

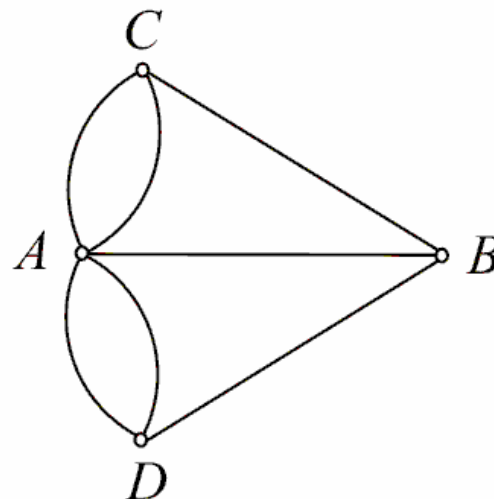
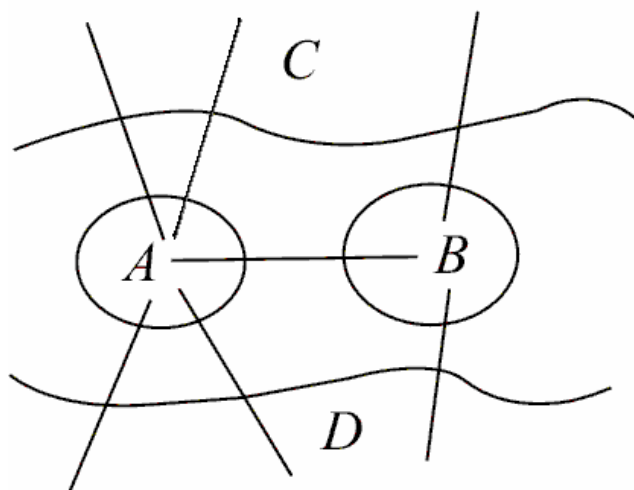


主要内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 二部图与匹配
- 平面图
- 着色



历史背景：哥尼斯堡七桥问题



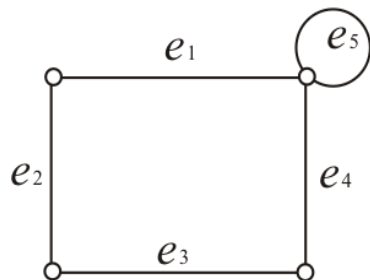


定义13.1 图(无向图或有向图)中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的通路称为**欧拉通路**. 图中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的回路称为**欧拉回路**. 具有欧拉回路的图称为**欧拉图**. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为**半欧拉图**.

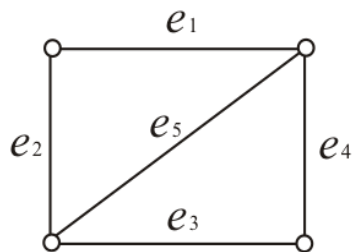
说明:

规定平凡图为欧拉图.

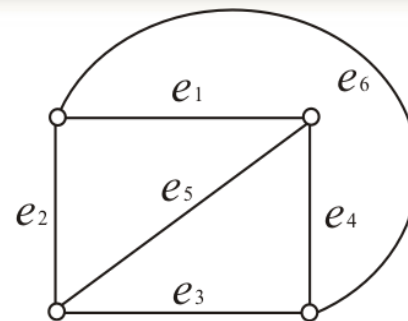
环不影响图的欧拉性.



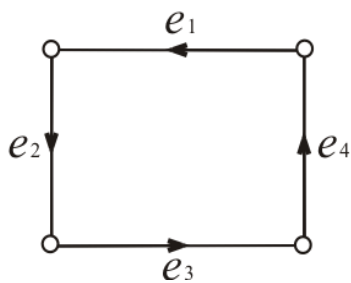
欧拉图



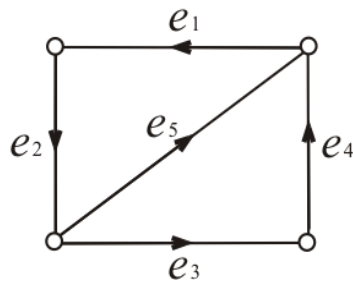
半欧拉图



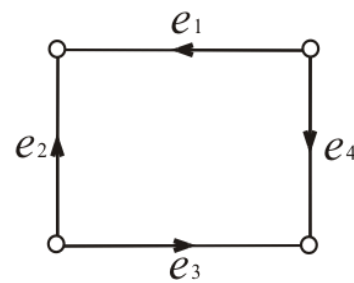
不是



欧拉图



半欧拉图



不是



定理13.1 (1) 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且没有奇度顶点.

(2) 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

(3) 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

(4) 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点, 其中一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

例1 设 G 是非平凡的欧拉图, 则 $\lambda(G) \geq 2$.

证 只需证明 G 的任意一条边 e 都不是桥. 设 C 是一条欧拉回路, e 在 C 上, 因而 $G-e$ 仍是连通的, 故 e 不是桥.



算法:

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0$, $i=0$.

(2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$,

如果 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边, 则计算结束;

否则按下面方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1} :

(a) e_{i+1} 与 v_i 关联;

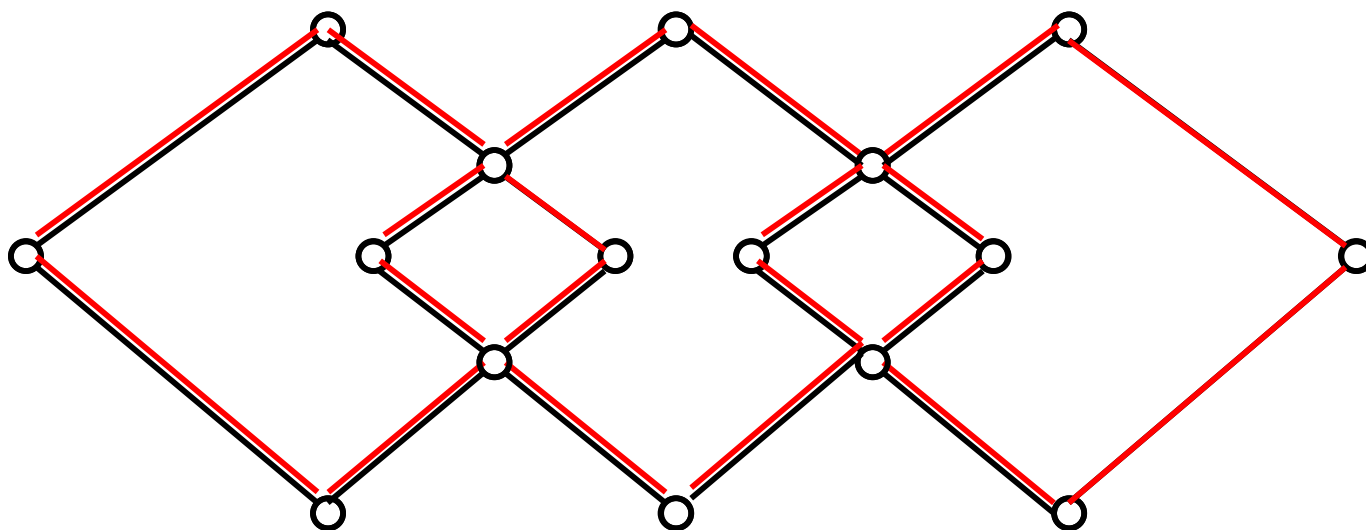
(b) 除非无别的边可供选择, 否则 e_{i+1} 不应为 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的桥.

设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$, 把 $e_{i+1} v_{i+1}$ 加入 P_i .

(3) 令 $i=i+1$, 返回(2).

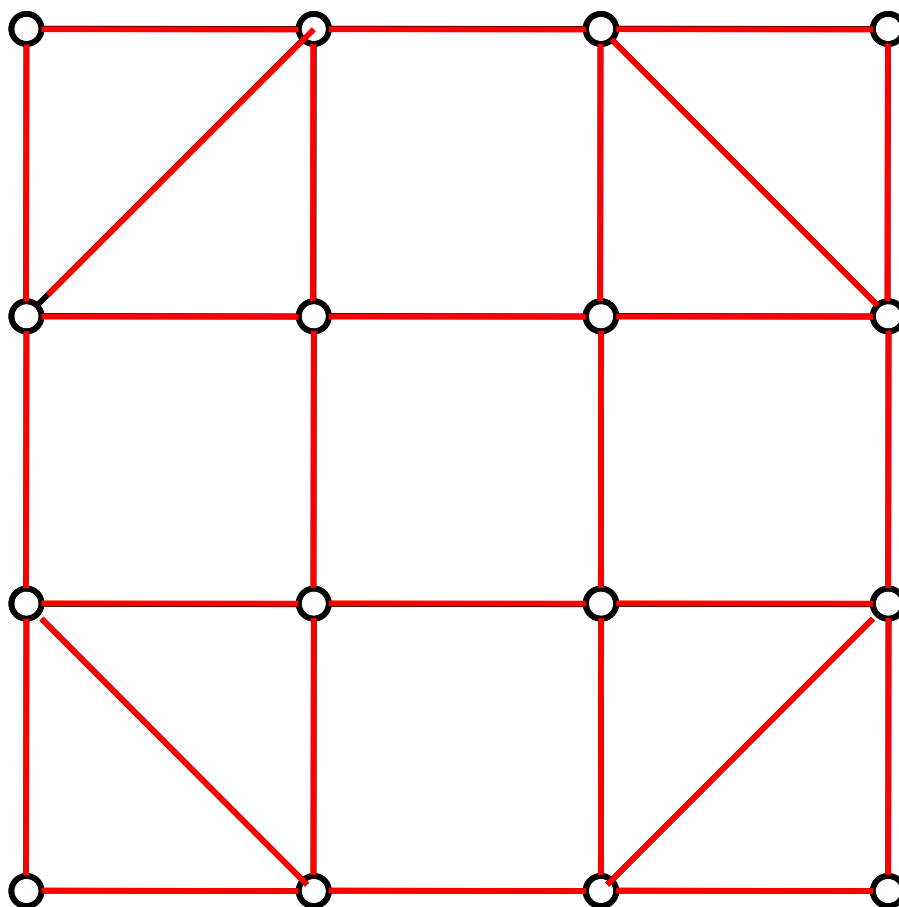


一笔画出一条欧拉回路



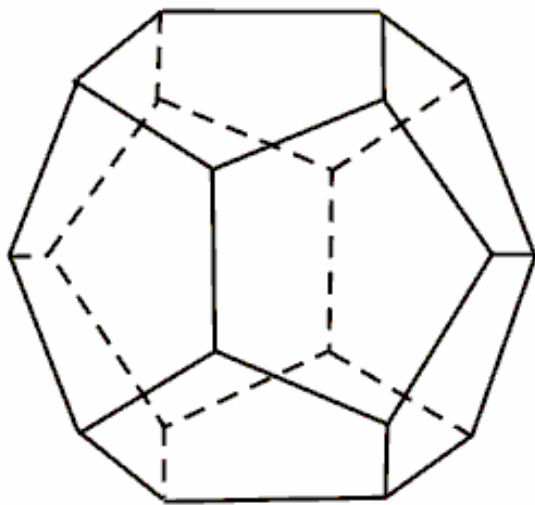


一笔画出一条欧拉回路

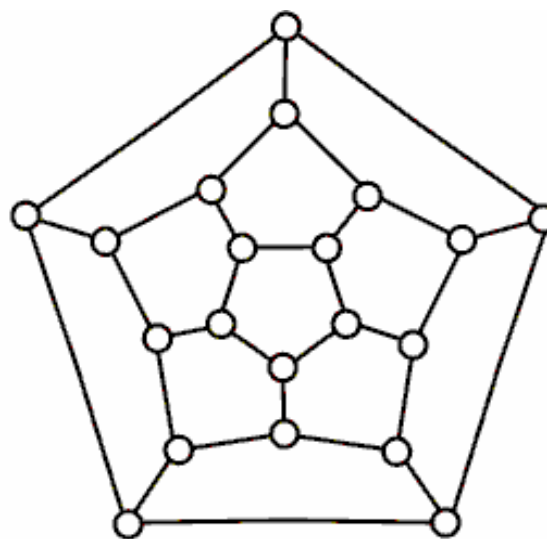




历史背景：哈密顿周游世界问题



(1)



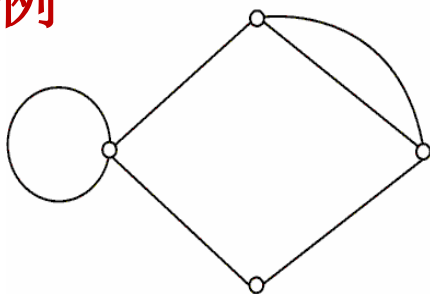
(2)



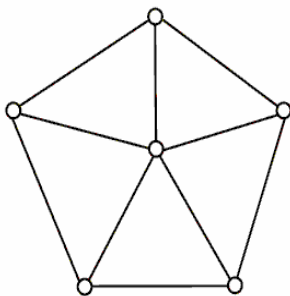
定义13.2 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称作**哈密顿通路**. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作**哈密顿回路**. 具有哈密顿回路的图称作**哈密顿图**. 具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图称作**半哈密顿图**.

规定: 平凡图是哈密顿图.

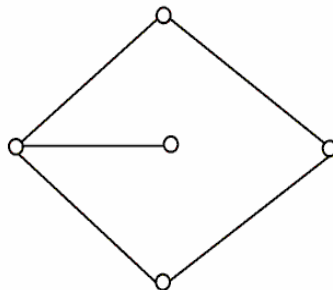
例



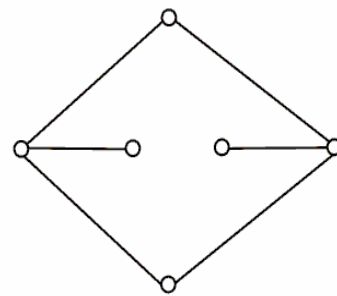
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图



不是



定理13.2 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是哈密顿图, 对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, 均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$

证 设 C 为 G 中一条哈密顿回路

$$(1) p(C-V_1) \leq |V_1|$$

$$(2) p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1| \quad (\text{因为 } C \subseteq G)$$

推论 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图, 对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ 均有

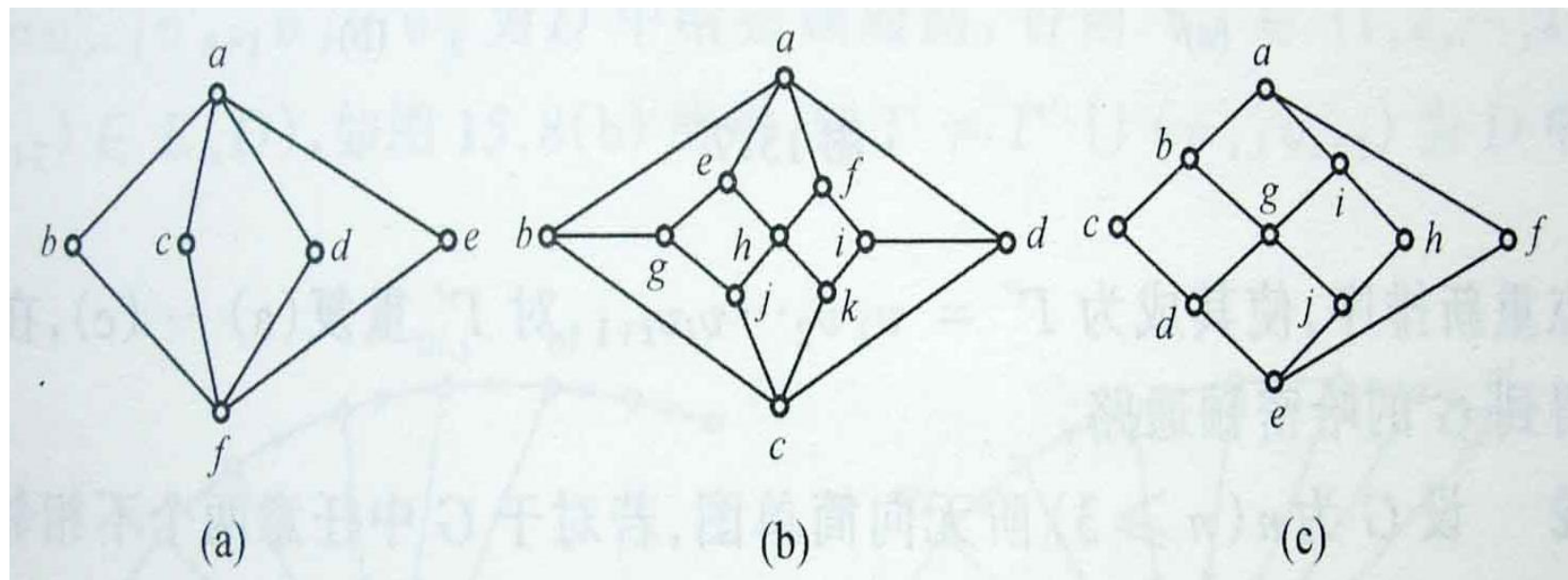
$$p(G-V_1) \leq |V_1| + 1$$

证 设 Γ 为从 u 到 v 的哈密顿通路, 令 $G' = G \cup (u, v)$, 则 G' 为哈密顿图. 于是

$$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u, v)) \leq p(G'-V_1) + 1 \leq |V_1| + 1$$



例2 判断下面的图是不是哈密顿图, 是不是半哈密顿图.



解 (a) 取 $V_1 = \{a, f\}$, $p(G - V_1) = |\{b, c, d, e\}| = 4 > |V_1| = 2$, 不是哈密顿图, 也不是半哈密顿图.

(b) 取 $V_1 = \{a, g, h, i, c\}$, $p(G - V_1) = |\{b, e, f, j, k, d\}| = 6 > |V_1| = 5$, 不是哈密顿图. 而 $baegjckhfid$ 是一条哈密顿通路, 是半哈密顿图.

(c) $abcdgihjefa$ 是一条哈密顿回路, 是哈密顿图.



例3 设 G 为 n 阶无向连通简单图, 若 G 中有割点或桥, 则 G 不是哈密顿图.

证 设 v 为割点, 则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$.

K_2 有桥, 它显然不是哈密顿图. 除 K_2 外, 其他有桥的连通图均有割点.



定理13.3 设 G 是 n 阶无向简单图, 若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1 \quad (*)$$

则 G 中存在哈密顿通路.

推论 设 G 为 n ($n \geq 3$) 阶无向简单图, 若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n \quad (**)$$

则 G 中存在哈密顿回路.

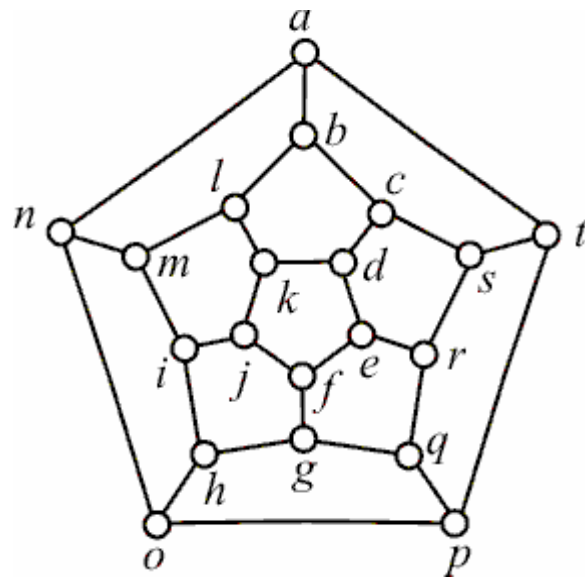


判断是否为(半)哈密顿图至今还是一个难题.

- (1) 观察出一条哈密顿回路或哈密顿通路.
- (2) 证明满足充分条件.
- (3) 证明不满足必要条件.

例4 证明右图(周游世界问题)是哈密顿图
证 $a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t a$
是一条哈密顿回路.

注意, 此图不满足定理11.3推论的条件.



例5 完全图 K_n ($n \geq 3$)是哈密顿图.

证 任何两个顶点 u, v , $d(u) + d(v) = 2(n-1) \geq n$



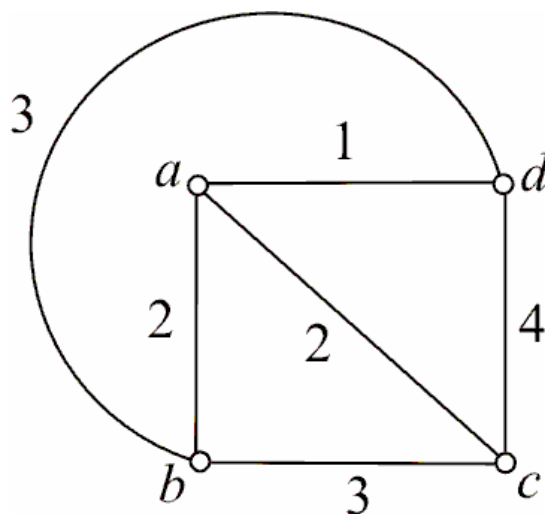
货郎问题: 有 n 个城市, 给定城市之间道路的长度(长度可以为 ∞ , 对应这两个城市之间无交通线). 货郎从某个城市出发, 要经过每个城市一次且仅一次, 最后回到出发的城市, 问如何走才能使他走的路线最短?

图论方法描述如下: 设 $G=\langle V, E, W \rangle$ 为一个 n 阶完全带权图 K_n , 各边的权非负, 且可能为 ∞ . 求 G 中的一条最短的哈密顿回路.

不计出发点和方向, $K_n (n \geq 3)$ 中有 $(n-1)!/2$ 条不同的哈密顿回路



例6 求下面带权图 K_4 中最短哈密顿回路.



解 $C_1 = a b c d a, \quad W(C_1) = 10$

$C_2 = a b d c a, \quad W(C_2) = 11$

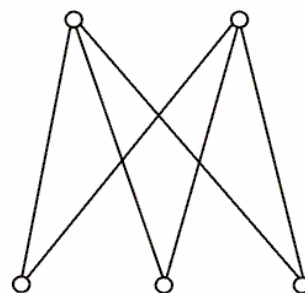
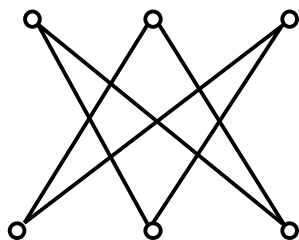
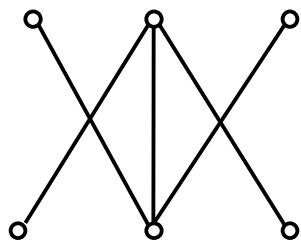
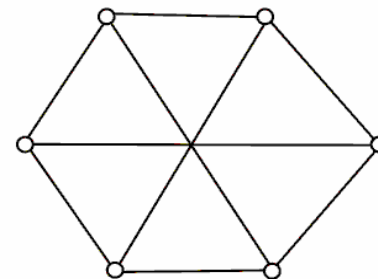
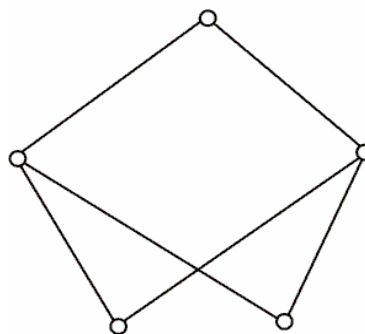
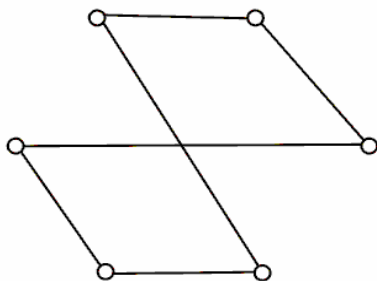
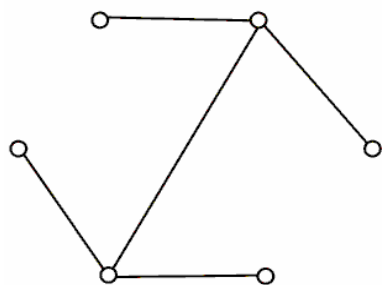
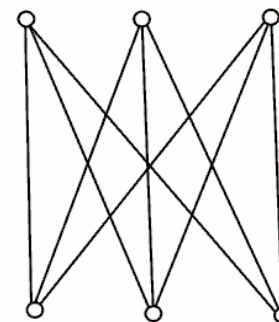
$C_3 = a c b d a, \quad W(C_3) = 9$ 最短



定义13.3 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为一个无向图, 若能将 V 分成 V_1 和 V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), 使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为**二部图** (或称**二分图**, **偶图**), 称 V_1 和 V_2 为**互补顶点子集**, 常将二部图 G 记为 $\langle V_1, V_2, E \rangle$. 又若 G 是简单二部图, V_1 中每个顶点均与 V_2 中所有的顶点相邻, 则称 G 为**完全二部图**, 记为 $K_{r,s}$, 其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.



例

 $K_{2,3}$  $K_{3,3}$



定理13.4 无向图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇圈.

证 必要性. 若 G 中无圈, 结论成立. 若 G 中有圈, 设 G 中的一个圈 $C=v_1v_2\dots v_lv_1$, $l\geq 2$. 不妨设 $v_1\in V_1$, v_1, v_2, \dots, v_l 依次交替属于 V_1, V_2 且 $v_l\in V_2$, 因而 l 为偶数. 得证 C 为偶圈.

充分性. 不妨设 G 为连通图, 否则可对每个连通分支进行讨论, 孤立点可根据需要分属 V_1 和 V_2 . 设 v_0 为 G 中任意一个顶点, 令

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{ 为偶数} \}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{ 为奇数} \}$$

$d(v_0, v)$ 是 v_0 到 v 的最短路径的边数(每条边的权为1). $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$. 要证 V_1 中任意两点不相邻.

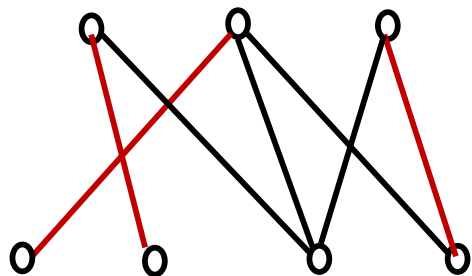


假若存在 $v_i, v_j \in V_1$ 相邻, 记 $e=(v_i, v_j)$, 设 v_0 到 v_i, v_j 的最短路径分别为 Γ_i, Γ_j , 由 Γ_i, Γ_j 和 e 构成一条长度为奇数的回路. 这条回路可能是一条复杂回路, 可以分解成若干由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路(实际上是每条边重复一次的路径)和由 Γ_i, Γ_j 不共有的边及 e 构成的圈. 由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路的长度为偶数, 故在由 Γ_i, Γ_j 不共有的边(可以还包括 e)构成的圈中一定有奇圈, 这与已知条件矛盾. 得证 V_1 中任意两顶点不相邻. 由对称性, V_2 中也不存在相邻的顶点, 得证 G 为二部图.

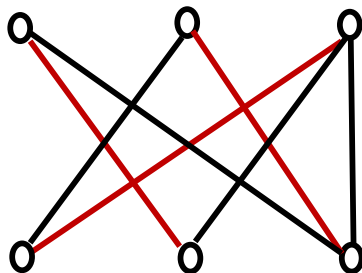


定义13.4 设 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, $M \subseteq E$, 如果 M 中的任意两条边都不相邻, 则称 M 是 G 的一个**匹配**. G 中边数最多的匹配称作**最大匹配**. 又设 $|V_1| \leq |V_2|$, 如果 M 是 G 的一个匹配且 $|M|=|V_1|$, 则称 M 是 V_1 到 V_2 的**完备匹配**. 当 $|V_2|=|V_1|$ 时, 完备匹配又称作**完美匹配**.

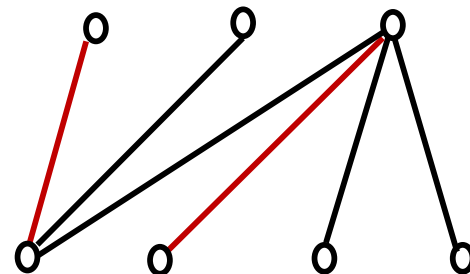
例



完备匹配



完美匹配



最大匹配

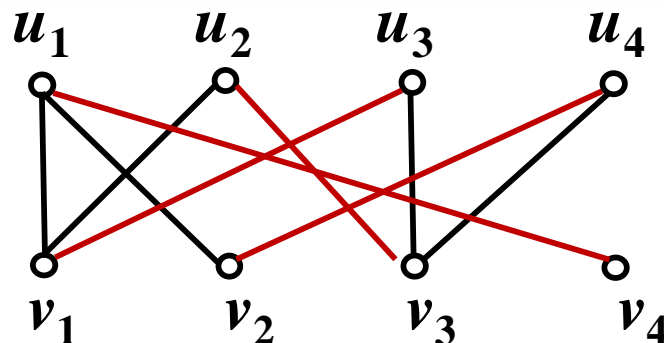
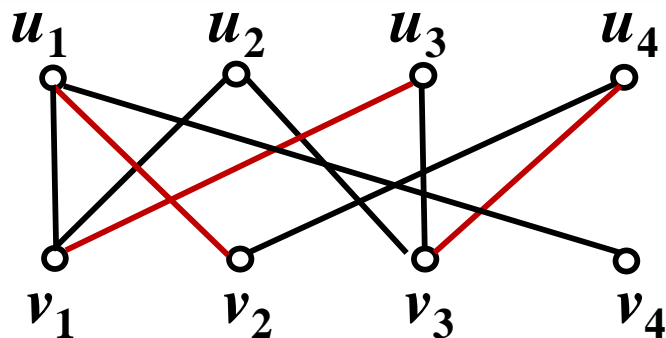


定义13.5 设 M 是二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 的一个匹配. 称 M 中的边为**匹配边**, 不在 M 中的边为**非匹配边**. 与匹配边相关联的顶点为**饱和点**, 不与匹配边相关联的顶点为**非饱和点**. G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称为**交错路径**, 起点和终点都是非饱和点的交错路径称为**可增广的交错路径**.

M 为 G 的完备匹配当且仅当 V_1 或 V_2 中的每个顶点都是饱和点.
 M 为 G 的完美匹配当且仅当 G 中的每个顶点都是饱和点.



例



左图, 饱和点: $u_1, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3$; 非饱和点: u_2, v_4 ;

可增广的交错路径 $\Gamma: u_2 v_3 u_4 v_2 u_1 v_4$. 由 Γ 得到多一条边的匹配.

设 M 为 G 的一个匹配, Γ 是关于 M 的可增广的交错路径, 则

$$M' = M \oplus E(\Gamma) = (M \cup E(\Gamma)) - (M \cap E(\Gamma))$$

是比 M 多一条边的匹配.

定理13.5 M 为 G 的最大匹配 $\Leftrightarrow G$ 中不含 M 的可增广的交错路径.



定理13.6 (Hall定理) 设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中 $|V_1| \leq |V_2|$, 则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k ($1 \leq k \leq |V_1|$) 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.(**相异性条件**)

证 必要性显然. 证充分性. 设 M 为 G 的最大匹配, 若 M 不是完备的, 则存在非饱和点 $v_x \in V_1$. 于是, 存在 $e \in E_1 = E - M$ 与 v_x 关联, 且 V_2 中与 v_x 相邻的顶点都是饱和点. 考虑从 v_x 出发的尽可能长的所有交错路径, 这些交错路径都不是可增广的, 因此每条路径的另一个端点一定是饱和点, 从而全在 V_1 中. 令

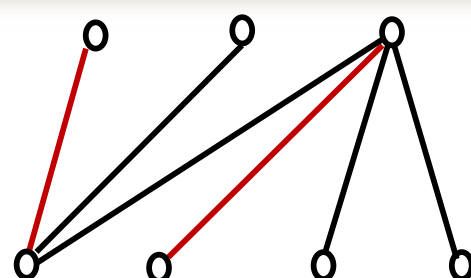
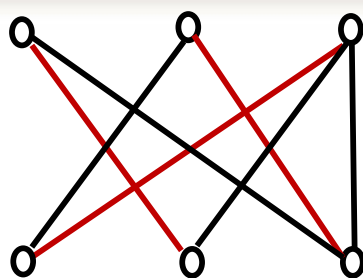
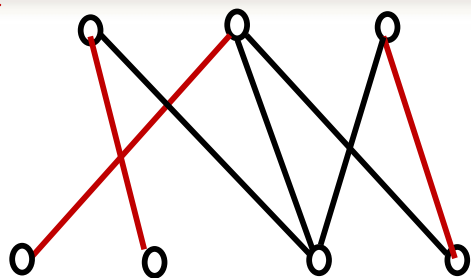
$$S = \{v \mid v \in V_1 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\}$$

$$T = \{v \mid v \in V_2 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\}$$

除 v_x 外, S 和 T 中的顶点都是饱和点, 且由匹配边给出两者之间的一一对应, 因而 $|S| = |T| + 1$. 这说明 V_1 中有 $|T| + 1$ 个顶点只与 V_2 中 $|T|$ 个顶点相邻, 与相异性条件矛盾.



例



前两个满足相异性条件, 第3个不满足

定理13.7 设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$, 如果存在 t 使得, V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.**(t条件)**

证 V_1 中任意 k ($1 \leq k \leq |V_1|$)个顶点至少关联 kt 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点. G 满足相异性条件.

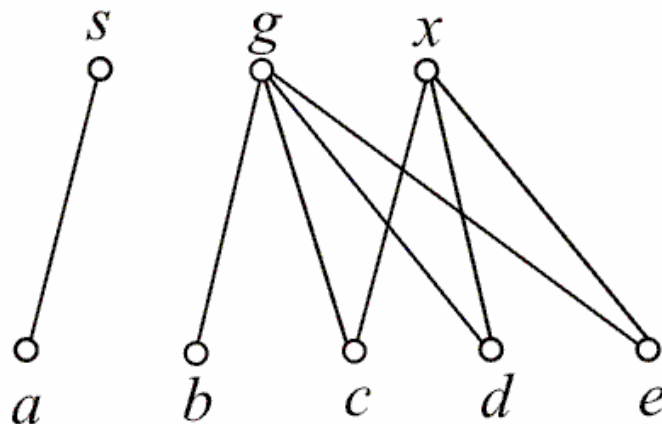
第2个图不满足 t 条件, 但有完备匹配.



例7 某课题组要从 a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 a 只想去上海, b 只想去广州, c, d, e 都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下, 共有几种派遣方案?

解 令 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中 $V_1=\{s, g, x\}$, s, g, x 分别表示上海、广州和香港. $V_2=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2, v \text{ 想去 } u\}$.

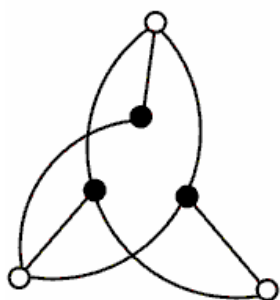
每个 V_1 到 V_2 的完备匹配给出一个派遣方案, 共有9种. 如 a 到上海, b 到广州, c 到香港.



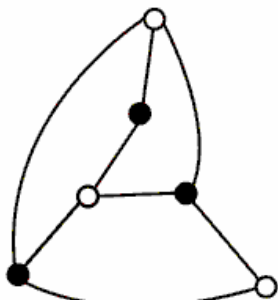


定义13.6 如果能将无向图 G 画在平面上使得除顶点处外无边相交, 则称 G 是**可平面图**, 简称**平面图**. 画出的无边相交的图称为 G 的**平面嵌入**. 无平面嵌入的图称为**非平面图**.

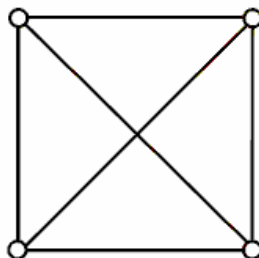
例



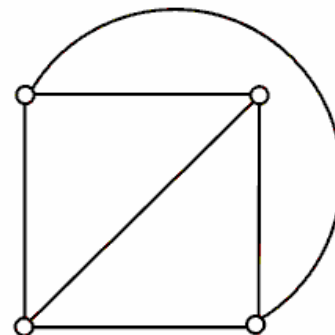
(1)



(2)



(3)



(4)

(2)是(1) 的平面嵌入, (4)是(3)的平面嵌入.



- $K_5, K_{3,3}$ 都是非平面图（定理11.13）
- 平行边与环不影响平面性.

定理13.8 平面图的子图都是平面图, 非平面图的母图都是非平面图.

例如, 所有度数不超过4的简单图都是平面图.

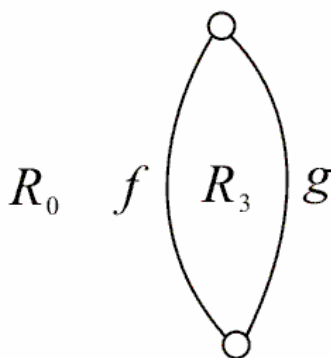
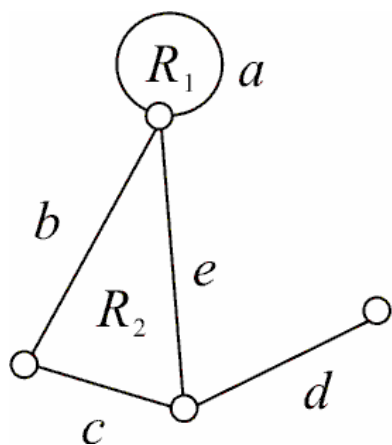
当 $|V_1|=1$ 和2时二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 是平面图.

$K_n (n \geq 5)$ 和 $K_{s,t} (s, t \geq 3)$ 都是非平面图.



定义13.7 给定平面图 G 的平面嵌入, G 的边将平面划分成若干个区域,每个区域都称为 G 的一个面,其中有一个面的面积无限,称为无限面或外部面,其余面的面积有限,称为有限面或内部面.包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界,边界的长度称为该面的次数.面 R 的次数记为 $\deg(R)$.

例



$$\deg(R_1)=1, \deg(R_2)=3, \\ \deg(R_3)=2, \deg(R_0)=8.$$



定理13.4 平面图各面次数之和等于边数的两倍.

证 对每一条边 e , 若 e 在两个面的公共边界上, 则在计算这两个面的次数时, e 各提供1. 而当 e 只在某一个面的边界上出现时, 它必在该面的边界上出现两次, 从而在计算该面的次数时, e 提供2.



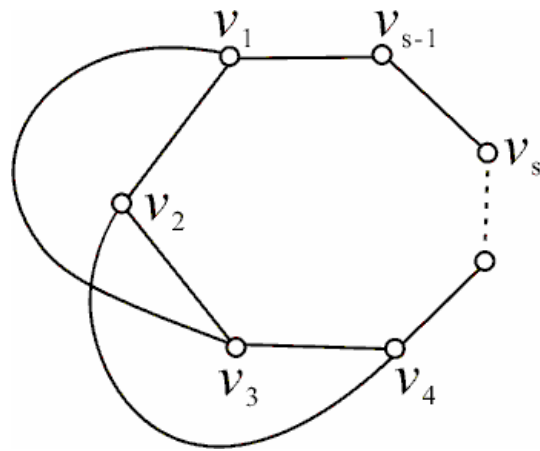
定义13.8 G 为简单平面图, 若在 G 的任意两个不相邻的顶点之间加一条边所得图为非平面图, 则称 G 为**极大平面图**.

例如, $K_5, K_{3,3}$ 删去一条边后是极大平面图

K_1, K_2, K_3, K_4 都是极大平面图.

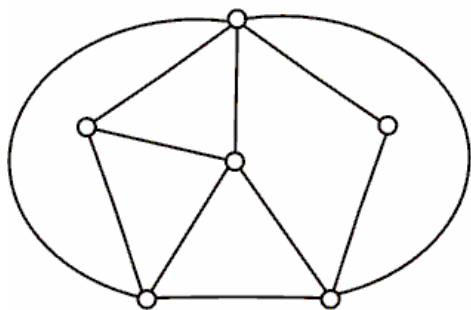
定理13.10 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶简单连通的平面图, G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为3.

证 现只证必要性. 各面次数都大于或等于3. 假如 $\deg(R_i) = s \geq 4$, 若 v_1 与 v_3 不相邻, 则在 R_i 内加边 (v_1, v_3) 不破坏平面性, 与 G 是极大平面图矛盾, 因而 v_1 与 v_3 必相邻, 且边 (v_1, v_3) 必在 R_i 外部. 同样地, v_2 与 v_4 也相邻且边 (v_2, v_4) 在 R_i 的外部. 于是, (v_1, v_3) 与 (v_2, v_4) 相交于 R_i 的外部, 与 G 是平面图矛盾.

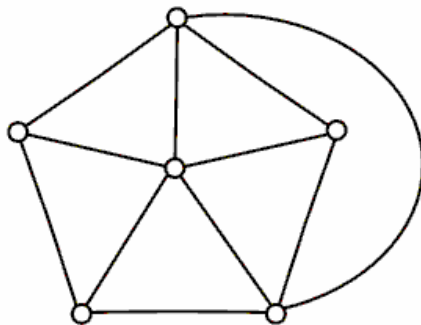




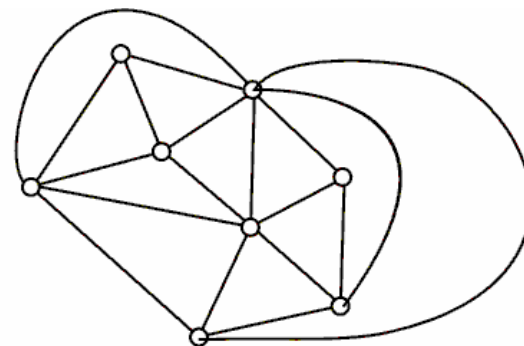
例 是否是极大平面图?



(1)



(2)



(3)

只有(3)为极大平面图



定义13.9 若在非平面图 G 中任意删除一条边, 所得图为平面图, 则称 G 为**极小非平面图**.

- $K_5, K_{3,3}$ 都是极小非平面图
- 极小非平面图必为简单图



定理13.11 设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

证 对 m 做归纳证明. $m=0$ 时, G 为平凡图, $n=1, m=0, r=1$, 成立.

设 $m=k(k \geq 0)$ 时结论成立. 当 $m=k+1$ 时, 分两者情况讨论:

(1) G 中有一个1度顶点 v , 令 $G'=G-v$, 仍是连通的, $n'=n-1$, $m'=m-1=k$, $r'=r$. 由归纳假设, $n'-m'+r'=2$. 于是

$$n-m+r = (n'+1)-(m'+1)+r' = n'-m'+r' = 2$$

(2) G 中没有1度顶点, 则每一条边都在某两个面的公共边界上. 任取一条边 e , 令 $G'=G-e$, 仍连通且 $n'=n$, $m'=m-1=k$, $r'=r-1$. 由归纳假设, $n'-m'+r'=2$. 于是

$$n-m+r = n'-(m'+1)+(r'+1) = n'-m'+r' = 2$$



推论 对于有 k 个连通分支的平面图 G , 有

$$n - m + r = k + 1$$

其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数, 边数和面数.

证 设 G 的连通分支为 G_1, G_2, \dots, G_k , 由欧拉公式

$$n_i - m_i + r_i = 2, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

G 的面数 $r = \sum_{i=1}^k r_i - (k-1)$. 于是,

$$\begin{aligned} 2k &= \sum_{i=1}^k (n_i - m_i + r_i) \\ &= n - m + r + k - 1 \end{aligned}$$

整理得

$$n - m + r = k + 1$$



定理13.12 设 G 为连通的平面图, 每个面的次数至少为 $l \geq 3$, 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证 由定理11.9及欧拉公式,

$$2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq l \cdot r = l(2 + m - n)$$

解得

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

定理13.13 $K_5, K_{3,3}$ 都是非平面图.

证 假设 K_5 是平面图, K_5 无环和平行边, 每个面的次数均大于等于3. 应该有

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$$

矛盾.



证(续) 假设 $K_{3,3}$ 是平面图, $K_{3,3}$ 中最短圈的长度为4, 每个面的次数均大于等于4. 应该有

$$9 \leq \frac{4}{4-2} (6-2) = 8$$

矛盾.

定理13.14 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图, 则 $m=3n-6$.

证 极大平面图是连通图, 由欧拉公式得 $r = 2+m-n$. 又由定理11.10的必要性, G 的每个面的次数均为3, 所以 $2m=3r$. 得
 $m=3n-6$.

推论 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图, 则
 $m \leq 3n-6$



如果简单连通平面图 G 的每个面的次数都等于3, 则 G 为极大平面图.

证 由定理13.9,

$$2m=3r$$

由欧拉公式,

$$r = 2 + m - n$$

整理得

$$m = 3n - 6$$

若 G 不是极大平面图, 则 G 中存在不相邻的顶点 u, v , 使得 $G' = G \cup (u, v)$ 还是简单平面图, 而 G' 的边数 $m' = m + 1, n' = n$, 故

$$m' > 3n' - 6$$

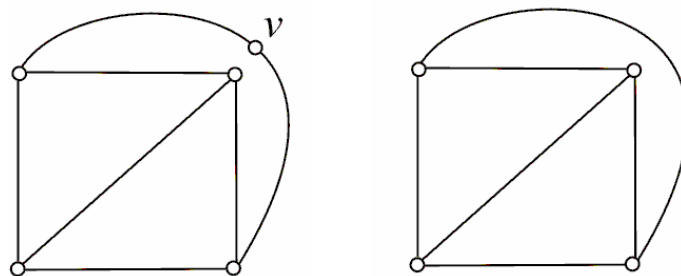
与定理13.14的推论矛盾.



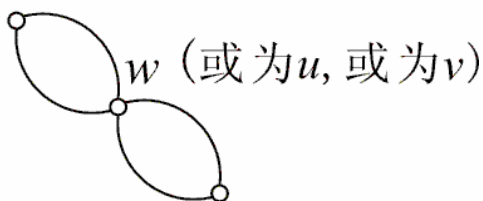
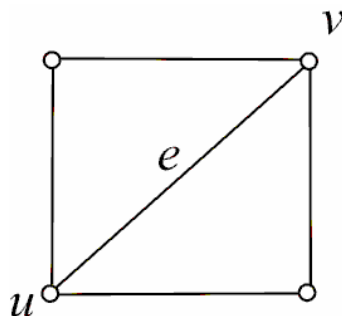
定义13.10 设 $e=(u,v)$ 为图 G 的一条边, 在 G 中删除 e , 增加新的顶点 w , 使 u,v 均与 w 相邻, 称为在 G 中**插入2度顶点** w . 设 w 为 G 中一个2度顶点, w 与 u,v 相邻, 删除 w , 增加新边 (u,v) , 称为在 G 中**消去2度顶点** w .

若两个图 G_1 与 G_2 同构, 或通过反复插入、消去2度顶点后同构, 则称 G_1 与 G_2 **同胚**.

例 插入与消去2度顶点



收缩边

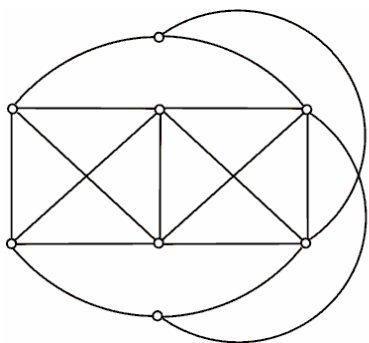




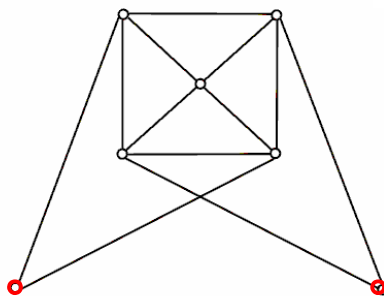
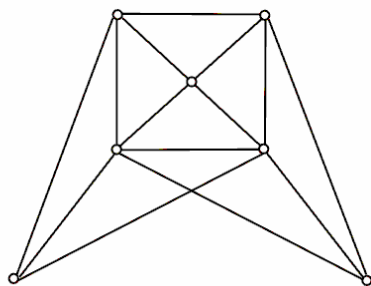
定理13.15 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中不含与 K_5 和 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定理13.16 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中无可收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

例8 证明下边两个图为非平面图.



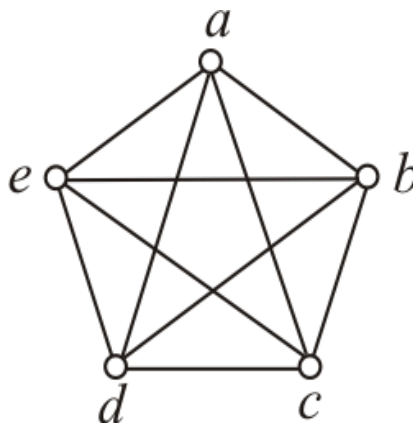
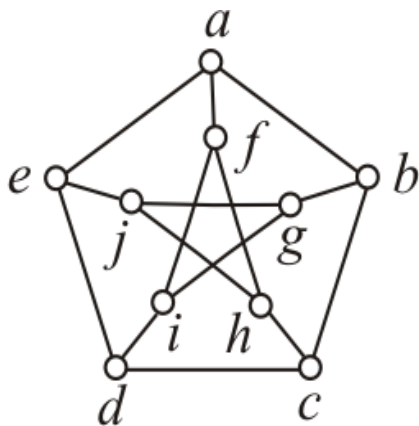
与 $K_{3,3}$ 同胚



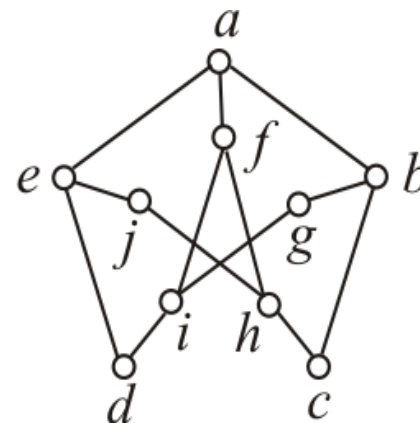
与 K_5 同胚



例9 证明彼得森图为非平面图.



与 K_5 同胚
收缩 $(a,f), (b,g),$
 $(c,h), (d,i), (e,j)$



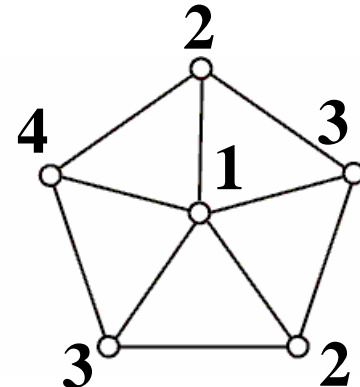
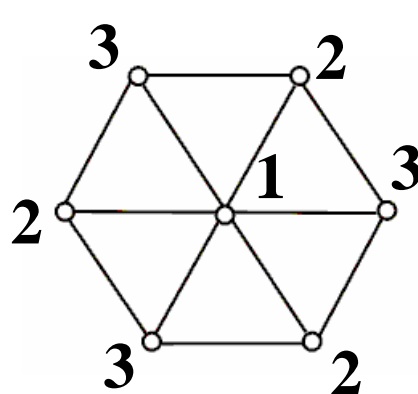
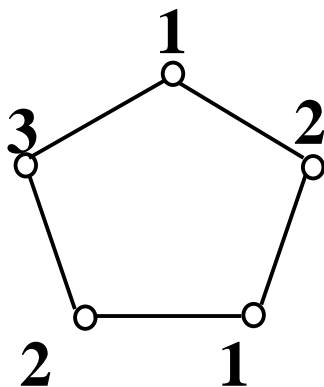
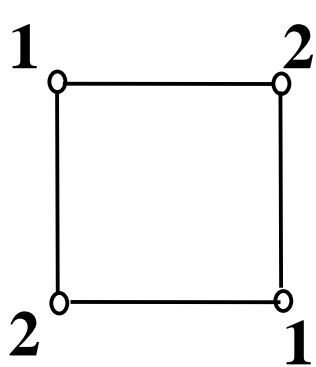
与 $K_{3,3}$ 同胚
收缩 $(b,g), (c,h),$
 $(d,i), (e,j)$



定义13.11 设无向图 G 无环, 对 G 的每个顶点涂一种颜色, 使相邻的顶点涂不同的颜色, 称为图 G 的一种**点着色**, 简称**着色**. 若能用 k 种颜色给 G 的顶点着色, 则称 G 是 **k -可着色的**.

图的着色问题: 要用尽可能少的颜色给图着色.

例10



偶圈用2种颜色, 奇圈用3种. 奇阶轮图用3种, 偶阶轮图用4种.

例11 G 是2-可着色的当且仅当 G 是二部图.



1. 有 n 项工作, 每项工作需要一天的时间, 有些工作不能同时进行, 问至少需要几天才能完成所有的工作? 顶点表示工作, 两点之间有一条边 \Leftrightarrow 这两项工作不能同时进行. 工作的时间安排对应于这个图的点着色: 着同一种颜色的顶点对应的工作可安排在同一天, 所需的最少天数是所需要的最少颜色数.
2. 寄存器分配. 计算机有 k 个寄存器, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 则不能把它们分配给同一个寄存器. 每一个变量是一个顶点, 如果两个变量要在同一时刻使用, 则用一条边连接这两个变量. 这个图的 k -着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式: 给着同一种颜色的变量分配同一个寄存器.



3. 无线交换设备的波长分配. 有 n 台设备和 k 个发射波长, 要给每一台设备分配一个波长. 如果两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长. 以设备为顶点, 如果两台设备靠得太近, 则用一条边连接它们. 这个图的 k -着色给出一个波长分配方案: 给着同一种颜色的设备分配同一个波长.



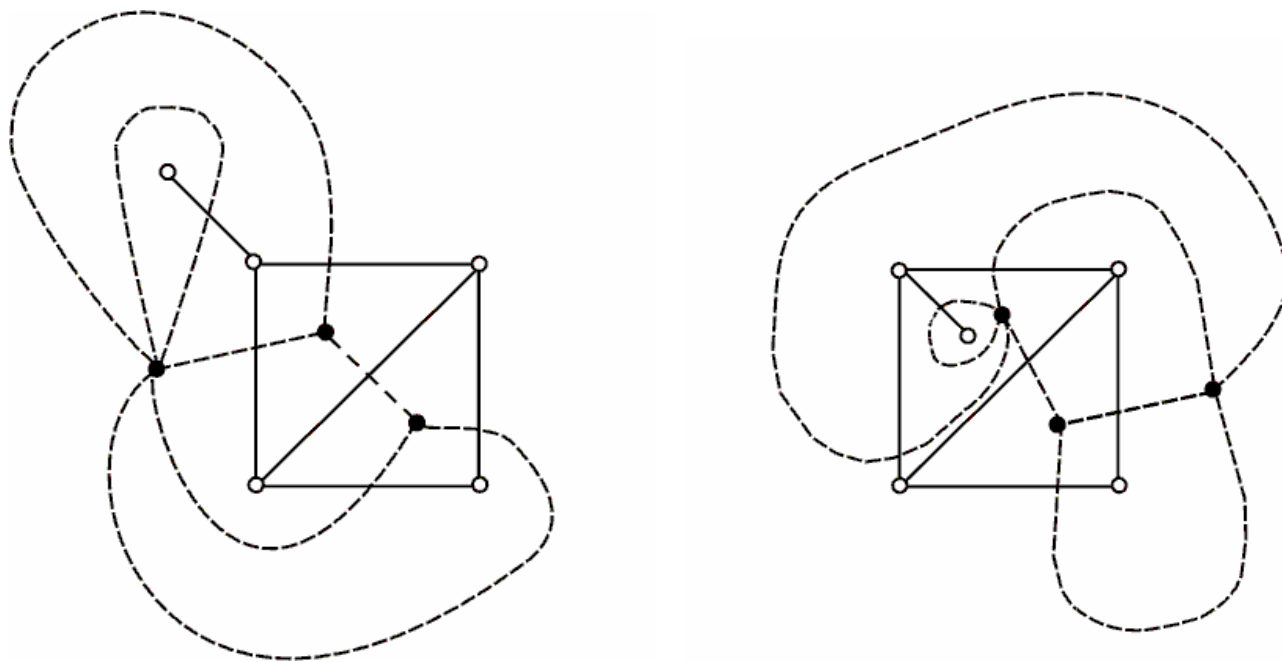
地图: 连通无桥平面图的一个平面嵌入. 每一个面是一个国家(或省, 市, 区等). 若两个国家有公共的边界, 则称这两个国家是相邻的. 对地图的每个国家涂上一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色, 称为对地图的面着色, 简称**地图着色**.

地图着色问题: 用尽可能少的颜色给地图着色.

定义13.12 设 G 是一个平面嵌入, 构造图 G^* 如下: 在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^* . 设 e 为 G 的一条边, 若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边 $e^*=(v_i^*, v_j^*)$ 与 e 相交, 且与其他任何边相交. 若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上, 则作以 v_i^* 为端点的环 $e^*=(v_i^*, v_i^*)$. 称 G^* 为 G 的**对偶图**.



实线和空心点是平面嵌入, 虚线和实心点是对偶图.
注意: 这两个平面嵌入是同一个平面图的平面嵌入.





四色猜想(19世纪50年代, 德摩根)——五色定理(1890年, 希伍德)——四色定理(1976年, 阿佩尔与黑肯)

定理13.17 任何平面图都是4-可着色的.



主要内容

- 欧拉通路 with 欧拉回路, 欧拉图 with 半欧拉图及判别
- 哈密顿通路 with 哈密顿回路, 哈密顿图 with 半哈密顿图及判别
- 货郎问题
- 二部图及其判别
- 二部图匹配及相关概念
- 二部图最大匹配的充要条件, 存在完备匹配的条件
- 平面图及其性质(欧拉公式)
- 平面图的判别
- 着色问题
- 地图着色 with 平面图的对偶图
- 四色定理
- 应用



基本要求

- 深刻理解欧拉图, 半欧拉图, 哈密顿图, 半哈密顿图的定义
- 掌握欧拉图, 半欧拉图的判别
- 会用哈密顿图与半哈密顿图的必要条件和充分条件
- 会一笔画出欧拉回路
- 了解货郎问题
- 深刻理解二部图的定义, 掌握二部图的判别
- 深刻理解二部图匹配及相关概念
- 了解二部图最大匹配的充要条件, 会用存在完备匹配的条件(Hall定理与 t 条件)



- 深刻理解平面图及相关的概念
- 牢记极大平面图的主要性质和判别方法
- 熟记欧拉公式及推广形式，并能用欧拉公式及推广形式证明有关定理与命题
- 会用库拉图斯基定理证明非平面图
- 了解对偶图的概念
- 了解着色问题, 地图着色问题和四色定理
- 会用上述概念和有关定理解决简单的实际问题



1. 设 G 为 $n(n \geq 2)$ 阶无向欧拉图, 证明 G 中无桥.

证一 设 C 为 G 中一条欧拉回路, $\forall e \in E(G)$, e 在 C 上, $C-e$ 连通, $G-e$ 也连通, 所以 e 不为桥.

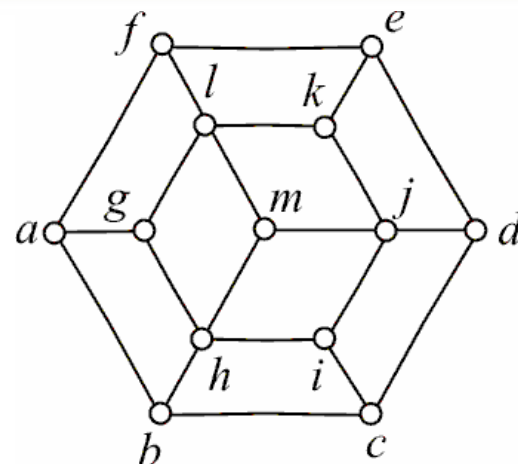
证二 用反证法. 假设 $e=(u,v)$ 是桥, 则 $G-e$ 产生两个连通分支 G_1, G_2 , 不妨设 u 在 G_1 中, v 在 G_2 中. G 中没有奇度顶点, 而删除 e , 只使 u, v 的度数各减1, 因而 $G_1(G_2)$ 中只含一个奇度顶点, 与任何图中奇度顶点的个数是偶数矛盾.



2. 证明右图不是哈密顿图.

证一 取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$,
 $p(G-V_1) = 7 > 6 = |V_1|$

证二 G 为二部图, $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$,
 $V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$, $|V_1| \neq |V_2|$.



证三 $n = 13, m = 21$. h, l, j 为 4 度顶点, a, c, e 为 3 度顶点, 且它们关联不相同的边. 而在哈密顿回路上, 每个顶点关联两条边, 于是可能用于哈密顿回路的边至多有 $21 - (3 \times 2 + 3 \times 1) = 12$. 12 条边不可能构成经过 13 个顶点的回路.



3. 某次国际会议8人参加, 已知每人至少与其余7人中的4人能用相同的语言, 问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座, 使得每个人都能与两边的人交谈?

解 做无向图 $G=\langle V, E \rangle$, 其中 $V=\{v \mid v \text{ 为与会者} \}$,

$E=\{(u, v) \mid u, v \in V, u \text{ 与 } v \text{ 有能用相同的语言, 且 } u \neq v\}$.

G 为简单图且 $\forall v \in V, d(v) \geq 4$. 于是, $\forall u, v \in V, d(u) + d(v) \geq 8$, 故 G 为哈密顿图. 服务员在 G 中找一条哈密顿回路, 按回路中相邻关系安排座位即可.

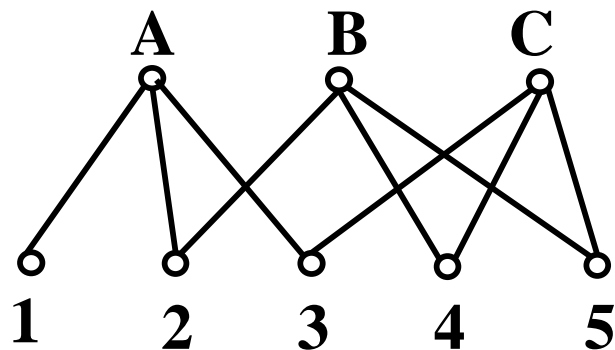


4. 某公司招聘了3名大学毕业生, 有5个部门需要人. 部门领导与毕业生交谈后, 双方都愿意的结果如表所示. 如果每个部门只能接收一名毕业生, 问这3名毕业生都能到他满意的部门工作吗? 试给出分配方案.

	部门1	部门2	部门3	部门4	部门5
毕业生A	*	*	*		
毕业生B		*		*	*
毕业生C			*	*	*

解 作二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$
 一个分配方案是 G 的一个匹配.
 G 满足 t 条件, $t=3$, 有完备匹配.

如, A—1, B—2, C—3;
 A—3, B—2, C—5等.





5. 设 G 是连通的简单平面图, 面数 $r < 12$, $\delta(G) \geq 3$.

(1) 证明 G 中存在次数 ≤ 4 的面.

(2) 举例说明当 $r=12$ 时, (1) 中结论不真.

解 设 G 的阶数, 边数, 面数分别为 n, m, r .

(1) 用反证法. 假设所有面的次数大于等于5, 由欧拉公式得

$$2m \geq 5r = 5(2+m-n) \quad (1)$$

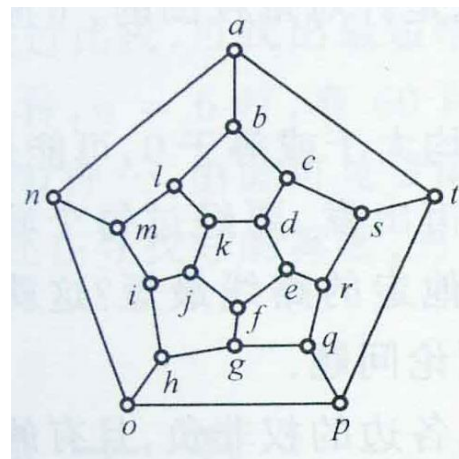
由 $\delta(G) \geq 3$ 及握手定理有 $2m \geq 3n \quad (2)$

得 $m \geq 30$

又有 $r = 2 + m - n < 12 \quad (3)$

③ 与②又可得 $m < 30$, 矛盾.

(2) 正十二面体是一个反例





6. 设 G 是阶数 ≥ 11 的非平凡简单无向图, 证明 G 和 \overline{G} 不可能全是平面图.

证 用反证法. 假设 \overline{G} 与 G 都是平面图, 则

G 与 \overline{G} 的边数 m, m' 应满足 $m + m' = \frac{n(n-1)}{2}$

不妨设

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

由于 G 是平面图, 又有
得

$$m \leq 3n - 6$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

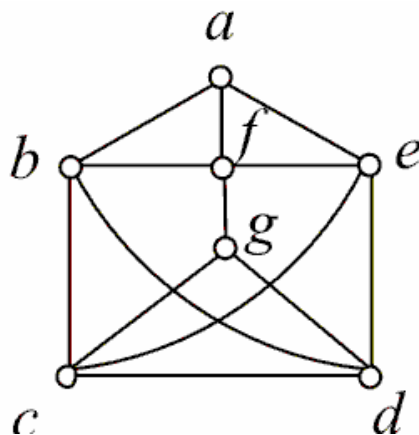
解得

$$2 \leq n \leq 10$$

与 $n \geq 11$ 矛盾.

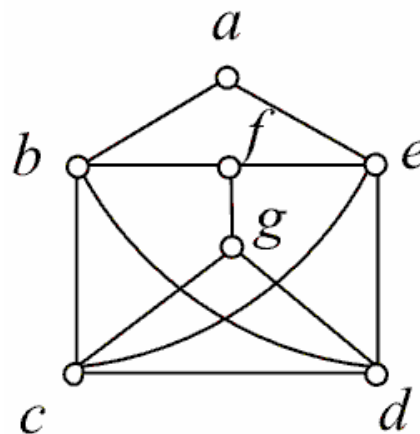


7. 证明下图为非平面图



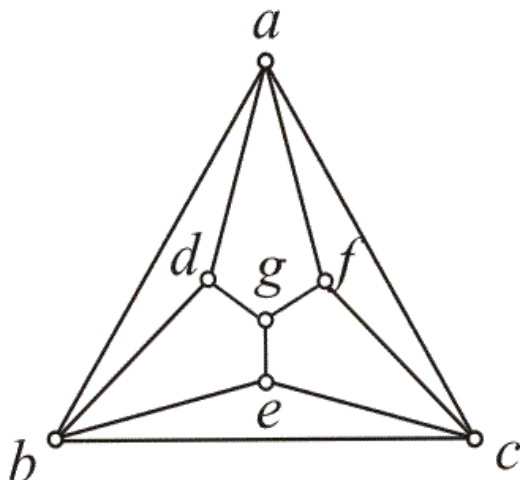
证一 含子图 $K_{3,3}$:
删去顶点 a 和边 (c,d)

证二 含与 K_5 同胚的
子图: 删去 (a,f) , 收缩
 (a,e) 和 (f,g)





8. 给下图着色至少要用几种颜色?



解 由于 a, b, c 彼此相邻, 至少要用3种颜色, 设它们分别着色1, 2, 3. 最少还要用这三种颜色给 d, e, f 着色. 而 g 与 d, e, f 相邻只能用第4种颜色. 故至少要用4种颜色.



9. 某校计算机系三年级学生在本学期共有6门选修课 $C_i, i=1, 2, \dots, 6$. 设 $S(C_i)$ 为选 C_i 课的学生集. 已知

$$S(C_i) \cap S(C_6) \neq \emptyset, \quad i=1, 2, \dots, 5,$$

$$S(C_i) \cap S(C_{i+1}) \neq \emptyset, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

$$S(C_5) \cap S(C_1) \neq \emptyset.$$

问这6门课至少几天能考完?

解 做无向图 $G=\langle V, E \rangle$, 其中

$$V=\{C_1, C_2, \dots, C_6\}$$

$$E=\{(C_i, C_j) \mid S(C_i) \cap S(C_j) \neq \emptyset\}$$

最少要用4种颜色着色, 故最少要4天

