第二部分 集合论

- 集合论是研究集合一般性质的数学分支，创始人是康托尔(G.Cantor 1845-1918)。现代数学中，每个对象(数，函数等)本质上都是集合，即可以用某种集合来示义，数学的各个分支本质上都是在研究某一种对象集合的性质，集合论的特点是研究对象的广泛性，是计算机科学的基础理论表达工具。

第三章 集合代数

3.1集合的基本概念

- 1.集合的定义

集合是现代数学中最重要的基本概念之一。我们知道，在任何一个数学理论中，不可能对其中的每个概念都严格定义，这样的概念一般为数学理论中的原始概念，而称其余的概念为它的派生概念。如欧几里得几何学中，“点”和“线”是原始概念，而“三角形”和“圆”则为派生概念。今天我们介绍的“集合”也是一个不能严格定义的原始概念。但是为了理解上的方便，我们仍然给一个不严格的定义。

3.1 集合的基本概念

- 定义3.1：任何被称为“成员”或“元素”的对象的聚集称为集合(Set)。

例如：自然数的全体N，有理数的全体Q，实数的全体R，复数的全体C，整数的全体Z，都是集合。

通常情况下，用带(或不带)下标的大写英文字母表示集合，而用带(或不带)下标的小写英文字母表示集合的元素或成员。

3.1 集合的基本概念

- **2.集合的表示**

集合是由它所包含的元素完全确定的，有多种方法来表示一个集合。

(1).枚举法：当一个集合仅有有限个元素或元素之间有明显的关系时，采用列出集合中全部元素或部分元素的方法，叫枚举法。

例：A={1,2,3,4}，B={a, b, c, …x, y, z}，N ={0,1,2,3, …}。

这种方法实际上是一种显示表示法，优点是具有透明性，缺点是当集合中元素比较多时会占据大量内存。

3.1 集合的基本概念

(2).描述法：一般用谓词来概括集合中元素的特性，由谓词P(x)所定义的集合常记为：$A=\{x \mid P(x)\}$。

例：$B=\{x \mid x \in R \wedge x^2-1=0\}$。

谓词表示法是一种隐式表示法，所表示的集合元素可以是很少的或无穷多个，从计算机的角度来看，是种“动态”的表示法，不用占据大量内存。

(3).文氏图法(Venn)：文氏图解法是一种利用平面上的点的集合作成的对集合的图解，一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。

3.1 集合的基本概念

- **3.集合与元素的关系**

元素和集合之间的关系是“隶属关系”，即“属于”或“不属于”，“属于”记作∈，不属于记作∉。

例：A={a，{b，c}，{{d}}}，a∈A，{b，c}∈A，b∉A。

- **例3-1：在一个很偏僻的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一个理发师，该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么该给这位理发师刮脸？**

3.1 集合的基本概念

在离散数学中，我们仅讨论界限清楚无二义性的元素与集合的隶属关系，即元素a要么属于集合A，要么不属于集合A，两者必居其一。

- **4.集合的特性**

(1).确定性：即$a \in A$或$a \notin A$，两者必居其一且仅居其一；

(2).互异性：集合中相同的元素被视为同一元素，即：{1，1，2，2}与{1，2}相同；

(3).无序性：集合中的元素顺序并不重要，如{1，2，3，4}与{2，3，4，1}相同。

3.1 集合的基本概念

- **5.集合之间的关系**
- **定义3.2：** 设A，B是两个集合，如果B中的每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集合，简称子集(Subset)，这时也称B被A包含，或A包含B，记作$B \subseteq A$，或$A \supseteq B$，称"$\subseteq$"或"$\supseteq$"为包含关系(Inclusion Relation)。如果B不被A包含，则记作$B \not\subseteq A$。

例：$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$, 但$Z \not\subseteq N$；

A={1，2，3，4}，B={1，2}，C={2，3}，D={2，3}，则 $B,C,D \subseteq A$； $C \subseteq D$； $D \subseteq C$； $B \not\subseteq C,D$； $C,D \not\subseteq B$； $A \not\subseteq B,C,D$

对任意的集合A，都有$A \subseteq A$ 。

3.1 集合的基本概念

- **定义3.3：** 设A，B为集合，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$，如果A与B不相等，则记作$A\neq B$。

相等的符号化表示为：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

例：$A=\{x|x\in N$，且$x\leq 4\}$，$B=\{0，1，2，3，4\}$则$A=B$。

- **定义3.4：** 设A，B为集合，如果$B\subseteq A$且$B\neq A$，则称B是A的真子集(Proper Subset)，记作$B\subset A$，称“$\subset$”为真包含关系(Properly Inclusion Relation)，如果B不是A的真子集，则记作$B\not\subset A$

3.1 集合的基本概念

这时或者 $B \nsubseteq A$，或者B=A，符号化表示为：

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$$

例：$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$，但 $N \not\subset N$，{0,1}，{2,3}是{0,1,2,3}的真子集，但{1,4}不是。

- 定义3.5：不含任何元素的集合叫做空集(Empty Set)，记作$\varnothing$。空集符号化表示为：

$\varnothing$={x |x ≠x}。

例：设$A=\{x \mid x \in R \wedge x^2+1=0\}$，是方程$x^2+1=0$的实数解集，而该方程无实数解，所以A= $\varnothing$。

3.1 集合的基本概念

- **定理3.1：(1)：空集是一切集合的子集，(2)：空集是唯一的。**
- **例3-2：确定下列命题的真值：**

(1)：$\phi \subseteq \phi$，

(2)：$\phi \in \phi$ ，

(3)：$\phi \subseteq \{\phi\}$，

(4)：$\phi \in \{\phi\}$。

3.1 集合的基本概念

- **定义3.6：** 在一个具体问题中，如果涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合问全集(Universal Ser)，用U或E表示。

全集是唯一的，它包含了该问题所涉及的所有元素。

例：(1)在平面几何中，全集是由平面上全体点组成；

(2)在人口研究中，全集是由世界上的所有人组成

- **定义3.7：** 集合中的所有元素的个数称为集合的基数(Base Number)，记为|A|；如果一个集合的基数是有限的，则称集合为有限集(Finite Set)，如果一个集合的基数是无限的，则称集合为无限集(Infinite Set)。

3.1 集合的基本概念

- 例3-3：求集合A，B，C，D的基数：

A=ϕ；B={1,2,3}；C={1，{2,3}}；D={ϕ}。

解：|A|=0；|B|=3；|C|=2；|D|=1。

- 定义3.8：含有n个元素的集合A称为n元集，它的含义m个(m ≤n)元素的子集称作它的m元子集。
- 例3-4：设A={1,2,3}，求A的全部子集：

解：将A的全部子集按从小到大进行分类：

0元子集：即空集，有C^0_3个：ϕ；

1元子集：即单元素，有 C^1_3个：{1}，{2}，{3}；

2元子集：有C^2_3个：{1,2}，{1,3}，{2,3}；

3元子集：有C^3_3个：{1,2,3}。

3.1 集合的基本概念

∴集合A={1,2,3}的全部子集共有：

$$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=1+3+3+1=8$$

一般来说，对于n元集A，它的m(0≤m≤n)元子集有C_n^m个，所以它的不同子集总数为：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$$

- 定义3.9：设A为集合，把A的全体子集构成的集合叫做A的幂集(Power Set)，记作P(A)或2^A，符号化为：$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$。

例：设A={1,2,3}，则P(A)={ϕ，{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1,3}，{2,3}，{1,2,3}}，$|P(A)|=2^n$

3.1 集合的基本概念

- **例3-5：求下列幂集：**

(1)：P($\varnothing$)；(2)：P({$\varnothing$})；(3)：P({$\varnothing$,{$\varnothing$}})；(4)：P({1，{2,3}})。

3.2 集合的运算

为了更好的研究集合的性质，我们定义了集合的几个基本运算。

- 定义3.10：设A，B是两个集合，则A与B的并集(Union)定义为：$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A\vee x\in B\}$，“∪”称为并运算(Union Operation)。

例：{1,2,3,4}∪{3,4,5}={1,2,3,4,5}，Q∪N=Q。

- 定义3.11：设A，B是两个集合，则A与B的交集(Intersection)定义为：$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$，“∩”称为交运算(Intersection Operation)。

例：{1,2,3,4}∩{3,4,5}={3,4}，{a, b}∩ϕ=ϕ，Q∩N=N。

3.2 集合的运算

可以将以上定义推广到n个甚至无穷个集合的并集或交集：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots\}$$

例： $\{1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{0,1\} = \{0,1,2,3\}$；

$\{1,2\} \cap \{2,3\} \cap \{0,1\} = \phi$ 。

3.2 集合的运算

- **定义3.12：设A，B是两个集合，则A与B的差集(Subtraction)定义为：**$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$**；**

“-”称为差运算(Subtraction Operation)，A-B也可叫做相对补集。

例：{1,2,3,4}-{3,4,5,6}={1,2}；{1,2}-ϕ={1,2}； ϕ-{1,2}=ϕ； {1,2}-{1,2}=ϕ。

- **定义3.13：设U为全集，A是U的子集，则集合A的补集(Complement)定义为：**$\overline{A}=U-A=\{x\mid x\in U\wedge x\notin A\}$

也可记为~A， “-”， “~”称为补运算(Complement Operation)。

例：U={1,2,3,4}，A={1,2}，~A={3,4}。

3.2 集合的运算

- **定义3.14：设A，B是两个集合，A与B的对称差集(Symmetric Differences)定义为：**$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

"⊕"称为对称差运算(Symmetric Differences Operation)。

例：{1,2,3,4} ⊕{3,4,5,6}={1,2,5,6}；

{a, b, c}⊕ϕ ={a, b, c}。

- **定理3.2：集合恒等式：**

1.等幂律：A ∪A=A，A ∩A=A;

2.结合律：(A∪B)∪C=A∪(B∪C)，(A ∩ B) ∩ C=A ∩(B ∩ C)；

3.交换律：A ∪B=B ∪A，A ∩B=B ∩A；

3.2 集合的运算

4. 分配律：A∪(B∩C)=(A ∪B) ∩(A ∪C)，A ∩(B ∪C)=(A ∩B)∪(A ∩C)；
5. 同一律：A ∪ ϕ =A，A ∩U=A；
6. 零律：A ∪U=U，A ∩ ϕ = ϕ ；
7. 排中律：$A\cup\overline{A}=U$ ；
8. 矛盾律：$A\cap\overline{A}=\phi$ ；
9. 吸收律：A∪(A ∩B)=A，A∩ (A ∪B)=A；
10. 德摩根律：~(A∪B)=~A ∩~B，~(A ∩B)=~A∪~B
11. 双重否定律：$\overline{\overline{A}}=A$；
12. 补交转换律：$A-B=A\cap\overline{B}$ 。

3.2 集合的运算

- **例3-6：证：**

$(1): A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B);$

$(2): (A - B) \oplus B = A \cup B;$

(3):A，B为集合，已知A-B=B-A，证明：A=B。

证：(1): $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$

$= (A \cup B) \cap U \cap U \sim (A \cap B)$

$= (A \cup B) \cap \sim (A \cap B)$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

3.2 集合的运算

(2):

$$(A-B)\oplus B=(A\cap\overline{B})\oplus B$$
$$=((A\cap\overline{B})-B)\cup(B-(A\cap\overline{B}))$$
$$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{B})\cup(B\cap\sim(A\cap\overline{B}))$$
$$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap(\overline{A}\cup B))$$
$$=(A\cap\overline{B})\cup B$$
$$=A\cup B$$

(3): $A-B=B-A\Rightarrow A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$

$$\Rightarrow A\cap\overline{B}\cap B=B\cap\overline{A}\cap B$$
$$\emptyset=B\cap\overline{A}\Rightarrow\emptyset=B-A\Rightarrow B\subseteq A$$

同理：A$\subseteq$B，∴A=B。

3.3 有限集合的计数

- **1. 鸽笼原理(Pigeonhole Principle)**
- **定理3.3：若有n+1个鸽子住进n个鸽笼，则至少有一个鸽笼至少住进2只鸽子。**

证明：(用反证法)假设每个鸽笼至多只住进1只鸽子，则n个鸽笼至多住进n只鸽子，这与有n+1只鸽子矛盾。∴命题成立。

- **例3-7：求证：设有n+1个正整数** $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$**，则总可以找到一对数** a_i和a_j **(1≤i<j≤n+1)使得它们的差能被n整除。**

证明：$a_i - a_1 (i = 2, \cdots, n+1)$ **取被n整除的余数，若n个余数互不相同，则必有一个为0，不妨设为** $a_{i_0} - a_1$

则$a_{i_0} - a_1$ **能被n整除。否则，由鸽笼原理，必有2个**

3.3 有限集合的计数

余数相同，不妨设为$a_i - a_1$与$a_j - a_1$，则$a_i - a_j$能被n整除。

- 定理3.4：(鸽笼原理的推广)若有n只鸽子住进m个鸽笼，则至少有一个鸽笼至少住进$\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$只鸽子
- 2.容斥原理(包含排斥原理)

所谓容斥，是指我们计算某类物的数目时，要排斥那些不应包含在这个计数中的数目，但同时要包含那些被错误地排斥了的数目，以此补偿，这种原理称为容斥原理(The Principle of Inclusion-exclusion)，又称为包含排斥原理。

- 定理3.5：设A和B是任意有限集合，则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

3.3 有限集合的计数

证：当A∩B为空时，$|A\cup B|=|A|+|B|$；

当A∩B不空时，$|A|=|A\cap\overline{B}|+|A\cap B|, |B|=|\overline{A}\cap B|+|A\cap B|$

而 $|A\cap\overline{B}|+|\overline{A}\cap B|+|A\cap B|=|A\cup B|$

所以：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

- **推论3.1：设U为全集，A和B是任意有限集合，则**

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|U|-(|A|+|B|)+|A\cap B|$$

证：$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\sim(A\cup B)|=|U-(A\cup B)|=|U|-|A\cup B|$

$$=|U|-(|A|+|B|)+|A\cap B|$$

推广到n个有限集合的情况：

3.3 有限集合的计数

- **定理3.6：设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是任意有限集合，则**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + (-1)^{2-1} \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + (-1)^{3-1} \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- **推论3.2：设U为全集，$A_1, A_2, \cdots A_n$ 则**

$$|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \overline{A_n}| = |U| + (-1) \sum_{i=1}^{n} |A_i| + (-1)^2 \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + (-1)^3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

证明：用数学归纳法。

3.3 有限集合的计数

- **例3-8：** 某软件公司的程序员都熟悉Java或VB，其中熟悉Java的共47人，熟悉VB的共35人，两者都熟悉的共23人，问该软件公司共有多少程序员？

解：设A，B分别表示为熟悉Java和VB的程序员，则该公式的程序员集合为A∪B由容斥原理得：

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=47+35-23=59.$

- **例3-9：** 计算中心要安排Pascal，VB，C三门课程的上机，三门课程的学生分别有110人，98人，75人，同时学Pascal和VB的有35人，同时学Pascal和C的有50人，三门都学的有6人，同时学VB和C的有19人，求一共有多少学生？

3.3 有限集合的计数

解：设x是同时学Pascal和VB，但没有学C的学生数，
y是同时学Pascal和C，但没有学VB的学生数，

z是同时学C和VB，但没有学Pascal的学生数，

P是仅学Pascal的学生，B是仅学VB的学生，C是仅学C的学生；

则：$x+6=35 \Rightarrow x=29$, $y+6=50 \Rightarrow y=44$, $z+6=19 \Rightarrow z=13$,

$x+y+6=110-P \Rightarrow P=31$, $x+z+6=98-B \Rightarrow B=50$,

$y+z+6=75-C \Rightarrow C=12$,

总计$=31+29+50+44+6+13+12=185$；

解二：用容斥原理：

总计$=110+98+75-35-50-19+6=185$