第四章 二元关系

4.1 二元关系及其表示法

4.1.1 序偶与笛卡尔积

- **定义4.1：** 由两个元素x和y按一定的次序组成的二元组称为有序对或序偶(Ordered)，记作<x，y>，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。
- **性质4.1：**（1）：<x，y>= <y，x>当且仅当x=y；

(2)：<x，y>=<u，v>当且仅当x=u，y=v；

例如：平面上的坐标<x，y>，x，y$\in$R；<操作码，地址码>等都是序偶。

4.1 二元关系及其表示法

- 定义4.2：设A，B是两个集合，称集合 $A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$ 为集合A与B的笛卡尔积(Descartes Product)。

例：设A={1,2}；B={a, b}则A ×B={<1,a>，<1,b>，<2,a>，<2,b>}；B ×A={<a, 1>，<a, 2>，<b, 1>，<b, 2>}。

- 性质4.2：(1). | A ×B |=|A|×|B|(A, B为有限集合)；

  (2). $A\times\emptyset=\emptyset$，$\emptyset\times A=\emptyset$；

  (3). 不适合交换律，即A×B ≠B×A(除非A，B= $\emptyset$ 或A=B)；

  (4). 不适合结合律，(A×B)×C ≠A×(B×C)(除非 $A=\emptyset\vee B=\emptyset\vee C=\emptyset$)；

  (5). 对∪和∩运算满足分配律，

4.1 二元关系及其表示法

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A),$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A);$$

证明： $<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\vee<x,y>\in(A\times C)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

(6). $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$，**且当** $A=B=\emptyset$ **或** $A\neq\emptyset\wedge B\neq\emptyset$**时，逆命题成立。**

4.1 二元关系及其表示法

- **定义4. 3：** 一个有序n(n≥2)元组是一个有序对，它的第一个元素为有序的n-1元组 $< a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} >$，第二个元素为 a_n，记为 $< a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n >$
  即： $<< a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} >, a_n >=< a_1, a_2, \cdots, a_n >$

  $< a_1, a_2, \cdots, a_n >=< b_1, b_2, \cdots, b_n >$ ；
  当且仅当 $a_i = b_i, i = 1,2, \cdots, n$

n维空间中的点M的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为有序的n元组 $< x_1, x_2, \cdots, x_n >$ 。

- **定义4. 4：** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n个集合(n ≥2)，称集合 $\{< x_1, x_2, \cdots, x_n >| x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$ 为n维卡氏积或n阶笛卡尔积，记作 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ 时简记为 A^n 。

4.1 二元关系及其表示法

4.1.2 二元关系

- **定义4.5：**若集合F中的全体元素为有序的n(n≥2)元组，则称F为n元关系，特别地，当n=2时，称F为二元关系，简称关系。

对于二元关系F，若 $<x, y> \in F$ ，常记作 xFy，反之 $x \not{F} y$；规定 $\emptyset$ 为n元空关系，也是二元空关系，简称空关系。

- **定义4.6：**设A，B为两集合，A×B的集合子集R称为A到B的二元关系，特别地，当A=B时，称R为A上的二元关系。

例：A={a, b}，B={c}，则A×B的子集有 $\emptyset$ ，{<a, c>}，{<b, c>}，{<a, c>, <b, c>}，

4.1 二元关系及其表示法

A到B上的全部二元关系；而 $\emptyset$，{<c，c>} 为B上的二元关系。

- 一般来说，若|A|=m，|B|=n，A到B上的二元关系共有 2^{mn}个，A上的共有 2^{m^2} 个二元关系；
- 特殊的二元关系：

  (1). 空关系；

  (2). 全域关系：$E_A = \{<x, y>| x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$；

  (3). 恒等关系：$I_A = \{<x, x>| x \in A\}$ 。

4.1 二元关系及其表示法

- **定义4. 7：** 设R为二元关系，则

  (1). $domR = \{x \mid \exists y(xRy)\}$为R的定义域；

  (2). $ranR = \{y \mid \exists x(xRy)\}$ 为R的值域；

  (3). $fldR = domR \cup ranR$为R的域。

一般地，若R是A到B上的二元关系，则有

$domR \subseteq A, ranR \subseteq B$ 。

- **例4-1：** 设A={1, 2, 3, 4, 5, 6}，B={a, b, c, d}，则R={<2, a>, <2, b>, <3, b>, <4, c>, <6, c>}，那么domR={2, 3, 4, 6}，ranR={a, b, c}。

4.1 二元关系及其表示法

4.1.2 关系的表示

- 1. 集合表示法

  由于关系也是一种特殊的集合，所以可以用集合的两种基本的表示方法(枚举法，描述法)来表示关系；如：设A={2}，B={3}，则A到B上的有关系R={<2,3>}；集合N上的"小于等于"关系：R={<x，y>|(x，y)∈N∧(x ≤ y)}。

- 2. 关系图法

- 定义4.8：设集合A={$x_1, x_2, \cdots x_n$}到B={$y_1, y_2, \cdots y_n$}上的二元关系R，以集合A，B中的元素为顶点，在图中用"o"表示顶点，若 x_iRy_j 则可自顶点 x_i 向顶点 y_j 引有向边 (x_i, y_j)，其箭头指向 y_j，用这种方法画出的图称为关系图(Graph of Relation)。

4.1 二元关系及其表示法

- 例4-2：求集合A={1, 2, 3, 4}的恒等关系，空关系，全关系和小于关系的关系图。
- 3. 关系矩阵
- 定义4.9：设 $R \subseteq A \times B, A=\{a_1, a_2, \cdots a_m\}, B=\{b_1, b_2, \cdots b_n\}$，那么R的关系矩阵 M_R 为一m×n矩阵，它的第i，j分量 r_{ij} 只取0或1，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1\text{当且仅当}a_iRb_j\\0\text{当且仅当}a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

4.2 关系的运算

- 1. 关系的交，并，补，差运算
- 定义4. 10：设R和S为A到B的二元关系，其并，交，补，差运算定义如下：

$$R \cup S = \{<x, y> | xRy \vee xSy\}$$

$$R \cap S = \{<x, y> | xRy \wedge xSy\}$$

$$R - S = \{<x, y> | xRy \wedge \neg xSy\}$$

$$\overline{R} = \{<x, y> | \neg xRy\}$$

- 例4-3：设A={1, 2, 3, 4}，若R={<x, y>|(x-y)/2是整数，x, y∈A}，S={<x, y>|(x-y)/3是正整数，x∈y A}，求R∪S，R∩S，S-R，~R，⊕R S。

解：R={<1, 1>，<1, 3>，<2, 2>，<2, 4>，<3, 1>，<3, 3>，<4, 2>，<4, 4>}，

4.2 关系的运算

$S=\{\langle 4,1\rangle\}$，

$\therefore\ R\cup S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$；

$R\cap S=\emptyset$； $S-R= S=\{\langle 4,1\rangle\}$；

$\sim R= A\times A-R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,3\rangle\}$；

$R\oplus S=(R\cup S)-(R\cap S)= R\cup S$.

- 关系的补运算是对全关系而言的；
- 关系的并，交，差，补的矩阵可用如下方法求取：

$$M_{R\cup S}=M_R\vee M_S, M_{R\cap S}=M_R\wedge M_S,$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap\bar{S}}=M_R\wedge M_{\bar{S}}, M_{\bar{S}}=\overline{M}_S$$

4.2 关系的运算

- 2. 关系的逆运算

由于关系是序偶的集合，除了集合的一般运算外，还有一些特有的运算。

- 定义4. 11：设R是A到B的关系，R的逆关系或逆是B到A的关系，记为R^{-1}，定义为：$R^{-1}=\{<y,x>| xRy\}$

➢ 显然对任意$x\in A, y\in B$，有 $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$；

➢ M_R 为R的关系矩阵，则 $M_{R^{-1}}=M'_R$.

例：$I_A^{-1}=I_A, \emptyset^{-1}=\emptyset$；

A={a, b, c, d}，B={1, 2, 3}，R={<a, 1>，<c, 2>，<b, 2>，<d, 3>}，R^{-1}={<1, a>，<2, c>，<2, b>，<3, d>}。

4.2 关系的运算

- **定理4. 1：设R和S都是A到B上的二元关系，那么**

$(1).(R^{-1})^{-1}=R;$

$(2).(\overline{R})^{-1}=\overline{R^{-1}};$

$(3).(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1},(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1},(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1};$

$(4).(R\subseteq S)\Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1};$

$(5).domR^{-1}=ranR,ranR^{-1}=domR;$

$(6).\emptyset^{-1}=\emptyset,(A\times B)^{-1}=B\times A.$

4.2 关系的运算

- 3. 关系的复合运算
- 定义4. 12：设R，S为二元关系，则R与S的复合关系$R\circ S$定义为：$R\circ S=\{<x,y>|\exists t(xRt\wedge tSy)\}$，其中“∘”为复合运算，$R\circ R$也记为$R^2$。

例：设R表示父子关系，则 R^2 表示祖孙关系。

- 例4-4：设集合A={0, 1, 2, 3, 4}，R，S均为A上的二元关系，且R={<x， y>|x+y=4}={<0, 4>，<4, 0>，<1, 3>，<3, 1>，<2, 2>}，S= ={<x， y>|y-x=1}={<0, 1>，<1, 2>，<2, 3>，<3, 4>}；求

$$R\circ S,S\circ R,R\circ R,S\circ S,(\mathrm{R}\circ \mathrm{S})\circ \mathrm{R},\mathrm{R}\circ (\mathrm{S}\circ \mathrm{R})$$

- 一般地，$R\circ S\neq S\circ R$

4.2 关系的运算

- 定理4. 2：设F，G，H为任意二元关系，则

$$(1).(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H), (2).(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$

- 定理4. 3：设R为A上的关系，则

$$(1).R \circ I_A = I_A \circ R, (2).\emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$$

- 定理4. 4：设F，G，H为任意二元关系，则

$$(1).F \circ (G \bigcup H) = F \circ G \bigcup F \circ H,$$

$$(2).(G \bigcup H) \circ F = G \circ F \bigcup H \circ F,$$

$$(3).F \circ (G \bigcap H) = F \circ G \bigcap F \circ H,$$

$$(4).(G \bigcap H) \circ F = G \circ F \bigcap H \circ F.$$

4.2 关系的运算

- 4. 关系的幂运算
- 定义4. 13：设R是集合A上的二元关系，则R的n次幂 R^n 定义为：$(1).R^0 = I_A = \{<x,x>| x \in A\}, (2).R^{n+1} = R^n \circ R$
- 例4-5：设A={0, 1, 2, 3, 4}，R={<0, 0>，<0, 1>，<1, 3>，<2, 4>，<3, 1>，<4, 4>}。

则 R^2={<0, 0>，<0, 1>，<0, 3>，<1, 1>，<2, 4>，<3, 3>，<4, 4>}；

R^3={<0, 0>，<0, 1>，<0, 3>，<1, 3>，<2, 4>，<3, 1>，<4, 4>}；

R^4={<0, 0>，<0, 1>，<0, 3>，<1, 1>，<2, 4>，<3, 3>，<4, 4>}= R^2

4.2 关系的运算

- 定理4. 5：设R为A上的二元关系，m，n为自然数，则 $(1).R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n=R^m\circ R^{n-m+1}$

$(2).R^m\circ R^n=R^{m+n},(3).(R^m)^n=R^{mn},(4).(R^{-1})^n=(R^n)^{-1}.$

证(4)：若n=0时，则有 $(R^{-1})^0=I_A,(R^n)^{-1}=(I_A)^{-1}=I_A$

假设n=k时，有 $(R^{-1})^k=(R^k)^{-1}$ ，则n=k+1时，有

$$(R^{-1})^{k+1}=(R^{-1})^k\circ(R^{-1})=(R^k)^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ R^k)^{-1}=(R^{k+1})^{-1}$$

∴命题成立。

- 定理4. 6：设集合A的基数为n，R是A上的二元关系，那么存在自然数i，j使得 $R^i=R^j(0\le i<j\le 2^{n^2})$

证明：我们知道，当|A|=n时，A上的二元关系共计 2^{n^2} 个，令k= 2^{n^2} ，因此在 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{k+1}$ 这k+1个关

4.2 关系的运算

系中，至少有两个是相同的(鸽巢原理)，即有 $i, j(0 \leq i < j \leq 2^{n^2})$,使$R^i = R^j$.

- **定理4.7：** 设A是有限集合，且|A|=n，R是A上的二元关系，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

证明：显然 $\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，下面证：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i$，为此，只要证明对任意的k>n，有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ 即可。对任意的$< a,b >\in R^k$，则由“∘”的定义知：存在 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1} \in A$，使得：

$$< a_0, a_1 >\in R, < a_1, a_2 >\in R, \cdots, < a_{k-1}, a_k >\in R(令 a_0 = a, a_k = b)$$

4.2 关系的运算

由于|A|=n，所以由鸽巢原理；k+1个元素 $a_0,\cdots,a_k$ 中至少有两个元素相同，不妨设为 $a_i=a_j(i<j)$，则可在 $<a_0,a_1>\in R,<a_1,a_2>\in R,\cdots,<a_{k-1},a_k>\in R$ 中删去 $<a_i,a_{i+1}>\in R,<a_{i+1},a_{i+2}>\in R,\cdots,<a_{j-1},a_j>\in R$ 后仍有

$<a_0,a_1>\in R,<a_1,a_2>\in R,\cdots,<a_{i-1},a_i>\in R,<a_j,a_{j+1}>\in R,<a_{k-1},a_k>\in R$

由关系的复合运算得：$<a,b>=<a_0,a_k>\in R^{k'}$，其中 $k'=k-(j-i)$，此时：若 $k'\le n$，则 $<a,b>\in\bigcup_{i=1}^{n}R^i$；若 $k'>n$，则重复上述做法，最终总能找到 $k''<n$，使得 $<a,b>=<a_0,a_k>\in R^{k''}$，即有 $<a,b>\in\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，由此有 $R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，由k的任意性 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，$\therefore\ \bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$

4.2 关系的运算

- 5：集合在关系下的像
- **定义4.14：**设R为二元关系，A是集合

(1)：R在A上的限制 $R\upharpoonright A$ 定义为：

$$R\upharpoonright A=\{<x,y>|\ xRy\wedge x\in A\}$$

(2)：A在R下的像R[A]定义为R[A]=ran($R\upharpoonright A$)。

例：R={<a, b>, <a, {a}>, <{a}, {a, {a}}>}, 则：

R↾ {a}={<a, b>, <a, {a}>};

R↾ {{a}}={<{a}, {a, {a}}>} ;

R↾ {a, {a}}=R; $R^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}=\{<\{a\},a>\}$

R[{a}]={b, {a}}; R[{a, {a}}]={b, {a}, {a, {a}}};

$$R^{-1}[\{a\}]=\emptyset;R^{-1}[\{\{a\}\}]=\{a\}$$

4.2 关系的运算

- 定理4.8：设F为关系，A，B为集合，则

$$(1).F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B,(2).F[(A\cup B)]=F[A]\cup F[B],$$

$$(3).F\upharpoonright(A\cap B)=F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B,(4).F[(A\cap B)]\subseteq F[A]\cap F[B],$$

- 例4-6：设 $R=\{<x,y>|\,x,y\in Z\wedge y=|x|\}$，A={0,1,2}，B={0,-1,-2}。(1)求R[A∩B]和R[A]∩R[B]；(2)求R[A]-R[B]和R[A-B]。

解(1)： R[A∩B]=R[{0}]={0}； R[A]∩R[B]={0,1,2}∩{0,1,2} ={0,1,2}；

(2)： R[A]-R[B] ={0,1,2}- {0,1,2}= $\emptyset$ ；

R[A-B]=R[{1,2}]={1,2}

4.3 关系的性质

我们在研究关系的性质时，可以假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假设不失一般性。因此任一A到B上的关系R，即 $R \subseteq A \times B$，而 $A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$，所以关系R总可以看成是A∪B 上的关系，它与原关系R具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对R的讨论无损于问题的本质

- 1. 关系的性质
- **定义4.15**：设R是A上的二元关系，即 $R \subseteq A \times A$，则

(1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow <x, x> \in R)$，则称R是自反的(Reflexive)；

(2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow <x, x> \notin R)$，则称R是反自反的(Irreflexive)；

4.3 关系的性质

(3) 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$，则称R是对称的(Symmetric)

(4) 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$，则称R是反对称的(Antisymmetric)

(5) 若 $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$，则称R是传递的(Transitive)

- 例4-7：设A={a，b，c，d}

(1)：R={<a，a>，<a，d>，<b，b>，<b，d>，<c，c>，<d，d>}是自反的；

S={<a，b>，<a，d>，<b，c>，<b，d>，<c，a>，<d，c>}是反自反的；

T={<a，a>,<a，b>,<a，c>,<b，d>,<c，a>,<c，c>,<d，c>}既不是自反的也不是反自反的；

4.3 关系的性质

- **在关系图上：关系R是自反的，当且仅当其关系图中的每个节点都有环，关系R是反自反的，当且仅当其关系图中的每个节点上都无环；**
- **在关系矩阵上：关系R是自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为1，关系R是反自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为0。**
- **例4-8：设A={a，b，c}**

(1)$R_1=\{<a,a>,<a,c>,<c,a>\}$是对称的；

(2)$R_2=\{<a,a>,<a,c>\}$是反对称的；

(3)$R_3=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<c,a>\}$既不是对称的，也不是反对称的；

(4)$R_4=\{<a,a>,<c,c>\}$既是对称的，也是反对称的。

4.3 关系的性质

- 关系图上：关系R是对称的当且仅当其关系图中，任何一对节点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；关系R是反对称的当且仅当其关系图中，任何一对节点之间，至多有一条边；
- 关系矩阵上：关系R是对称的当且仅当其关系矩阵是对称矩阵；关系R是反对称的当且仅当其关系矩阵为反对称矩阵。
- **例4-9**：设A={a，b，c，d}

$(1) R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$是传递的；

$(2) R_2=\{<a,b>\}$是传递的；

$(3) R_3=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>\}$不是传递的；

$(4) R_4=\{<a,b>,<b,c>,<a,c>,<c,d>\}$不是传递的。

4.3 关系的性质

- 关系图上：关系R是传递的当且仅当其关系图中，任何三个节点x，y，z(可相同)之间，若从x到y，y到z均有一条边，则从x到z一定有一条边存在；
- 关系矩阵上：关系R是传递当且仅当其关系矩阵中，对任意$i,j,k\in[1,n]$，若$r_{ij}=1$，$r_{jk}=1$，则必有$r_{ik}=1$。
- 2. 利用集合运算来判断关系的性质
- 定理4. 9：设R是集合A上的二元关系，则

(1)R是自反的$\Leftrightarrow I_A\subseteq R$;

(2)R是反自反的$\Leftrightarrow R\cap I_A=\emptyset$;

(3)R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$;

(4)R是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$;

(5)R传递的$\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$.

4.3 关系的性质

- 3. 关系性质的保守性
- 定理4. 10：设R，S是A上的二元关系，则

$(1) R,S$自反$\Rightarrow R^{-1}, R\cup S, R\cap S, R\circ S$自反；

$(2) R,S$反自反$\Rightarrow R^{-1}, R\cup S, R\cap S, R-S$反自反；

$(3) R,S$对称$\Rightarrow R^{-1}, R\cup S, R\cap S, R-S$对称；

$(4) R,S$反对称$\Rightarrow R^{-1}, R\cap S, R-S$反对称；

$(5) R,S$传递$\Rightarrow R^{-1}, R\cap S$传递。

- 例4-10：设R={<a，b>，<b，c>，<a，c>}，S={<b，a>，<c，b>，<c，a>}是定义在A={a，b，c}上的两个二元关系。

4.3 关系的性质

显然R，S是反自反的，反对称的，传递的，则

(1).$R^{-1}=S, \therefore R^{-1}, S^{-1}$ 也是反自反的，反对称的，传递的；

(2)$R \cap S=\emptyset$也具备上述的一切性质；

(3)R∪S={<a，b>,<b，c>,<a，c>，<b，a>,<c，b>,<c，a>}仅是对称的和反自反的；

(4)$R \circ S=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>\}$则是传递的和对称的。

4.4 关系的闭包

关系的限制与扩充：对于任何一个具备某种性质(如自反、对称、传递)的关系来说，在理论研究与应用上都十分重要，但遗憾的是，许多我们要研究的关系并不具有我们所希望的良好性质。因此，我们往往要在给定的关系中删去一些或添加一些元素，以改变原有关系的性质，即所谓的关系的限制与扩充。

关系的闭包则是关系的扩充。

- **定义4. 16：** 设R是定义在A上的二元关系，若存在 R' 满足：(1) R' 是自反的(对称的或传递的)；(2). $R \subseteq R'$；(3) 对R的任何扩充 R'' 是自反的(对称的或传递的)，则 $R' \subseteq R''$。一般将R的自反、对称、传递闭包记作r(R)，s(R)，t(R)。

4.4 关系的闭包

例：定义在N上的“<”关系的自反闭包r(R)为“≤”，对称闭包s(R)为“≠”，传递闭包t(R)为“<”；

定义在N上的“=”关系的自反闭包r(R)为“=”，对称闭包s(R)为“=”，传递闭包t(R)为“=”。

- **例4-11：**设集合A={a, b, c}，R={<a, b>，<b, b>，<b, c>}是定义在A上的二元关系，求r(R)，s(R)，t(R)并画出R，r(R)，s(R)，t(R)的关系图，关系矩阵。

解： r(R)={<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, a>, <c, c>}；

s(R)={<a, b>, <b, b>, <b, c>, <b, a>, <c, b>}；

t(R)={<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, c>}；

4.4 关系的闭包

- 利用关系图，关系矩阵求闭包的方法：

(1). 求一个关系的自反闭包，即将图中所有的无环节点加上环，矩阵中的对角线上的值全定义为1；

(2). 求一个关系的对称闭包，则在图中，任何一对节点之间，若仅存在一条边，则加一条反方向的边；矩阵中则为：若 $r_{ij}=1(i\neq j)$，则令 $r_{ji}=1(若r_{ji}\neq 1)$，即 $M_{s(R)}=M_R\vee M_{R^{-1}}$ ；

(3). 求一个关系的传递闭包，则在图中，对任意节点a，b，c，若a到b有一条边，同时b到c也有一条边，则从a到c必增加一条边(当a到c无边时)，在矩阵中，若 $r_{ij}=1,r_{jk}=1则令r_{ik}=1(若r_{ik}\neq 1)$ 。

4.4 关系的闭包

- **定理4. 11：设R是A上的二元关系，则**

$(1): r(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A, (2): s(R) = R \cup R^{-1},$

$(3): t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 若 $|A| = n$ 则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

- **定理4. 12：设R是集合A上的关系，则**

$(1): R$ 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R,$

$(2): R$ 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R,$

$(3): R$ 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R.$

- **定理4. 14：设R是集合A上的关系，则**

$(1): R$ 自反 $\Rightarrow s(R), t(R)$ 自反,

$(2): R$ 对称 $\Rightarrow r(R), t(R)$ 对称,

$(3): R$ 传递 $\Rightarrow r(R)$ 传递.

4.4 关系的闭包

- **定义4. 17：** (1)集合A上的关系R的自反对称闭包定义为rs(R)=r(s(R))；(2)集合A上的关系R的自反传递闭包定义为rt(R)=r(t(R))；(3)集合A上的关系R的对称传递闭包定义为st(R)=s(t(R));类似的，可有sr(R)，tr(R)，ts(R)。
- **定理4. 15：** 设R是集合A上的关系，则

$$(1).rs(R)=sr(R),(2).rt(R)=tr(R),(3).st(R)\subseteq ts(R)$$

4.5 等价关系与划分

- **4.5.1：集合和划分**
- **定义4.18：设A是一个非空集合，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是A的任意n个非空子集，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：**

$$(1).A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \cdots, n; (2).\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

则称集合 $\Pi(A) = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为集合A的一个划分(Partition)，而 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 叫做这个划分的块或类。

例如：（1）$\{A, \overline{A}\}$ 构成集合U的一个划分；

(2) $\{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2, \overline{A}_1 \cap A_2, A_1 \cap \overline{A}_2, A_1 \cap A_2\}$构成了U上的一个划分。

4.5 等价关系与划分

- 4.5.2：等价关系
- 定义4.19：设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的，对称的，传递的，则称R为A上的等价关系(Equivalent Relation)。若$<x,y>\in R$，称x等价于y,记作x~y。

例：(1)一群人，同姓，同年龄，同性别都是等价关系，朋友，同学关系不是等价关系：不传递；

(2) $I_A, A\times A$ 都是A上的等价关系；

(3)三角形“相似”，“全等”都是等价关系；

(4)幂集上定义的 $\subseteq$关系，整数集上定义的≤不是等价关系，不对称。

4.5 等价关系与划分

- **例4-12：设m为正整数，整数集合上的关系**

  $R=\{<x,y>|\ x,y\in Z\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\,m)\}$

  证明关系R是等价关系。

  证：（1）对任意$x\in Z$**，有** $x\equiv x(\mathrm{mod}\,m)\ \therefore <x,x>\in R$
  R自反；

(2) 对任意$x,y\in Z$**，若**$<x,y>\in R$,即$x\equiv y(\mathrm{mod}\ m)$**，则**

$y\equiv x\,\mathrm{mod}\,m\ \therefore <y,x>\in R$**，即R对称；**

(3) 对任意$x,y,z\in Z$**，若**$<x,y>\in R,<y,z>\in R$**，即**

$x\equiv y(\mathrm{mod}\,m),y\equiv z(\mathrm{mod}\,m),m\,|\,x-y,m\,|\,y-z$**，而**

$x-z=(x-y)+(y-z),\therefore m\,|\,x-z\ \therefore <x,z>\in R$**，R传递**

∴R是Z上的等价关系。

4.5 等价关系与划分

考察关系R和集合Z；R将Z分成了如下m个子集：

$$\{\cdots,-3m,-2m,-m,0,m,2m,3m,\cdots\}$$

$$\{\cdots,-3m+1,-2m+1,-m+1,1,m+1,2m+1,3m+1,\cdots\}$$

$$\{\cdots,-3m+2,-2m+2,-m+2,2,m+2,2m+2,3m+2,\cdots\}$$

$$\vdots$$

$$\{\cdots,-2m-1,-m-1,-1,m-1,2m-1,3m-1,4m-1\cdots\}$$

这m个子集特点是：同一个子集中的元素之间都有关系R，不同子集的元素之间无关系R，每两个子集无公共元素，而所有子集的并正好为Z，构成了Z的一个划分。

4.5 等价关系与划分

- 4.5.3：等价类与商集
- 定义4.20：设R是非空集合A上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$ 为x关于R的等价类(Equivalence Class)，其中x称为 $[x]_R$ 的生成元，由于 $[x]_R$ 中的任何两个元素a，b均相互等价，一般记作a~b。
- 例4-13：设A={1,2,3,4,5,8}，考虑R是A上的以3为模的同余关系，求其等价类。

解：从例4-12知，R是一个等价关系，则 $[1]_R = \{1,4\} = [4]_R$

$$[2]_R = \{2,5,8\} = [5]_R = [8]_R, [3]_R = \{3\}$$

4.5 等价关系与划分

- **定理4. 11：设R为非空集合A上的等价关系，则**

$(1).\forall x \in A, [x]_R \neq \emptyset;$

$(2).\forall x, y \in A, xRy,$ 则$[x]_R = [y]_R;$

$(3).\forall x, y \in A, x\not{R}y,$ 则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset;$

$(4).\bigcup_{x \in A}[x]_R = A.$

证：（1）$\forall x \in A$**，R是等价关系，则R自反，因此**$<x, x> \in R$

即 $x \in [x]_R \therefore [x]_R \neq \emptyset$

（2） $\forall z, z \in [x] \Rightarrow <x, z> \in R \Rightarrow <z, x> \in R$

$<z, x> \in R \wedge <x, y> \in R \Rightarrow <z, y> \in R \Rightarrow <y, z> \in R$

$\therefore z \in [x]_R \Rightarrow z \in [y]_R \therefore [x]_R \subseteq [y]_R$

4.5 等价关系与划分

同理： $[y]_R \subseteq [x]_R \therefore [x]_R = [y]_R$

(3) 若 $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ **，则存在** $z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R$**，即：**

$< x, z > \in R \wedge < y, z > \in R \Rightarrow < x, y > \in R$ 与 $x\not{R}y$ 矛盾

$$(4) \forall x, x \in A, [x]_R \subseteq A \therefore \bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$$

$$\forall x, x \in A, < x, x > \in R \therefore x \in [x]_R \therefore x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$$

$$\text{即} \forall x, x \in A \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R \therefore A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$$

$$\therefore \bigcup_{x \in A} [x]_R = A$$

- **定义4.21：设R是集合A上的等价关系，由R确定的一切等价类的集合，称为集合A上关于R的商集(Quotient Set)，记为A/R，即** $A / R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

4.5 等价关系与划分

- **定理4.12：** 设R是非空集合A上的等价关系，则A上的关于R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R导出的等价划分。

证：由定理4.11知，命题成立。

- **定理4.13：** 设Π(A)是非空集合A的一个划分，则A上的关系 $R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x,y\text{同属于}\Pi(A)\text{的一个划分块}\}$ 是A上的等价关系，称之为由Π(A)所导出的等价关系。

证明：(1) $\forall x\in A,\Pi(A)$ 为A的一个划分，$\therefore\exists A_i\in\Pi(A)$ 使得 $x\in A_i$，即x和x同属于Π(A)的一个划分块，
∴R是自反的；

4.5 等价关系与划分

(2) $\forall x, y \in A$, 若 $<x, y> \in R$，则x和y同属于Π(A)的一个划分块，即y和x同属于一个划分块，$\therefore <y, x> \in R$，R是对称的；

(3) $\forall x, y, z \in A$, 若 $<x, y> \in R, <y, z> \in R$，则x，y同属于Π(A)的一个划分块 A_i，y，z同属于Π(A)的一个划分块 A_j $\therefore y \in A_i \cap A_j$，而由于不同划分块的交集为空，$A_i = A_j$，即x和z属于同一划分块，∴R是传递的；

∴R为等价关系。

- 若设 $\Pi(A) = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，则

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i^2$$

4.5 等价关系与划分

- 有定理4.12, 4.13知，集合A上的等价关系与集合A的划分是一一对应的，因此可以说：划分与等价关系这两个不同的概念本质上是相同的，即是同一个概念的两种不同的表达方式。

- **例4-14：** 设A={1, 2, 3}，求A上的所有等价关系。

解：先求A的划分：只有一个划分块的划分为 Π_1 {1, 2, 3}；具有2个划分块的划分为 Π_2 {{1}，{2, 3}}，Π_3 {{2}，{1, 3}}，Π_4 {{3}，{1, 2}}，具有3个划分块的划分为 Π_5 {{1}，{2}，{3}}；

相应的等价关系为：$R_1 = A \times A, R_2 = \{<2,3>,<3,2>\} \cup I_A$

$R_3 = \{<1,3>,<3,1>\} \cup I_A, R_4 = \{<1,2>,<2,1>\} \cup I_A, R_5 = I_A$

4.5 等价关系与划分

- **例4-15：设R是集合A上的一个关系，对任意a，b，c∈A，若** $<a,b>\in R$且$<a,c>\in R$，则有$<b,c>\in R$ **那么称R为A上的循环关系。试证明R是A上的一个等价关系的充要条件是R是循环关系和自反关系。**

证明：必要性：若R是等价关系；(1) R等价=>R自反

(2)$\forall a,b,c\in A$,若$<a,b>\in R$ $<a,c>\in R$ **，R等价∴R对称**

∴ $<b,a>\in R$ $<a,c>\in R$,而R传递, $\therefore <b,c>\in R$ **，即R是循环关系；**

充分性：若R自反且循环：(1) 自反性显然；

(2) $\forall a,b\in A$**，R是自反，得**$<a,a>\in R$**，因R是循环的** 若$<a,b>\in R$则$<b,a>\in R$ **，即R是对称的；**

4.5 等价关系与划分

(3) $\forall a,b,c\in A$，若 $<a,b>\in R, <b,c>\in R$，则由R对称得 $<b,a>\in R$，由R循环，$<b,a>\in R$ $<b,c>\in R$

$\therefore <a,c>\in R$，∴R是传递的；

∴R等价。

4.6 次序关系

在一些研究中，需要把研究的对象排出次序，因此，集合的元素之间还有一种重要关系，称为“先后次序”关系，即偏序关系。

- 定义4.21：(1)设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的，反对称的，传递的，则称R为A上的偏序关系(Partial Order relation)。记作“≤”，读作“小于等于”； (2)设R为非空集合A上的关系，如果R是反自反的，反对称的，传递的，则称R为A上的拟序关系(Quasi Order relation)。记作“<”；读作“小于”。
- 偏序关系的逆关系$\leq^{-1}$也是一个偏序，用“≥”表示，读作“大于等于”；拟序关系的逆关系$\prec^{-1}$也是一个拟序，用“>”表示，读作“大于”。

4.6 次序关系

例：(1)集合A上的幂集ρ(A)上定义的“$\subseteq$”和“$\subset$”分别是偏序关系和拟序关系；

(2)实数集合R上定义的数的“小于等于”关系，“小于”关系，分别是偏序关系和拟序关系；

(3)自然数集合N上定义的“整除”关系，也是一个偏序集合。

- 定义4.22：设<A, ≤>是一个偏序集，对 $\forall x, y \in A$，x ≤y或y ≤x，则称x与y是可比的(Comparable)，若x与y是可比的，x<y，且不存在 $z \in A$，使得x<z<y，则称y覆盖(Overlay)x。

4.6 次序关系

例：(1)集合A={a，b，c}，则偏序集<ρ(A)，$\subseteq$>中，{a}与{a，b}是可比的； {a}与{b，c}是不可比的； {a，b}覆盖{a}； {a，b，c}不覆盖{a}。

(2)偏序集{R，≤}，对 $\forall x, y \in A$，x与y都是可比的，但x不覆盖y，y也不覆盖x。

(3)偏序集{Z，≤}，对 $\forall x, y \in A$，x与y都是可比的，x覆盖x-1。

(4)偏序集<N，|>中，2与3不是可比的，2与6是可比的，并且6覆盖2,2与8可比，但8不覆盖2。

4.6 次序关系

- 4. 6. 2：偏序集的哈斯图

由于偏序关系本身具有自反，反对称，传递的性质，在用关系图来描述偏序关系且不引起混淆，可以对其进行简化，得到的图叫做偏序图或哈斯图(Hasse)。

哈斯图的作图方法如下：

(1)：用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中的所有环(因自反性)；

(2)：对 $\forall x, y \in A$，若x<y则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；

(3)：对$\forall x, y \in A$，若y覆盖x，则在x与y之间连条线，否则无线相连。

4.6 次序关系

按(1)，(2)，(3)所作成的图称为哈斯图。

- **例4-16：** 设A={2, 3, 6, 12, 24, 36}，“≤”是A上的整除关系，画出其一般关系图和哈斯图。
- **例4-17：** 设集合A={a}，B={a，b}，C={a，b，c}分别画出集合A，B，C之幂集上定义的“⊆”的哈斯图。

4.6 次序关系

- 4. 6. 3：偏序集中的特殊元素
- **定义4. 23**：设<A, ≼>为偏序集，$B \subseteq A, y \in B$

(1)若$\forall x(x \in B \to y \le x)$成立，则称$y$为$B$的最小元；

(2)若$\forall x(x \in B \to x \le y)$成立，则称$y$为$B$的最大元；

(3)若$\forall x(x \in B \wedge x \le y \to y = x)$成立，则称$y$为$B$的极小元；

(4)若$\forall x(x \in B \wedge y \le x \to y = x)$成立，则称$y$为$B$的极大元。

- 最小元与极小元不一样，最小元是B中最小的元素，它与B中其它元素都是可比的，而极小元不一定与B中的元素都可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元；
- 对于有穷集，极小元一定存在，但最小元不一定存在；

4.6 次序关系

- 如果最小元存在，最小元唯一，但极小元可以有多个；
- b是B的最小元<=>b是B中的唯一极小元；
- 反之，极大元亦然。

- **定义4. 24：** 设<A, ≼>为偏序集，$B \subseteq A, y \in A$

(1)若$\forall x(x \in B \to x \le y)$成立，则称$y$为$B$的上界；

(2)若$\forall x(x \in B \to y \le x)$成立，则称$y$为$B$的下界；

(3)令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$，则称C的最小元为B的最小上界或上确界；

(4)令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$，则称D的最大元为B的最大下界或下确界。

4.6 次序关系

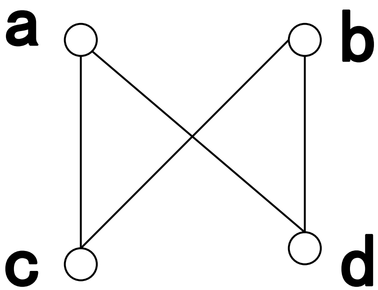
- **例4-18：设集合A={a，b，c}，求偏序集** $<\rho(A),\subseteq>$ **的子集的子集** $B_1=\{\{a,b\},\{b,c\},\{b\},\{c\},\emptyset\}, B_2=\{\{a\},\{c\},\{a,c\}\},$ $B_3=\rho(A)$ **的最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，上确界，下确界。**

解：画图

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	无	$\emptyset$	{a,b}，{b，c}	$\emptyset$	{a，b，c}	$\emptyset$	{a，b，c}	$\emptyset$
B_2	{a，c}	无	{a，c}	{a}，{c}	{a,c}，{a，b，c}	$\emptyset$	{a，c}	$\emptyset$
B_3	{a，b，c}	$\emptyset$	{a，b，c}	$\emptyset$	{a，b，c}	$\emptyset$	{a，b，c}	$\emptyset$

4.6 次序关系

- **例4-19：**设A={a，b，c，d}，A上定义偏序集<A，≤>的哈斯图如图所示，求B={a，b}和C={c，d}的最大元，最小元，极大元，极小元，上下 界，上下确界。



解：

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B	无	无	a，b	a，b	无	c，d	无	无
C	无	无	c，d	c，d	a，b	无	无	无

4.6 次序关系

- 上(下)界存在，并不一定存在最小上(下)界；
- b是B的最大元=>b是B的极大元，上界，上确界；
- b是B的最小元=>b是B的极小元，下界，下确界；
- a是B的上确界∧ $a \in B$ =>a是B的最大元；
- a是B的下确界∧ $a \in B$ =>a是B的最小元；
- 若B存在上确界，则其上确界唯一；
- 若B存在下确界，则其下确界唯一。

4.6 次序关系

- 4.6.4：全序与良序
- 定义4.25：设<A，≤>是一个偏序集，若对$\forall x, y \in A$ x与y都是可比的，则称关系“≤”为全序关系(Total Order Relation)，或称线序关系，简称全序或线序，称<A，≤>为全序集或线序集或链。

例：(1)集合A={a，b，c}，上定义的关系≤={<a，a>，<b，b>，<c，c>，<a，b>，<b，c>，<a，c>}是一个全序关系；

(2)实数集合R上定义的“≤”是全序关系，<R，≤>是全序集。

➢ 全序集中，任何两个元素可比，存在一个次序，其哈斯图为一链。

4.6 次序关系

- 定义4.26：设<A，≤>是一个偏序集，若A的任何一个非空子集有最小元，则称“≤”为良序关系(Well Order Relation)，简称良序，此时<A，≤>称为良序集。

  $\forall a,b \in A$ {a，b}有最小元，则a ≤b或b ≤a，

  ∴良序关系是一个全序关系。

- “≤”是良序关系=>“≤”是全序关系=>“≤”是偏序关系；
- 一般地，任何有限的全序集的每一个非空子集一定有最小元，所以，有限全序集一定是良序集，对与无穷的全序集则不一定。