第十章 格与布尔代数

- 10.1 格的定义与性质
- 1. 定义

与群，环，域，不同，格与布尔代数的基集都是一个偏序集，格是具有两个二元运算的代数系统，是一个特殊的偏序集，布尔代数是一个特殊的格。

- 定义10.1：设<S, ≤>是偏序集，若 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$ 都有上下确界，则称<S, ≤>为格(Lattice)

- (1)偏序集的任一子集并非都有上下确界，
- (2)偏序集的某一子集的上下确界若存在，则唯一，格的定义确定了上下确界的存在性，
- (3){x, y}的上确界记为x∨y，下确界记为x∧y

10.1 格的定义与性质

- **定义10.2：设f是含有格中元素及符号=，≼，≽，∨，∧的命题，令 f^* 是将f中≼，≽，∨，∧分别替换为≽，≼，∧，∨所得到的命题，则称 f^* 是f的对偶命题或称对偶式。**

格的对偶原理：若f对一切格为真，则 f^* 也对一切格为真。

例： 若：$\forall a,b \in L, a \wedge b \le a$，则 $\forall a,b \in L, a \vee b \ge a$ 成立。

- **定理10.1：设<L，≼>是格，则运算∨，∧满足交换律，结合律，幂等律，吸收律，即** $\forall a,b,c \in L$

$$(1): a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a;$$

$$(2): (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$

$$(3): a \vee a = a, \quad a \wedge a = a;$$

$$(4): a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

10.1 格的定义与性质

证:(1).由定义知，成立;

(2).由上确界定义:$(a\vee b)\vee c\ge a\vee b\ge b$,$(a\vee b)\vee c\ge c\Rightarrow$

$(a\vee b)\vee c\ge b\vee c$，又$(a\vee b)\vee c\ge a\vee b\ge a$,

$\therefore (a\vee b)\vee c\ge a\vee(b\vee c)$同理:$(a\vee b)\vee c\le a\vee(b\vee c)$

$\therefore (a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

由偏序关系的对偶性知:$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$

(3).由自反性，$a\le a$，则a是a的一个上界，而$a\vee a$是a与a的一个最小上界 $\therefore a\vee a\le a$，而$a\le a\vee a$ $\therefore$由反对称性：$a=a\vee a$，

由对偶原理：$a=a\wedge a$

(4).$a\vee(a\wedge b)\ge a$，又$a\le a, a\wedge b\le a$ $\therefore a$是a与$a\wedge b$的上界，而$a\vee(a\wedge b)$是a与$a\wedge b$的最小上界，$\therefore a\vee(a\wedge b)\le a$，由反对称性：$a\vee(a\wedge b)=a$

由对偶原理，得：$a\wedge(a\vee b)=a$

10.1 格的定义与性质

- 由定理10. 1知，格的两个运算满足交换律，结合律，幂等律，因此可以考虑用带有这4条性质的2个二元运算∨，∧，来像群，环，域，一样定义格，即用<L，∨，∧>来定义格，可以证明这是可行的。

- **定理10. 2：** 设<S, *, ο>是具有二个二元运算的代数系统，且*, ο运算满足交换律，结合律，吸收律，则可以适当定义S中的偏序≼，使得<S, ≼>构成一个格，且$\forall a,b\in S$，有$a\wedge b=a*b, a\vee b=a\circ b$

10.1 格的定义与性质

证:(1)先证：$*,\circ$满足幂等律(吸收律$\Rightarrow$幂等律)

$\forall a\in S$，由吸收律得：$a*a=a*(a\circ(a*a))=a$，同理$a\circ a=a$

(2)定义S上的二元关系R，$\forall a,b\in S$，有$<a,b>\in R\Leftrightarrow a\circ b=b$

$\Leftrightarrow a\le b$则，R为偏序关系，$\because\forall a,b,c\in S$，有，

自反性：$a\circ a=a\Rightarrow <a,a>\in R$

反对称：$\left.\begin{array}{l} aRb\Leftrightarrow a\circ b=b \\ bRa\Leftrightarrow b\circ a=a \end{array}\right\}\Rightarrow a=b$

传递性：$\left.\begin{array}{l} aRb\Leftrightarrow a\circ b=b \\ bRc\Leftrightarrow b\circ c=c \end{array}\right\}\Rightarrow a\circ c=a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c=b\circ c=c$

$\Leftrightarrow aRc$

记R为$\le$

10.1 格的定义与性质

(3) $<S,\le>$ 构成格：

$\forall a,b\in S$，有：$a\circ(a\circ b)=(a\circ a)\circ b=a\circ b$，$b\circ(a\circ b)=a\circ(b\circ b)=a\circ b$

$\therefore a\le a\circ b$，$b\le a\circ b$，即$a\circ b$是a,b的上界；

设c为$\{a,b\}$的上界，则$a\le c\Rightarrow a\circ c=c$，$b\le c\Rightarrow b\circ c=c$

$\therefore (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)=a\circ c=c \quad \therefore a\circ b$是$\{a,b\}$的最小上界，即$a\vee b=a\circ b$

$$\left.\begin{array}{l} a\circ b=b\Rightarrow a*b=a*(a\circ b)=a \\ a*b=a\Rightarrow a\circ b=(a*b)\circ b=b \end{array}\right\}\Rightarrow a\circ b=b\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow a*b=a$$

$(a*b)*a=(a*a)*b=a*b\Rightarrow a*b\le a$

$(a*b)*b=a*(b*b)=a*b\Rightarrow a*b\le b$

$\therefore a*b$是a,b的下界；

设c为$\{a,b\}$的下界，则$c*a=c$，$c*b=c$，

$\therefore c*(a*b)=(c*a)*b=c*b=c \quad \therefore c\le a*b$，即$a*b$是$\{a,b\}$的最大下界，

即$a\wedge b=a*b$

10.1 格的定义与性质

由定理10. 1, 10. 2可知：

$<L,\leq>$是格$\xrightarrow{\text{诱导出}}$代数系统$<L,\wedge,\vee>$ $\wedge,\vee$满足交换，结合，吸收(幂等)律

代数系统$<S,*,\circ>$,$*,\circ$满足交换，结合，吸收(幂等)律$\xrightarrow{\text{诱导出}}$

$<S,\leq>$成一个格，且$a\wedge b=a*b$，$a\vee b=a\circ b$

令：$\gamma=\{<L,\leq>|<L,\leq>$是格$\}$，$\beta=\{<L,*,\circ>|<L,*,\circ>$是代数系统,$*$与$\circ$是二元运算，且满足交换律，结合律，吸收(幂等)律$\}$

定义映射f：$\gamma\to\beta$，对$\forall<L,\leq>\in\gamma$，$f(<L,\leq>)=<L,*,\circ>$，其中$<L,*,\circ>$是$<L,\leq>$诱导出的代数系统，

定义映射g：$\beta\to\gamma$，对$\forall<L,*,\circ>\in\beta$，$g(<L,*,\circ>)=<L,\leq>$，其中$<L,\leq>$是$<L,*,\circ>$诱导出的格，

则有：$f\circ g=I_\gamma$，$g\circ f=I_\beta$

10.1 格的定义与性质

因此，根据定理10.1，10.2，可以用代数系统的方式来定义格。

- 定义10.3：设<S, *, ο>是代数系统， *, ο 是二元运算且满足交换律，结合律，吸收律(幂等律)，则<S, *, ο>构成一个格。
- 2. 性质
- 定理10.3：设<L, ≼>是格，则 $\forall a,b \in L$ ，有

(1)$a \le a \vee b$，$b \le a \vee b$，$a \wedge b \le a$，$a \wedge b \le b$;

(2)$a \le b$，$c \le d \Rightarrow a \vee c \le b \vee d$，$a \wedge c \le b \wedge d$;

(3)$a \le b \Rightarrow a \vee c \le b \vee c$，$a \wedge c \le b \wedge c$;

(4)$a \le b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$;　(5)$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(6)$a \le c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$.

10.1 格的定义与性质

证:(1)直接由定义；

(2)$a \le b$，$c \le d$，由(1)知：$b \le b \vee d$，$d \le b \vee d$，由$\le$的传递性，得$a \le b \vee d$，$c \le b \vee d$，$\therefore b \vee d$是a与c的一个上界，而$a \vee c$是a,c的最小上界，$\therefore a \vee c \le b \vee d$，同理$a \wedge c \le b \wedge d$;

(3)$a \le b$，$c \le c$，由(2)得：$a \vee c \le b \vee c$，$a \wedge c \le b \wedge c$;

(4)($\Rightarrow$)：$a \le b$，而$a \le a$，由(2)得：$a \wedge a = a \le a \wedge b$，同时由(1)$a \wedge b \le a$　$\therefore a = a \wedge b$

($\Leftarrow$)：$a = a \wedge b$，则$a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$，而$a \le a \vee b = b$，即$a \le b$

另一方面，$a = a \wedge b \Rightarrow a \vee b = b$，即$a \vee b = b$

且$b = a \vee b$，得：$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$

$\therefore a \le b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$;

10.1 格的定义与性质

(5)$a \le a$，$b \wedge c \le b$　由(2)得：$a \vee (b \wedge c) \le a \vee b$，

$a \le a$，$b \wedge c \le c$　由(2)得：$a \vee (b \wedge c) \le a \vee c$，

$\therefore a \vee (b \wedge c) = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (a \vee (b \wedge c)) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(6)($\Leftarrow$):　$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$，　而$a \le a \vee (b \wedge c)$,$(a \vee b) \wedge c \le c$

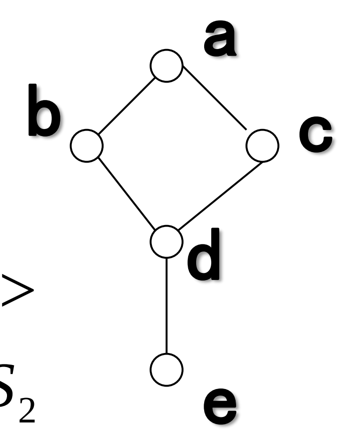
$\therefore$由传递性：$a \le c$

($\Rightarrow$):　$a \le c$，　则$a \vee c = c$，　代入(5)得：

$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$

10.2 子格与格同态

- **1. 子格**
- **定义10. 4：设代数系统<L, *, o >是一个格,** $S \subseteq L$ **，若S满足：**(1)$S \neq \emptyset$，(2)运算$*$和$\circ$对S封闭 **，则称<S, *, o >是<L, *, o >的子格。**
- **定义10. 5：设<L, ≤>是一个格,** $S \subseteq L$ **，若S满足：**(1)$S \neq \emptyset$ (2)$\forall a, b \in S$，有$a \vee b \in S$，$a \wedge b \in S$ **，则称<S, ≤>是<L, ≤>的子格。**
- **例10-1：(1) 设<L, ≤>是一个格，其中L={a, b, c, d, e}，其哈斯图如右图。**



$S_1 = \{a, b, c, d\}, S_2 = \{a, b, c, e\}$，则$< S_1, \leq >$是$< L, \leq >$的子格,$< S_2, \leq >$不是$< L, \leq >$的子格，$b \wedge c = d \notin S_2$

$< S_2, \leq >$不是格。

10.2 子格与格同态

- **2. 格同态**
- **定义10. 6：设 L_1和 L_2 是格，$\varphi: L_1 \to L_2$ ，若$\forall a,b \in L_1$有$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b), \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$，则称$\varphi$为格$L_1$到$L_2$的同态映射，简称格同态，若$\varphi$是双射，则称$\varphi$为格同构。**
- **定义10. 7：设L_1和L_2是格，其中$\leq_1, \leq_2$分别为格L_1, L_2上的偏序关系，存在映射 $f: L_1 \to L_2, \forall a,b \in L_1$，若$a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$，称f是序同态，若f是双射，则称f是序同构。**
- **(格同态定理)定理10. 4：(1)设φ是格$<L_1, \leq_1>$ 到格$<L_2, \leq_2>$ 的同态，则φ是序同态，即同态是保序的，即$\forall x, y \in L_1$，有$x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$**

10.2 子格与格同态

(2) φ 是双射，则 φ是$<L_1,\leq_1>$到$<L_2,\leq_2>$ 的同构的充要条件是 $\forall x,y\in L_1$，有$x\leq_1 y\Leftrightarrow\varphi(x)\leq_2\varphi(y)$

证:(1) : $\forall x,y\in L_1, x\leq_1 y\Leftrightarrow x\vee y=y$

$\therefore\varphi(y)=\varphi(x\vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y)\quad\therefore\varphi(x)\leq_2\varphi(y)$;

(2) : ($\Rightarrow$)由(1)得：$x\leq_1 y\Rightarrow\varphi(x)\leq_2\varphi(y)$，反之：$\varphi(x)\leq_2\varphi(y)$

$\Rightarrow\varphi(x)\vee\varphi(y)=\varphi(y)=\varphi(x\vee y)\Rightarrow y=x\vee y\Rightarrow x\leq_1 y$

($\Leftarrow$)对$\forall x,y\in L_1$，$x\leq_1 y\Leftrightarrow\varphi(x)\leq_2\varphi(y)$

令$x\vee y=z$，则$x\leq_1 z$，$y\leq_1 z\Rightarrow\varphi(x)\leq_2\varphi(z)$，$\varphi(y)\leq_2\varphi(z)$

$\therefore\varphi(x)\vee\varphi(y)\leq\varphi(z)=\varphi(x\vee y)$

另一方面，φ是满射，$\varphi(x)$，$\varphi(y)\in L_2$，则$\varphi(x)\vee\varphi(y)\in L_2$

则必存在$u\in L_1$，使得$\varphi(u)=\varphi(x)\vee\varphi(y)$

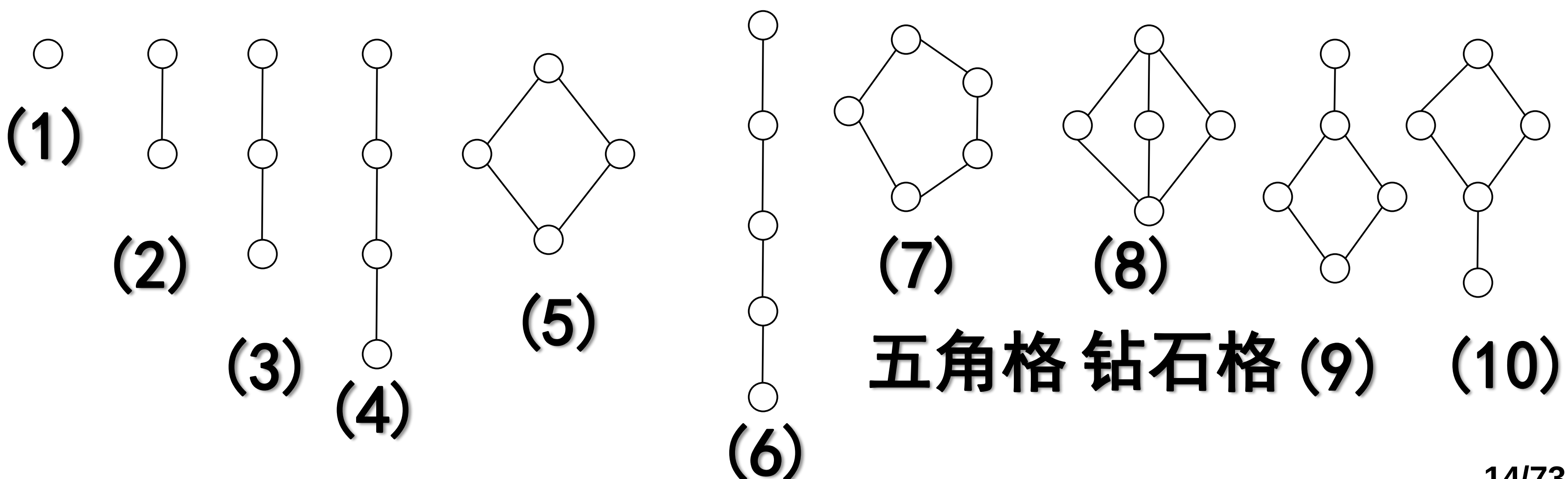
10.2 子格与格同态

$\therefore \varphi(x) \le_2 \varphi(u)$，$\varphi(y) \le_2 \varphi(u)$ $\therefore x \le_1 u$，$y \le_1 u$， $\therefore x \vee y \le_1 u$

$\therefore \varphi(x \vee y) \le_2 \varphi(u) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ $\therefore \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$

同理：$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ $\therefore \varphi$为格同构

- **例10-2：在同构意义下：具有1，2，3个元素的格分别同构于元素个数相同的链，4个元素的格必同构于下图4元素格之一，5个元素的格必同构于下图5元素格之一**



10.2 子格与格同态

- **定义10. 8：** 设 L_1和 L_2 是格，定义$L_1 \times L_2$ 上的二元运算$\bigcup, \bigcap$：对$\forall < a_1, b_1 >, < a_2, b_2 > \in L_1 \times L_2$，有：

$$< a_1, b_1 > \bigcap < a_2, b_2 > = < a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2 >$$

$$< a_1, b_1 > \bigcup < a_2, b_2 > = < a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2 >$$

则称$< L_1 \times L_2, \bigcap, \bigcup >$为$L_1$和$L_2$的直积。

➢ 直积仍是格(证明满足交换，结合，吸收律即可)

10.3 特殊格

- **1. 分配格**

一般来说，对格 $(L,\wedge,\vee)$，**有** $\forall a,b,c\in L$ **，则**

$a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

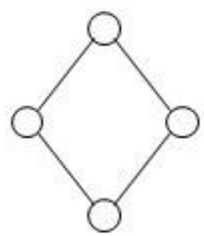
- **定义10. 9：设** $(L,\wedge,\vee)$ **是格，若** $\forall a,b,c\in L$ **，有**

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

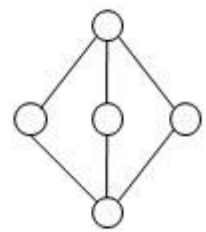
则称L为分配格。

例：（1）

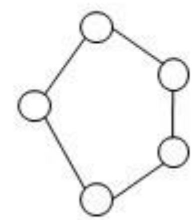
是



是



非



非

(2) $<\rho(A),\cap,\cup>,<\rho,\wedge,\vee>$

10.3 特殊格

- 定理10. 5：L是格，则L是分配格<=>L中不含有与钻石格或五角格同构的子格。
- 推论：(1) 小于五元的格都是分配格；(2) 任何一条链都是分配格。
- (分配格的性质) 定理10. 6：若L是格，则L是分配格当且仅当 $\forall a,b,c \in L, a \wedge b = a \wedge c 且 a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c$

证:$(\Rightarrow)$ L是分配格，则$\forall a,b,c \in L$有

$$b = b \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$$

$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$$

10.3 特殊格

$(\Leftarrow)$用反证法，若$\forall a,b,c\in L$，有$a\wedge b=a\wedge c$，$a\vee b=a\vee c\Rightarrow b=c$成立，而$L$不是分配格，则：$L$中必含有与钻石格或五角格同构的子格

若与钻石格同构，设为$\{u,v,x,y,z\}$，且u,v分别为最小元和最大元

$x\wedge y=x\wedge z=u$，$x\vee y=x\vee z=v$，由假设应有$y=z$，与$y\neq z$矛盾。

若与五角格同构，同理可证，$\therefore$命题成立。

- **命题条件** $a\wedge b=a\wedge c, a\vee b=a\vee c$ **同时成立，否则不正确。**

反例：分配格 $<\rho(\{a,b\}),\cap,\cup>$ **中：**

$\emptyset\cap\{a\}=\emptyset\cap\{b\}$，但$\{a\}\neq\{b\}$

$\{a,b\}\cup\{a\}=\{a,b\}\cup\{b\}$，但$\{a\}\neq\{b\}$

10.3 特殊格

- **2. 模格**
- **定义10.10：设 $(L,\wedge,\vee)$ 是格，若 $\forall a,b,c\in L$，有：**
  $a\le c\Rightarrow a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$ **(模律)，则称 $(L,\wedge,\vee)$ 为模格，也称为戴德金格。**
- **定理10.7：格L是模格的充要条件是它不含有同构于五角格的子格。**
- **定理10.8：设 $(L,\wedge,\vee)$ 为分配格，则 $(L,\wedge,\vee)$ 是模格**

  证：$\forall a,b,c\in L$，若 $a\le c$，则 $a\wedge c=a$，且有

  $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c)$

  $\therefore L$ 是模格。

10.3 特殊格

- **3. 有界格**
- 定义10. 11：设L是格，若存在$a \in L$，使得$\forall x \in L$，有$a \le x$，则称a为L的全下界，若存在$b \in L$，使得$\forall x \in L$，有$x \le b$，则称b为L的全上界。

➢ (1)：有限格$L = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$一定是有界格，全下界$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$，全上界$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$；

➢ (2)：无限格可以为有界格，如$<\rho(B), \cap, \cup>$全下界$\emptyset$，全上界B；

➢ (3)：全上界，全下界唯一，分别记为1和0

- 定义10. 12：设L是格，若L存在全上界和全下界，则称L为有界格，记为$<L, \wedge, \vee, 0, 1>$

10.3 特殊格

- 定理10. 9：设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$ 为有界格，则 $\forall a\in L$，有 $a\wedge 0=0, a\vee 0=a, a\wedge 1=a, a\vee 1=1$

证:$0\le a \Leftrightarrow 0\vee a=a \Leftrightarrow 0\wedge a=0$

$a\le 1 \Leftrightarrow a\wedge 1=a \Leftrightarrow a\vee 1=1$

- **4. 有补格**

- 定义10. 13：设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，$a\in L$，若存在 $b\in L$ ，使得$a\wedge b=0$ 且$a\vee b=1$，则称b是a的补元。

➢ 补元的性质：(1):补元素相互的；(2):并非有界格的每个元素都有补元，而有补元也不一定唯一；(3):0，1互为补元，且唯一。

10.3 特殊格

- **定理10. 10：设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界分配格，若$a\in L$且对于a存在补元b，则b是a的唯一补元。**

证：设$c\in L$也是a的补元，则：$a\vee c=1$，$a\wedge c=0$;

而b是a的补元，即有$a\vee b=1$，$a\wedge b=0$

$\therefore a\vee c=a\vee b$，$a\wedge c=a\wedge b$

由于L是分配格，$\therefore$有$b=c.$

- **定义10. 14：设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，若$\forall a\in L$在L中都有a的补元存在，则称L是有补格。**

10.4 布尔代数

- **1. 概念**
- **定义10. 15：** 如果一个格是有补分配格，则称它为布尔代数。

➢ 有补格保证每个元素有补元，分配格保证每个元素的补元的唯一性，因此，可将求补元看作是布尔代数的一元运算，即 $<B,\wedge,\vee,0,1> \Rightarrow <B,\wedge,\vee,',0,1>$

例：$(1):<\{0,1\},\wedge,\vee,'>,(2)<\rho(S),\cap,\cup,\sim>.$

- **定理10. 11：** 设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是布尔代数，则

$(1)\forall a\in B,(a')'=a,$

$(2)\forall a,b\in B,(a\wedge b)'=a'\vee b',(a\vee b)'=a'\wedge b'$

10.4 布尔代数

证:(1).$\because (a')'$，a都是a'的补元， 由补元的唯一性， 知$a=(a')'$

(2).$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')=(1\vee b')\wedge(a'\vee 1)=1\wedge 1=1$

$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')=(0\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0\vee 0=0$

$\therefore a'\vee b'=(a\wedge b)'$， 同理$(a\vee b)'=a'\wedge b'$

布尔代数：交换律，结合律，吸收律，分配律，存在补元，可用交换律，分配律，同一律，补元律代替。另一等价定义：

- **定义10.16:** $<B,\wedge,\vee,'>$ **是代数系统，** $\wedge,\vee$ **是二元运算，且** $\wedge,\vee$ **满足：(1)交换律，(2)分配律，(3)同一律：存在** $0,1\in B$，对$\forall a\in B$，有$a\wedge 1=a$，$a\vee 0=a$

  (4)补元律： 对$\forall a\in B$，存在$a'\in B$，使得$a\wedge a'=0$，$a\vee a'=1$

  则称 $<B,\wedge,\vee,'>$ **是布尔代数。**

10.4 布尔代数

- **(1) : ∧ : 幺元为1； ∨： 幺元为0 (同一律)。可证： ∧ : 零元为0； ∨： 零元为1。**

$$a \wedge 0 = (a \wedge 0) \vee 0 = (a \wedge 0) \vee (a \wedge a') = a \wedge (0 \vee a') = a \wedge a' = 0$$

$$a \vee 1 = (a \vee 1) \wedge 1 = (a \vee 1) \wedge (a \vee a') = a \vee (1 \wedge a') = a \vee a' = 1$$

- **(2) : 吸收律成立。** 对$\forall a, b \in B$，有：

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = a \vee (0 \wedge b) = a \vee 0 = a$$

- **结合律成立。** 对$\forall a, b, c \in B$，有：

$$i): a \vee b = a \vee c, \text{且} a' \vee b = a' \vee c \Rightarrow (a \vee b) \wedge (a' \vee b) = (a \vee c) \wedge (a' \vee c) \Rightarrow b = c$$

$$ii): \text{而} a \vee (a \wedge (b \wedge c)) = a$$

$$a \vee ((a \wedge b) \wedge c) = (a \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee c) = a \vee (a \wedge c) = a$$

$$a' \vee (a \wedge (b \wedge c)) = (a' \vee a) \wedge (a' \vee (b \wedge c))$$

$$= 1 \wedge (a' \vee (b \wedge c)) = a' \vee (b \wedge c)$$

10.4 布尔代数

$$a' \vee ((a \wedge b) \wedge c) = (a' \vee (a \wedge b)) \wedge (a' \vee c)$$
$$= ((a' \vee a) \wedge (a' \vee b)) \wedge (a' \vee c) = (1 \wedge (a' \vee b)) \wedge (a' \vee c)$$
$$= (a' \vee b) \wedge (a' \vee c) = a' \vee (b \wedge c)$$

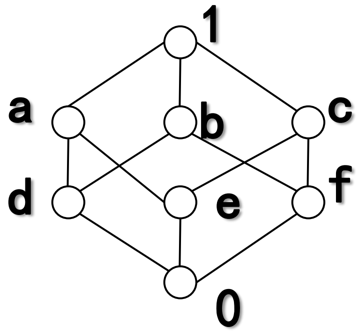
由i)：$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$，同理$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

- **2. 子布尔代数**
- **定义10. 17：设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数，$S \subseteq B$，若$0,1 \in S$，且S对∧，∨，’封闭，则称S是B的子布尔代数。**

例：(1)对任何布尔代数$<B,\wedge,\vee,',0,1>$恒有子布尔代数$<B,\wedge,\vee,',0,1>$和$<\{0,1\},\wedge,\vee,',0,1>$均为B的平凡布尔代数。

10.4 布尔代数

(2)



$S_1=\{1,a,f,0\}$ √ a与f互为补元

$S_2=\{1,a,c,e\}$ × $0\notin S_2$

- **定理10. 12(判定定理)：设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是布尔代数，$S\subseteq B$ 且 $S\neq\emptyset$ ，若 $\forall a,b\in S, a\vee b\in S, a'\in S$，则S是B的子布尔代数，记作 $<S,\wedge,\vee,',0,1>$**

证：若$\forall a,b\in S$，则$a',b'\in S,(a'\vee b')'=a\wedge b\in S$

又$S\neq\emptyset$， $\therefore$ 存在$a\in S$，因此$a'\in S$， $\therefore a\wedge a'=0\in S$，

$a\vee a'=1\in S$

10.4 布尔代数

- **3. 布尔代数的同态**

- **定义10. 18：** 设$<B_1,\wedge,\vee,',0,1>$和$<B_2,\cap,\cup,\sim,\theta,e>$是两个布尔代数，$\varphi:B_1\to B_2$，若$\forall a,b\in B_1$，有：

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\cup\varphi(b),\quad \varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\cap\varphi(b),\quad \varphi(a')=\sim\varphi(a)$$

则称φ为B_1到B_2的布尔同态，若φ为双射，则为布尔同构。

- **4. 有限布尔代数的结构**

- **定义10. 19：** 设L是格，若a是0的覆盖，则称a是L中的原子，即：$0\in L,a\in L$，若$\forall b\in L$，有$0<b\le a\Rightarrow a=b$

- **定理10. 13：** 设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数，B中元素a是原子的充要条件是a≠0，且对$\forall x\in B$，有：

$$x\wedge a=a\text{或}x\wedge a=0$$

10.4 布尔代数

证:($\Rightarrow$): a是原子，显然$a \neq 0$，另设$x \wedge a \neq a$；由于$x \wedge a \leq a$，因而$0 \leq x \wedge a < a$， $\therefore x \wedge a = 0$;

($\Leftarrow$): 设$a \neq 0$，$\forall x \in B$，有$x \wedge a = a$或$x \wedge a = 0$，若a不是原子，则必有$b \in B$，使得$0 < b < a$，于是$b \wedge a = b$， $\because b \neq 0$，$b \neq a$

$\therefore b \wedge a = b$与$b \wedge a = a$或0矛盾。

- **定理10. 14：设L是格，a，b是L中的原子，若a≠b，则a∧b=0。**

证：假设$a \wedge b \neq 0$，则有$0 < a \wedge b \leq a$， $0 < a \wedge b \leq b$

由于a, b是原子，得：$a \wedge b = a = b$矛盾

- **定理10. 15：设B是有限布尔代数，$\forall x \in B, x \neq 0$，令$T(x) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是B中所有≤x的原子构成的集合($T(x) = \{a \mid a \in B, a$是原子，且$a \leq x\}$)，则：**

10.4 布尔代数

$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$，称为$x$的原子表示，且该表示唯一

即若$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m$，

则$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

证：令$y = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$，由于$a_i \le x (i = 1,2,\cdots,n)$ $\therefore y \le x$

再证$y \ge x$，首先证$x \wedge y' = 0$，若$x \wedge y' \ne 0$，则必存在元素

$t_1, t_2, \cdots t_s$使得t_1覆盖0，t_2覆盖t_1，t_s覆盖t_{s-1}，且$t_s = x \wedge y'$

$\therefore$有$t_1 \le x$，$t_1 \le y'$，t_1为原子$\in T(x)$，设$a_i = t_1$

$\therefore$有$t_1 \le y' \Leftrightarrow t_1 = t_1 \wedge y' = a_i \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)'$

$= a_i \wedge a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_n' = a_i \wedge a_i' \wedge (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_{i-1}' \wedge a_{i+1}' \wedge \cdots \wedge a_n')$

$= 0 \wedge (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_{i-1}' \wedge a_{i+1}' \wedge \cdots \wedge a_n') = 0$

与$0 < t_1$矛盾，$\therefore x \wedge y' = 0$

10.4 布尔代数

则$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge y') = (y \vee x) \wedge (y \vee y') = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$

即$x \leq y$ $\therefore x = y$，即$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$

唯一性：设$x = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m$是$x$的另一原子表示，任取$a_i \in T(x)$

$= \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，若$a_i \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，则由于$a_i$与$b_j$均为原子，由定理

10.14，有$a_i \wedge b_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, m)$

$a_i \leq x \Leftrightarrow a_i = a_i \wedge x = a_i \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$

$= (a_i \wedge b_1) \vee (a_i \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_i \wedge b_m) = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0$

$= 0$与a_i是原子矛盾。

$\therefore a_i \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，同理$\forall b_j \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$可推出

$b_j \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$\therefore \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

10.4 布尔代数

- **定理10.16(有限布尔代数的表示定理)：设** $<B,\wedge,\vee,',0,1>$**是有限布尔代数，A={a|a∈B且a是原子}，则**$<B,\wedge,\vee,',0,1>\cong<P(A),\cap,\cup,\sim,\emptyset,A>$

证：任取$x\in B$，令$T(x)=\{a\,|\,a\in B$，a是原子，且$a\le x\}$，

则$T(x)\subseteq A$，定义函数：φ：$B\to P(A)$，$\varphi(x)=T(x)$，$\forall x\in B$

则φ是B到$P(A)$的同构。

$i)$.任取$x,y\in B,\forall b$有：

$b\in T(x\wedge y)\Leftrightarrow b\in A$且$b\le x\wedge y\Leftrightarrow b\in A,b\le x$且$b\in A,b\le y$

$\Leftrightarrow b\in T(x)$且$b\in T(y)\Leftrightarrow b\in T(x)\cap T(y)$

即$\forall x,y\in B$有$T(x\wedge y)=T(x)\cap T(y)$，即$\varphi(x\wedge y)=\varphi(x)\cap\varphi(y)$

10.4 布尔代数

$ii)$.任取$x, y \in B$，令$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$，$y = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m$，

则$x \vee y = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \vee b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m$，

即：$T(x \vee y) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

又$T(x) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$T(y) = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

$\therefore T(x \vee y) = T(x) \bigcup T(y)$，

即：$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \bigcup \varphi(y)$

$iii)$.任取$x \in B$，存在$x' \in B$，使得$x \vee x' = 1$，$x \wedge x' = 0$

$\therefore \varphi(x) \bigcup \varphi(x') = \varphi(x \vee x') = \varphi(1) = A$

$\varphi(x) \bigcap \varphi(x') = \varphi(x \wedge x') = \varphi(0) = \emptyset \quad \therefore \varphi(x') = \sim \varphi(x)$

10.4 布尔代数

双射：单射：若$\varphi(x)=\varphi(y)$，则$T(x)=T(y)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

则$x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n=y$

满射：任取$\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}\in P(A)$，令$x=b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_m$

则$\varphi(x)=T(x)=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$

$\therefore$ 命题成立

- **推论1：任何有限布尔代数的基数为** $2^n, n\in N$
- **推论2：任何具有2^n个元素的布尔代数互相同构（对无限布尔代数不成立）**

10.4 布尔代数

- **5. 布尔表达式**
- **定义10. 20：** 设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是一个布尔代数，B中的元素称为布尔常元，取值于B中元素的变元称为布尔变元。
- **定义10. 21：** 设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是一个布尔代数，在B上的布尔表达式定义如下：

(1). B中任何一个常元是布尔表达式；

(2). B中任何一个布尔变元是布尔表达式；

(3). 如果 e_1, e_2 是布尔表达式，则 $e_1', e_1 \wedge e_2, e_1 \vee e_2$ 也是布尔表达式；

(4). 有限次使用(1)，(2)，(3)所构造的符号串是布尔表达式。

10.4 布尔代数

- 定义10. 22：设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是一个布尔代数，B的一个含有n个相异布尔变元的布尔表达式称为n元布尔表达式，记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是布尔变元。
- 定义10. 23：设 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是布尔代数 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 上的两个布尔表达式，如果对n个布尔变元的任意指派，f_1 和 f_2的值均相等，则称 f_1 与 f_2 是等价的或相等的，记作：
$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

➢ (1). 如果能有限次应用布尔代数的公式，将一个布尔表达式化成另一个布尔表达式，就可判定两式是等价的；

10.4 布尔代数

- (2). 等价关系将n元布尔表达式集合划分成等价类，同一等价类中的布尔表达式等价，等价类数目有限。

- **定义10. 24：** 设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是布尔代数，给定n个布尔变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，表达式：$\tilde{x}_1\wedge\tilde{x}_2\wedge\cdots\wedge\tilde{x}_n$（$\tilde{x}_i$表示$x_i$或$x_i'$两者之一），称为极小项。

- (1). n个布尔变元就有 2^n个不同的极小项，分别记为 $m_0,m_1,\cdots,m_{2^n-1}$ ，下标是二进制数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的十进制表示，其中

$$a_i=\begin{cases}1 & \tilde{x}_i=x_i\\ 0 & \tilde{x}_i=x_i'\end{cases}$$

10.4 布尔代数

(2). $m_i \wedge m_j = 0$，当$i \neq j$时；

(3). $m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} = 1$

- **定义10. 25：** 设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数，如$(a_0 \wedge m_0) \vee (a_1 \wedge m_1) \vee \cdots \vee (a_{2^n-1} \wedge m_{2^n-1})$的布尔表达式称为主析取范式，其中$a_i$是布尔常元，$m_i$是极小项$(i = 0,1,\cdots,2^n - 1)$.

➢ (1). 每个a_i有|B|种取法，故有n个布尔变元的不同的主析取范式有$|B|^{2^n}$个，当B={0, 1}时有2^{2^n}个；

➢ (2). 2^n个极小项，最多能构造出$|B|^{2^n}$个主析取范式，所以一个n元布尔表达式必等价于这$|B|^{2^n}$个主析取范式之一；

➢ (3). 可用数理逻辑中的方法，用德摩根律等将一

10.4 布尔代数

个n元布尔表达式转化为等价的主析取范式；

- (4). 相应的：极大项：$\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \cdots \vee \tilde{x}_n$

主合取范式为：$(a_0 \vee M_0) \wedge (a_1 \vee M_1) \wedge \cdots \wedge (a_{2^n-1} \vee M_{2^n-1})$

a_i 是布尔常元，M_i 是极大项，同样有 $|B|^{2^n}$ 个不同的主合取范式，2^n 个极大项最多能构造 $|B|^{2^n}$ 个不同的主合取范式。

例：将布尔代数 $<\{0,a,b,1\},\wedge,\vee,',0,1>$ 上的布尔表达式 $f(x_1,x_2)=((a\wedge x_1)\wedge(x_1\vee x_2'))\vee(b\wedge x_1\wedge x_2)$ 化为主析取范式和主合取范式

10.4 布尔代数

解：$f(x_1, x_2) = ((a \wedge x_1) \wedge (x_1 \vee x_2')) \vee (b \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge (x_1 \wedge (x_1 \vee x_2')) \vee (b \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge x_1) \vee (b \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee x_2')) \vee (b \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (a \wedge x_1 \wedge x_2') \vee (b \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge x_1 \wedge x_2') \vee ((a \vee b) \wedge x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge x_1 \wedge x_2') \vee (x_1 \wedge x_2)$

$= (a \wedge m_2) \vee m_3$

同理$f(x_1, x_2) = M_0 \wedge M_1 \wedge (a \vee M_2)$

10.4 布尔代数

- **定义10.26：** 设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是一个格，一个从 B^n 到B的函数，如果能够用该布尔代数上的布尔表达式来表达，则称这个函数为布尔函数。

➤ (1). 每一个n元布尔表达式可以看作是一个n个布尔变元的函数；

➤ (2). n个变元的主析取范式最多有 $|B|^{2^n}$ 个，∴只能代表 $|B|^{2^n}$ 个不同的函数，$|B|^n$ 到|B|的函数共有 $|B|^{|B^n|}=|B|^{|B|^n}$ 个；

当B={0, 1}时，函数有 2^{2^n} 个，主析取范式 2^{2^n} 个，每个函数均可用布尔表达式表示，当B≠{0, 1}时，如B={0, 1, a, b}时，函数有 4^{4^n} 个，主析取范式有 4^{2^n} 个，即当|B|>2时，有些 B^n 到B的函数不能用布尔表达式表示。

10.4 布尔代数

- (3). 命题逻辑可以用布尔代数 $<\{F,T\},\wedge,\vee,\sim>$ 来描述，开关代数可以用布尔代数<{断开，闭合}，并联，串联，反向>来描述。