第五章 函数

函数也叫映射，交换，是数学中的一个基本概念，在高数中，函数的概念是从变量的角度提出来的，这种函数一般是连续或间断连续的函数，这里将连续函数的概念推广到离散量的讨论，即将函数看作一种特殊的二元关系。

5.1 函数的基本概念

- 定义5.1：设f是集合A到B的关系，如果对每个x∈A，都存在唯一y∈B，使得<x, y>∈f，则称关系f为A到B的函数(Function)，记为f:A→B。当<x, y>∈f时，正常记为y=f(x)，x称为自变量，y为x在f下的函数值。

(1) dom f=A，称为函数的定义域；

(2) ran f⊆B，称为函数的值域，ran f也可记为f(A)，为A在f下的像；

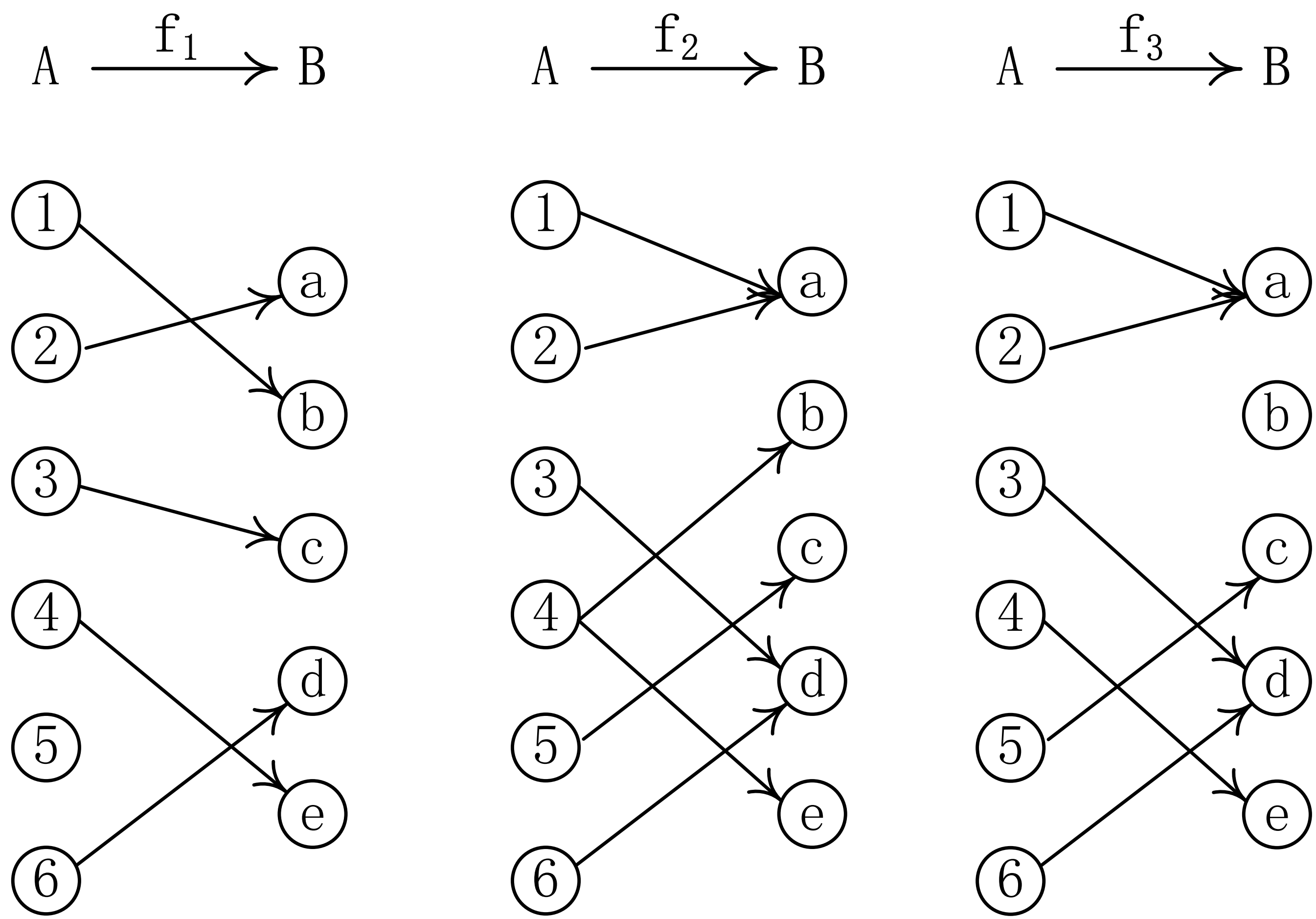
(3) $<x,y>\in f \wedge <x,z>\in f \Rightarrow y=z$；

(4) |f|=|A|；

(5) f(x)仅表示一个变值，f表示一个集合， ∴ $f \neq f(x)$

5.1 函数的基本概念

- **例5-1：判断下图的关系是否是函数：**



5.1 函数的基本概念

- **例5-2：** 设A={a，b}，B={1, 2}，则A×B={<a, 1>, <a, 2>，<b, 1>，<b, 2>}，此时A到B的不同关系有16个；A到B的不同的函数有4个；

$$f_1=\{<a,1>,<b,1>\},f_2=\{<a,1>,<b,2>\},$$

$$f_3=\{<a,2>,<b,1>\},f_4=\{<a,2>,<b,2>\}.$$

- (1) A×B的任何一个子集，都是A到B的关系，因此，从A到B的不同的关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个，但从A到B的不同的函数却只有 $|B|^{|A|}$ 个；
- (2) 每个函数的基数为|A|，但关系的基数可以为0一直到|A|×|B|；
- (3) 每个函数的第一个元素一定互不相同；
- (4) 将A到B的一切函数构成的集合记为 $B^A=\{f\mid f:A\to B\}$

5.2 函数的性质

- 定义5. 2：设f是从集合A到B的函数：

(1) 对 $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从A到B的单射(Injection)；

(2) 若ran f=B，则称f为A到B的满射(Surjection)；

(3) 若f既是单射，又是满射，则称f为从A到B的双射(Bijection)或一一映射；

(4) 若A=B，则称f为A上的函数，当A上的函数f是双射，称f为变换(Transform)。

➢ (1) f是单射的必要条件为|A|≤|B|，(2) f为满射的必要条件为|B|≤|A|，(3) f为双射的必要条件为|A|=|B|。

5.2 函数的性质

- **例5-3：确定下列关系哪些是函数，若是函数，是否是单射，满射，双射。**

(1) 设A=B=R, $f_1=\{<x,x^2>|x\in R\}$, $f_2=\{<x,x+1>|x\in R\}$,

$f_3=\{<x,1/x>|x\in R\}$, $f_4=\{<x,e^x>|x\in R\}$, $f_5=\{<x,\sqrt{x}>|x\in R\}$.

(2) $A=R^+, B=R, f=\{<x,\ln x>|x\in R\}$.

解：（1）f_1：R到R的函数, f_2：R到R的双射函数, f_3：不是R到R的函数, f_4：R到R的单射函数, f_5：不是R到R的函数；

(2) f为 R^+ 到R的双射函数。

5.2 函数的性质

- **例5-4：设<A，≼>是偏序集，对**$\forall a \in A$,令$f(a) = \{x \mid x \in A \wedge x \le a\}$**，证(1)f是A到ρ(A)的单射函数，且(2)**$\forall a,b \in A, a \le b$则$f(a) \subseteq f(b)$。

证明：(1) $\forall a \in A, f(a) = \{x \mid x \in A \wedge x \le a\} \subseteq A, \therefore f(a) \in \rho(A)$

∴f是A到ρ(A)的映射；

$\forall a,b \in A, a \ne b$

①：若a，b存在偏序关系，不妨设a ≼b，由于"≼"是反对称的，$\therefore b \not\le a$**，从而**$b \notin f(a) = \{x \mid x \in A \wedge x \le a\}$**，而"≼"自反，∴ b ≼b，即** $b \in f(b) \therefore f(a) \ne f(b)$

5.2 函数的性质

②若a，b不存在偏序关系，则 $a \not\leq b$，从而

$a \notin f(b)=\{x \mid x \in A \wedge x \leq b\}$，而“≤”自反，即

$a \in f(a) \therefore f(a) \neq f(b)$

∴f是A到ρ(A)的单射；

(2) $\forall a,b \in A$，若$a \leq b$，任取$y \in f(a)$，则$y \leq a$，而$a \leq b$

由传递性，有y ≤b，$\therefore y \in f(b), \therefore f(a) \subseteq f(b)$

- 定理5.1：设A，B是有限集合，且|A|=|B|，f是A到B的函数，则f是单射当且仅当f是满射。

5.2 函数的性质

证明：必要性：设f是单射，f是A到f(A)的满射，

∴f是A到f(A)的双射，因此|A|=|f(A)|，由于|f(A)|=|B|，且 $f(A)\subseteq B$**，得f(A)=B，**

∴f是A到B的满射；

充分性：设f是满射，$\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$,若$f(x_1)=f(x_2)$

由于f是A到B的满射，∴f也是$A-\{x_1\}$**到B的满射，故**

$|A-\{x_1\}|\geq|B|$,即$|A|-1\geq|B|$，矛盾 $\therefore f(x_1)\neq f(x_2)$

即f是A到B的单射。

5.3 函数的复合运算

- **定义5. 3：** **常函数，恒等函数，单调函数，特征函数，自然映射。**
- **定理5. 2：** **设F，G是函数，则F∘G也是函数，且满足：**（1）$dom(F\circ G)=\{x\mid x\in domF\wedge F(x)\in domG\}$

（2）$\forall x\in dom(F\circ G)$有$F\circ G=G(F(x))$

证明:(1)$\forall x,x\in dom(F\circ G)\Rightarrow \exists t\exists y(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)$

$\Rightarrow \exists t(x\in domF\wedge t=F(x)\wedge t\in domG)$

$\Rightarrow x\in\{x\mid x\in domF\wedge F(x)\in domG\}$

(2)$\forall x,x\in domF\wedge F(x)\in domG$

$\Rightarrow <x,F(x)>\in F\wedge <F(x),G(F(x))>\in G\Rightarrow <x,G(F(x))>\in F\circ G$

$\Rightarrow x\in domF\circ G\wedge F\circ G(x)=G(F(x))$

5.3 函数的复合运算

- **例5-5：设f:R→R，g:R→R，h:R→R，满足**

$$f(x)=x+3, g(x)=(x+1)^2, h(x)=\frac{x}{2}, \text{求} f\circ g，g\circ f, (f\circ g)\circ h$$

解：$f\circ g(x)=g(f(x))=g(x+3)=(x+3+1)^2=(x+4)^2;$

$$g\circ f(x)=f(g(x))=f((x+1)^2)=(x+1)^2+3=x^2+2x+4;$$

$$(f\circ g)\circ h(x)=h(f\circ g(x))=h((x+4)^2)=\frac{(x+4)^2}{2}.$$

➢ **有关关系运算的一切定理都可推广到函数中来。**

- **定理5.3：设f:A→B，g:B→C，(1)如果f，g满射，则f o g:A→C满射；(2)若f，g单射，则f o g:A→C单射；(3)若f，g双射，则f o g:A→C双射。**

5.3 函数的复合运算

- **定理5.4：设f:A→B，g:B→C，则f∘g:A→C，（1）若f∘g:A→C满射，则g满射；（2）若f∘g:A→C单射，则f单射；（3）若f∘g:A→C双射，则g满射，f单射。**

证明:(1)$\forall c \in C$, $f \circ g$满射，则存在$a \in A$,使得$f \circ g(a) = g(f(a)) = c$

而f为函数$\therefore$存在$b = f(a)$,即$\exists b \in B$,使得$g(b) = c$,$\therefore g$满射；

(2)任取$a_1 \neq a_2 \in A$,则由$f \circ g$单射知：$f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$

若$f(a_1) = f(a_2)$,则$f \circ g(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = f \circ g(a_2)$

矛盾，$\therefore f$单射；

(3)由(1),(2)知(3)成立。

5.4 函数的逆运算

- **定理5.5：若f:A→B是双射的，则f的逆关系 f^{-1} 是B到A的双射。**

证明:(1)先证明f^{-1}是B到A的函数

f是函数,$\therefore f^{-1}$是关系，且$domf^{-1}=ranf=B, ranf^{-1}=domf=A$

对$\forall b\in B=domf^{-1}$,若$\exists a_1,a_2\in A$,使得$<b,a_1>\in f^{-1}$,

$<b,a_2>\in f^{-1}$,则由逆关系知:$<a_1,b>\in f,<a_2,b>\in f$,而$f$单射

$\therefore$由$b=f(a_1)=f(a_2)$得$a_1=a_2$,$\therefore f^{-1}$是函数;

(2)$ranf^{-1}=domf=A$,由f的定义知，f^{-1}为满射;

(3)对$\forall b_1,b_2\in B$,若$b_1\neq b_2$，若$f^{-1}(b_1)=f^{-1}(b_2)=a$,即

$<b_1,a>\in f^{-1}\wedge<b_2,a>\in f^{-1}\Rightarrow<a,b_1>\in f\wedge<a,b_2>\in f$

与f是函数矛盾,$\therefore f^{-1}(b_1)\neq f^{-1}(b_2)$,$\therefore f^{-1}$是单射;

$\therefore f^{-1}$是双射。

5.4 函数的逆运算

- 只有双射函数的逆关系才是函数，其它函数的逆关系都不是函数。

- **定理5.6：** 设f:A→B，双射，则

$$f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A, f = f \circ I_B = I_A \circ f$$

- **定义5.5：** 设f:A→B，双射，则 f^{-1} 为f的逆函数或反函数(Inverse Function)。

- **例5-6：** 设f:R→R满足 $(1)\ f = \{<x, x^2>|\ x \in R\}, (2)\{<x, x+1>|\ x \in R\}$.

解:(1)对 $\forall x \in R$，有 $(-x)^2 = x^2$，即 $f(x) = f(-x)$，$\therefore$ f 不是单射，f 的逆函数不存在；

(2) f 双射，f 的逆函数存在，且有 $f^{-1} = \{<x, x-1>|\ x \in R\}$.

5.5 置换

- **定义5.6：设A是有限集合，A={ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ }，从A到A的双射函数称为A上的置换或排列，记为P:A→A，n称为置换的阶(Order)。n阶置换P:A→A常表示为：**

$$P=\begin{pmatrix} a_1,a_2,\cdots,a_n \\ a_1',a_2',\cdots,a_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\ , & a_2,\cdots, & a_n \\ P(a_1), & P(a_2),\cdots, & P(a_n) \end{pmatrix}$$

其中，$a_i'=P(a_i),i=1,2,\cdots,n$

- (1) $P(a_1),\cdots P(a_n)$是$a_1,\cdots a_n$的一个排列，排列的总 数位$n!$个；
- **(2) P的逆函数P^{-1}称为逆置换；**
- **(3) 两个置换的复合就是将它们作为函数求复合函数。**

5.5 置换

- 假设P:A→A为n阶置换， A={ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ }，对 $a_i\in A$ 考虑序列 $a_i,P(a_i),P^2(a_i),\cdots$ ，由于{ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ }是有限集，则存在最小正整数 r_i ，使得 $P^{r_i}(a_i)=a_i$

其中 $a_i,P(a_i),P^2(a_i),\cdots,P^{r_i-1}(a_i)$ 互不相同。

$(a_i,P(a_i),P^2(a_i),\cdots,P^{r_i-1}(a_i))$ 称为阶 r_i 的一个循环。

当 $r_i<n$ 时，至少有一个 $a_j\in A$，不包含在

$(a_i,P(a_i),P^2(a_i),\cdots,P^{r_i-1}(a_i))$ 中；

对 a_j 重复 a_i 相同的过程，可得

$$(a_j,P(a_j),P^2(a_j),\cdots,P^{r_j-1}(a_j))$$

5.5 置换

若 a_j 的循环与 a_i 的循环没有相同的元素时，称它们不相交；

继续这个过程， A={ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ }可以被分成若干子集，这些子集组成不同的循环

$$(a_i, P(a_i), P^2(a_i), \cdots, P^{r_i-1}(a_i)), (a_j, P(a_j), P^2(a_j), \cdots, P^{r_j-1}(a_j)),$$

$$\cdots, (a_m, P(a_m), P^2(a_m), \cdots, P^{r_m-1}(a_m))$$

把它们写在一起，称为置换的积(Product)。

- 例5-7： $P = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ h & g & b & f & e & d & a & c \end{pmatrix}$

5.5 置换

解：a的循环为 $(a, P(a), P^2(a), P^3(a), P^4(a))$，即(a，h，c，b，g)；

d的循环为 $(d, P(d))$，即(d，f)；

e的循环为(e)。

置换P被分成不相交的循环的积为(a，h，c，b，g)（d，f）（e）。