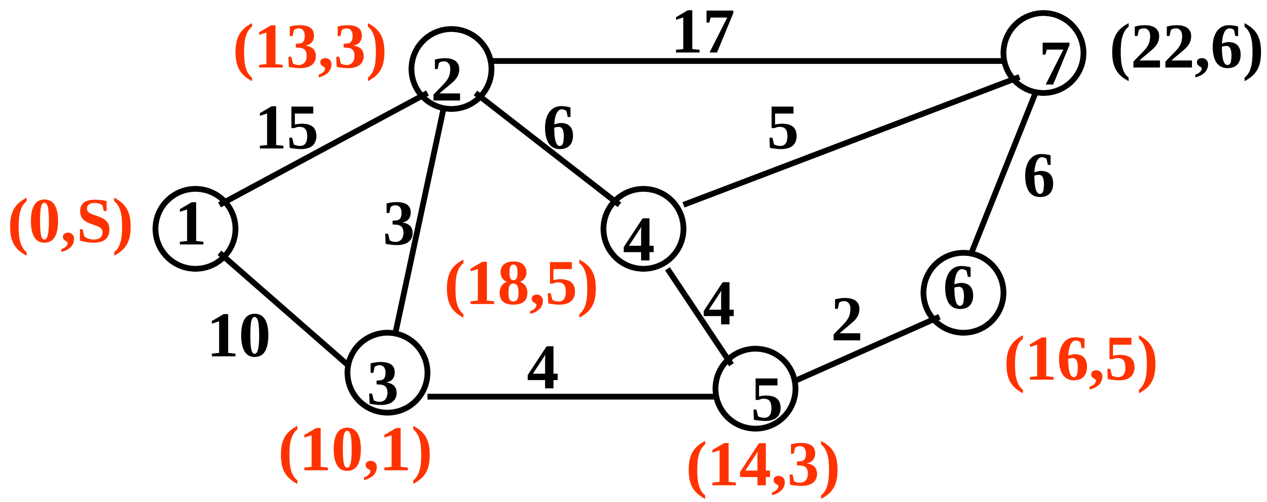

(13,3)
2
17
7
(30,2)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(18,5)
4
2
6
10
3
4
5
(16,5)
(10,1)
(14,3)

实例

u=6

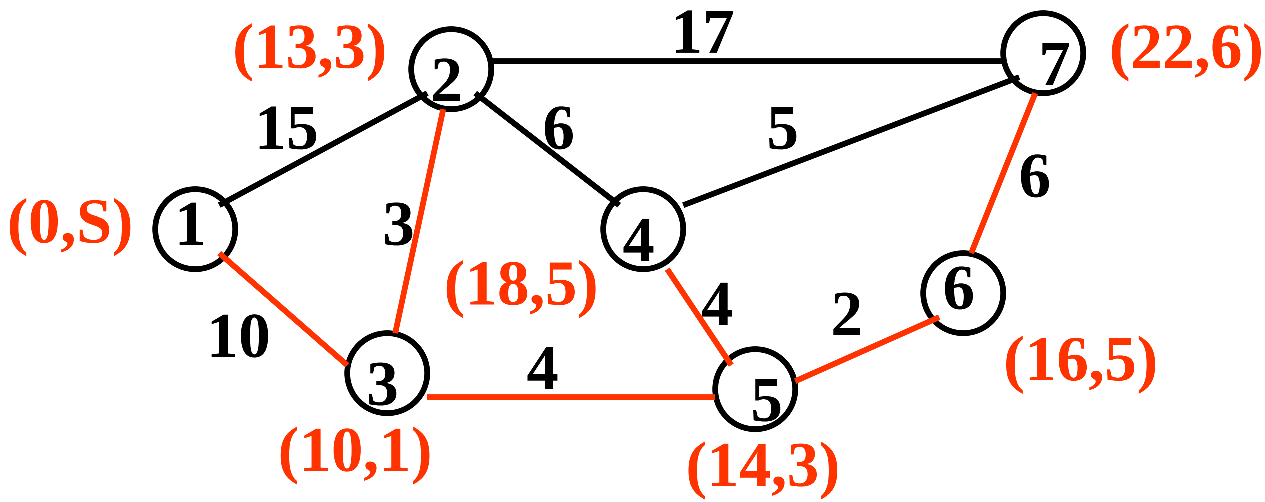

(13,3)
2
17
7
(22,6)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(18,5)
4
2
6
10
3
4
5
(16,5)
(10,1)
(14,3)

u=4


(13,3)
2
17
7
(22,6)
15
6
5
6
(0,S)
1
3
4
(18,5)
4
2
6
10
3
4
5
(16,5)
(10,1)
(14,3)

实例

u=7



$v_1v_3v_2$,	$d(v_1,v_2)$=13	v_1v_3,	$d(v_1,v_3)$=10
$v_1v_3v_5v_4$,	$d(v_1,v_4)$=18	$v_1v_3v_5$,	$d(v_1,v_5)$=14
$v_1v_3v_5v_6$,	$d(v_1,v_6)$=16	$v_1v_3v_5v_6v_7$,	$d(v_1,v_7)$=22

11.3 图的连通性

定义11.13 设无向图$G=<V,E>$，若$u,v\in V$之间存在通路，则称u,v是连通的，记作$u\sim v$. 规定: $\forall v\in V$ $v\sim v$.

若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则称G为非连通图.

$\sim$是V上的等价关系, 具有自反性、对称性和传递性.

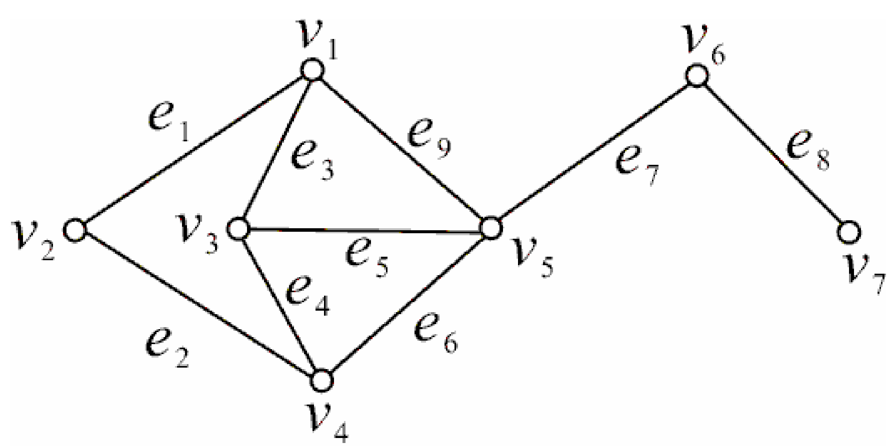
定义9.14 设无向图$G=<V,E>$，V_i是V关于顶点之间连通关系$\sim$的一个等价类，称导出子图$G[V_i]$为G的一个连通分支. G的连通分支数记为$p(G)$.

点割集与边割集

定义11.15 设无向图$G=\langle V,E\rangle$. 若$V'\subset V$使得$p(G-V')>p(G)$, 且对于任意的$V''\subset V'$, 均有$p(G-V'')=p(G)$, 则称V'是G的**点割集**. 若$V'=\{v\}$, 则称v为**割点**.

定义11.16 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, 若$E'\subseteq E$使得$p(G-E')>p(G)$, 且对于任意的$E''\subset E'$, 均有$p(G-E'')=p(G)$, 则称E'是G的**边割集**, 简称为**割集**. 若$E'=\{e\}$, 则称e为**割边**或**桥**.

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$不是. $\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥. 而$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 不是.



点连通度与边连通度

定义11.17 G为连通非完全图, 称

$$\kappa(G) = \min\{\, |V'| \mid V'\text{为点割集}\,\}$$

为G的**点连通度**, 简称**连通度**. 若$\kappa(G) \geq k$，则称G为 **k-连通图** .

规定 $\kappa(K_n) = n-1$, 非连通图的连通度为0.

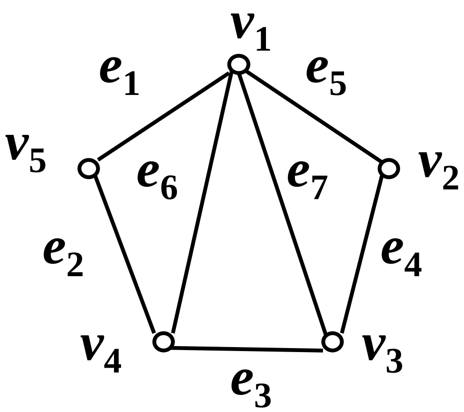
定义11.18 设G为连通图, 称

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'\text{为边割集}\}$$

为G的**边连通度**. 若$\lambda(G) \geq r$，则称G是 **r 边-连通图**.

规定非连通图的边连通度为0.

例 κ=2, 2-连通图, 也是1-连通.
λ=2, 2边-连通图, 也是1边-连通.



几点说明

- $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$, 则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图，但不是$(k+s)$-连通图，$s\geq 1$
- 若$\lambda(G)=r$, 则G是1边-连通图，2边-连通图，…，r边-连通图，但不是$(r+s)$-边连通图，$s\geq 1$

几点说明

定理11.6　$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

证明 若 G 不连通,则k(G)＝λ(G)＝0,故上式成立.若 G 连通,1) 证明λ(G)≤δ(G) 如果 G 是平凡图,则 λ(G)＝0≤δ(G),若G是非平凡图,则因每一结点的所有关联边必含一个边割集,故 λ(G)≤δ(G) .

2) 再证 k(G)≤λ(G) (a) 设λ(G)＝1,即G有一割边,显然这时k(G)＝1,上式成立.(b) 设λ(G)≥2,则必可删去某λ(G)条边,使G不连通,而删去其中λ(G)-1条边,它仍是连通的,且有一条桥e＝(u,v). 对λ(G)-1条边中的每一条边都选取一个不同于u,v的端点,把这些端点删去,则必至少删去λ(G)-1条边.若这样产生的图是不连通的,则k(G)≤λ(G)-1＜λ(G),若这样产生的图是连通的,则e仍是桥,此时再删去u或v,就必产生一个不连通图,故 k(G)≤λ(G).由 1) 和 2) 得 k(G)≤λ(G)≤δ(G)

有向图的连通性及分类

定义11.19 设$D=<V,E>$为一个有向图, $\forall v_i,v_j\in V$, 若从v_i到v_j存在通路, 则称v_i可达v_j, 记作$v_i\to v_j$. 规定$v_i\to v_i$. 若$v_i\to v_j$且$v_j\to v_i$, 则称v_i与v_j是相互可达的, 记作$v_i\leftrightarrow v_j$. 规定$v_i\leftrightarrow v_i$.

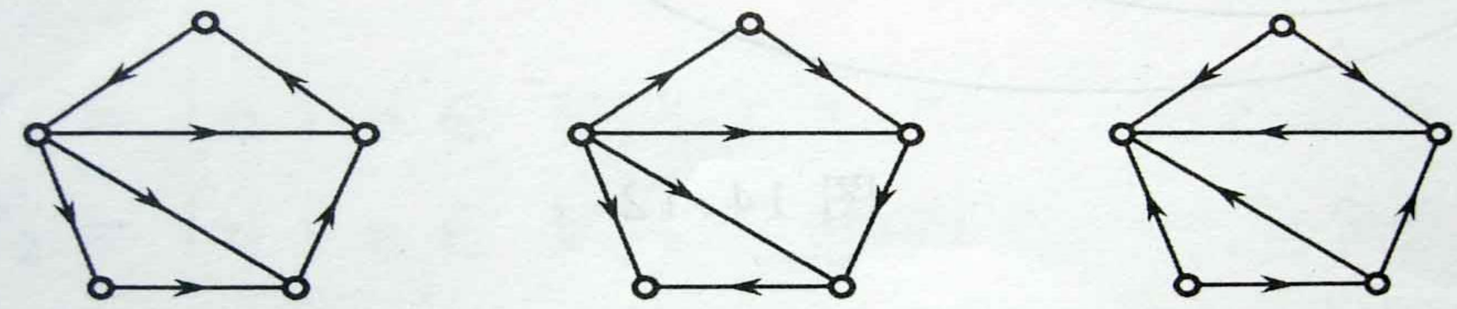
性质: $\to$ 具有自反性($v_i\to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

定义11.20 若有向图$D=<V,E>$的基图是连通图, 则称D是弱连通图, 简称为连通图. 若$\forall v_i,v_j\in V$, $v_i\to v_j$与$v_j\to v_i$至少有一个成立, 则称 D是单向连通图. 若$\forall v_i,v_j\in V$, 均有$v_i\leftrightarrow v_j$, 则称D是强连通图.

有向图的连通性

例



强连通　　　　单向连通　　　　弱连通

定理11.7 有向图$D=\langle V,E\rangle$是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证　充分性显然. 证必要性. 设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, Γ_i为v_i到v_{i+1}的通路(i=1,2,…,n−1), Γ_n为v_n到v_1的通路. 依次连接Γ_1, Γ_2, …, Γ_{n-1}, Γ_n所得到的回路经过D中每个顶点至少一次.

有向图的连通性

定理11.8 有向图G是单向连通图当且仅当G中存在经过每个顶点至少一次的通路.

证明：充分性显然.

必要性：设P是G中经历的不同顶点的个数最多的一条途径.

如果有某个顶点x不在P上：任取P上的顶点v，v和x是单向连通的.

第一种情形：对P上的任何顶点v，都不存在从v到x的路，则对P上第一个顶点u，必有从x到u的路Q，那麼把Q和P连起来得到的途径Q*P比P经历的不同顶点的个数要多，矛盾.

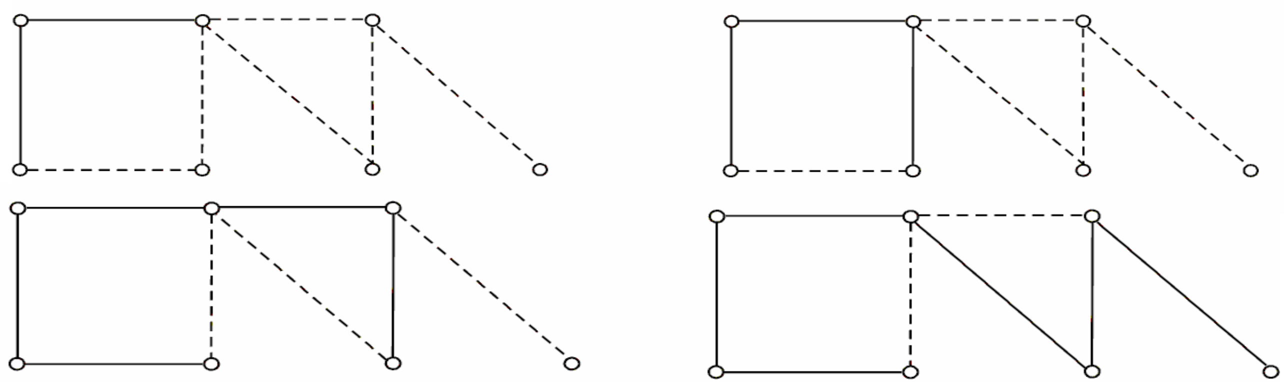
第二种情形：存在P上某顶点v使得存在从v到x的路，那麼可以设u是P上最後一个有从u到x的路的顶点，并设从u到x的路为Q.若u是P上最後一个顶点，那麼P和Q联结起来得到的途径P*Q比P经历的不同顶点的个数要多，矛盾.若P在u後仍有顶点，设w为u的下一个顶点，则必存在从x到w的路q，那麼设P=(p,u,e,w,r)，则途径(p,u)*Q*q*(w,r)比P经历的不同顶点的个数要多，矛盾.所以图G的所有顶点都在P上.

扩大路径法

设$G=<V,E>$为无向图，Γ为G中一条路径. 若此路径的两个端点都不与通路外的顶点相邻, 则称Γ是极大路径.

任取一条边, 如果它有一个端点与其他的顶点相邻, 就将这条边延伸到这个顶点. 继续这一过程, 直至得到一条极大路径为止. 称此种方法为"扩大路径法". 用扩大路径法总可以得到一条极大路径. 在有向图中可类似讨论.

例

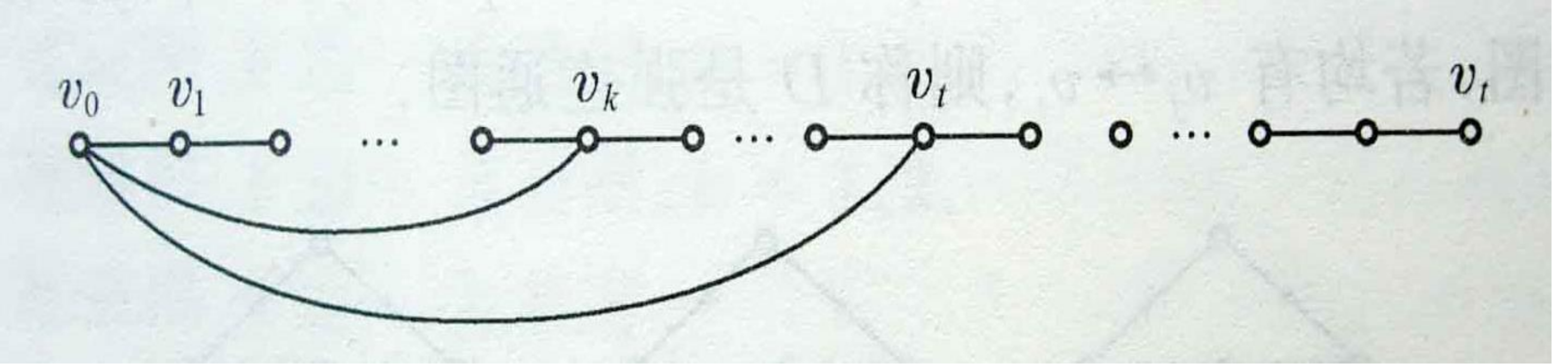


由一条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是最长的路径

扩大路径法的应用

例4 设 G 为 n（$n\geq 3$）阶无向简单图，$\delta\geq 2$，证明G 中存在长度 $\geq \delta+1$ 的圈.

证 设 $\Gamma = v_0v_1\ldots v_l$ 是一条极大路径, 则 $l\geq\delta$. 因为v_0不与 Γ外顶点相邻, 又 $d(v_0)\geq\delta$, 因而在 Γ上除 v_1外, 至少还存在$\delta-1$个顶点与 v_0 相邻. 设 v_x 是离 v_0 最远的顶点, 于是$v_0v_1\ldots v_xv_0$ 为 G 中长度 $\geq\delta+1$ 的圈.



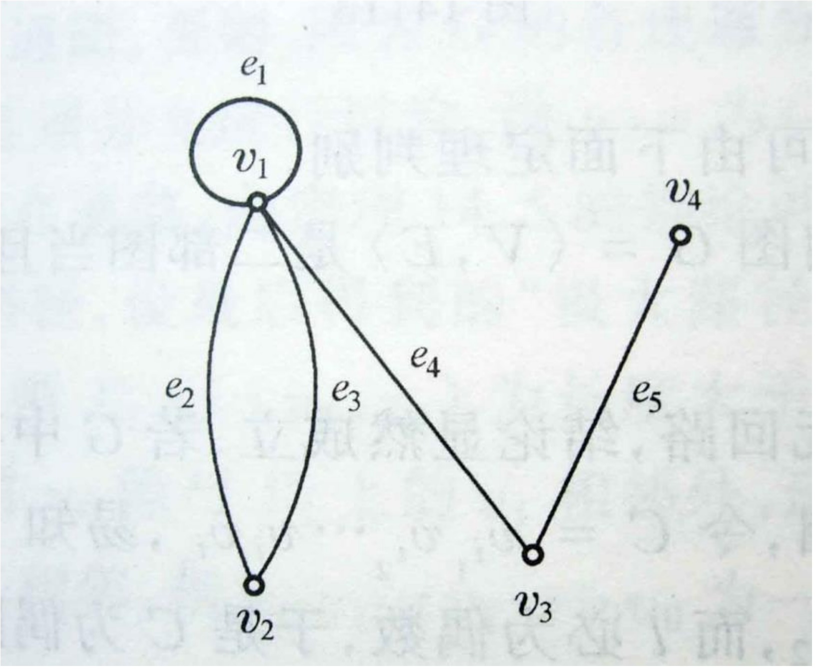
11.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵

定义11.21 无向图$G=\<V,E\>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的**关联矩阵**，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



无向图关联矩阵的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad ,j = 1,2,\ldots,m$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad ,i = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

(5) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0 \Leftrightarrow v_i$是孤立点

有向图(无环)的关联矩阵

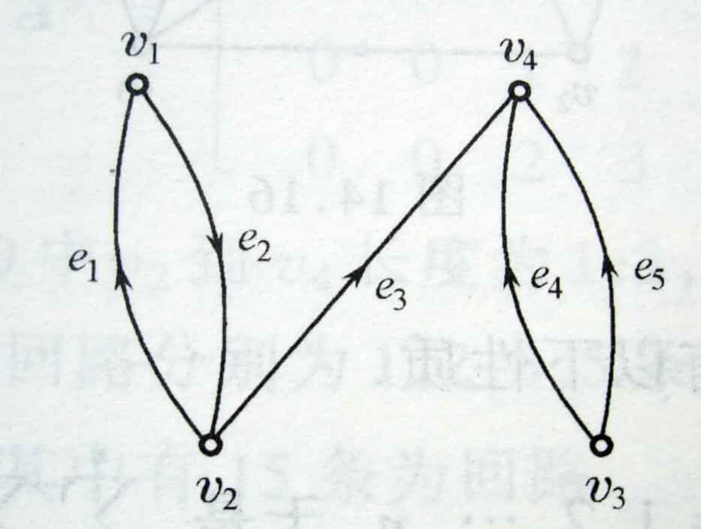
定义11.22 设有向图$D=<V,E>$中无环，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

例

$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$



有向图关联矩阵的性质

(1) 每列恰好有一个+1和一个-1.

(2) -1的个数等于+1的个数，都等于边数m.

(3)第i行中，+1的个数等于$d^+(v_i)$，-1的个数等于$d^-(v_i)$.

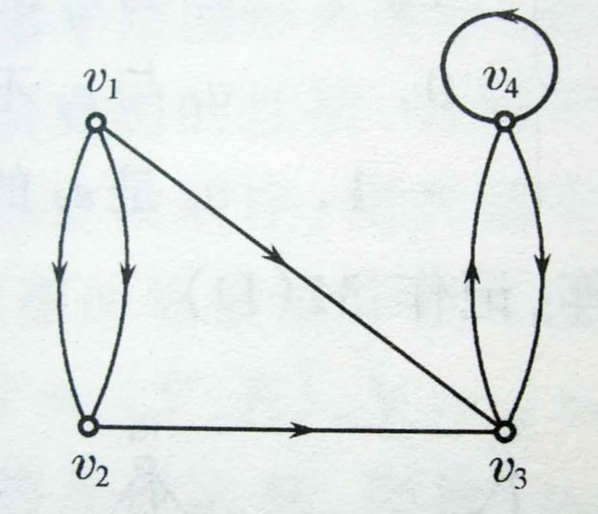
(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义11.23 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})$为$D$的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为$A$.

例

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



有向图邻接矩阵的性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理11.9 设 A为有向图 D 的邻接矩阵, 顶点集$V=\{v_1,v_2,\ldots, v_n\}$, 则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为v_i到v_j长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为长度为 l 的通路总数,

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$ $(l\geq1)$, 则

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的通路数,

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的回路数.

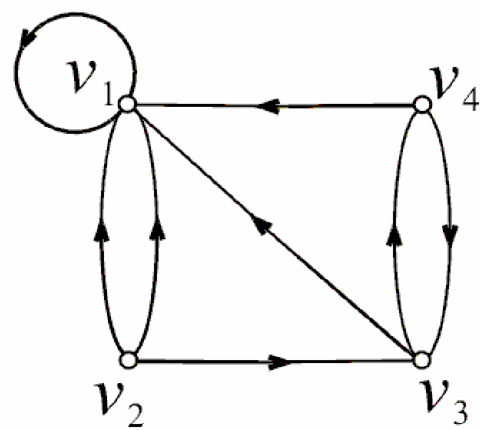
实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$



实例求解

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3的通路为14条，其中有1条是回路.

D中长度为4的通路为17条，其中有3条是回路.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵

定义11.24 设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

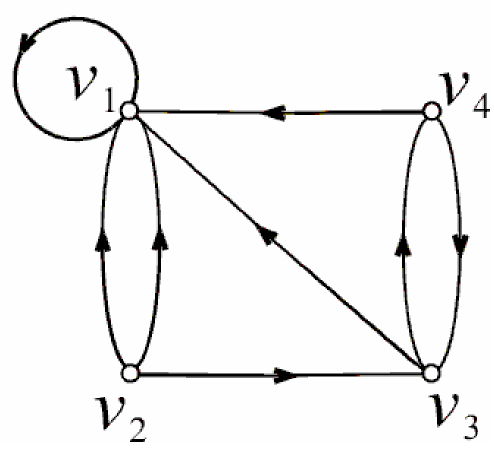
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{可达}v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

$P(D)$的主对角线上的元素全为1.

D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

例



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第九章 习题课

主要内容

- 无向图和有向图及其有关的概念; 握手定理及其推论；图的同构
- 通路与回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类
- 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解图及其有关的概念
- 深刻理解和灵活地应用握手定理及推论
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

练习1

1．9阶无向图G中，每个顶点的度数不是5就是6. 证明G中至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点.

证 关键是利用握手定理的推论.

方法一：穷举法

设G中有x个5度顶点，$(9-x)$个6度顶点，由于奇度顶点的个数是偶数，$(x, 9-x)$只有5种可能：(0,9), (2,7), (4,5), (6,3), (8,1）它们都满足要求.

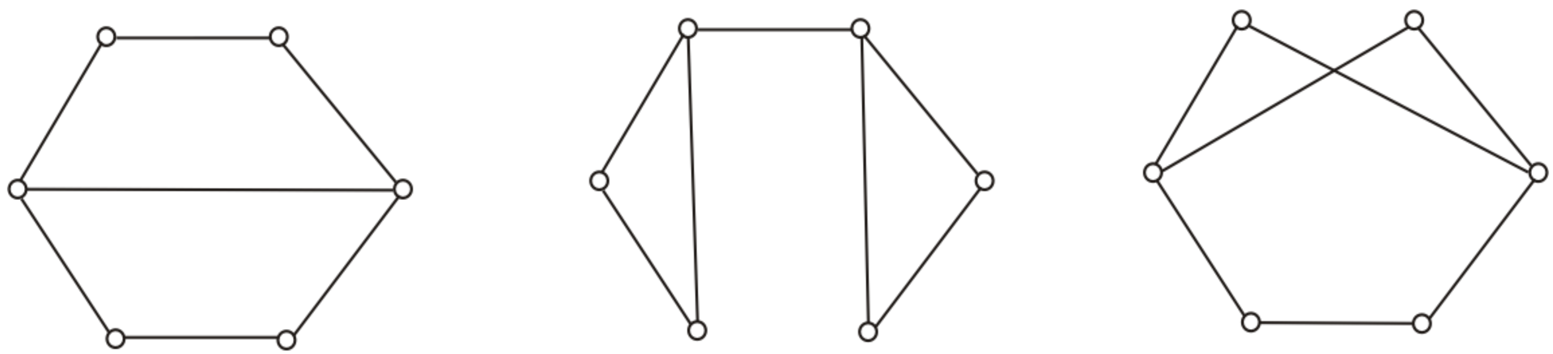
方法二：反证法

否则，至多有4个5度顶点并且至多有4个6度顶点，这与G是 9 阶图矛盾.

练习2

2． 存在以2, 2, 2, 2, 3, 3为顶点度数的简单图吗？若存在，画出尽可能多的这种非同构的图来.

解



练习3

3. 设$D=<V,E>$为有向简单图, 已知 $\delta(D)\geq 2$, $\delta^+(D)>0$, $\delta^-(D)>0$, 证明D中存在长度$\geq \max\{\delta^+,\delta^-\}+1$的圈.

证 用扩大路径法证明.

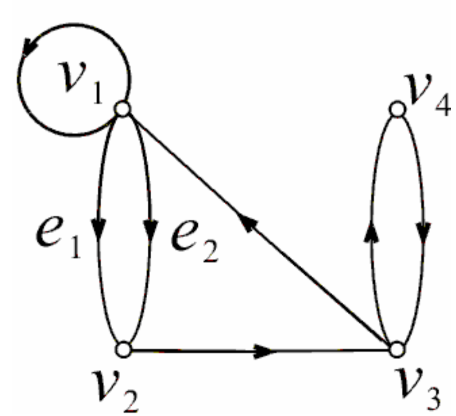
设$\delta^-\geq\delta^+$, 证明D中存在长度$\geq\delta^-+1$的圈.

设 $\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$为极大路径, 则$l\geq\delta^-$. 在 Γ上存在$d^-(v_0)\geq\delta^-$个顶点 邻接到v_0, 设v_k是其中离v_0最远的顶点, $k\geq\delta^-$. 于是, $v_0v_1\ldots v_kv_0$为D中长度$\geq\delta^-+1$的圈 .

当$\delta^+\geq\delta^-$时, 类似可证.

练习4

4．有向图*D*如图所示，回答下列诸问：



(1) *D*中有几种不同构的圈？

(2) *D*中有几种不同构的非圈简单回路?

(3) *D*是哪类连通图?

(4) *D*中v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路各多少条？

(5) *D*中v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路各多少条？

(6) *D*中长度为4的通路（不含回路）有多少条？

(7) *D*中长度为4的回路有多少条？

(8) *D*中长度≤4的通路有多少条？其中有几条是回路？

(9) 写出*D*的可达矩阵.

解答

解 (1) 有3种非同构的圈，长度分别为1,2,3.

(2) 有3种非同构的非圈简单回路，它们的长度分别为 4,5,6.

(3) D是强连通的.

为解(4)—(8)，先求D的邻接矩阵的前4次幂.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

解答

(4) v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路数分别为0,0,2,2. (定义意义下).

(5) v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路数分别为1,1,3,5.

(6) 长度为4的通路(不含回路)为33条.

(7) 长度为4的回路为11条.

(8) 长度≤4的通路88条，其中22条为回路.

(9) 4×4的全1矩阵.